



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد- الطارف  
Université Chadli Bendjedid – El Tarf  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
قسم الرياضيات

Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Spécialité:** Analyse Fonctionnelle et Calcul Stochastique

### Thème:

*Étude de problèmes fractionnaires avec  
des conditions intégrales.*

Présenté par:

**Ferraz Farah Ibtihel**

Devant le Jury :

**Pr. Mehri Allaoua**

**Prof**

Univ Chadli Bendjedid El Tarf

Président

**Dr. Youbi Zahra**

**MCB**

Univ Chadli Bendjedid El Tarf

Rapporteur

**Dr. Chidouh Amar**

**MCA**

Univ Chadli Bendjedid El Tarf

Examineur

**Année Universitaire 2025-2026**

## REMERCIEMENTS

Au nom d'Allah le tout Clément, le très Miséricordieux,

Ce travail, ainsi accompli, n'aurait point pu arriver à terme, sans l'aide et le soutien et tout le guidage d'Allah, louange au tout miséricordieux; le seigneur de l'univers.

Ce modeste travail qui arrive à sa fin n'aurait pu se faire sans l'aide de mes enseignants. C'est pour cette raison que je tiens à remercier très sincèrement **Dr. Youbi Zahra**, mon encadrant de mémoire, pour avoir accepté de me diriger dans ce travail délicat, subtil et contraignant, je la remercie aussi pour toute sa rigueur, ses remarques, ses conseils précieux, ses encouragements car c'est grâce à tout cela que j'ai pu braver les difficultés rencontrées au cours de la rédaction de ce mémoire; sans elle, je ne pouvais pas réaliser ce travail. Et pour cela, j'aimerais qu'elle trouve ici toute ma gratitude.

J'adresse mes sincères remerciements à **Pr. Mehri Allaoua** qui a accepté de présider le Jury. Je remercie également **Dr. Chidouh Amar** d'avoir accepté d'arbitrer cet humble travail.

J'adresse également mes sincères remerciements à tous les enseignants du département de Mathématiques de l'université El Chadli Benjedid - El Tarf.

## **Dédicaces**

Je dédie ce travail, fruit de mes efforts, à mon âme, pleine d'espoir et d'ambition.

À ceux qui m'ont appris que la connaissance est une lumière et qu'elle fleurira peu importe le temps que cela prendra. À ceux qui m'ont appris que les rêves ne naissent pas grands, mais grandissent plutôt avec la patience, la prière et les sacrifices. À ceux qui ont été les piliers de mon parcours.

### **À ma très chère mère, mon idole,**

Ma plus grande source d'inspiration, quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide, ta force et ta détermination ont éclairé mon chemin m'ont appris à ne jamais abandonner, faisant de ce projet le fruit de ton amour.

### **À mon très chère père,**

Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager. Que ce travail traduise ma gratitude et mon affection.

### **À mon frère Abdeldjalil et ma sœur Faten,**

Pour votre soutien indéfectible et vos encouragements qui m'ont toujours donné la force d'avancer.

### **À mes chers grands parents,**

Que Dieu vous bénisse et vous garde en bonne santé, à vous qui avez rempli mon cœur de tant d'amour.

### **À ma famille,**

À toute ma famille maternelle, mes deux oncles surtout mon oncle Riad Bouzid, mon guide, qui m'a montré le chemin quand j'étais perdu. Merci pour ton soutien.

À ma famille paternelle, mes tantes, mes oncles.

À tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin, ainsi qu'à ceux que j'ai omis de citer. À tous ceux que j'aime.

**Notre gloire n'est de jamais tomber, mais de se relever à chaque fois que nous tombons.**

## Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour une équation pseudo-hyperbolique fractionnaire définie dans un domaine inclus dans espace à  $N$  dimensions, de la forme:

$$Lu = {}^C_0\partial_t^{\alpha+1}u(t, X) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u(t, X)}{\partial x_k^2} = f(t, X),$$

pour  $Q^n = (0, T) \times (0, 1)^n$  et  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (0, 1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et  $L$  est un opérateur différentiel fractionnaire et  $f$  une fonction continue connue, soumises à des conditions aux limites.

La démonstration repose sur le choix judicieux de multiplicateurs intégraux, l'utilisation d'intégrations par parties ainsi qu'un procédé de récurrence. Grâce aux estimations a priori, nous pouvons prouver l'existence et l'unicité d'une solution forte du problème étudié.

**Mots-clés:** inégalité de  $\varepsilon$ -cauchy, calcul fractionnaire, intégrale fractionnaire, dérivée fractionnaire, espace fractionnaire, équation pseudo-hyperbolique, estimations a priori, opérateur intégral.

## Abstract

This thesis is devoted to the study of a boundary value problem for a fractional pseudo-hyperbolic equation defined in a domain included in an  $N$ -dimensional space, of the form:

$$Lu = {}^C_0\partial_t^{\alpha+1}u(t, X) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u(t, X)}{\partial x_k^2} = f(t, X),$$

for  $Q^n = (0, T) \times (0, 1)^n$  et  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (0, 1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , and  $L$  is a fractional differential operator and  $f$  is a known continuous function, subject to boundary conditions.

The proof relies on a judicious choice of integral multipliers operators, the use of integration by parts, and a recurrence procedure. Finally, using a priori estimations, we prove the existence and uniqueness of a strong solution to the studied problem.

**Keywords:**  $\varepsilon$ -cauchy inequality, fractional calculus, fractional integral, fractional derivative, fractional space, pseudo-hyperbolic equation, a priori estimates, integral operator.

## الملخص

هذه المذكرة مخصصة لدراسة مسألة حدية لمعادلة شبه زائدية كسرية معرفة في مجال محتوى في فضاء ذي بعد  $N$  على الشكل التالي:

$$Lu = {}^C_0\partial_t^{\alpha+1}u(t, X) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u(t, X)}{\partial x_k^2} = f(t, X), \quad (1)$$

نضع  $Q^n = (0, T) \times (0, 1)^n$  et  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (0, 1)^n$  حيث  $n$  عدد طبيعي و  $L$  مؤثر تفاضلي كسري و  $f$  دالة مستمرة معلومة، و تخضع لشروط حدية.

يعتمد البرهان على الإختيار الجيد للمضاعفات التكاملية، و إستخدام التكامل بالتجزئة، بالإضافة إلى عملية برهان بالتراجع. بفضل التقديرات المسبقة نستطيع البرهان على وجود حل قوي و فريد للمسألة المدروسة.

**الكلمات المفتاحية:** متباينة  $\varepsilon$ -كوشي، حساب كسري، تكامل كسري، مشتقة كسرية، فضاء كسري، معادلة شبه زائدية، تقديرات مسبقة، مؤثر تكاملي.

## Notations

- $\mathbb{N}$ : ensemble de nombres naturels.
- $\mathbb{R}$ : ensemble de nombres réels.
- $H$ : espace de Hilbert.
- $L$ : opérateur non borné.
- $D(L)$ : le domaine de définition de l'opérateur  $L$ .
- $R(L)$ : l'image de l'opérateur  $L$ .
- $N(L)$ : le noyau de l'opérateur  $L$ .
- $C(H)$ : l'espace des fonctions continues sur  $H$ .
- ${}^{RL}D_t^\alpha$ : la dérivée fractionnaire au sens Riemann–Liouville.
- ${}^CD_t^\alpha$ : la dérivée fractionnaire au sens Caputo.
- ${}^{CF}D_t^\alpha$ : la dérivée fractionnaire au sens Caputo–Fabrizio.
- ${}^{RL}I_t^\alpha$ : l'intégrale fractionnaire au sens Riemann–Liouville.
- ${}^{CF}I_t^\alpha$ : l'intégrale fractionnaire au sens Caputo–Fabrizio.
- $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$ : le produit scalaire sur  $H$ .
- $[\cdot]$ : la partie entière d'un nombre réel.
- $\partial U$ : la frontière de  $U$ .

# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                                  |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduction .....                                                                               | 9         |
| <b>1 Notations préliminaires de base .....</b>                                                   | <b>12</b> |
| 1.1 Espaces fonctionnelles .....                                                                 | 12        |
| 1.1.1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ .....                                                     | 12        |
| 1.1.2 Espace des fonctions continues .....                                                       | 16        |
| 1.1.3 Espace des fonctions absolument continues .....                                            | 16        |
| 1.2 Les espaces de Sobolev .....                                                                 | 17        |
| 1.2.1 L'espace $W^{1,p}(I)$ .....                                                                | 17        |
| 1.2.2 L'espace $H^1(\Omega)$ .....                                                               | 18        |
| 1.2.3 L'espace $H_0^1(\Omega)$ .....                                                             | 18        |
| 1.2.4 L'espace $H^m(\Omega)$ .....                                                               | 19        |
| 1.2.5 L'espace $W_0^{1,p}(I)$ et $W^{-1,p'}(I)$ .....                                            | 19        |
| 1.2.6 L'espace $W^{m,p}(I)$ .....                                                                | 19        |
| 1.3 Opérateurs linéaires .....                                                                   | 20        |
| 1.3.1 Norme d'un opérateur .....                                                                 | 21        |
| 1.3.2 Opérateurs fermés .....                                                                    | 21        |
| 1.3.3 La convergence dans l'espace des opérateurs linéaires .....                                | 21        |
| 1.4 Orthogonalité et densité dans les espaces de Hilbert .....                                   | 22        |
| 1.4.1 Espace de Hilbert .....                                                                    | 22        |
| 1.4.2 Orthogonalité .....                                                                        | 24        |
| 1.4.3 Inégalités de Bessel, Parseval, Plancherel, développement dans une base hilbertienne ..... | 25        |
| 1.4.4 Polynômes orthogonaux .....                                                                | 27        |
| 1.4.5 Convergence et compacité faible dans les espaces de Hilbert .....                          | 28        |
| 1.5 Etude d'un problème intégral pseudo-hyperbolique avec des conditions intégrales .....        | 28        |
| 1.6 Méthode des estimations a priori .....                                                       | 29        |
| 1.6.1 Exemple d'application sur la méthode des estimations a priori .....                        | 31        |
| 1.7 Fonctions spéciales .....                                                                    | 34        |
| 1.7.1 Fonction Gamma .....                                                                       | 34        |
| 1.7.2 Fonction Bêta .....                                                                        | 35        |
| 1.7.3 La fonction de Mittag-Leffler .....                                                        | 36        |



|          |                                                                                                                                      |    |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>2</b> | <b>Introduction au calcul fractionnaire</b>                                                                                          | 37 |
| 2.1      | Intégrale fractionnaire de Riemann–Liouville                                                                                         | 38 |
| 2.2      | Dérivée fractionnaire                                                                                                                | 42 |
| 2.2.1    | Riemann–Liouville                                                                                                                    | 42 |
| 2.2.2    | Caputo                                                                                                                               | 49 |
| 2.2.3    | Caputo–Fabrizio                                                                                                                      | 55 |
| 2.3      | Les espaces des fonctions avec des dérivées fractionnaires                                                                           | 59 |
| 2.3.1    | Espaces de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ pour $0 < s < 1$                                                                                | 59 |
| 2.3.2    | Espaces de Sobolev fractionnaires à poids                                                                                            | 60 |
| 2.3.3    | L'espace $L_p^2$                                                                                                                     | 60 |
| 2.3.4    | Inégalités nécessaires                                                                                                               | 61 |
| 2.3.5    | Intégrations par parties                                                                                                             | 62 |
| 2.4      | Equations intégrales fractionnaires                                                                                                  | 62 |
| 2.4.1    | Exemples des équations intégrales                                                                                                    | 63 |
| 2.4.2    | Exemples des équations intégrales fractionnaires                                                                                     | 64 |
| 2.4.3    | Quelques Théorèmes du point fixe                                                                                                     | 65 |
| 2.4.4    | Exemple d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions aux limites non-locales par la méthode d'estimation a priori | 66 |
| <b>3</b> | <b>Étude d'un problème différentiel fractionnaire linéaire dans N-dimension</b>                                                      | 75 |
| 3.1      | Formulation du problème                                                                                                              | 75 |
| 3.2      | Unicité de la solution                                                                                                               | 76 |
| 3.3      | Existence de la solution forte                                                                                                       | 86 |
|          | <b>Conclusion</b>                                                                                                                    | 93 |
|          | <b>Références</b>                                                                                                                    | 94 |

# INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire connaît à l'heure actuelle une grande popularité parmi les chercheurs en sciences et en ingénierie. Il a montré son énorme potentiel pour comprendre mieux la nature, et pour apprécier le monde merveilleux de l'analyse mathématique qui se trouve entre les dérivées et intégrales d'ordre entier.

[2] Quand on introduit la notion de calcul, on revient à la question de l'Hôpital, posée à Leibniz le 30 septembre 1695, concernant la signification  $\frac{d^n f}{dt^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$ .

La note de Leibniz a conduit à l'apparition de la théorie des dérivées et des intégrales d'ordre fractionnaire qui est devenue un sujet très attractif pour les mathématiciens. Cet attrait théorique n'a cependant cessé de croître, au point que ce domaine est aujourd'hui utilisé profondément dans les domaines de la viscoélasticité, la rhéologie, l'électrochimie et la physique.

Le calcul fractionnaire permet de dépasser les limitations des modèles classiques en viscoélasticité [41], où les dérivées entières ne rendent pas compte des effets de mémoire à long terme. En rhéologie [4], il offre une description unifiée des fluides complexes avec peu de paramètres. En électrochimie [18], il modélise naturellement la diffusion anormale et les interfaces irrégulières via les éléments à phase constante. Mais en physique, le calcul fractionnaire n'est pas une abstraction mathématique il sort naturellement des matériaux à mémoire et des milieux hétérogènes.

Le calcul fractionnaire a été construit sur des bases formelles par de nombreux mathématiciens célèbres, par exemple: Riemann, Liouville, Grünwald, Lagrange, Euler, Heavyside, Fourier, ... etc. Beaucoup d'entre eux ont proposé des approches différentes pour la dérivée fractionnaire, révélant progressivement une propriété ce qui a mis en lumière une singularité majeure: la non-inversibilité entre dérivée et intégrale fractionnaires, contrairement au cas classique, les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires ne sont pas automatiquement inversibles à droite et d'ailleurs c'était la cause pourquoi les calculs fractionnaires ont cessé de se développer de 1695 jusqu'au 1967 [20]. C'est un paradoxe pressenti par Leibniz dès 1695 [20] et élucidé par Riemann-Liouville vers 1832-1847 [39], découle du choix de la borne inférieure d'intégration. Ce problème a été radicalement résolu en 1967 par le géophysicien italien Michele Caputo [14]. Afin d'éviter le problème du reste mathématique qui survient lors de l'intégration puis de la dérivation (l'opération inverse à droite), Caputo a inversé l'ordre des opérations; il a proposé d'effectuer d'abord la dérivation classique, suivie de l'intégration fractionnaire. Cette simple modification a tout changé, ren-

dant l'opérateur fractionnaire compatible avec les conditions initiales physiques ordinaires [23], [39].

L'absence d'interprétation physique de la dérivation fractionnaire a été abordée lors de la première conférence internationale en 1974 à New Haven, ainsi que lors des conférences suivantes en 1984 en Angleterre et en 1989 à Tokyo. [19]

Récemment, un intérêt considérable s'est porté sur l'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire, dont on a découvert qu'elles régissent divers systèmes thermiques, électrochimiques et viscoélastiques [41], [6], [18]. Dans certaines équations, on applique les Théorèmes du point fixe de Banach, Schauder et Leray-Schauder [9], [24] qui fournissent des outils redoutables pour traiter une large classe de problèmes non linéaires. Cependant, résoudre de telles équations sans estimations a priori est une entreprise vouée à l'échec. Les estimations a priori sont bien plus qu'un simple outil technique, elles sont l'épine dorsale de toute analyse rigoureuse des équations différentielles fractionnaires: elles constituent le socle rigoureux sur lequel repose toute la démonstration d'existence et d'unicité des solutions. Grâce à elles, on maîtrise le comportement des solutions inconnues, on les confine dans des espaces fonctionnels bornés, et on rend possible l'application puissante des Théorèmes du point fixe. Sans elles, rien n'est garanti; avec elles, le problème devient mathématiquement viable. C'est pourquoi leur établissement est une étape absolument incontournable de notre travail.

Au cours des dernières années, plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'étude de la résolution des équations fractionnaires. De nombreuses méthodes ont été développées afin d'obtenir des solutions exactes ou approchées avec meilleure précision. Parmi les méthodes les plus utilisées, on trouve: en 2015 la méthode de décomposition d'Adomian modifiée combinée avec la méthode de Legendre pour les équations intégrales fractionnaires de Volterra-Fredholm, en 2017 [17] nouvelle méthode numérique d'Adams-Bashforth fractionnaire, en 2020 méthodes hybrides combinant la transformation de Laplace fractionnaire et décomposition d'Adomian, en 2022 la méthode SBA pour la résolution des équations fractionnaires non linéaires, en 2024 [34] méthode de transformé de Mittag-Leffler et enfin en 2026, la méthode de Kharrat pour les équations fractionnaires avec dérivée de Caputo.

En ce qui nous concerne, ce travail comporte trois chapitres:

Le premier chapitre est consacré à un rappel des notions préliminaires nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent, plus précisément, les outils d'analyse fonctionnelle, la théorie des opérateurs.

Le deuxième chapitre est dédié aux définitions et propriétés principales des intégrales et dérivées fractionnaires. On y présente successivement les dérivées et intégrales de Riemann-Liouville, de Caputo, ainsi que la définition plus récente de Caputo-Fabrizio. On étudie ensuite les espaces des fonctions avec des dérivées fractionnaires et on termine par les équations intégrales fractionnaires. On illustrera notre démarche par un exemple frappant où les estimations a priori, où nous avons présentés deux exemples d'application, un premier sur un espace fonctionnel et un second sur un espace fractionnel. les estimations a priori sont capables de maîtriser le comportement des solutions inconnues, conduisent à une démonstration claire et irréfutable d'existence par les Théorèmes du point fixe. Grâce à elles, l'existence et l'unicité des solutions s'imposent comme une évidence mathématique.

Le troisième chapitre constitue le cœur de ce mémoire. c'est l'étude d'une généralisation d'un problème différentiel fractionnaire linéaire dans un domaine de dimension  $N$  où la formule de la dérivée fractionnaire utilisée ici est celle de Caputo. On va montrer que cette généralisation admet une solution forte unique en utilisant la méthode des estimations a priori.

Enfin, une conclusion générale résume les résultats obtenus et propose quelques perspectives pour d'éventuels travaux futurs.

## Chapitre 1

### 1 Notations préliminaires de base

Dans ce chapitre nous introduisons certaines notions de base nécessaires à notre travail comme l'espace  $L^p(\Omega)$ , espace des fonctions continues et absolument continues, les espaces de Sobolev, les opérateurs linéaires, fonctions spéciales, ... etc.

#### 1.1 Espaces fonctionnels

On appelle espace fonctionnel, un ensemble de fonctions ayant une structure d'espace vectoriel muni d'une norme.

##### 1.1.1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ [13], [27]

**Définition 1:** soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < +\infty$ , on appelle espace de Lebesgue l'ensemble des fonctions:

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

**Définition 2:** soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , on définit:

$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et il existe } c > 0 : |f(x)| \leq c, \text{ p.p. sur } \Omega\}$   
muni de la norme  $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf c > 0 : |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega$ .

**Si:**  $\Omega = \mathbb{R}^N$

**Définition 3:** soit  $0 < p < +\infty$ , on définit l'espace  $L^p(\mathbb{R}^N)$  tel que:

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pour  $p = +\infty$ , on définit  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$  par:

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \text{ess } |f(x)| < +\infty.$$

**Proposition 1:** l'espace  $L^p(\mathbb{R}^N)$  est un espace vectoriel et de Banach.

**Théorème 1:** l'espace  $L^p(\mathbb{R}^N)$  est un espace complet.

**Définition 4:** soient  $1 \leq p, q < +\infty$ , on désigne par  $q$  l'exposant conjugué de  $p$  qui vérifie:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Corollaire 1:** si  $\Omega$  est de mesure finie, alors pour  $1 \leq p < q \leq +\infty$ , on a:  $L^q \subset L^p$ .

**Théorème de la représentation de Riesz:** soient  $1 < p < +\infty$  et  $\varphi \in (L^p)'$ , alors il existe un unique  $u \in L^{p'}$ , avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , tel que:

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u f, \quad \forall f \in L^p.$$

De plus, on a

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

**Théorème 2** (Inégalité de Young): soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs, et  $p, q > 1$  vérifiant:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors on a:  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ .

L'égalité a lieu si et seulement si  $a^p = b^q$ . Cette inégalité provient facilement du fait que la fonction logarithme est concave. En effet, cette propriété et les propriétés fonctionnelles du logarithme, entraînent que:

$$\ln(ab) = \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \leq \ln \left( \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right).$$

**Inégalité de Hölder:** soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p, q \leq +\infty$  tels que:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors  $fg \in L^1$  et

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Lorsque  $p = 2$ , on a  $q = 2$  et l'inégalité de Hölder se réduit alors à l'inégalité de **Cauchy-Schwartz**:

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Inégalité de  $\varepsilon$ -Cauchy:** pour  $a$  et  $b$  arbitraires dans  $\mathbb{R}$ , et tout  $\varepsilon > 0$ , on a:

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

**Inégalité de Minkowski:** soit  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables dans  $L^2$ , alors pour tout  $1 < p < +\infty$ ,

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Inégalité de Poincaré:** soit  $f \in W_2^1(\Omega)$ , tel que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $f(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$ . Donc, on a:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq c_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx,$$

où  $c_{\Omega}$  est une constante dépendante de  $\Omega$ .

**Théorème 3 (Théorème de Fubini):** soient  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$  des ouverts et  $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable. On définit alors:

$$L_x^1(\Omega_1) = \left\{ g : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \int_{\Omega_1} |g(x)| dx < +\infty \right\},$$

et

$$L_y^1(\Omega_2) = \left\{ h : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \int_{\Omega_2} |h(y)| dy < +\infty \right\}.$$

On pose que  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Alors, pour presque tout  $x \in \Omega_1$ :

$$F(x, y) \in L_y^1(\Omega_2) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L_x^1(\Omega_1),$$

de même, pour presque tout  $y \in \Omega_2$ ,

$$F(x, y) \in L_x^1(\Omega_1) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L_y^1(\Omega_2).$$

De plus, on a:

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

**Théorème 4 (Tonelli) [39]:** on suppose que  $\int_{\Omega_2} |f(x, y)| dy < \infty$ , pour

presque tout  $x \in \Omega_1$  et que  $\int_{\Omega_1} f(x, y) dy < \infty$ . Alors  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ .

**Lemme 1 (Lemme de Fatou) [12]:** soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$  telle que:

1. pour chaque  $n$ ,  $f_n(x) \geq 0$  p.p. sur  $\Omega$ ,

2.  $\sup_n \int_{\Omega} f_n(x) dx < +\infty$ . Alors,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

**Théorème de la convergence dominée de Lebesgue** [13]: soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^1$ . On suppose que:

1.  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$  p.p. sur  $\Omega$ .

2. Il existe une fonction  $g \in L^1$  telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. sur  $\Omega$ . Alors  $f \in L^1$  et  $\|f_n - f\|_{L^1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Proposition 2** (La réciproque du Théorème de Lebesgue)[13]: soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^p$ . Si  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$  dans  $L^p$ , alors il existe une sous-suite de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge p.p. vers  $f$ .

**Proposition 3** [13]:

1.  $L^p(\Omega)$  est un espace vectoriel et  $\|\cdot\|_{L^p}$  est une norme pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ .
2.  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$  (Théorème de Fischer–Riesz).
3.  $L^p(\Omega)$  est séparable pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .
4.  $L^p(\Omega)$  est réflexif pour tout  $1 < p < +\infty$ .
5.  $L^p(\Omega)$  est complet pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ .

On résume les propriétés des espaces  $L^p$  dans le tableau suivant:

|                                | réflexif | séparable | espace dual                                        |
|--------------------------------|----------|-----------|----------------------------------------------------|
| $L^p(\Omega), 1 < p < +\infty$ | oui      | oui       | $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ |
| $L^1(\Omega)$                  | non      | oui       | $L^\infty(\Omega)$                                 |
| $L^\infty(\Omega)$             | non      | non       | contient strictement $L^1(\Omega)$                 |



### 1.1.1 Espaces de fonctions continues [21]

**Définition 5:** on note  $C(\Omega, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions continues définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $C^m(\Omega, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , telles que pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  avec  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m$ , la dérivée  $D^\alpha \varphi$  existe et est continue sur  $\Omega$ .

On note  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont dérivables de dérivées premières toutes continues sur  $\Omega$ .

On note  $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont indéfiniment dérivable c'est à dire, pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , la dérivée  $D^\alpha \varphi$  existe, elle sera alors forcément continue sur  $\Omega$ . Nous notons  $C^m(\Omega) = C^m(\Omega, \mathbb{R})$ .

Si:  $\Omega = [a, b]$ , On note  $C([a, b], \mathbb{R})$  l'espace des fonctions réelles continues sur un intervalle fermé  $[a, b]$ , c'est à dire:

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est continue sur } [a, b]\}.$$

#### Propriétés:

- $C([a, b])$  est un espace vectoriel réel: si  $f, g \in C([a, b])$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $f + g \in C([a, b])$  et  $\lambda f \in C([a, b])$ .
- Il est muni de la norme uniforme:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

- $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach: complet pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .
- Il est aussi un espace métrique avec la distance  $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ .

### 1.1.2 Fonctions absolument continues [29]

**Définition 6:** une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite absolument continue si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, une famille finie  $\{]x_k, y_k[, k \in \mathbb{N}\}$  d'intervalles ouverts disjoints :  $]x_k, y_k[ \cap ]x_{k'}, y_{k'}[ = \emptyset, \forall k \neq k'$ , on ait:

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta \implies \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

#### Remarques:

- Toute fonction absolument continue est uniformément continue, donc continue.
- La réciproque est fausse: une fonction peut être continue sans être absolument continue.

**Caractérisation:** une fonction  $f \in C([a, b])$  est absolument continue si et seulement si:

- $f$  est dérivable presque partout sur  $[a, b]$ , sa dérivée  $f' \in L^1([a, b])$  et

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

On note alors:

$$AC([a, b]) = \left\{ f \in C([a, b]) : \exists g \in L^1([a, b]) \text{ tel que } f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt \right\}.$$

Inclusion:

$$AC([a, b]) \subsetneq C([a, b]).$$

**Exemples sur les fonctions absolument continues:**

- $f(x) = x^2$ ,
- $f(x) = \sin x$ ,
- toute fonction affine:  $f(x) = ax + b$ .

**Lemme 2:** une fonction  $f \in AC^n([a, b])$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , si et seulement si elle est représentée sous la forme:

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

## 1.2 Les espaces de Sobolev

### 1.2.1 L'espace $W^{1,p}(I)$ [13]

**Définition 7:** soit  $I = ]a, b[$  et  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(I)$  est défini par:

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ tel que } \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

L'espace  $W^{1,p}(I)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}.$$

L'espace  $H^1$  est muni du produit scalaire

$$\langle u \mid v \rangle_{H^1} = \langle u \mid v \rangle_{L^2} + \langle u' \mid v' \rangle_{L^2},$$

et la norme associée:

$$\|u\|_{H^1} = [\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2]^{\frac{1}{2}}.$$

### 1.2.2 L'espace $H^1(\Omega)$ [3]

**Définition 8:** soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est défini par:

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\},$$

où  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  est la dérivée partielle faible de  $v$  au sens de la définition de la dérivation faible. Il est muni du produit scalaire

$$\langle u \mid v \rangle = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \nabla v(x)) dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

### 1.2.3 L'espace $H_0^1(\Omega)$ [3]

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de  $H^1(\Omega)$ .

**Définition 9:** soit  $C_c^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ . L'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  est défini comme l'adhérence de  $C_c^\infty(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ . En général,  $H_0^1(\Omega)$  est strictement plus petit que  $H^1(\Omega)$  car  $C_c^\infty(\Omega)$  est un sous-espace strict de  $C^\infty(\Omega)$ . Une exception importante est le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , en effet dans ce cas  $\Omega = \mathbb{R}^n = \bar{\Omega}$  et le Théorème "de Densité" affirme que  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , donc on a  $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$ .

#### 1.2.4 L'espace $H^m(\Omega)$ [3]

**Définition 10:** pour un entier  $m \geq 0$ , l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est défini par:

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que, } \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\},$$

où  $\partial^\alpha v$  est la dérivée partielle au sens faible. Il est muni du produit scalaire:

$$\langle u | v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) v(x) dx,$$

et de la norme  $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\langle u | u \rangle}$ .

L'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

#### 1.2.5 L'espace $W_0^{1,p}(I)$ et $W^{-1,p'}(I)$ [11]

**Définition 11:** l'espace  $W_0^{1,p}(I)$  est l'adhérence de l'espace  $D(I)$  dans  $W^{1,p}(I)$ . Il est un espace de Banach. Pour  $p = 2$ , l'espace  $W_0^{1,p}(I)$  sera noté par  $H_0^1(I)$ .

**Définition 12:** l'espace  $W^{-1,p'}(I)$  est l'espace dual de  $W_0^{1,p}(I)$ , Autrement dit tout élément  $f$  de  $W^{-1,p'}(I)$  est une forme linéaire continue sur  $W_0^{1,p}(I)$ . Où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . et on a les inclusions  $H_0^1(I) \subset L^2(I) \subset H^{-1}(I)$  avec injection continue et dense.

#### 1.2.6 L'espace $W^{m,p}(I)$ [30]

**Définition 13:** pour tout entier  $m \geq 0$ , l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(I)$  est défini par:

$$W^{m,p}(I) = \{v \in L^1(I) \text{ tel que, } \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(I)\},$$

où la dérivée partielle  $\partial^\alpha v$  est à prendre au sens faible. Muni de la norme:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

### 1.3 Opérateurs Linéaires [8]

**Définition 14:** soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés sur un corps  $\mathbb{K}$ . On dit qu'un opérateur  $T$  de  $E$  dans  $F$  est linéaire si, et seulement si,

1. pour tout  $x, y \in E$ ,  $T(x + y) = T(x) + T(y)$ ,
2. pour tout  $a \in \mathbb{C}$  et  $z \in E$ ,  $T(az) = aT(z)$ .

**Définition 15:**  $X$  et  $Y$  deux espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire est une application  $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$  linéaire, où  $D(A)$  est le domaine de définition de  $A$ , qui est un sous-espace vectoriel de  $X$ . L'opérateur  $A$  est dit borné si la quantité suivante est finie:

$$\|A\| = \sup \{ \|Au\|_Y, u \in D(A), \|u\|_X = 1 \}.$$

- Tout opérateur  $A$  est complètement défini par son graphe  $G(A)$  défini par  $G(A) = \{(v, Av), v \in D(A)\}$ .
- Pour tout opérateur linéaire  $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ , on note par:

$$N(A) = \{x \in D(A), Ax = 0\} \text{ (noyau de } A),$$

$$R(A) = \{x_2 = Ax_1, x_1 \in D(A)\} \text{ (image de } A).$$

- On note  $\mathcal{L}_c(X, Y)$  (respectivement  $\mathcal{L}(X)$ ) l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de  $X$  dans  $Y$  (respectivement des endomorphismes continus) de  $X$  muni de la topologie de la convergence uniforme:

$$A \in \mathcal{L}_c(X, Y), \quad \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X}.$$

**Définition 16:** soit  $T$  un opérateur linéaire sur  $E$ . On dit que  $T$  est borné ou continu si, et seulement si, il existe  $c > 0$  telle que  $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ , pour tout  $x \in E$ .

### 1.3.1 Norme d'un opérateur

**Définition 17:** soit  $E, F$  deux espaces vectoriels normés et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle norme de  $T$  le plus petit nombre strictement positif qui vérifie  $\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ . C'est à dire:

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \inf\{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \forall x \in E\}.$$

**Proposition 4:** soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors on a:

1.  $\forall x \in E : \|Tx\|_F \leq \|T\|_{\mathcal{L}}\|x\|_E$ .
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E : \|Tx_\varepsilon\|_F \geq (\|T\|_{\mathcal{L}} - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|_E$ .
3.  $\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F, \quad \|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$

### 1.3.2 Opérateurs fermés [8]

**Définition 18:** soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et soit  $T : D \subset E \rightarrow F$ . On appelle graphe de  $T$  le sous-espace de  $E \times F$  défini par:

$$G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in D\}.$$

### Théorème du graphe fermé

**Définition 19:** [13] on dit qu'un opérateur  $A$  est fermé si son graphe  $G(A)$  est fermé dans  $X \times Y$ , c'est à dire si pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $X$  et  $Au_n \rightarrow v$  dans  $Y$ , alors  $u \in D(A)$  et  $v = Au$ .

**Théorème 5:** [8] soient  $E, F$  deux espaces de Banach et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire. Si  $G(T)$  est fermé, alors  $T$  est continu.

### 1.3.3 La convergence dans l'espace des opérateurs linéaires [13]

**1. La convergence simple:** soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés et  $T_n, T \in \mathcal{L}(E, F)$ . On dit que la suite  $(T_n)$  converge simplement vers  $T$  si et seulement si pour tout  $x \in E$ ,  $T_n x \rightarrow Tx$  dans  $F$ . On note  $T_n \xrightarrow{s} T$ .

Autrement dit:  $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \|T_n x - Tx\|_F < \varepsilon$ .

**2. La convergence uniforme:** soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés et  $T_n, T \in \mathcal{L}(E, F)$ . On dit que la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément

vers  $T$  si et seulement si:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T_n x - Tx\|_F = 0$ . On note  $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$  et

on écrit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = 0.$$

## 1.4 Orthogonalité et Densité dans les espaces de Hilbert

### 1.4.1 Espace de Hilbert [15]

**Définition 20:** soit  $H$  un espace vectoriel réel ou complexe. Un produit scalaire est une forme bilinéaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  (ou  $\mathbb{R}$ ), vérifiant:

- (i)  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est définie positive:  $\langle x | x \rangle \geq 0$  et  $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ ,
- (ii)  $\forall y \in H : x \mapsto \langle x | y \rangle$  est linéaire par rapport à  $x$  et antilinéaire par rapport à  $y$ , c'est à dire  $\langle \lambda x | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle$  et  $\langle x | \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x | y \rangle$ ,
- (iii)  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est symétrique:  $\langle y | x \rangle = \overline{\langle x | y \rangle}$ .

On pose:  $\|x\| := \sqrt{\langle x | x \rangle}$ . On peut vérifier que  $\|\cdot\|$  est bien une norme.

**Exemple 1:** soit  $H = L^2(\Omega)$ , où  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est un borélien, muni de la mesure de Lebesgue ou de la mesure discrète. Si  $f, g \in L^2(\Omega)$  alors  $fg \in L^1(\Omega)$  et

$$\langle f | g \rangle = \int_{\Omega} fg.$$

Il est bien défini, et

$$\|f\| = \sqrt{\int |f|^2} = \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Lemme 3:** soit  $H$  un espace vectoriel réel ou complexe muni du produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Alors pour tous  $x, y \in H$ ,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

**Définition 21:** (Espace préhilbertien) un espace muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien. Par la suite, on notera ce produit scalaire par:

$$P(x, y) = \langle x | y \rangle,$$

Par exemple,  $\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N, C([a, b], \mathbb{C})$  avec

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx,$$

sont des espaces préhilbertiens.

**Proposition 5** [15] (Inégalité de Cauchy-Schwarz): soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien, pour tout  $x \in E$ . On note

$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}.$$

On a alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on a l'égalité lorsque les vecteurs  $x$  et  $y$  sont colinéaires:

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

**Définition 22:** [25] un espace préhilbertien  $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  est complet si l'espace vectoriel normé associé est complet. Un tel espace s'appelle espace de Hilbert. Par exemple, l'espace  $\ell^2$  est un espace de Hilbert. On le définit comme suit:

$$\ell^2 = \left\{ u = (u_n)_{n \geq 1} : \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Pour  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ , on définit la norme:

$$\|u\|_{\ell^2} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2},$$

et le produit scalaire:

$$\langle u | v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \overline{v_n}.$$

**Proposition 6:** [32] soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace préhilbertien et soient  $x, y \in E$ , alors on dispose des énoncés suivants:

(i) Théorème de Pythagore:

$$\operatorname{Re} \langle x | y \rangle = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(ii) Identité du parallélogramme:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(iii) Formule de Polarisation:

$$\langle x | y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2}{4} + i \left( \frac{\|x + iy\|^2 + \|x - iy\|^2}{4} \right).$$



### 1.4.2 Orthogonalité [25]

**Définition 23:** soit  $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert.

1. On dit que deux vecteurs  $u, v \in H$  sont orthogonaux si  $\langle u | v \rangle = 0$  et on notera  $u \perp v$ .
2. On dit que deux ensembles  $A, B \subset H$  sont orthogonaux si tous les éléments de  $A$  sont orthogonaux à tous les éléments de  $B$ , on notera  $A \perp B$ .
3. Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux alors ils sont en somme directe et on notera  $A \oplus^\perp B$  pour signifier que cette somme directe est orthogonale.
4. Soit  $A$  un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert  $H$ . On définit  $A^\perp$ , l'orthogonal de  $A$ , par:

$$A^\perp = \{f \in H : \langle f | g \rangle_H = 0, \forall g \in A\}.$$

**Proposition 7:** soit  $A$  un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert  $H$ .

Alors  $A$  est dense dans  $H$  si et seulement si  $A^\perp = \{0\}$ .

**Démonstration:** si  $A^\perp = \{0\}$ , on a  $(A^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$ . D'autre part, on a

$$A \subset \overline{A} \implies (\overline{A})^\perp \subset A^\perp \implies (A^\perp)^\perp \subset ((\overline{A})^\perp)^\perp.$$

Comme  $\overline{A}$  est fermé, il s'ensuit que

$$((\overline{A})^\perp)^\perp = \overline{A} \implies (A^\perp)^\perp \subset \overline{A} \implies H \subset \overline{A},$$

d'où  $H = \overline{A}$ .

Réciproquement, si  $A$  est dense dans  $H$ , et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $f \in A^\perp \subset H$ , alors:

$$\langle f | f_n \rangle_H = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

par passage à la limite, on a:

$$\|f\|_H = 0 \implies f = 0 \implies A^\perp = \{0\}.$$

**Proposition 8:** soit  $A$  une partie quelconque de  $H$ , alors  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ .

**Définition 24:** (Famille Orthogonale, Orthonormale génératrice, Base Hilbertienne) soit  $H$  un espace de Hilbert et  $(e_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $H$ .

1. La famille est dite orthogonale si  $e_i \perp e_j, \forall i \neq j$ .
2. Elle est dite orthonormale ( orthonormée) si de plus on a  $\|e_i\| = 1, \forall i \in I$ .
3. La famille est dite génératrice lorsque l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de la famille est dense dans  $H$ :  $\overline{\text{vect}(e_i, i \in I)} = H$ .

**Remarque 1:** en dimension finie, on retrouve la notion usuelle de base orthonormée. Toute base hilbertienne est alors également une base algébrique et le cardinal de ces bases est donc égal à la dimension de l'espace.

### 1.4.3 Inégalités de Bessel, Parseval, Plancherel, développement dans une base hilbertienne [32]

**Définition 25** (Base hilbertienne): soit  $H$  un espace de Hilbert. On dit que la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est une base hilbertienne de  $H$  si elle est:

- (i) Orthogonale:  $\forall i \neq j \in I, \langle e_i | e_j \rangle = 0$ ;
- (ii) Normée:  $\forall i \in I, \|e_i\| = 1$ ;
- (iii) Totale:  $H = \overline{\text{vect}(e_i)_{i \in I}}$ .

**Théorème 6** (Inégalité de Bessel): si  $(e_i)_{i \in I}$  est une famille orthonormée au plus dénombrable de  $H$ , alors pour tout vecteur  $f \in H$ :

$$\sum_{i \in I} |\langle f | e_i \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

**Théorème 7:** (Décomposition selon une base hilbertienne) soit  $H$  un espace de Hilbert de dimension infinie séparable. Si  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  est une base hilbertienne (déénombrable) de  $H$ , alors tout vecteur  $f \in H$  se décompose de manière unique comme combinaison linéaire (infinie) des vecteurs  $e_i$ :

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f | e_i \rangle e_i.$$

Réciproquement, étant donné une famille orthonormée  $\{e_i\}_{i \in I}$  de  $H$  (nécessairement de cardinal infini déénombrable), alors pour tout  $f \in H$ , la famille  $\{e_i : i \in I\}$  est en fait génératrice, et c'est donc une base hilbertienne.

**Théorème 8:** (Identité de Plancherel) si  $H$  est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie (dénombrable) muni d'une base hilbertienne  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ , alors la norme au carré de tout vecteur  $f \in H$  et sa norme s'obtient simplement en sommant les modules au carré de ses coefficients:

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f | e_i \rangle|^2.$$

**Théorème 9:** (Identité de Parseval) plus généralement, le produit scalaire de  $f$  avec un autre élément quelconque  $g$  de  $H$ :  $g = \sum_{i=1}^{\infty} \langle g | e_i \rangle e_i$  qui est lui aussi décomposé selon la même base, s'obtient en sommant les produits (conjugués)

de leurs coefficients:  $\langle f | g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f | e_i \rangle \overline{\langle g | e_i \rangle}$ . Ce qu'on appelle identité

de Plancherel n'est donc autre que la version du Théorème de Pythagore en dimension infinie: immortalisé et renouveau d'un Théorème vieux du vingt-cinquième siècles ! Et bien entendu aussi, l'identité de Parseval est la généralisation aux espaces de Hilbert de la règle bien connue de calcul du produit scalaire  $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  entre deux vecteurs de  $\mathbb{R}^N$  ayant les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  dans la base orthogonale canonique.

**Proposition 9:** (Unicité du Développement) soit  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  une base hilbertienne dénombrable d'un espace de Hilbert séparable  $H$  de dimension infinie, et soit  $(a_i)_{i=1}^{\infty}$  une famille de scalaires telle que la série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$  converge au sens de la topologie de  $H$  vers un élément  $f = \sum a_i e_i$ , alors  $a_i = \langle f | e_i \rangle$  pour tout  $i \geq 1$ .

**Théorème 10:** (Riesz–Fischer) tout espace de Hilbert  $H$  séparable de dimension infinie est isométriquement isomorphe à  $\ell^2$ . Cet énoncé est la généralisation, en dimension infinie dénombrable, du Théorème d'après lequel tout espace vectoriel hermitien de dimension finie  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^n$  muni du produit scalaire hermitien standard  $z_1 \overline{w_1} + \dots + z_n \overline{w_n}$ . Il est important d'ajouter qu'il y a autant d'isomorphismes isométriques entre  $H$  et  $\ell^2$  qu'il y a de bases Hilbertiennes. Ainsi, l'isomorphisme précédent dépend du choix de la base  $e_n$  et, par conséquent, l'isomorphisme  $H \simeq \ell^2$  n'est pas canonique.

#### 1.4.4 Polynômes orthogonaux [32]

**Définition 26:** soit un intervalle ouvert  $]a, b[$  avec :  $-\infty < a < b \leq \infty$ .

Une fonction poids sur  $]a, b[$  est une fonction continue strictement positive  $w : ]a, b[ \rightarrow ]0, \infty[$ , introduisons l'espace vectoriel:

$$H_w = \left\{ f \in C^0([a, b[, \mathbb{C}) : \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx < \infty \right\}.$$

Une fonction poids  $w$ , vient du mot anglais correspondant "weight".

On vérifie aisément que  $H_w$  est un espace préhilbertien muni du produit scalaire naturel:

$$\langle f | g \rangle_w = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx,$$

et de la norme naturelle:

$$\|f\|_w = \left( \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Remarque 2:**  $H_w$  n'est pas forcément complet.

**Proposition 10:** il existe une unique famille:  $(P_n)_{n=0}^\infty$  des polynômes unitaires  $P_n = P_n(x)$  de degré  $n$  qui sont orthogonaux deux à deux:

$$\langle P_{n_1} | P_{n_2} \rangle_w = 0 \quad \text{lorsque } n_1 \neq n_2,$$

$$\langle P_{n_1} | P_{n_2} \rangle_w > 0 \quad \text{lorsque } n_1 = n_2.$$

**Proposition 11:** les polynômes orthogonaux associés à un poids  $w$  comme ci-dessus vérifient les relations de récurrence:

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x) \quad (\forall n \geq 1),$$

avec les constantes:

$$\alpha_n = \frac{\int_a^b x P_n(x)^2 w(x) dx}{\int_a^b P_n(x)^2 w(x) dx}, \quad \beta_n = \frac{\int_a^b P_n(x)^2 w(x) dx}{\int_a^b P_{n-1}(x)^2 w(x) dx}.$$

### 1.4.5 Convergence et compacité faible dans les espaces de Hilbert [25]

**Convergence faible dans un espace de Hilbert:** grâce au Théorème de la représentation de Riesz, on peut donner une définition plus simple de la convergence faible.

**Définition 27:** soit  $H$  un espace de Hilbert, On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $u \in H$  si elle vérifie:

$$\langle u_n | v \rangle \rightarrow \langle u | v \rangle, \quad \forall v \in H, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

**Proposition 12:** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$  une suite d'un espace de Hilbert  $H$ . On a:

1. Une limite faible de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , si elle existe, est nécessairement unique.
2. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $u$ , alors elle converge aussi faiblement vers  $u$ .
3. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $u$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et on a

$$\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|.$$

En outre, dans le cadre hilbertien on peut montrer:

**Proposition 13:** soit  $H$  un espace de Hilbert et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ .

1. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $u$  et si de plus on a:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \|u\|$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $u$ .
2. Soit  $H_2$  un autre espace de Hilbert et  $T : H \rightarrow H_2$  un opérateur linéaire continu. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $u$  dans  $H$ , alors  $(Tu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $Tu$  dans  $H_2$ .

### Compacité faible [25]

**Théorème 11:** soit  $H$  un Hilbert. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée dans  $H$ , alors il existe une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement dans  $H$ .

**1.5 Etude d'un problème intègro-différentiel pseudo-hyperbolique avec des conditions intégrales [40]:** les équations aux dérivées partielles jouent un rôle fondamental dans la modélisation des phénomènes physiques, biologiques et d'ingénierie. La classification de ces équations dépend du signe du discriminant  $\Delta = B^2 - 4AC$ , Où

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u = 0.$$

Selon la valeur de ce discriminant, on distingue trois types fondamentaux d'équations.

**Équations elliptiques:** une équation est dite elliptique lorsque:  $B^2 - 4AC < 0$ . Les équations elliptiques apparaissent généralement dans l'étude des phénomènes stationnaires. Un exemple classique est l'équation de Laplace  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,

**Équations paraboliques:** une équation est dite parabolique lorsque  $B^2 - 4AC = 0$ . Ces équations modélisent essentiellement des phénomènes évolutifs de diffusion. L'exemple le plus connu est l'équation de la chaleur  $u_t - ku_{xx} = 0$ , où  $k > 0$  représente le coefficient de diffusion thermique.

**Équations hyperboliques:** une équation est dite hyperbolique lorsque:  $B^2 - 4AC > 0$ . Les équations hyperboliques sont souvent utilisées pour décrire les phénomènes de propagation d'ondes. L'exemple classique est l'équation des ondes  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ , où  $c$  représente la vitesse de propagation de l'onde.

**Équations pseudo-hyperboliques:** les équations pseudo-hyperboliques constituent une classe particulière d'équations qui possèdent certaines caractéristiques des équations hyperboliques mais comportent également des termes supplémentaires d'ordre supérieur ou des termes intégraux. Ces équations apparaissent fréquemment dans la modélisation de certains phénomènes viscoélastiques.

## 1.6 Méthode des estimations a priori [26], [31], [38]

La Méthode des estimations a priori (dite aussi méthode des inégalités énergétiques) est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique. Cette méthode résulte des idées introduites par **J. Leray** [31], **L. Garding** [26], **I. G. Petrovsky** [38] dans leurs travaux. Elle consiste en:

- Écrire le problème posé sous forme opérationnelle:

$$Lu = F, \quad u \in D(L), \quad (1)$$

où l'opérateur  $L$  est engendré par le problème posé et considéré d'un espace de Banach  $B$  dans l'espace de Hilbert  $H$  convenablement choisi.

- Établir ensuite les estimations a priori pour l'opérateur  $L$ .

- Démontrer ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace  $H$ .

Plus précisément, on suivra le schéma suivant: on établit l'estimation a priori du type:

$$\|u\|_B \leq C\|Lu\|_H, \forall u \in D(L). \quad (2)$$

Cette estimation est obtenue en général en multipliant scalairement l'équation  $u$  ou ses dérivées et une fonction poids, et en faisant des intégrations par parties. Ensuite, on montre que l'opérateur  $L$  dans  $B$  admet une fermeture  $\bar{L}$  qui est définie comme limite de  $L$ . La solution de l'équation opérationnelle:

$$\bar{L}u = F, \quad (3)$$

est appelée solution forte généralisée du problème considéré.

Par passage à la limite, l'estimation précédente est prolongée aux solutions fortes généralisées, c'est à dire:

$$\|u\|_B \leq C\|\bar{L}u\|_H, \forall u \in D(\bar{L}). \quad (4)$$

À partir de là, on déduit l'unicité de la solution de l'équation précédente(3). La dernière étape consiste à établir la densité de l'ensemble  $R(L)$  dans  $H$  ce qui garantit l'existence de la solution forte du problème posé car l'opérateur  $L$  est fermé dans  $H$ .

**Remarque 3:** la méthode des estimations a priori est fondée sur un support théorique solide et développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode, on est confronté à des difficultés, parmi lesquelles:

- le choix de l'espace des solutions;
- le choix du multiplicateur;
- le choix de l'opérateur de régularisation.

**Définition 28:** la solution de l'équation  $\bar{L}u = \mathcal{F}$  est dite solution forte du problème.

**Théorème 12:** est valide pour une solution forte, c'est à dire que l'on a l'inégalité:

$$\|u\|_B \leq c\|\bar{L}u\|_F, \quad \forall u \in D(\bar{L}). \quad (5)$$

Par conséquent, cette dernière inégalité entraîne les corollaires suivants:

**Corollaire 2:** la solution du problème est unique si elle existe et dépend continûment de  $\mathcal{F} \in F$ .

**Corollaire 3:** [7] l'ensemble des valeurs  $R(\bar{L})$  de l'opérateur  $\bar{L}$  est égal à la fermeture  $\overline{R(L)}$  de  $R(L)$ .

**Preuve du Corollaire 3:** [7] soit  $z \in \overline{R(L)}$ , alors il existe une suite de Cauchy  $(z_n)_n$  dans  $F$  constituée des éléments de l'ensemble  $R(L)$  tel que:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$ , alors il existe une suite correspondante  $u_n \in D(L)$  tel que:  $Lu_n = z_n$ .

De l'estimation (2), on obtient  $\|u_n - u_m\|_B \leq c\|Lu_n - Lu_m\|_F \rightarrow 0$ , quand  $n$  et  $m$  tendent vers l'infini. On peut déduire que  $u_n$  est une suite de Cauchy dans  $B$ , ainsi il existe  $u \in B$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$  dans  $B$ . de la définition de  $\bar{L}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{L}u_n = z$  et comme  $\bar{L}$  est fermé donc  $\bar{L}u = z, u \in D(\bar{L}), \bar{L}u = z$ . Ainsi que  $z \in R(\bar{L})$ , alors:  $R(\bar{L}) \subset \overline{R(L)}$ .

**Il reste à montrer l'inclusion inverse:** soit  $z \in R(\bar{L})$ , alors il existe une suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'ensemble  $R(\bar{L})$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$ , où  $z \in R(\bar{L})$ , car  $R(\bar{L})$  est un sous-ensemble fermé d'un espace complet  $F$ , donc  $R(\bar{L})$  est complet. Il existe alors une suite correspondante  $u_n \in D(\bar{L})$  tel que  $\bar{L}u_n = z_n$ . De l'estimation (4), on obtient:

$$\|u_n - u_m\|_B \leq c\|\bar{L}u_n - \bar{L}u_m\|_F \rightarrow 0,$$

quand  $n$  et  $m$  tendent vers l'infini. On peut déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $B$ , ainsi il existe  $u \in B$  tel que:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$  dans  $B$ . De la définition de  $\bar{L}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{L}u_n = z$  et comme  $\bar{L}$  est fermé, on obtient  $\bar{L}u = z$ , donc  $z \in R(\bar{L})$ . Ainsi  $R(\bar{L}) \subset \overline{R(L)}$ . On a donc démontré que  $\overline{R(L)} = R(\bar{L})$ .

**Existence de la solution** [7]:  $\int_0^1 \ell u \omega_0 dx + \int_0^1 q u \omega_1 dx = 0$ .

Puisque les ensembles des valeurs des opérateurs  $\ell$  et  $q$  sont indépendants et les ensembles des valeurs  $\ell$  et  $q$  sont partout denses dans  $L^2(Q)$ , alors on trouve que  $\omega_0 \equiv 0$  et  $\omega_1 \equiv 0$ . Donc  $W \equiv (0, 0, 0)$ , ce qui implique que  $\overline{R(L_0)} = F$ . Comme  $R(L_0)$  est dense dans  $F$ , alors  $R(L)$  est dense dans  $F$ .

### 1.6.1 Exemple d'application sur la méthode des estimations a priori [7]

**Position du problème:** considérons  $Q = \Omega \times I = (x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T$ , le domaine rectangulaire, on considère une équation intégral-différentielle pseudo-hyperbolique:



$$Lv = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} + \gamma v - \int_0^t a(t-s)v(x,s) ds = g(x,t), \quad (1.6.1)$$

avec les conditions initiales

$$\ell v = v(x, 0) = \Phi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1.6.2)$$

$$qv = \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \Psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1.6.3)$$

et

$$\int_0^1 v(x, t) dx = n(t), \quad 0 < t < T, \quad (1.6.4)$$

$$\int_0^1 x v(x, t) dx = m(t), \quad 0 < t < T. \quad (1.6.5)$$

où  $n : ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_0^1 v(x, t) dx$ ,  $m : ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_0^1 x v(x, t) dx$  et  $g, \Phi, \Psi$  et  $a$  sont des fonctions connues,  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $T$  des constantes positives. Afin que le problème étudié soit bien posé, il est nécessaire que les données initiales et les conditions intégrales soient cohérentes au temps initial  $t = 0$ . Cette cohérence est exprimée à travers ce que l'on appelle les conditions de compatibilité. Ces conditions s'écrivent:

$$\int_0^1 \Phi dx = n(0), \quad \int_0^1 x \Phi dx = m(0), \quad \int_0^1 \Psi dx = n'(0), \quad \int_0^1 x \Psi dx = m'(0).$$

**Reformulation du problème:** puisque les conditions intégrales ne sont pas homogènes, il est commode de convertir le problème (1.6.1)-(1.6.5) en un problème équivalent avec des conditions intégrales homogènes. Pour cela, nous introduisons une nouvelle fonction  $u(x, t)$  comme suit:

$$v(x, t) = u(x, t) + U(x, t), \quad (1.6.6)$$

où

$$U(x, t) = (-6x + 4)n(t) + (12x - 6)m(t). \quad (1.6.7)$$

Le problème (1.6.1)-(1.6.5) avec des conditions intégrales non homogènes (1.6.4)-(1.6.5) peut être réduit de façon équivalente au problème de trouver une fonction  $u$  satisfaisant:

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \gamma u - \int_0^t a(t-s)u(x,s) ds = f(x,t), \quad (1.6.8)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \ell u = u(x,0) = \varphi(x), \\ qu = u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \quad 0 < x < 1.$$

et

$$\begin{cases} \int_0^1 u(x,t) dx = 0, \\ \int_0^1 x u(x,t) dx = 0, \end{cases} \quad 0 < t < T.$$

$$\begin{cases} f(x,t) = g(x,t) - LU(x,t), \\ \varphi(x) = \Phi(x) - \ell U(x,t) \\ \psi(x) = \Psi(x) - qU(x,t). \end{cases}$$

Donc au lieu de chercher  $v$ , nous cherchons simplement  $u$ .

**Estimation a priori:** on va montrer l'existence et l'unicité de la solution forte dans un espace fonctionnel du problème (1.6.1)-(1.6.5). La démonstration est basée sur une estimation a priori et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème (1.6.8). La solution du problème (1.6.8) peut être considérée comme une solution sous la forme opérationnelle:

$$Lu = \mathcal{F}, \quad (1.6.9)$$

où  $L = (\mathcal{L}, \ell, q)$  avec un domaine de définition  $D(L)$  constitué de fonctions  $u \in L^2(Q)$ , considéré de  $B$  dans  $F$ , où  $B$  est l'espace de Banach des fonctions  $u \in L^2(Q)$ , dont la norme est

$$\left( \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 \left\| \mathfrak{S}_x \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right\|^2 + \left\| \mathfrak{S}_x u(x,t) \right\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

tel que:  $\Im_x u = \int_0^x u(\xi, t) d\xi$  et  $F$  est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments  $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$  dont la norme est

$$\|\mathcal{F}\|_F = \left( \int_{Q_T} |f|^2 dx dt + \int_0^1 (|\psi(x)|^2 + |\varphi(x)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Résultat obtenu:** si  $u(x, t)$  est une solution du problème (1.6.8) et  $|a(t)| \leq a_1$  et  $\beta$  satisfaisant la condition

$$\beta \geq \frac{T^4 a_1 (\varepsilon_1^2 + a_1)}{8\varepsilon_1} + \frac{1}{8\varepsilon_2},$$

alors pour  $f \in C(\overline{Q})$ , on a l'estimation  $\|u\|_B \leq C \|Lu\|_F$ . Où  $C$  est une constante positive indépendante de  $u$ ,  $u \in D(L)$ ,

$$C = \left( \frac{\max(\frac{1}{2}, \varepsilon_2, \frac{1}{2}\gamma + \alpha)}{\min(1, \gamma + 2\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 1.7 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions spécifiques qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses applications.

### 1.7.1 Fonction Gamma d'Euler [39], [29]

En mathématique la fonction Gamma est une fonction complexe, elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

**Définition 29:** on définit la fonction Gamma d'Euler (notée  $\Gamma(z)$ ) par la relation suivante:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0). \quad (1.7.1)$$

#### Exemple 2:

1.  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ .
2.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .
3.  $\Gamma(-1) = +\infty$ .

$$4. \frac{1}{\Gamma(0)} = 0.$$

$$5. \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}.$$

Voici quelques propriétés intéressantes de la fonction Gamma.

**Propriétés:**

1.  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$
2.  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ car } \Gamma(1) = 1.$

**Proposition 14:** la fonction Gamma se présente aussi sous forme de limite:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.7.2)$$

### 1.7.2 Fonction Bêta [39], [29]

Pour alléger l'écriture de plusieurs fonctions, il est plus commode d'utiliser une fonction nommée Bêta qu'une combinaison de valeurs de la fonction Gamma.

**Définition 30:** La fonction Bêta est une type d'intégrale d'Euler définie pour tous complexes  $z$  et  $w$  par:

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0. \quad (1.7.3)$$

**Propriétés:** pour des variables  $z$  et  $w$  à parties réelles non négatives, on a les relations suivantes:

1.  $B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$
2. La symétrie:  $B(z, w) = B(w, z).$

**Proposition 15:** elle peut prendre aussi les formes intégrales pour  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta,$$

et

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt.$$

### 1.7.3 Fonctions de Mittag-Leffler [34]

La fonction de Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Elle est aussi largement utilisée dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire, cette fonction a été introduite par **G. M. Mittag-Leffler** [34].

**Définition 31:** une fonction à deux paramètres de type Mittag-Leffler est définie par la série:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0, z \in \mathbb{C}). \quad (1.7.4)$$

Pour  $\beta = 1$ , on obtient la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre:

$$E_{\alpha, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z).$$

#### Exemple 3:

1.  $E_0(z) = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$
2.  $E_1(z) = E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$
3.  $E_2(z) = E_{2,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{z})^{2k}}{(2k)!} = \text{ch } \sqrt{z}.$
4.  $E_{2,2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} \text{sh } z.$

## Chapitre 2

### 2 Introduction au calcul fractionnaire

Dans cette section, on introduit des notations, des définitions et des propriétés concernant le calcul fractionnaire. Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire.

Le concept de calcul fractionnaire découle historiquement d'une question soulevée dans l'année 1695 par le Marquis de L'Hôpital (1661-1704) à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Lorsque Leibniz a répondu par une lettre à L'Hôpital, il a désigné la  $n^{\text{ème}}$  dérivée d'une fonction  $f$  par le symbole  $\frac{d^n f}{dx^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

L'Hôpital a répondu alors: "Que signifie  $\frac{d^n f}{dx^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$  ?"

Dans sa réponse, datée du 30 Septembre 1695, Leibniz écrit à L'Hôpital comme suit: "...C'est un paradoxe apparent à partir duquel un jour, des conséquences utiles seront tirées..."

Plusieurs auteurs considèrent cette lettre datée du 30 septembre 1695 comme l'heure de naissance du calcul fractionnaire. Ainsi, le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans. Pendant ces trois dernières décennies, le calcul fractionnaire a connu un énorme intérêt du fait des champs d'applications des dérivées fractionnaires diversifiées.

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration fractionnaire, nous mettrons en évidence les définitions les plus célèbres telles que l'intégrale fractionnaire de (Riemann, 1847 ; Liouville, 1832), l'intégrale fractionnaire de Hadamard (Hadamard, 1892), l'intégrale fractionnaire de Weyl (Weyl, 1917), l'intégrale fractionnaire de Riesz (Riesz, 1949) et de Caputo (Caputo, 1967).

Et il existe aussi un grand nombre de définitions de dérivées fractionnaires qui ont été introduites afin de modéliser différents phénomènes. Parmi les définitions les plus connues, on peut citer la dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville (Riemann, 1847; Liouville, 1832), la dérivée fractionnaire de Grünwald–Letnikov (Grünwald, 1867; Letnikov, 1868), la dérivée fractionnaire de Hadamard (Hadamard, 1892), la dérivée fractionnaire de Weyl (Weyl, 1917), la dérivée fractionnaire de Marchaud (Marchaud, 1927), la dérivée fractionnaire de Riesz (Riesz, 1949) et la dérivée fractionnaire de Caputo (Caputo, 1967) [14], [42], [39], [33], [36].

Dans ce travail, nous nous intéressons particulièrement à l'étude de certaines définitions importantes du calcul fractionnaire, notamment les intégrales et les

dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, Caputo et Caputo-Fabrizio. Nous présenterons leurs définitions, leurs propriétés principales ainsi que quelques exemples illustrant leur utilisation, et l'espace des fonctions avec des dérivées fractionnaires et enfin les équations intégrales fractionnaires.

## 2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville [29], [23]

comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approche de Riemann-Liouville pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire.

**Définition 32** (*Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville*):

soit  $I = [a, b]$  un intervalle sur  $\mathbb{R}$  et soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ; notons  ${}^{RL}I_{a+}^\alpha$  et  ${}^{RL}I_{b-}^\alpha$  les opérateurs définis sur  $L^1([a, b])$  par:

(i)

$${}^{RL}I_{a+}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a.$$

(ii)

$${}^{RL}I_{b-}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b.$$

${}^{RL}I_{a+}^\alpha$  s'appelle l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville.

${}^{RL}I_{b-}^\alpha$  s'appelle l'intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville.

**Remarque 4:** quand  $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ , les intégrales précédentes coïncident avec les intégrales  $n$ -ièmes de la forme:

$$\begin{aligned} (I_{a+}^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (I_{b-}^n f)(x) &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

**Remarque 5:** on note  ${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}$  l'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

- Pour  $\alpha = 0$  :  ${}^{RL}I_{a+}^0 = Id$ .
- Si  $\alpha \geq 1$ , l'intégrale  ${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}f(x)$  existe pour tout  $x$  sur  $[a, b]$  car c'est le produit d'une fonction intégrable  $f$  et d'une fonction continue  $(x - t)^{\alpha-1}$ .

**Proposition 16:** l'opérateur d'intégration fractionnaire  ${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}$  est borné dans  $L^p[a, b]$  pour  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Proposition 17:** soit  $f \in L^1([a, b])$  et soit  $0 < \alpha < 1$ . Alors l'intégrale  ${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}f(x)$  et  ${}^{RL}I_{b-}^{\alpha}f(x)$  existent pour presque tout  $x$  dans  $[a, b]$  et sont des éléments de  $L^1([a, b])$ .

**Théorème 13:** soient  $\alpha, \beta > 0$ . Pour toute fonction  $f \in L^1[a, b]$  on a:

$${}^{RL}I_a^{\alpha} {}^{RL}I_a^{\beta} f(x) = {}^{RL}I_a^{\alpha+\beta} f(x) = {}^{RL}I_a^{\beta} {}^{RL}I_a^{\alpha} f(x), \quad (2.1.1)$$

pour presque tout  $x \in [a, b]$ . Si de plus  $f \in C[a, b]$ , alors (2.1.1) est vraie pour tout  $x \in [a, b]$ .

**Corollaire 4:** sous les hypothèses, on a:

$$\left( {}^{RL}I_{a+}^{\alpha'} \circ {}^{RL}I_{a+}^{\beta'} \right) (f) = \left( {}^{RL}I_{a+}^{\beta'} \circ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha'} \right) (f).$$

**Proposition 18** (Composition de l'intégrale fractionnaire): soit  $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}^+$  et soit  $f \in L_1([a, b])$ , alors:

$$\text{i) } \left( {}^{RL}I_{a+}^{\alpha'} \circ {}^{RL}I_{a+}^{\beta'} \right) f(x) = {}^{RL}I_{a+}^{\alpha'+\beta'} f(x) \quad \text{p.p. } x > a.$$

$$\text{ii) } \left( {}^{RL}I_{b-}^{\alpha'} \circ {}^{RL}I_{b-}^{\beta'} \right) f(x) = {}^{RL}I_{b-}^{\alpha'+\beta'} f(x) \quad \text{p.p. } x < b.$$

Si de plus  $f \in C([a, b])$  avec  $\alpha' + \beta' \geq 1$ , le résultat est valable partout sur  $[a, b]$ .

**Proposition 19:** soit  $f \in C^0([a, b])$ , on a alors:

1.  $\left( {}^{RL}I_a^{\alpha} f(x) \right)' = {}^{RL}I_a^{\alpha-1} f(x)$ , pour  $\alpha > 1$  (dérivée usuelle de l'intégrale fractionnaire).



2.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} ({}^{RL}I_a^\alpha f(x)) = f(x)$ , pour  $\alpha > 0$ .

**Théorème 14:** soit  $\alpha > 0$  et soit  $(f_k)_{k=1}^\infty$  une suite uniformément convergente de fonctions continues sur  $[a, b]$ . Alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et le signe limite comme suit:

$$\left( {}^{RL}I_a^\alpha \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right) (x) = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} {}^{RL}I_a^\alpha f_k \right) (x).$$

En particulier, la suite  $({}^{RL}I_a^\alpha f_k)_{k=1}^\infty$  est uniformément convergente.

**Théorème 15:** soient  $1 \leq p < \infty$  et  $(\alpha_k)_{k=1}^\infty$  une suite numérique convergeant vers  $\alpha$  avec  $\alpha > 0$ . Alors on a:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} {}^{RL}I_{a+}^{\alpha_k} f(x) = {}^{RL}I_{a+}^\alpha f(x),$$

la convergence étant au sens de la norme  $L_p([a, b])$ .

**Proposition 20:** soient  $f \in C([a, b])$  et  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . Alors, les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et à droite possèdent les propriétés suivantes:

1.

$${}^{RL}I_{a+}^\alpha ({}^{RL}I_{a+}^\beta f) = {}^{RL}I_{a+}^{\alpha+\beta} f.$$

2.

$${}^{RL}I_{b-}^\alpha ({}^{RL}I_{b-}^\beta f) = {}^{RL}I_{b-}^{\alpha+\beta} f.$$

3.

$$\frac{d}{dt} ({}^{RL}I_{a+}^\alpha f) = {}^{RL}I_{a+}^{\alpha-1} f.$$

4.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} ({}^{RL}I_{a+}^\alpha f)(t) = f(t).$$

**Exemple 4:** 1) L'intégrale de  $f(t) = (t - a)^\beta$  au sens de Riemann-Liouville. Soient  $\alpha > 0, \beta > -1$ , alors on a:

$${}^{RL}I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\beta d\tau. \quad (2.1.2)$$

En effectuant le changement de variable:  $\tau = a + s(t - a)$ , où  $s = 0$  quand

$\tau = a$  et  $s = 1$  quand  $\tau = t$  et  $d\tau = (t - a) ds$ , alors (2.1.2) devient:

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_a^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t - a)^{\alpha-1} (1 - s)^{\alpha-1} s^\beta (t - a)^{\beta+1} ds \\ &= \frac{(t - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\ &= \frac{(t - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^{(\beta+1)-1} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta puis la relation:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)},$$

on arrive à:

$$\begin{aligned} {}^{RL}I^\alpha f(t) &= \frac{(t - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1) = \frac{(t - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (t - a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f(t) = (t - a)^\beta$  est donnée par:

$${}^{RL}I^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (t - a)^{\alpha+\beta}.$$

On voit bien que c'est une généralisation du cas  $\alpha = 1$  où on a:

$${}^{RL}I^1 (t - a)^\beta = \frac{1}{\beta + 1} (t - a)^{\beta+1}.$$

2) L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  d'une constante est donnée par:

$${}^{RL}I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^\alpha.$$

On considère l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  définie par:

$${}^{RL}I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Soit  $f(t) = C$  une constante. Alors:

$${}^{RL}I_a^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} C ds.$$

Comme  $C$  est constante, on obtient:

$${}^{RL}I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds.$$

Effectuant le changement de variable:  $u = t - s \Rightarrow du = -ds$ .

Quand  $s = a$ ,  $u = t - a$ , et quand  $s = t$ ,  $u = 0$ . Ainsi,

$$\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \int_{t-a}^0 u^{\alpha-1} (-du) = \int_0^{t-a} u^{\alpha-1} du.$$

On calcule alors:

$$\int_0^{t-a} u^{\alpha-1} du = \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha},$$

donc,

$${}^{RL}I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha},$$

En utilisant la propriété de la fonction Gamma:  $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ , on obtient:

$${}^{RL}I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha.$$

## 2.2 Dérivée fractionnaire [22], [29], [42]

De nombreux mathématiciens ont contribué à l'élaboration de la théorie de la dérivation d'ordre non entier et différentes définitions de cet opérateur ont vu le jour. Dans cette section, nous allons présenter les définitions les plus familières: celle de Riemann-Liouville, Caputo et du Caputo-fabrizio.

### 2.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 33** (Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville): soit  $f$  une fonc-

tion intégrable sur  $[a, b]$ , la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de  $f$  d'ordre  $\alpha$  où  $0 \leq \alpha \leq 1$  notée  ${}^{RL}D^\alpha f(x)$  est définie par:

$$\text{i) } {}^{RL}D_{a+}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left( \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \right), \quad x > a, \quad (2.2.1)$$

$$\text{ii) } {}^{RL}D_{b-}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left( \int_x^b (t-x)^{-\alpha} f(t) dt \right), \quad x < b. \quad (2.2.2)$$

${}^{RL}D_{a+}^\alpha$  s'appelle dérivée à gauche fractionnaire de Riemann-Liouville et  ${}^{RL}D_{b-}^\alpha$  s'appelle dérivée à droite fractionnaire de Riemann-Liouville.

**Remarque 6:**

(i) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $0 \leq \alpha \leq 1$ , alors:  ${}^{RL}D_{a+}^\alpha f = {}^{RL}D^1 \circ {}^{RL}I_{a+}^{1-\alpha} f$ , car:

$${}^{RL}D_{a+}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt = \frac{d}{dx} {}^{RL}I_{a+}^{1-\alpha} f = {}^{RL}D^1 \circ {}^{RL}I_{a+}^{1-\alpha} f.$$

(ii) Pour  $\alpha = 0$ :

$${}^{RL}D_{a+}^0 = {}^{RL}D_{b-}^0 = Id.$$

Nous pouvons cependant facilement généraliser la définition de dérivée fractionnaire à tout  $\alpha$  réel positif. En effet:

**Définition 34:** pour une fonction donnée  $f$  sur  $L^1([a, b])$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $n-1 < \alpha < n$  avec  $n = [\alpha] + 1$ , la dérivée fractionnaire (R-L) est définie par:

$$\text{i) } {}^{RL}D_{a+}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \left( \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \right), \quad (2.2.3)$$

$$\text{ii) } {}^{RL}D_{b-}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dx} \right)^n \left( \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt \right). \quad (2.2.4)$$

où  $[\cdot]$  désigne la partie entière d'un nombre réel.

**Remarque 7:** pour  $\alpha = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , l'opérateur  ${}^{RL}D^\alpha$  donne le même résultat que la dérivée usuelle pour les ordres entiers, tel que:

$$\begin{cases} {}^{RL}D_{a+}^n f(x) = f^{(n)}(x), \\ {}^{RL}D_{b-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x). \end{cases}$$

**Démonstration:** on rappelle la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville à gauche et à droite d'ordre  $\alpha > 0$ :

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

$${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

où  $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ .

**Cas de la dérivée à gauche:** pour  $\alpha = n$ :

$${}^{RL}D_{a+}^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(0)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{-1} f(t) dt.$$

Or

$$\frac{1}{\Gamma(0)} = 0,$$

mais il faut comprendre cette expression comme une limite. pour  $\alpha \rightarrow n$ , on utilise la propriété suivante:

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \rightarrow f^{(n)}(x) \quad \text{quand} \quad \alpha \rightarrow n.$$

L'opérateur intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $n-\alpha$  tend vers l'identité quand  $\alpha \rightarrow n$ , et la dérivée d'ordre  $n$  donne alors  $f^{(n)}(x)$ .

Ainsi:

$${}^{RL}D_{a+}^n f(x) = f^{(n)}(x).$$

**Cas de la dérivée à droite:** de même, pour  $\alpha = n$ :

$${}^{RL}D_{b-}^n f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(0)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{-1} f(t) dt.$$

De manière analogue la limite de l'intégrale fractionnaire d'ordre  $n-\alpha$  tend vers l'identité, et la dérivée d'ordre  $n$  appliquée donne  $f^{(n)}(x)$ , mais avec un facteur  $(-1)^n$  provenant de la définition. On obtient donc:

$${}^{RL}D_{b-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

**Exemple 5** (Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles):

soit  $\beta > 0$ , on a:

$$1. {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

$$2. {}^{RL}D_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}.$$

Nous rappelons d'abord la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, à gauche d'ordre  $\alpha$ :

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{d^n}{dx^n} (I_{a+}^{n-\alpha}f(x)),$$

où  $n-1 < \alpha < n$  et  ${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}$  est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville définie par:

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t) dt,$$

on a:

$$f(x) = (x-a)^{\beta-1}, \quad \beta > 0.$$

Nous calculons d'abord l'intégrale fractionnaire

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta-1}dt.$$

En effectuant le changement de variable  $t = a + (x-a)u$ , alors  $dt = (x-a)du$ , Lorsque  $t = a$ , on a  $u = 0$ , et lorsque  $t = x$ , on a  $u = 1$ . On obtient alors  $(x-t) = (x-a)(1-u)$  et  $(t-a) = (x-a)u$ . En remplaçant dans l'intégrale, on obtient:

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-u)]^{\alpha-1}[(x-a)u]^{\beta-1}(x-a) du.$$

En regroupant les puissances de  $(x-a)$ , on obtient:

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du.$$

L'intégrale

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du,$$

est la fonction Bêta d'Euler:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

on substitue et on obtient:

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

donc

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

On utilise maintenant la relation:

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} = \frac{d^n}{dx^n} {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha}.$$

En appliquant cette propriété à la puissance  $(x-a)^{\beta-1}$  on obtient:

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

En procédant de manière analogue pour la dérivée fractionnaire à droite et la fonction:  $f(x) = (b-x)^{\beta-1}$ , on obtient:

$${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}.$$

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \\ &= \frac{d}{dx} {}^{RL}I_{a+}^{1-\alpha} f = {}^{RL}D^1 \circ {}^{RL}I_{a+}^{1-\alpha} f. \end{aligned}$$

**Exemple 6:** 1) La dérivée de  $f(t) = (t-a)^{\beta}$  au sens de Riemann-Liouville.

$${}^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha}(t-a)^{\beta}.$$

Soit  $\alpha > 0$  tel que  $n-1 < \alpha < n$  et  $\beta > -1$ , on a:

$${}^{RL}I^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}(t-a)^{\alpha+\beta},$$

on substitue, on obtient:

$${}^{RL}D^\alpha(t-a)^\beta = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha}(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha+\beta}. \quad (2.2.5)$$

En tenant compte de:

$$\frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha+\beta} = \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.2.6)$$

On substitue le résultat (2.2.6) dans la formule (2.2.5), pour obtenir:

$${}^{RL}D^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f(t) = (t-a)^\beta$  est donnée par:

$${}^{RL}D^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.2.7)$$

On pose:  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{3}{2}$ . Alors,

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)} (t-a)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} (t-a) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} (t-a). \end{aligned}$$

En particulier, lorsque  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$  et  $a = 0$ , on obtient:

$${}^{RL}D^{0.5}x^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2) La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante

Si  $f(t) = C$  est non nulle, sa valeur est:

$${}^{RL}D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

on a:

$${}^{RL}D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt.$$



Comme  $f(t) = C$ , on obtient:

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt.$$

Calculons l'intégrale:

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt.$$

Posons le changement de variable  $u = x - t$  alors  $du = -dt$ . Lorsque  $t = a$ , on a  $u = x - a$ , et lorsque  $t = x$ , on a  $u = 0$ , l'intégrale devient:

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt = \int_{x-a}^0 u^{-\alpha} (-du) = \int_0^{x-a} u^{-\alpha} du.$$

Or

$$\int_0^{x-a} u^{-\alpha} du = \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Ainsi

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt = \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

On obtient alors

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left( \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right).$$

Or

$$\frac{d}{dx} (x-a)^{1-\alpha} = (1-\alpha)(x-a)^{-\alpha},$$

donc

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = (x-a)^{-\alpha},$$

alors:

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} C = \frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

### 2.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967–1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisée, car les problèmes appliqués en viscoélasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

**Définition 35:** les dérivées fractionnaires de Caputo, notées  $({}_0^C D_{a+}^\alpha f)(x)$  et  $({}_0^C D_{b-}^\alpha f)(x)$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  sont définies par:

$$({}_0^C D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

$$({}_0^C D_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^b (t - x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

où  $n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1$ .

Elles sont aussi reliées aux dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville comme suit:

$$({}_0^C D_{a+}^\alpha f)(t) = D_{a+}^\alpha \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right],$$

$$({}_0^C D_{b-}^\alpha f)(t) = D_{b-}^\alpha \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (t - b)^k \right].$$

Ces définitions coïncident si la fonction  $f \in AC^n[a, b]$ . Dans les cas suivants, on a la dérivée fractionnaire de Caputo qui coïncide avec celle de Riemann-Liouville:

$$({}_0^C D_{a+}^\alpha f)(x) = (D_{a+}^\alpha f)(x),$$

si  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$  et

$$({}_0^C D_{b-}^\alpha f)(x) = (D_{b-}^\alpha f)(x),$$

si  $f(b) = f'(b) = \dots = f^{(n-1)}(b) = 0$ .

D'après les dernières relations entre l'opérateur de Riemann-Liouville et celui de Caputo, on voit clairement qu'ils ont presque les mêmes propriétés.

**Propriétés:** si  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et  $\operatorname{Re} \beta > 0$ , alors:

1.

$$({}_0^C D_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-1} \quad (\operatorname{Re} \alpha \geq 0, \operatorname{Re} \beta > n).$$

2.

$$({}_0^C D_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-1} \quad (\operatorname{Re} \alpha \geq 0, \operatorname{Re} \beta > n).$$

3.

$$({}_0^C D_{a+}^\alpha (t-a)^k) = 0 \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

4.

$$({}_0^C D_{a+}^\alpha C = 0 \quad \text{et} \quad {}_0^C D_{b-}^\alpha C = 0), \text{ pour toute constante } c.$$

**Démonstration:** 1) Pour  $\operatorname{Re} \beta > n$ , on a:

$${}_0^C D_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

Soit  $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$  avec  $\operatorname{Re} \beta > n$ . On calcule de la dérivée classique d'ordre  $n$ :

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)} (t-a)^{\beta-n-1}.$$

On substitue dans la définition de Caputo:

$${}_0^C D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)} (\tau-a)^{\beta-n-1} (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau.$$

En effectuant un changement de variable  $\tau = a + u(t-a)$ ,  $d\tau = (t-a)du$ ,  $u \in [0, 1]$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 u^{\beta-n-1} (1-u)^{n-\alpha-1} du.$$

On utilisant la fonction Bêta, on obtient:

$$\int_0^1 u^{\beta-n-1}(1-u)^{n-\alpha-1} du = B(\beta-n, n-\alpha) = \frac{\Gamma(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)}.$$

On substitue:

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} \frac{\Gamma(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1},$$

donc:

$${}_0^C D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

2) Pour  $\text{Re } \beta > n$ , on a:

$${}_0^C D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}.$$

Soit  $f(t) = (b-t)^{\beta-1}$  avec  $\text{Re } \beta > n$ , et

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)}(-1)^n(b-t)^{\beta-n-1}.$$

On substitue dans la définition de Caputo à droite

$${}_0^C D_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)}(-1)^n(b-\tau)^{\beta-n-1}(\tau-t)^{n-\alpha-1} d\tau,$$

donc:

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (b-\tau)^{\beta-n-1}(\tau-t)^{n-\alpha-1} d\tau.$$

En effectuant un changement de variable  $\tau = t + u(b-t)$ ,  
 $d\tau = (b-t)du$ ,  $u \in [0, 1]$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 u^{n-\alpha-1}(1-u)^{\beta-n-1} du,$$

en utilisant la fonction Bêta:

$$\int_0^1 u^{n-\alpha-1}(1-u)^{\beta-n-1}du = B(n-\alpha, \beta-n) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta-\alpha)},$$

alors:

$${}_0^C D_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}.$$

3) Pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , on a:

$${}_0^C D_{a+}^\alpha (t-a)^k = 0.$$

Soit  $f(t) = (t-a)^k$  avec  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Puisque  $k < n$ , la dérivée classique d'ordre  $n$  est nulle:  $f^{(n)}(t) = 0$ . En substituant dans la définition de Caputo:

$${}_0^C D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{0}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau = 0.$$

4) Pour toute constante  $C$ , on a:

$${}_0^C D_{a+}^\alpha C = 0 \quad \text{et} \quad {}_0^C D_{b-}^\alpha C = 0.$$

Soit  $f(t) = C$  une constante, pour  $n \geq 1$ :  $f^{(n)}(t) = 0$ .

Pour la dérivée à gauche:

$${}_0^C D_{a+}^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{0}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau = 0.$$

Pour la dérivée à droite:

$${}_0^C D_{b-}^\alpha C = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{0}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau = 0.$$

Donc La dérivée d'une constante au sens de Caputo est nulle  ${}_0^C D^\alpha C = 0$ .

**Propriétés:** Si  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $\text{Re } \alpha > 0$ ,

1.

$$\frac{\partial}{\partial x} ({}_0^C D_t^\alpha u) = {}_0^C D_t^\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

2.

$$\int_0^t {}^C D_t^{\alpha+1} u dt = {}^C D_t^\alpha u.$$

1) On a:

$${}_0^C D_t^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} ({}_0^C D_t^\alpha u) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right). \end{aligned}$$

D'après shwartz  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial u}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$ , donc:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} d\tau \right) = {}_0^C D_t^\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

2) On a:

$${}_0^C D_t^{\alpha+1} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau (\tau-s)^{-\alpha} u''(s) ds,$$

donc:

$$\int_0^t {}_0^C D_t^{\alpha+1} u(t) dt = \int_0^t \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau (\tau-s)^{-\alpha} u''(s) ds \right] d\tau,$$

D'après le Théorème de Fubini  $0 \leq s \leq \tau \leq t$  devient  $0 \leq s \leq t, s \leq \tau \leq t$ , donc:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t u''(s) \left( \int_s^t (\tau-s)^{-\alpha} d\tau \right) ds,$$

on a:

$$\int_s^t (\tau-s)^{-\alpha} d\tau = \left[ \frac{(\tau-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_s^t = \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

donc, on obtient:

$$\frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} u''(s) ds.$$

Maintenant, en effectuant une intégration par parties sur  $\int_0^t (t-s)^{1-\alpha} u''(s) ds$   
 $u = (t-s)^{1-\alpha} \implies u' = -(1-\alpha)(t-s)^{-\alpha}$  et  $v' = u'' \implies v = u'$ , donc:

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} u''(s) ds &= [(t-s)^{1-\alpha} u'(s)]_0^t - \int_0^t -(1-\alpha)(t-s)^{-\alpha} u'(s) ds \\ &= \int_0^t (1-\alpha)(t-s)^{-\alpha} u'(s) ds, \end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned} \int_0^t {}^C D_t^{\alpha+1} u(t) dt &= \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} u''(s) ds \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (1-\alpha)(t-s)^{-\alpha} u'(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds = {}^C D_t^\alpha u. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

**Exemple 7:** 1) La dérivée fractionnaire de  $f(t) = (t-a)^\alpha$  au sens de Caputo soit  $p$  un entier et  $0 < n-1 < p < n$  avec  $\alpha > n-1$ :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (\tau-a)^{\alpha-n}, \quad (2.2.9)$$

d'où:

$${}_0^C D^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau.$$

En effectuant le changement de variable  $\tau = a + s(t-a)$ , où  $s = 0$  quand  $\tau = a$  et  $s = 1$  quand  $\tau = t$  et  $d\tau = (t-a)ds$ , on obtient:

$${}_0^C D^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)}(t - a)^{\alpha - p} \int_0^1 (1 - s)^{n - p - 1} s^{\alpha - n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + 1)B(n - p, \alpha - n + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)}(t - a)^{\alpha - p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)\Gamma(\alpha - p + 1)}(t - a)^{\alpha - p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - p + 1)}(t - a)^{\alpha - p}.
\end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction  $f(t) = (t - a)^\alpha$  est donnée par:

$${}_0^C D^p (t - a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - p + 1)}(t - a)^{\alpha - p}.$$

### 2.2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Fabrizio [14]

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, parmi les principales, on distingue celles de Riemann–Liouville et de Caputo, qui reposent sur des noyaux singuliers de type  $(t - \tau)^{-\alpha}$ . Ces noyaux impliquent une mémoire longue. Cependant, cette propriété peut s’avérer irréaliste dans certaines applications physiques où les effets de mémoire décroissent avec le temps.

Michele Caputo et Mauro Fabrizio ont introduit en 2015 une nouvelle définition de dérivée fractionnaire reposant sur un noyau exponentiel non singulier qui se distingue par le fait qu’il ne présente pas de singularité lorsque  $\tau \rightarrow t$ , contrairement aux noyaux classiques. En effet, la fonction exponentielle reste bornée et régulière sur tout l’intervalle d’intégration. De plus, ce noyau modélise une mémoire décroissante de type exponentiel. Cette propriété rend la dérivée de Caputo–Fabrizio particulièrement adaptée à la modélisation de nombreux phénomènes réels, tels que les processus de relaxation, les systèmes viscoélastiques et les phénomènes de diffusion avec mémoire finie.

Donc la dérivée de Caputo–Fabrizio offre un cadre mathématique plus réaliste pour la modélisation des systèmes physiques, en combinant simplicité analytique et pertinence physique.



**Définition 36:** la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Fabrizio d'une fonction  $\varphi \in L^2([0, T])$  est donnée par:

$${}^{CF}D_t^{\alpha+1}\varphi(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t e^{\frac{-\alpha(t-s)}{1-\alpha}} \varphi'(s) ds, \quad \alpha \in [0, 1],$$

où  $M(\alpha)$  est une constante de normalisation telle que  $M(0) = M(1) = 1$ .

**Définition 37:** l'intégrale fractionnaire de Caputo-Fabrizio d'ordre  $\alpha$ , d'une fonction  $\varphi : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , est:

$${}^{CF}I_t^\alpha \varphi(t) = (1-\alpha)[\varphi(t) - \varphi(0)] + \alpha \int_0^t \varphi(s) ds,$$

avec

$$\varphi(0) = \int_a^0 e^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}s} \varphi'(s) ds.$$

**Exemple 8:** 1) La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo-Fabrizio est nulle

$${}^{CF}D_t^\alpha C = 0.$$

Considérons maintenant la fonction constante  $f(t) = C, C \in \mathbb{R}$ . La dérivée classique de  $f$  est alors  $f'(t) = 0$ . En remplaçant dans la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo-Fabrizio, on obtient:

$${}^{CF}D_t^\alpha C = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t 0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds = 0.$$

Ainsi, la dérivée fractionnaire de Caputo-Fabrizio d'une constante est nulle:

$${}^{CF}D_t^\alpha C = 0.$$

2) La dérivée fractionnaire de Caputo-Fabrizio de la fonction  $f(t) = t$

Considérons la fonction  $f(t) = t$ . La dérivée classique de  $f(t)$  est  $f'(t) = 1$ . on a:

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds.$$

En remplaçant  $f'(s) = 1$ , on obtient:

$${}^{CF}D_t^\alpha t = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds.$$

Posons  $\lambda = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ , alors

$${}^{CF}D_t^\alpha t = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} ds.$$

En calculant l'intégrale, on obtient:

$$\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Ainsi

$${}^{CF}D_t^\alpha t = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Finalement, on obtient:

$${}^{CF}D_t^\alpha t = \frac{M(\alpha)}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t}\right).$$

**Lemme 3:** soit  $\varphi \in L^2([0, T])$ . La solution de l'équation différentielle  ${}^{CF}I_t^\alpha \varphi(t) = 0$ , est seulement la fonction constante.

**Démonstration:** rappelons la définition de l'intégrale fractionnaire de Caputo-Fabrizio d'ordre  $\alpha \in [0, 1]$  appliquée à une fonction  $\varphi(t)$ :

$${}^{CF}I_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \varphi(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t \varphi(s) ds,$$

où  $M(\alpha)$  est une constante de normalisation telle que  $M(0) = M(1) = 1$ .

Considérons maintenant le cas où  $\varphi(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Alors:

$$\begin{aligned} {}^{CF}I_t^\alpha \varphi(t) &= \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \underbrace{\varphi(t)}_{=0} + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t \underbrace{\varphi(s)}_{=0} ds \\ &= \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \cdot 0 + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons bien montré que:  ${}^{CF}I_t^\alpha \varphi(t) = 0$ .

**Lemme 4:** la relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo-Fabrizio et l'intégrale fractionnaire de Caputo-Fabrizio est donnée par:

$${}^{CF}I_t^\alpha ({}^{CF}D_t^{\alpha+1}\varphi(t)) = \varphi(t) - \varphi(0), \quad t > 0, \alpha \in (0, 1).$$

**Démonstration:** la dérivée fractionnaire de Caputo-Fabrizio est définie par:

$${}^{CF}D_t^\alpha \varphi(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t \varphi'(s) \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)\right) ds.$$

L'intégrale de Caputo-Fabrizio est définie par:

$${}^{CF}I_t^\alpha f(t) = (1-\alpha)f(t) + \alpha \int_0^t f(s) ds.$$

Posons  $\xi(t) = {}^{CF}D_t^\alpha \varphi(t)$ , alors:

$${}^{CF}I_t^\alpha \xi(t) = (1-\alpha)\xi(t) + \alpha \int_0^t \xi(s) ds.$$

En remplaçant  $\xi(t)$  par sa définition et en utilisant le Théorème de Fubini pour échanger l'ordre d'intégration, on obtient:

$${}^{CF}I_t^\alpha ({}^{CF}D_t^\alpha \varphi(t)) = \int_0^t \varphi'(s) ds.$$

Ainsi

$${}^{CF}I_t^\alpha ({}^{CF}D_t^\alpha \varphi(t)) = \varphi(t) - \varphi(0).$$

Ce qui démontre le résultat.

**Lemme 5:** [5] on suppose que:

$${}^{CF}I_t^\alpha \varphi(t) = \xi(t), \quad t > 0, \alpha \in (0, 1).$$

Alors, on a:

$$\varphi(t) = (1-\alpha) [\xi(t) - \xi(0)] + \alpha \int_0^t \xi(s) ds + \varphi(0).$$

**Démonstration:** on applique l'intégrale de Caputo-Fabrizio aux deux côtés

$${}^{CF}I_t^\alpha ({}^{CF}D_t^\alpha \varphi(t)) = {}^{CF}I_t^\alpha (\xi(t)).$$

D'après la relation fondamentale entre l'intégrale et la dérivée de Caputo-Fabrizio, on a:

$${}^{CF}I_t^\alpha ({}^{CF}D_t^\alpha \varphi(t)) = \varphi(t) - \varphi(0).$$

Ainsi

$$\varphi(t) - \varphi(0) = {}^{CF}I_t^\alpha (\xi(t)).$$

Par définition de l'intégrale de Caputo-Fabrizio

$${}^{CF}I_t^\alpha f(t) = (1 - \alpha)f(t) + \alpha \int_0^t f(s)ds,$$

on obtient:

$${}^{CF}I_t^\alpha (\xi(t)) = (1 - \alpha)\xi(t) + \alpha \int_0^t \xi(s)ds.$$

En tenant compte de la condition initiale, on écrit

$$\varphi(t) = (1 - \alpha)[\xi(t) - \xi(0)] + \alpha \int_0^t \xi(s)ds + \varphi(0).$$

Ce qui démontre le résultat.

## 2.3 Les espaces des fonctions avec des dérivées fractionnaires [37]

### 2.3.1 Espaces de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ pour $0 < s < 1$

**Définition 38:** soient  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in ]1, +\infty[$ , on définit l'espace fractionnaire de Sobolev:

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+N}} dx dy < \infty \right\}.$$

**Proposition 21:** pour  $0 < s < 1$ , l'espace  $W^{s,p}(\Omega)$  muni de la norme:

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + [\|u'\|_{W^{s,p}(\Omega)}]^p,$$

où

$$[\|u'\|_{W^{s,p}(\Omega)}] = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+N}} dx dy.$$

Avec:

1.  $W^{s,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .
2. pour  $1 < p < +\infty$ ,  $W^{s,p}(\Omega)$  est un espace réflexif et séparable.

Lorsque  $p = 2$ , l'espace est noté  $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$ , et c'est un espace de Hilbert sur  $\mathbb{R}^N$ , il est souvent défini via la transformée de Fourier  $\hat{u}$ :

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

muni de la norme:

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

avec:

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \forall x \in \mathbb{R}^N, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

**Corollaire 5:** les espaces  $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  satisfont aux propriétés d'injection continue suivantes:

1. si  $0 < s' < s < 1$ , alors  $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{s',p}(\mathbb{R}^N)$ ;
2. si  $s \in ]0, 1[$ , alors  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ .

### 2.3.2 Espaces de Sobolev fractionnaires à poids

**Définition 39:** un espace de Sobolev fractionnaire à poids, souvent noté  $W^{s,p}(\Omega, w)$  ou  $H^{s,p}(\Omega, w)$ , est un espace fonctionnel généralisant les espaces de Sobolev classiques ( $W^{k,p}$ ) aux dérivées d'ordre non entier  $s \in \mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{N}$  et où l'intégrabilité des fonctions et de leurs dérivées est pondérée par un poids  $w(x)$ . L'espace  $W^{s,p}(\Omega, w)$  est muni de la norme:

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega, w)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p w(x) dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy dx \right)^{1/p}.$$

**2.3.3 L'espace  $L_p^2$ :** est l'espace  $L^2$  avec poids  $p$ , et on définit généralement par:

$$L_p^2(0, 1) = \left\{ u \text{ mesurable sur } (0, 1) : \int_0^1 x^p |u(x)|^2 dx < +\infty \right\},$$

la norme associée est:

$$\|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 = \left( \int_0^1 x^p |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace  $L_p^2$  est un espace de Banach muni du produit scalaire donc est un espace de Hilbert.

### 2.3.4 Inégalités nécessaires [1]

**Lemme 6:** soit  $Z(t)$  une fonction absolument continue sur l'intervalle  $[0, T]$ , l'inégalité suivante est définie par:

$$Z(t_0)_0^C D_t^\alpha Z(t) \geq \frac{1}{2}_0^C D_t^\alpha Z^2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

**Lemme 7:** soit la fonction absolument continue non négative  $J(s)$  satisfait l'inégalité suivante:

$$D_t^\alpha J(t) \leq r_1 J(t) + r_2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Pour presque tout  $t \in [0, T]$ , où  $r_1$  est une constante positive et  $r_2$  est une fonction non négative intégrable sur  $[0, T]$ , alors:

$$J(t) \leq J(0)E_\alpha(r_1 t^\alpha) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(r_1 t^\alpha)D_t^{-\alpha}r_2(t).$$

**Inégalité de Young:** pour tout  $\varepsilon > 0$ , et pour  $a, W$  arbitraires dans  $\mathbb{R}$ , nous avons l'inégalité:

$$aW \leq \frac{1}{p}|\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p} \left| \frac{W}{\varepsilon} \right|^{\frac{p}{p-1}}, \quad p > 1.$$

**Inégalité de Cauchy:** pour tout  $\varepsilon > 0$ , et pour  $a, W$  arbitraires dans  $\mathbb{R}$ , nous avons l'inégalité:

$$aW \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}W^2, \quad \varepsilon > 0.$$

**Inégalité de Poincaré:** une inégalité de type Poincaré  $\forall u \in L_p^2(0, 1)$ , et  $c_p > 0$  la constante de Poincaré, on a:

$$\|P_x(\xi U)\|_{L_p^2([0,1])}^2 \leq c_p \int_0^1 \|U\|_{L_p^2([0,1])}^2,$$

où

$$P_x(\xi U) = \int_0^x \xi U(\xi, t) d\xi.$$

### Inégalité fractionnaire

**Lemme 8:** si  $F(x, t) \in C(\bar{D})$ , et  $0 < \alpha < 1$ ,  $t \in [0, T]$  alors on a:

$${}_0^C D_t^{-\alpha-1} \|F\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t \|F\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.$$

**Lemme de Gronwall [13]:** soient  $\varphi, \psi$  et  $y$  trois fonctions continues sur un segment  $[a, b]$ , à valeurs positives et vérifiant l'inégalité:

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s) ds.$$

Alors:

$$\forall t \in [a, b] : \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) \exp \left( \int_s^t \psi(u) du \right) ds.$$

### Intégration par parties [19]

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions.

**Proposition 22:** Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$ , tel que  $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ , où  $\lfloor \alpha \rfloor$  est la partie entière de  $\alpha$ ,  $f \in C^n((a, b))$  et  $g \in C^n((a, b))$ . Alors

$$\int_a^b f(x) {}_0^C \partial_t^\alpha g(x) dx = \int_a^b {}_0^C \partial_t^\alpha f(x) g(x) dx,$$

## 2.4 Équations intégrales fractionnaires [16], [28]

Les équations intégrales sont l'un des outils mathématiques utiles dans l'analyse fonctionnelle et appliquée. Cela est particulièrement vrai pour les problèmes de vibrations, mécaniques, l'ingénierie et de la physique.

Les fondements du calcul fractionnaire, qui est le précurseur des équations intégrales fractionnaires, remontent à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle. Des mathématiciens comme Riemann, Liouville, et Grünwald ont exploré les idées de dérivation et d'intégration d'ordre non entier. Ces travaux ont jeté les bases théoriques pour des opérateurs qui pouvaient être appliqués de manière itérée un nombre fractionnaire de fois.

L'application de ces opérateurs fractionnaires aux équations intégrales a commencé à prendre forme plus concrètement au milieu du 20<sup>ème</sup> siècle.

Les chercheurs ont commencé à examiner comment les propriétés des équations intégrales classiques comme les équations de Fredholm et Volterra se manifestaient lorsqu'elles étaient formulées avec des noyaux impliquant des dérivées ou intégrales fractionnaires.

La fin du 20<sup>ème</sup> siècle et le début du 21<sup>ème</sup> siècle ont vu une explosion de l'intérêt pour les équations intégrales fractionnaires. Cela a été motivé par leur capacité à modéliser des phénomènes dans divers domaines: viscoélasticité, électrochimie, contrôle, milieux poreux, électromagnétique, etc. Il y a eu un développement significatif dans les équations différentielles ordinaires et partielles d'ordre fractionnaire ces dernières années.

Parfois, il y a intérêt à réduire la résolution d'un problème à valeur initiale ou bien aux limites avec des conditions locales ou non locales à la résolution d'une équation intégrale équivalente, qui facilite la preuve d'existence de solution d'une telle équation différentielle, en utilisant les Théorèmes du point fixe comme le Théorème de Banach, Schauder, Leray-Schauder et de Mönch puisqu'ils fournissent les outils nécessaires pour avoir des résultats d'existence dans beaucoup de problèmes non linéaires différents.

#### 2.4.1 Exemples des équations intégrales

**Équations intégrales de Volterra:** dans les équations intégrales de Volterra, au moins une des bornes de l'intégration est une variable et la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît seulement à l'intérieur du signe intégral sous la forme:

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)u(t) dt, \quad (2.4.1)$$

est appelée équation intégrale de Volterra non homogène du premier type.

$$xe^{2x-1} = \int_0^x e^{xt}u(t)dt.$$

Cependant, dans les équations intégrales de Volterra, où la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral sous la forme:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t) dt, \quad (2.4.2)$$

est appelée équation intégrale de Volterra non homogène du deuxième type.

$$u(x) = e^{2x} + \frac{1}{4} \int_0^x \ln\left(\frac{t}{x}\right) u(t)dt.$$



**Équations intégrales de Fredholm:** pour les équations intégrales de Fredholm, les bornes de l'intégration sont fixées. La fonction inconnue  $u(x)$  peut apparaître seulement à l'intérieur de l'équation intégrale sous la forme:

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)u(t) dt, \quad (2.4.3)$$

est appelée équation intégrale de Fredholm non homogène du premier type.

$$\cos(x) = \int_0^1 (x - t)u(t) dt.$$

Pour les équations intégrales du second type de Fredholm, la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t) dt. \quad (2.4.4)$$

est appelée équation intégrale de Fredholm non homogène du deuxième type.

$$u(x) = \cos(x) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{x + 1} u(t) dt.$$

**Remarque 8:** on dit qu'une équation intégrale est singulière si une ou les limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.

#### 2.4.2 Exemples des équations intégrales fractionnaires

**Équation intégrale fractionnaire de Volterra:** une équation intégrale fractionnaire de Volterra est définie par une intégrale dont la borne supérieure dépend de la variable  $t$ . Elle s'écrit sous la forme suivante:

$$u(t) = f(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} K(t, s) u(s) ds, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.4.5)$$

Dans cette équation,  $u(t)$  est la fonction inconnue,  $f(t)$  une fonction donnée, et  $K(t, s)$  le noyau.

**Équation intégrale fractionnaire de Fredholm:** contrairement au cas de Volterra, une équation intégrale fractionnaire de Fredholm est définie sur un intervalle borné fixe. Elle s'écrit sous la forme suivante:

$$u(t) = f(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t-s)^{\alpha-1} K(t,s) u(s) ds, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.4.6)$$

### 2.4.3 Quelques Théorèmes du point fixe

**Définition 40:** soit  $T$  un opérateur défini dans un espace de Banach  $E$  dans lui-même. Alors pour tout  $x \in E$  tel que  $x = T(x)$ ,  $x$  s'appelle un point fixe de l'opérateur  $T$ .

#### Application $k$ -contractante

**Définition 41:** soient  $(X, d)$  et  $(Y, d')$  deux espaces métriques. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est dite  $k$ -contractante s'il existe une constante  $k \in [0, 1[$  telle que

$$\forall x, y \in X, \quad d'(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

Autrement dit,  $f$  est lipschitzienne de rapport  $k < 1$ . Cette propriété a une conséquence fondamentale:

**Théorème du point fixe de Banach [24]:** soient  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $f : E \rightarrow E$  une application  $K$ -contractante. Alors il existe un unique point fixe  $x^* \in E$  de  $f$  dans  $E$  c'est à dire une unique solution de  $f(x^*) = x^*$ .

**Théorème du point fixe du Schauder [24]:** soit  $X$  un espace de Banach,  $K \subset X$  un ensemble convexe, fermé, borné et non vide, et soit  $T : K \rightarrow K$  un opérateur complètement continu i.e. est une application linéaire  $T : X \rightarrow Y$  entre espaces de Banach qui est à la fois continue et compacte, Alors  $T$  admet au moins un point fixe.

**Alternative non linéaire de Leray-Schauder [9]:** supposons que  $U$  soit un ouvert d'un espace de Fréchet  $X$ ,  $0 \in U$ , et  $f : \overline{U} \rightarrow X$  soit une contraction telle que  $f(\overline{U})$  soit bornée. Alors on a l'alternative (Choix exclus) suivante:

1.  $f$  admet un point fixe unique dans  $\overline{U}$ ;
2. il existe  $\lambda \in (0, 1)$  et  $u \in \partial U$  avec la propriété  $u = \lambda f(u)$ .

**Théorème du point fixe de Mönch [35]:** soit  $E$  un espace de Banach,  $K \subset E$  un ensemble non vide fermé et convexe, et  $f : K \rightarrow K$  continue avec la propriété supplémentaire que, pour certains  $x \in K$ , on a:

$$C \subset K \text{ dénombrable, } C \subset \overline{\text{conv}}(\{x\} \cup f(C)) \implies C \text{ est relativement compact.}$$

Alors  $f$  admet un point fixe dans  $K$ , avec:

- $\text{conv}(\{x\})$  désigne l'enveloppe convexe du singleton  $\{x\}$  et  $\overline{\text{conv}(\{x\})}$  est l'adhérence ou fermeture de cette enveloppe convexe.

#### 2.4.4 Exemple de solution d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions aux limites non-locales par la méthode d'estimation a priori [10]

**a) Position du problème:** on considère une équation parabolique d'ordre fractionnaire avec la dérivée de Caputo, associée à des conditions aux limites non locales de type intégral:

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = g(x, t), \quad (x, t) \in Q = \Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = w(x), \quad x \in \Omega = (0, 1), \\ \int_0^1 x u(x, t) dx = 0, \quad t \in (0, T), \\ u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (2.4.7)$$

Où l'opérateur  $L$  est défini par:

$$Lu = {}^C_0 D_t^\alpha u(x, t) - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + C u(x, t),$$

avec  $C$  une constante quelconque et la fonction  $g$  appartient à  $L^2(Q)$ .

La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $0 < \alpha < 1$  est définie par:

$${}^C_0 D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad t > 0, \quad (2.4.8)$$

où  $\Gamma$  désigne la fonction gamma. La solution du problème peut être interprétée comme solution de l'équation opérationnelle:

$$Ku = (Lu, u(x, 0)) = (g(x, t), w(x)) = F,$$

où  $K$  est un opérateur non borné agissant d'un espace de Banach  $S$  vers un espace de Hilbert  $H$  avec  $S = L^2(Q)$  muni d'une norme appropriée rendant cet espace complet et  $H = L_p^2(Q) \times H_p^1(0, 1)$ , le domaine de définition de  $K$  est:

$$D(K) = \{u \in L^2(Q) ; u_x, u_{xx}, {}^C_0 D_t^\alpha u \in L^2(Q)\}.$$

L'ensemble des fonctions  $u \in L_p^2(Q)$  telles que  $u_x, u_{xx}, {}^C_0 D_t^\alpha u \in L_p^2(Q)$  satisfaisant les conditions aux limites, et  $S$  est l'espace de Banach des fonc-

tions  $u$  associées à la norme définie par:

$$\|u\|_S^2 = \|u\|_{L^2((0,T);H_p^1(0,1))}^2 = \int_0^T \left( \|u(\cdot, t)\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \|{}_0^C D_t^\alpha u(\cdot, t)\|_{L_p^2(0,1)}^2 \right) dt, \quad (2.4.9)$$

tel que  $L^2((0, T); H_p^{\alpha,t}(0, 1))$  est un espace de Hilbert composé de toutes les fonctions abstraites fortement mesurables  $u$  sur  $[0, T]$  dans  $H_p^{\alpha,t}(0, 1)$ , et  $H$  est l'espace de Hilbert avec poids  $L_p^2(Q) \times H_p^1(0, 1)$  composé de fonctions à valeurs vectorielles  $F = (g, w)$ , dont la norme est définie par:

$$\|F\|_H^2 = \|g\|_{L_p^2(Q)}^2 + \|w\|_{H_p^1(0,1)}^2. \quad (2.4.10)$$

#### b) Unicité de la solution

Dans cette section, nous prouvons un résultat d'unicité pour le problème posé, c'est à dire que nous établissons une estimation a priori à partir de laquelle nous déduisons l'unicité de la solution.

**Théorème 16:** Pour tout  $u \in D(K)$  et  $g \in L_p^2(Q)$ , alors on a l'estimation a priori:

$$\|u\|_S^2 = \|u\|_{L^2((0,T);H_p^\alpha(0,1))}^2 \leq C^{**} \left( \|u\|_{H_p^1(0,1)}^2 + \|g\|_{L_p^2(Q)}^2 \right), \quad (2.4.11)$$

où  $C^{**}$  est une constante positive donnée par:

$$C^{**} = \max \left\{ C^*, \frac{T^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right\}, \quad C^* = \frac{\lambda}{\min(\sigma, \delta)}. \quad (2.4.12)$$

**Preuve:** Considérer le produit scalaire dans  $L^2(0, 1)$  de l'opérateur intégral-différentiel  $Mu = xu - xP_x(\xi u) + x{}_0^C D_t^\alpha u$  et  $Lu$ , comme  $Lu = g$ , donc:

$$\begin{aligned} |\langle Lu - g \mid Mu \rangle| &= |\langle Lu \mid Mu \rangle - \langle g \mid Mu \rangle| \\ &\leq |\langle Lu \mid Mu \rangle| + |\langle g \mid Mu \rangle| \end{aligned}$$

Alors:

$$\langle Lu \mid Mu \rangle_{L^2(0,1)} = \langle {}^C_0 D_t^\alpha u - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Cu \mid xu - xP_x(\xi u) + x {}^C_0 D_t^\alpha u \rangle_{L^2(0,1)} \quad (2.4.13)$$

et

$$\langle g \mid Mu \rangle = \langle g \mid xu - xP_x(\xi u) + x {}^C_0 D_t^\alpha u \rangle_{L^2(0,1)},$$

où

$$P_x(\xi u) = \int_0^x \xi u(\xi, t) d\xi.$$

Les conditions aux limites et initiales dans l'équation (2.4.7) donnent:

$$\langle {}^C_0 D_t^\alpha u \mid -xP_x(\xi u) \rangle_{L^2(0,1)} = - \int_0^1 x {}^C_0 D_t^\alpha u P_x(\xi u) dx, \quad (2.4.14)$$

$$\langle -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mid -xP_x(\xi u) \rangle_{L^2(0,1)} = \langle \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mid P_x(\xi u) \rangle_{L^2(0,1)}. \quad (2.4.15)$$

En effectuant l'intégration par parties sur  $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) P_x(\xi u) dx$ , donc:

$f = P_x(\xi u) \implies f' = xu(x)$  (d'après le Théorème fondamental de l'analyse, car on dérive une intégrale par rapport à sa borne supérieure). Et

$$g' = \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \implies g = x \frac{\partial u}{\partial x},$$

on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) P_x(\xi u) dx &= \left[ \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) P_x(\xi u) \right]_0^1 - \int_0^1 \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) (xu) dx \\ &= - \int_0^1 \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) (xu) dx. \end{aligned}$$

En effectuant une nouvelle intégrale par parties sur  $-\int_0^1 x^2 u \frac{\partial u}{\partial x} dx$ . En re-

marquant que  $u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial(u^2)}{\partial x}$ :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dx &= -\frac{1}{2} [x^2 u^2]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2)}{dx} u^2 dx = 0 + \frac{1}{2} \int_0^1 2xu^2 dx = \int_0^1 xu^2 dx \\
&= \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2,
\end{aligned}$$

$$\langle Cu \mid -xP_x(\xi u) \rangle_{L^2(0,1)} = -C \int_0^1 xuP_x(\xi u) dx, \quad (2.4.16)$$

$$\langle {}_0^C D_t^\alpha u \mid xu \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 ({}_0^C D_t^\alpha u)(xu) dx, \quad (2.4.17)$$

$$\langle -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial u}{\partial x}) \mid xu \rangle_{L^2(0,1)} = -\langle \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial u}{\partial x}) \mid u \rangle_{L^2(0,1)}, \quad (2.4.18)$$

En effectuant l'intégration par parties sur:  $-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial u}{\partial x}) u dx$

on pose:  $f = u \implies f' = u_x$  et  $g' = \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial u}{\partial x}) \implies g = xu_x$ , on obtient:

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial u}{\partial x}) u dx &= [-xu_x]_0^1 + \int_0^1 xu_x u_x dx \\
&= \int_0^1 xu_x u_x dx = \int_0^1 xu_x^2 dx = \|u_x\|_{L_p^2(0,1)}^2. \\
\langle Cu \mid xu \rangle_{L^2(0,1)} &= C \int_0^1 xu^2 dx = C \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2, \quad (2.4.19)
\end{aligned}$$

$$\langle {}_0^C D_t^\alpha u \mid {}_0^C D_t^\alpha u \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 x ({}_0^C D_t^\alpha u)^2 dx = \|{}_0^C D_t^\alpha u\|_{L_p^2(0,1)}^2, \quad (2.4.20)$$

$$\langle {}_0^C D_t^\alpha u \mid -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial u}{\partial x}) \rangle_{L^2(0,1)} = -\langle {}_0^C D_t^\alpha u \mid \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial u}{\partial x}) \rangle_{L^2(0,1)} = \langle {}_0^C D_t^\alpha u_x \mid u_x \rangle_{L_p^2(0,1)}, \quad (2.4.21)$$

en effectuant une intégration par parties sur

$$-\int_0^1 {}_0^C D_t^\alpha u \frac{\partial}{\partial x} (x \frac{\partial u}{\partial x}),$$

on pose:

$$f = {}^C_0 D_t^\alpha u \implies f' = \frac{\partial}{\partial x} ({}^C_0 D_t^\alpha u),$$

et

$$g' = \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \implies g = x \frac{\partial u}{\partial x},$$

alors:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 {}^C_0 D_t^\alpha u \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= - \left[ \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) {}^C_0 D_t^\alpha u \right]_0^1 + \int_0^1 \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} ({}^C_0 D_t^\alpha u) \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} {}^C_0 D_t^\alpha u \right) dx. \end{aligned}$$

comme  $\frac{\partial}{\partial x} {}^C_0 D_t^\alpha u = {}^C_0 D_t^\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ , alors:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 {}^C_0 D_t^\alpha u \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \int_0^1 x \partial_x u {}^C_0 D_t^\alpha (\partial_x u) = \int_0^1 x u_x {}^C_0 D_t^\alpha u_x \\ &= \langle {}^C_0 D_t^\alpha u_x \mid u_x \rangle_{L_p^2(0,1)}, \\ \langle x {}^C_0 D_t^\alpha u \mid C u \rangle_{L^2(0,1)} &= C \int_0^1 x u {}^C_0 D_t^\alpha u dx. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Donc, on a:

$$\begin{aligned} |\langle Lu - g \mid Mu \rangle| &= |\langle Lu \mid Mu \rangle - \langle g \mid Mu \rangle| \leq |\langle Lu \mid Mu \rangle| + |\langle g \mid Mu \rangle|. \\ |\langle Lu \mid Mu \rangle| &= \left| - \int_0^1 x {}^C_0 D_t^\alpha u P_x(\xi u) dx + \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 - C \int_0^1 x u P_x(\xi u) dx + \int_0^1 {}^C_0 D_t^\alpha u x u dx \right. \\ &\quad \left. + \|u_x\|_{L_p^2(0,1)}^2 + C \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \| {}^C_0 D_t^\alpha u \|_{L_p^2(0,1)}^2 + \langle {}^C_0 D_t^\alpha u_x \mid u_x \rangle_{L_p^2(0,1)} + C \int_0^1 x u {}^C_0 D_t^\alpha u dx \right| \\ &= \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + c \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \|u_x\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \| {}^C_0 D_t^\alpha u \|_{L_p^2(0,1)}^2 + |\langle {}^C_0 D_t^\alpha u \mid x u \rangle_{L_p^2(0,1)}| \\ &\quad + |\langle {}^C_0 D_t^\alpha u \mid x P_x \rangle_{L_p^2(0,1)}| + |\langle {}^C_0 D_t^\alpha u_x \mid u_x \rangle_{L_p^2(0,1)}| + |C \langle u \mid x P_x \rangle_{L_p^2(0,1)}| + |C \langle u \mid {}^C_0 D_t^\alpha u \rangle_{L_p^2(0,1)}|. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $a, b$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2,$$

$$|\langle {}^C_0 D_t^\alpha u \mid xu \rangle_{L_p^2(0,1)}| \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \| {}^C_0 D_t^\alpha u \|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2,$$

$$|\langle {}^C_0 D_t^\alpha u \mid xP_x \rangle_{L_p^2(0,1)}| \leq \frac{\varepsilon_2}{2} \| {}^C_0 D_t^\alpha u \|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|P_x\|_{L_p^2(0,1)}^2,$$

$$|\langle {}^C_0 D_t^\alpha u_x \mid u_x \rangle_{L_p^2(0,1)}| \leq \frac{\varepsilon_3}{2} \| {}^C_0 D_t^\alpha u_x \|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|u_x\|_{L_p^2(0,1)}^2,$$

$$|C \langle u \mid x {}^C_0 D_t^\alpha u \rangle_{L_p^2(0,1)}| \leq C \frac{\varepsilon_4}{2} \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + C \frac{1}{2\varepsilon_4} \| {}^C_0 D_t^\alpha u \|_{L_p^2(0,1)}^2,$$

$$|C \langle u \mid xP_x \rangle_{L_p^2(0,1)}| \leq C \frac{\varepsilon_5}{2} \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + C \frac{1}{2\varepsilon_5} \|P_x\|_{L_p^2(0,1)}^2.$$

Et

$$\begin{aligned} |\langle g \mid Mu \rangle| &= |\langle g \mid xu \rangle - \langle g \mid xP_x \rangle + \langle g \mid x {}^C_0 D_t^\alpha u \rangle| \\ &= \langle g \mid xu \rangle + \langle g \mid xP_x \rangle + \langle g \mid x {}^C_0 D_t^\alpha u \rangle? \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

avec:

$$|\langle g \mid xP_x \rangle| \leq \frac{\varepsilon_6}{2} \|P_x\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_6} \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2?$$

$$|\langle g \mid xu \rangle| \leq \frac{\varepsilon_7}{2} \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_7} \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2?$$

$$|\langle g \mid {}^C_0 D_t^\alpha u \rangle| \leq \frac{\varepsilon_8}{2} \| {}^C_0 D_t^\alpha u \|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_8} \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2.$$

Alors:

$$\begin{aligned} &|\langle Lu \mid Mu \rangle| + |\langle g \mid Mu \rangle| \leq \\ &\|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + C \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \|u_x\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \| {}^C_0 D_t^\alpha u \|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \| {}^C_0 D_t^\alpha u \|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 \\ &+ \frac{\varepsilon_2}{2} \| {}^C_0 D_t^\alpha u \|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|P_x(\xi u)\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{\varepsilon_3}{2} \| {}^C_0 D_t^\alpha u_x \|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|u_x\|_{L_p^2(0,1)}^2 \\ &+ C \frac{\varepsilon_4}{2} \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + C \frac{1}{2\varepsilon_4} \| {}^C_0 D_t^\alpha u \|_{L_p^2(0,1)}^2 + C \frac{\varepsilon_5}{2} \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + C \frac{1}{2\varepsilon_5} \|P_x(\xi u)\|_{L_p^2(0,1)}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon_6}{2} \|P_x(\xi u)\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_6} \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{\varepsilon_7}{2} \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 \\
& + \frac{1}{2\varepsilon_7} \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{\varepsilon_8}{2} \|{}_0^C D_t^\alpha u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_8} \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2.
\end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned}
& |\langle Lu \mid Mu \rangle| + |\langle g \mid Mu \rangle| \leq \\
& (1 + C + \frac{1}{2\varepsilon_1} + C\frac{\varepsilon_4}{2} + C\frac{\varepsilon_5}{2} + \frac{\varepsilon_7}{2}) \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + (1 + \frac{1}{2\varepsilon_3}) \|u_x\|_{L_p^2(0,1)}^2 \\
& + (1 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2} + C\frac{1}{2\varepsilon_4} + \frac{\varepsilon_8}{2}) \|{}_0^C D_t^\alpha u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \frac{\varepsilon_3}{2} \|{}_0^C D_t^\alpha u_x\|_{L_p^2(0,1)}^2 \\
& + (\frac{1}{2\varepsilon_2} + C\frac{1}{2\varepsilon_5} + \frac{\varepsilon_6}{2}) \|P_x(\xi u)\|_{L_p^2(0,1)}^2 + (\frac{1}{2\varepsilon_6} + \frac{1}{2\varepsilon_7} + \frac{1}{2\varepsilon_8}) \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2.
\end{aligned}$$

On choisit des valeurs convenables pour  $\varepsilon_i$  et en utilisant l'inégalité de Poincaré:

$$\|P_x(\xi u)\|_{L_p^2(0,1)}^2 \leq C_p \int_0^1 \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2.$$

Pour  $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \lambda$  positifs, on obtient:

$$\begin{aligned}
& \alpha \|u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \beta \|u_x\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \gamma \|{}_0^C D_t^\alpha u\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \mu \|{}_0^C D_t^\alpha u_x\|_{L_p^2(0,1)}^2 + \lambda \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2, \\
& \max(\alpha, \beta) \|u\|_{H_p^1(0,1)}^2 + \max(\gamma, \mu) \|{}_0^C D_t^\alpha u\|_{H_p^1(0,1)}^2 \leq \lambda \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2 \\
& \sigma \|u\|_{H_p^1(0,1)}^2 + \delta \|{}_0^C D_t^\alpha u\|_{H_p^1(0,1)}^2 \leq \lambda \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2 \\
& (\|u\|_{H_p^1(0,1)}^2 + \|{}_0^C D_t^\alpha u\|_{H_p^1(0,1)}^2) \leq \frac{\lambda}{\min(\sigma, \delta)} \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2
\end{aligned}$$

donc:

$$\|u\|_{H_p^{\alpha,1}(0,1)}^2 + \|{}_0^C D_t^\alpha u\|_{H_p^1(0,1)}^2 \leq C^* \|g\|_{L_p^2(0,1)}^2, \quad (2.4.25)$$

où  $C^* = \frac{\lambda}{\min(\sigma, \delta)}$ . L'intégration des deux côtés de l'équation (2.4.25) sur  $(0, t)$  donne:

$$\int_0^t \|u(x, s)\|_{H_p^1(0,1)}^2 ds + {}_0^C D_t^{\alpha-1} \|u\|_{H_p^1(0,1)}^2 - \frac{T^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \|w\|_{H_p^1(0,1)}^2$$

$$\leq C^* \int_0^t \|g(x, s)\|_{L_p^2(0,1)}^2 ds,$$

car:

$$\int_0^t {}^C D_t^\alpha f(s) ds = {}^C D_t^{\alpha-1} f(t) - \frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} f(0),$$

ici  $f(t) = \|u\|_{H_p^{\alpha,1}(0,1)}^2$  et dans les conditions initiales on a:  $u(x, 0) = w(x)$ , donc  $f(0) = \|w\|_{H_p^1(0,1)}^2$ , et comme  $t \leq T$ , alors on obtient:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|u(x, s)\|_{H_p^1(0,1)}^2 ds + D^{\alpha-1} \|u\|_{H_p^1(0,1)}^2 \\ & \leq C^* \int_0^t \|g(x, s)\|_{L_p^2(0,1)}^2 ds + \frac{T^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \|w\|_{H_p^1(0,1)}^2, \\ & \leq C^{**} \left( \int_0^t \|g(x, s)\|_{L_p^2(0,1)}^2 ds + \|w\|_{H_p^1(0,1)}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

où

$$C^{**} = \max \left\{ C^*, \frac{T^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right\}. \quad (2.4.27)$$

Si nous écartons le deuxième terme du côté gauche de l'équation (2.4.26) et remplaçons  $t$  par  $T$ , nous obtenons l'inégalité souhaitée:

$$\|u\|_{L^2((0,T);H_p^{\alpha,1}(0,1))}^2 \leq C^{**} \left( \|w\|_{H_p^1(0,1)}^2 + \|g\|_{L_p^2(Q)}^2 \right). \quad (2.4.28)$$

**Corollaire 6:** si pour toute fonction  $u \in D(K)$ , on a l'estimation suivante:

$$\|u\|_S \leq \sqrt{C^{**}} \|Lu\|_H, \quad (2.4.29)$$

alors la solution du problème (2.3.7), si elle existe, elle est unique dans  $S$ .

**Preuve:** on a  $K : D(K) \subset S \rightarrow H$  et  $Ku = w$  dans  $H$ , on cherche  $u \in S$ .

Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions du problème (2.4.7), alors:

$$\begin{cases} Ku_1 = W, \\ Ku_2 = W, \end{cases} \implies Ku_1 - Ku_2 = w - w = 0,$$

et comme  $K$  est linéaire, on obtient:  $K(u_1 - u_2) = 0$ . On pose  $v = u_1 - u_2$ , alors  $v \in D(K)$  et  $D(K)$  un espace vectoriel, donc  $Kv = 0$ . On a  $L$  partie principale (Opérateur équivalent à  $K$ )

$$\|Lu\|_H = 0 \Leftrightarrow \|Ku\|_H = 0,$$

donc lorsque  $Kv = 0 \Rightarrow Lv = 0$  dans  $H$ ,  $\|v\|_S^2 \leq C^{**}\|Lv\|_H$ ,  $Lv = 0$  donc  $\|Lv\|_H = 0$  d'où:  $\|v\|_S^2 \leq C^{**}0 = 0$ . donc  $\|v\|_S = 0 \Rightarrow v = 0$ , et  $v = u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ . La solution existe et unique.

**c) Existence de la solution:** la démonstration de l'existence de la solution est basée sur les trois étapes suivantes:

1. L'opérateur  $K : S \rightarrow H$  est fermable c'est à dire pour toute suite  $(u_n) \subset S$  telle que  $u_n \rightarrow 0$  dans  $S$  et  $Ku_n \rightarrow v$  dans  $H$ , alors nécessairement  $v = 0$ .
2. L'ensemble des valeurs  $R(K)$  est fermé dans  $H$ , et  $R(K) = \overline{R(K)}$ .
3.  $R(K)$  est dense dans  $H$ , c'est à dire  $\overline{R(K)} = H$ .

**Corollaire 7:** l'opérateur  $K : S \rightarrow H$  admet une fermeture. L'inégalité des bornes d'estimation a priori (2.4.11) peut alors être étendue à:

$$\|u\|_S^2 \leq \mu \left( \|w\|_{H_p^1(0,1)}^2 + \|g\|_{L_p^2(Q)}^2 \right), \quad (2.4.30)$$

pour tout  $u \in D(\overline{K})$ . Il résulte de l'équation (2.4.30) que  $R(K) = H$  est un sous-ensemble fermé dans  $H$ , et  $R(K) = R(\overline{K})$ ,  $\overline{K}^{-1} = K^{-1}$ , d'où le résultat.

**Théorème 17:** supposons que les conditions du Théorème 16 soient satisfaites. Pour tout  $F = (g, w) \in H$ , il existe une unique solution forte  $u = K^{-1}F = \overline{K}^{-1}F$  du problème (2.4.7).

**Preuve:** on affirme que pour montrer que le problème (2.4.30) a une solution forte pour tout  $F = (g, w) \in H$ , il suffit de montrer que  $R(\overline{K}) = H$  pour chaque  $u \in S$ .

## Chapitre 3

### 3 Étude d'un problème différentiel fractionnaire linéaire dans $N$ -dimension [19]

L'étude des équations différentielles fractionnaires dans des espaces de dimension finie  $N$  constitue un domaine de recherche en pleine expansion, à l'intersection de l'analyse fonctionnelle, du calcul fractionnaire et de la théorie des systèmes dynamiques. Contrairement aux équations différentielles classiques d'ordre entier, les problèmes différentiels fractionnaires font intervenir des dérivées d'ordre réel non entier telles que les dérivées de Riemann-Liouville ou de Caputo ce qui leur confère une mémoire intrinsèque et des propriétés non locales.

L'intérêt pour ces problèmes en dimension  $N$  est motivé par la modélisation de phénomènes complexes: systèmes multi-agents, diffusion fractionnaire en réseau, propagation dans des milieux hétérogènes et l'extension naturelle des résultats d'existence, d'unicité et de stabilité du cas scalaire au cas vectoriel.

Ce chapitre est consacré à étudier une classe de problème différentiel fractionnaire linéaire dans un espace de  $N$ -dimension. On va utiliser la méthode des estimations a priori pour montrer l'existence et l'unicité de la solution. La démonstration par récurrence joue un rôle important dans la suite.

#### 3.1 Formulation du problème

Soit  $Q^n = (0, T) \times (0, 1)^n$  et  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (0, 1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On pose l'équation différentielle fractionnaire linéaire suivante:

$$Lu = {}^C_0 \partial_t^{\alpha+1} u(t, X) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u(t, X)}{\partial x_k^2} = f(t, X), \quad (3.1.1)$$

avec les conditions initiales

$$\ell u = u(0, X) = \varphi(X), \quad u_t(0, X) = 0 \quad (3.1.2)$$

où  ${}^C_0 \partial_t^{\alpha+1}$  la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $f$  et  $\varphi$  sont des fonctions continues connues.

les conditions aux bords

$$\frac{\partial u(t, 1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial u(t, x_1, 1, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial u(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)}{\partial x_n} = 0, \quad (3.1.3)$$

et les conditions intégrales

$$\int_0^1 u(t, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) dx_k = 0, \forall t \in (0, T) \text{ et } \forall k = \overline{0, n}, \quad (3.1.4)$$

c'est à dire, si  $n = 2$ , on aura:

$$\int_0^1 u(t, x_1, x_2) dx_1 = 0, \forall x_2, t \text{ et } \int_0^1 u(t, x_1, x_2) dx_2 = 0, \forall x_1, t.$$

**Notations:** soient  $T$  un nombre positif fixé,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $H$  est un espace de Hilbert tel que  $H = H^1(\Omega^n)$ . On note par  $L^2((0, T) \times (0, 1)^n; H)$  l'espace de Hilbert muni par la norme:

$$\|u\|_{L^2((0, T) \times (0, 1)^n; H)}^2 = \int_0^T \|u(t, x_1, \dots, x_n)\|_H^2 dt.$$

Soit  $C((0, T) \times (0, 1)^n; H)$  l'espace de toutes fonctions continues  $u$  de  $(0, T) \times (0, 1)^n$  dans  $H$  tel que:

$$\|u\|_{C((0, T) \times (0, 1)^n; H)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t, x_1, \dots, x_n)\|_H < \infty.$$

L'espace  $H^1(\Omega^n)$  est un espace de Sobolev muni par la norme:

$$\|u\|_{H^1(\Omega^n)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega^n)}^2 + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^2(\Omega^n)}^2.$$

### 3.2 L'unicité de la solution

Dans cette section, on va établir des estimations a priori, l'unicité de la solution et sa stabilité sont des conséquences immédiates.

Soit  $\Omega^n = (0, 1)^n$ . On écrivant le problème sous la forme suivante:

$$\mathcal{E}u = \langle Lu \mid \ell u \rangle = \langle f \mid \varphi \rangle,$$

où  $\mathcal{E}u$  est un opérateur non borné de  $E$  dans  $F$  tel que:

$$E = \left\{ u : (0, T) \times (0, 1)^n \longrightarrow H : \int_{\Omega^n} \mathcal{I}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u^2 < \infty \text{ et } \int_{\Omega^n} \mathcal{I}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau^2 < \infty \right\},$$

et

$$F = \left\{ (f, \varphi) \in (C(Q^n))^2 : \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f^2 < \infty \text{ et } \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \varphi^2 < \infty \right\}.$$

$E$  est un espace de Banach des fonctions  $u \in L^2(Q^n)$  muni de la norme:

$$\|u\|_E = \sup_{0 \leq t \leq T} \left( I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n \right),$$

et  $F$  est un espace de Hilbert muni de la norme:

$$\|\mathcal{E}u\|_F = \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2.$$

On a transformé  $f$  et  $\varphi$  avec les mêmes opérateurs intégraux, ces transformations sont adaptées aux conditions intégrales, avec:

$$\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u(t, x) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} u(t, s_1, s_2, \dots, s_n) ds_1 ds_2 \dots ds_n,$$

et

$$\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u(t, x) =$$

$$\int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{i-1}} \int_0^{x_{i+1}} \dots \int_0^{x_n} u(t, s_1, \dots, s_{i-1}, x_i, s_{i+1}, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_{i-1} ds_{i+1} \dots ds_n.$$

Et le domaine de définition de  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des fonctions régulières satisfaisant les conditions au bord et initiales homogènes ( $u(0) = 0, u_t(0) = 0$ )

$$D(\mathcal{E}) = \left\{ h \in L^2(Q^n) : {}^C \partial_t^{\alpha+1} h, \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2} \in L^2(Q^n), h(0, X) = 0, h_t(0, X) = 0, \right. \\ \left. \frac{\partial h(t, 1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial h(t, x_1, 1, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial h(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)}{\partial x_n} = 0, \right. \\ \left. \int_0^1 h(t, x_k) dx_k = 0 \right\}.$$

**Définition 32:** la solution de l'équation  $\bar{\mathcal{E}}u = \langle f \mid \varphi \rangle$  est appelée solution forte du problème (3.1.1)-(3.1.4). Dans un certain espace fonctionnel, on cherche  $u$  tel que  $\bar{\mathcal{E}}$  appliqué à  $u$  donne une certaine forme linéaire définie par  $f$  et  $\varphi$ .

**Théorème 18:** pour toute fonction  $u \in D(\mathcal{E})$ , il existe  $C > 0$  tel que:

$$\|u\|_E \leq C \|\mathcal{E}u\|_F. \quad (3.2.1)$$

garantit la bi-continuité de l'opérateur  $\mathcal{E}$ , sert à prouver l'existence et l'unicité.

**Définition 33:** on définit l'opérateur intégral-différentiel d'une fonction  $u \in L^2(Q^n)$  par:

$$\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t = \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} \int_0^{\epsilon_1} \cdots \int_0^{\epsilon_n} u_t(t, \eta_1, \dots, \eta_n) d\eta_n \dots d\eta_1 d\epsilon_n \dots d\epsilon_1.$$

Nous expliquons ici, pour  $n = 1$ :

$$\mathcal{J}_x^2 u_t = \int_0^x \int_0^\epsilon u_t(t, \eta) d\eta d\epsilon,$$

pour  $n = 2$ :

$$\mathcal{J}_{x_1 x_2}^2 u_t = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{\epsilon_1} \int_0^{\epsilon_2} u_t(t, \eta_1, \eta_2) d\eta_2 d\eta_1 d\epsilon_2 d\epsilon_1,$$

pour  $n = 3$ :

$$\mathcal{J}_{x_1 x_2 x_3}^2 u_t = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{\epsilon_1} \int_0^{\epsilon_2} \int_0^{\epsilon_3} u_t(t, \eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_3 d\eta_2 d\eta_1 d\epsilon_3 d\epsilon_2 d\epsilon_1,$$

et ainsi de suite jusqu'à ce que nous puissions déterminer la valeur de  $\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t$ , qui joue un rôle important dans la preuve. Calculons le produit scalaire dans  $L^2(Q_\tau^n)$  de l'équation (2.1.1) et le multiplicateur

$$Mu = \begin{cases} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le premier cas: si  $n$  est pair,

$$\langle Lu \mid Mu \rangle_{L^2(Q_\tau^n)} = \int_{Q_\tau^n} ({}_0^C \partial_t^{\alpha+1} u) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n - \sum_{k=1}^n \int_{Q_\tau^n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n.$$

$$= \int_{Q_\tau^n} f(t, X) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n. \quad (3.2.2)$$

**Lemme 9:** soit  $u \in L^2(Q_\tau^n)$  avec  $Q_\tau^n = (0, \tau) \times (0, 1)^n$ , donc on a:

$$\int_{Q_\tau^n} ({}_0^C \partial_t^{\alpha+1} u) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t) dt dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{2} I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2.$$

**Démonstration:** en effectuant l'intégration par parties sur

$$\int_{Q_\tau^n} ({}_0^C \partial_t^{\alpha+1} u) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t) dt dx_1 \dots dx_n,$$

d'après les propriétés de la dérivé de Caputo, on a:

$$v' = {}_0^C \partial_t^{\alpha+1} u \implies v = {}_0^C \partial_t^\alpha u,$$

et

$$w = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t \implies w' = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t,$$

car:

$$w = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t),$$

donc

$$w' = \frac{\partial^n}{\partial x_n \dots \partial x_1} [\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t)] = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t.$$

Donc, on a:

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\tau^n} ({}_0^C \partial_t^{\alpha+1} u) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t) dt dx_1 \dots dx_n \\ &= \left[ ({}_0^C \partial_t^\alpha u) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t) \right]_{Q_\tau^n} - \int_{Q_\tau^n} ({}_0^C \partial_t^\alpha u) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n \\ &= - \int_{Q_\tau^n} ({}_0^C \partial_t^\alpha u) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

En effectuant pour la deuxième fois l'intégration par parties, on obtient:

$$= \int_{Q_\tau^n} ({}_0^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n. \quad (3.2.3)$$

On va montrer l'équation (3.2.3) par récurrence. Pour  $n = 1$ , on a:



$$\int_0^1 \int_{Q_\tau} ({}^C_0 \partial_t^{\alpha+1} u)(\mathcal{J}_{x_1}^2 u_t) dt dx_1 = [({}^C_0 \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{x_1} u_t)(\mathcal{J}_{x_1}^2 u_t)]_0^1 - \int_0^1 \int_{Q_\tau} ({}^C_0 \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{x_1} u_t)(\mathcal{J}_{x_1} u_t) dt dx_1.$$

On pose que l'équation est vraie pour  $n$  et on montre qu'elle est vraie pour  $n+1$ :

$$\int_{Q_\tau^{n+1}} ({}^C_0 \partial_t^{\alpha+1} u)(\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k}^2 u_t) dt dx_1 \dots dx_{n+1}.$$

De manière analogue, en effectuant l'intégration par parties:

$$\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k}^2 = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 \circ \mathcal{J}_{x_{n+1}}^2,$$

donc, on obtient:

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_{Q_\tau^n} ({}^C_0 \partial_t^\alpha u_t) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 (\mathcal{J}_{x_{n+1}}^2 u_t) dt dx_1 \dots dx_n dx_{n+1} \\ &= \int_0^1 \int_{Q_t^n} ({}^C_0 \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) \mathcal{J}_{x_{n+1}}^2 (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n dx_{n+1} \\ &= \int_{Q_t^n} \int_0^1 ({}^C_0 \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{x_{n+1}} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) \mathcal{J}_{x_{n+1}} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n dx_{n+1} \\ &= \int_{Q_t^{n+1}} ({}^C_0 \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} u_t) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_{n+1}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 6, on obtient:

$$\int_{Q_\tau^n} ({}^C_0 \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n \geq \frac{1}{2} \int_0^\tau ({}^C_0 \partial_t^\alpha \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2) dt,$$

D'après [14], on a:

$$\int_0^\tau {}^C_0 \partial_t^\alpha Y(t) dt = [I_\tau^{\alpha-1} Y(\tau)]_0^\tau = I_\tau^{\alpha-1} Y(\tau) - I_t^{\alpha-1} Y(0) = I_\tau^{\alpha-1} Y(\tau),$$

alors:

$$\frac{1}{2} \int_0^\tau ({}^C_0 \partial_t^\alpha \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2) dt = \frac{1}{2} I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2.$$

**Lemme 10:** soit  $u \in L^2(Q_\tau^n)$  avec  $Q_\tau^n = (0, \tau) \times (0, 1)^n$ , donc on a:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n \int_{Q_\tau^n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2. \end{aligned}$$

**Démonstration:** en effectuant deux fois l'intégration par parties, on obtient:

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\Omega^n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n = \int_0^\tau \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u_t) dt dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_0^\tau \int_{\Omega^n} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u)^2 dt dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega^n} \left[ \frac{1}{2} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u)^2 \right]_0^\tau dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\Omega^n} \frac{1}{2} \left[ (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u(\tau, x_1, \dots, x_n))^2 - (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u(0, x_1, \dots, x_n))^2 \right] dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n - \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u(0, x_1, \dots, x_n))^2 dx_1 \dots dx_n \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n - \frac{1}{2} \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \varphi)^2 dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n \int_{Q_t^n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2. \quad (3.2.4) \end{aligned}$$

En effet pour  $n = 1$ ,

$$- \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} (-\mathcal{J}_{x_1}^2 u_t) dt dx_1 = - \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \mathcal{J}_{x_1} (\mathcal{J}_{x_1} u_t) dt dx_1,$$

comme

$$\mathcal{J}_{x_1} u_t = \int_0^x u_t(t, \eta) d\eta = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}(t, \eta) d\eta = u(t, x),$$

alors:

$$\begin{aligned}
&= \int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \mathcal{J}_{x_1} u \, dt \, dx_1 = \int_{Q_\tau} \mathcal{J}_{x_1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) u \, dt \, dx_1 = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_1} u \, dx_1 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 2 u' u = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 \, dx_1.
\end{aligned}$$

De manière analogue pour  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned}
& - \int_{Q_{\tau^2}} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u (\mathcal{J}_{x_1 x_2}^2 u_t) \, dt \, dx_1 \, dx_2 - \int_{Q_{\tau^2}} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u (\mathcal{J}_{x_1 x_2}^2 u_t) \, dt \, dx_1 \, dx_2 \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} (\mathcal{J}_{x_2} u)^2 \, dx_1 \, dx_2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} (\mathcal{J}_{x_1} u)^2 \, dx_1 \, dx_2, \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} (\mathcal{J}_{x_2} \varphi)^2 \, dx_1 \, dx_2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} (\mathcal{J}_{x_1} \varphi)^2 \, dx_1 \, dx_2.
\end{aligned}$$

Donc par récurrence:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{Q_\tau^{n+1}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k}^2 u_t \, dt \, dx_1 \dots dx_{n+1} = - \sum_{i=1}^n \int_{Q_\tau^{n+1}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k}^2 u_t \, dt \, dx_1 \dots dx_{n+1} \\
& - \int_{Q_\tau^{n+1}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k}^2 u_t \, dt \, dx_1 \dots dx_{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^\tau \int_{\Omega^n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k}^2 u_t \, dt \, dx_1 \dots dx_{n+1} \\
&= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k}^2 u_t \, dx_1 \dots dx_{n+1} - \int_{\Omega^n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k}^2 u_t \, dx_1 \dots dx_{n+1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Omega^{n+1}} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k / x_i}^{n+1} u)^2 \, dx_1 \dots dx_{n+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Omega^{n+1}} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k / x_i}^{n+1} \varphi)^2 \, dx_1 \dots dx_{n+1}.
\end{aligned}$$

**Lemme 11:** soient  $u \in L^2(Q_\tau^n)$  avec  $Q_\tau^n = (0, \tau) \times (0, 1)^n$  et  $f \in C(Q^n)$ ,  
donc on a:

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_\tau^n} f(t, X) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n.
\end{aligned}$$

**Démonstration:** on a:

$$\int_{Q_\tau^n} f(t, X) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n = \int_{Q_\tau^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f(t, x_1, \dots, x_n)) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n.$$

En appliquant l'inégalité de  $\varepsilon$ -Cauchy:

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \forall a, b \in \mathbb{R},$$

avec  $\varepsilon = 1$ , il s'ensuit que:

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n. \quad (3.2.5)$$

**Démonstration du Théorème 18:** En combinant les lemmes 9, 10 et 11, on obtient:

$$\begin{aligned}
\langle Lu \mid Mu \rangle_{L^2(Q_\tau^n)} &= \int_{Q_\tau^n} ({}_0^C \partial_t^{\alpha+1} u) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n - \sum_{k=1}^n \int_{Q_\tau^n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{Q_\tau^n} f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n = \langle f \mid \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t \rangle.
\end{aligned}$$

En substituant (3.2.3)-(3.2.6) dans (3.2.2), on trouve que:

$$\begin{aligned}
|\langle Lu \mid Mu \rangle_{L^2(Q_\tau^n)}| &= \left| \int_{Q_\tau^n} ({}_0^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n \right. \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2 \Big| \\
&= \int_{Q_\tau^n} f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k}^2 u_t dt dx_1 \dots dx_n
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n.$$

On a:

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau^n} ({}_0^C \partial_t^\alpha \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t) dt dx_1 \dots dx_n &\geq \frac{1}{2} \int_0^\tau ({}_0^C \partial_t^\alpha \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2) dt \\ &= \frac{1}{2} I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2. \end{aligned}$$

L'équation devient:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2. \end{aligned}$$

En multipliant par deux, on obtient:

$$\begin{aligned} &I_\tau^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_\tau\|_{L^2(\Omega^n)}^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n \\ &\leq \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \int_0^\tau \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2. \end{aligned}$$

On passant à la borne supérieure par rapport  $\tau$  entre  $[0, T]$ , et en utilisant

l'inégalité de Gronwall on pose:

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2, \\
Z(t) &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n, \\
F(t) &= \int_{Q_t^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2,
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on a:

$$I_t^{\alpha-1} Y(t) + Z(t) \leq F(t) + \int_0^t Y(s) ds,$$

d'après le Théorème 18, on a:

$$\int_0^t Y(s) ds \leq C_1 F(t).$$

On obtient:

$$I_t^{\alpha-1} Y(t) + Z(t) \leq F(t) + C_1 F(t) \leq (1 + C_1) F(t) \leq C F(t).$$

D'où le résultat suivant:

$$\begin{aligned}
& I_t^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} u_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} u)^2 dx_1 \dots dx_n \leq \\
& C \left( \int_{Q_t^n} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} f\|_{L^2(\Omega^n)}^2 dt dx_1 \dots dx_n + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \varphi\|_{L^2(\Omega^n)}^2 \right) \quad (3.2.7) \\
& \leq C \|\mathcal{E}u\|_F.
\end{aligned}$$

**Le deuxième cas:** si  $n$  est impair. On obtient les mêmes résultats car le signe dans l'opérateur  $Mu$  évite de tomber dans un signe négatif dans la norme précédemment choisie. Ceci est lié à la corrélation des intégrales utilisées pour prouver les relations précédentes avec la dimension de l'espace.

**Corollaire 7:** S'il existe une solution du problème (3.1.1)–(3.1.4), elle est unique.

**Démonstration:** On suppose qu'il existe deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  du problème (3.1.1)–(3.1.4) et  $\mathcal{E}u_1 = \mathcal{E}u_2 = f$ , alors leurs différence  $w = u_1 - u_2$  vérifie:

$$\mathcal{E}w = \mathcal{E}(u_1 - u_2) = f - f = 0.$$

D'après la méthode des estimations a priori, on a:  $\|w\|_E \leq C\|\mathcal{E}w\|_F$ , comme  $\mathcal{E}w = 0$ , on obtient:  $\|w\|_E \leq C\|0\|_F = 0$ , donc  $\|w\|_E = 0 \implies w = 0$  donc  $u_1 - u_2 = 0 \implies u_1 = u_2$ . D'où l'unicité de la solution.

**Corollaire 8:** supposons que les conditions (3.2.1) sont satisfaites. Alors,  $\mathcal{E}$  admet les propriétés suivantes:

- (1)  $\mathcal{E}$  admet une fermeture  $\bar{\mathcal{E}}$  autrement dit  $R(\bar{\mathcal{E}}) = \overline{R(\mathcal{E})}$ .
- (2)  $\mathcal{E}$  admet un inverse  $\mathcal{E}^{-1} : E \rightarrow R(\mathcal{E})$  avec  $\bar{\mathcal{E}^{-1}} = \bar{\mathcal{E}}^{-1}$ .

**Démonstration:** 1) D'abord on introduit la définition suivante: on dit qu'un opérateur  $\mathcal{E}$  est fermable s'il existe un opérateur  $\bar{\mathcal{E}}$  (sa fermeture) qui prolonge  $\mathcal{E}$  et dont le graphe est l'adhérence du graphe de  $\mathcal{E}$  dans  $E \times F$ : si une suite  $(u_n) \in D(\mathcal{E})$  converge dans  $E$ , tel que  $\lim u_n = 0$  et  $(\mathcal{E}u_n)$  converge vers  $(\mathcal{E}u)$ , donc vers  $(f, \varphi)$  dans  $F$ . Il faut montrer que:

$$f(t, X) = 0, \text{ et } \varphi(X) = 0, \forall (t, X) \in Q^n.$$

Comme  $(u_n)$  converge vers 0 dans  $D(\mathcal{E})$ , donc  $u_n$  converge vers 0 dans  $D'(\mathcal{E})$ . D'après la continuité de l'application dérivée de  $D(\mathcal{E})$  dans  $D'(\mathcal{E})$ , on conclut que  $(Lu_n)$  converge vers 0, dans  $D'(\mathcal{E})$ . D'autre part d'après l'hypothèse on a  $(\mathcal{E}u_n)$  converge vers  $f$  dans  $F$ , donc dans  $D'(\mathcal{E})$ . Comme la limite est unique dans  $D'(\mathcal{E})$ , alors  $f(t, X) = 0, \forall (t, X) \in Q^n$ . Maintenant on montre que  $\varphi(X) = 0$ . On a  $(u_n)$  converge vers 0 dans  $E$ , et  $(\mathcal{E}u_n)$  converge vers  $\varphi$  dans  $F$ , d'autre part, remarquons que:  $\|\mathcal{E}u_n\|_{L^2(Q^n)} \leq \|u_n\|_F$ , comme  $(u_n)$  converge vers 0 dans  $E$ , on a  $\|\mathcal{E}u_n\|_F \longrightarrow 0$  alors,  $(\mathcal{E}u_n)$  converge vers 0 dans  $L^2(Q^n)$ , ce qui montre que  $\varphi(X) = 0, \forall X \in \Omega^n$ .

Maintenant on va montrer que  $\mathcal{E}$  admet une fermeture:  $\overline{R(\mathcal{E})} = R(\bar{\mathcal{E}})$ .

Premièrement d'après la définition de  $R(\bar{\mathcal{E}}) \subset \overline{R(\mathcal{E})}$ . D'autre part, soient  $v \in \overline{R(\mathcal{E})}$  et  $(v_n) \in R(\mathcal{E})$  une suite converge vers  $v$ , donc il existe une suite  $u_n \in D(\mathcal{E})$  tel que:  $\mathcal{E}u_n = v_n$ . En utilisant l'estimation (3.2.1), on a:

$$\|u_n - u_m\|_E \leq C\|\mathcal{E}(u_n - u_m)\|_E \leq C\|\mathcal{E}u_n - \mathcal{E}u_m\|_E \leq C\|v_n - v_m\|_F.$$

Si  $n, m$  tend vers  $+\infty$ , on peut déduire que  $(u_n)$  est une suite de Cauchy dans  $E$ , qui est un espace de Banach donc elle est convergente tel que  $\lim u_n = u \in E$ .

$E$ , ce qui montre que  $\bar{\mathcal{E}}u = v$ , Donc  $\overline{R(\mathcal{E})} = R(\bar{\mathcal{E}})$ .

2) D'après l'estimation (3.2.1), on a l'opérateur  $\mathcal{E}$  est injectif donc il admet un inverse borné  $\mathcal{E}^{-1}$  dans  $R(\mathcal{E})$ . comme  $\bar{\mathcal{E}}$  prolonge  $\mathcal{E}$ , on a  $\bar{\mathcal{E}}^{-1} = \mathcal{E}^{-1}$  sur  $R(\mathcal{E})$ . Donc  $\mathcal{E}^{-1}$  existe et est borné.

**Corollaire 9:** Par passage à la limite, l'estimation (3.2.1) est prolongée aux solutions fortes, donc on a:  $\|u\|_E \leq C\|\bar{\mathcal{E}}u\|_F, \quad \forall u \in D(\bar{\mathcal{E}})$ .

Alors, la solution forte de (3.1.1)–(3.1.4) est unique si elle existe.

**Preuve:** On dit qu'une solution est forte si  $u_n \rightarrow u$ , et on a  $\|u_n\|_F \leq C\|\bar{\mathcal{E}}u_n\|_F$ , par fermeture  $\|u\|_F \leq C\|\bar{\mathcal{E}}u\|_F$ , d'où l'existence de la solution.

D'autre part  $w = u_1 - u_2$  et on a  $\bar{\mathcal{E}}w = 0$  donc  $\|w\|_F \leq C\|\bar{\mathcal{E}}w\|_F = C.0 = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ , d'où l'unicité de la solution.

### 3.3 Existence de la solution forte

Cette section est consacrée pour montrer l'existence d'une solution forte de problème (3.1.1)–(3.1.4), ce qui nous ramené à montrer la densité de  $R(\mathcal{E})$  dans  $F$ . La preuve décompose en trois étapes.

**Étape 1:** On va montrer que  $R(\mathcal{E})$  est dense dans  $F$  pour  $D(\mathcal{E})$  est réduite à  $D_0(\mathcal{E})$  où  $D_0(\mathcal{E}) = \{u \in D(\mathcal{E}) : \ell u = 0\}$ .

**Théorème 19:** On pose que les conditions du Théorème 18 sont satisfaites et il existe  $\Psi \in L^2(Q^n), \forall \Phi \in D_0(\mathcal{E})$  vérifie la condition (3.1.2) tel que  $\langle \mathcal{E}\Phi, \Psi \rangle_F = 0$ , alors  $\Psi \equiv 0$  dans  $Q^n$ .

**Démonstration:** En substituant  $\Phi$  et  $\Psi$  dans l'équation (3.1.1), on obtient:

$$\langle {}^C_0\partial_t^{\alpha+1}\Phi(t, X) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Phi(t, X)}{\partial x_k^2} \mid \Psi \rangle_{L^2(Q^n)} = 0. \quad (3.3.1)$$

Soit  $\mathcal{N}(x, t)$  une fonction vérifie (3.1.2)-(3.1.4) tel que pour tout  $k \in [0, n]$ , on a:

$$\mathcal{N}, \mathcal{N}_{x_k}, \mathcal{N}_{x_k x_k}, \mathcal{N}_t, {}^C\partial_t^{\alpha+1}\mathcal{N} \in L^2(Q^n).$$

Posons que

$$\Phi(t, X) = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}(t, X) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_n} \mathcal{N}(t, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_n,$$

et

$$\Psi(t, X) = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t(t, X),$$



alors (3.3.1) sera

$$\langle {}_0^C \partial_t^{\alpha+1} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}(t, X) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}(t, X))}{\partial x_i^2} \mid \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t(t, X) \rangle_{L^2(Q^n)} = 0. \quad (3.3.2)$$

En effectuant l'intégration par parties sur chaque terme de (3.3.2) avec  $\mathcal{N}$  vérifie les conditions (3.1.2)-(3.1.4), on obtient:

$$\begin{aligned} & \int_{Q^n} ({}_0^C \partial_t^{\alpha+1} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N})(\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t) dt dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{Q^n} ({}_0^C \partial_t^{\alpha} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t)) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t) dt dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Maintenant pour le deuxième terme

$$- \sum_{i=1}^n \int_{Q^n} \frac{\partial^2 (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}(t, X))}{\partial x_i^2} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t(t, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

On pose  $v(t, X) = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}(t, X)$ , et  $v_t(t, X) = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t(t, X)$ , alors:

$$\begin{aligned} - \int_{Q^n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} v_t dt dX &= - \int_{Q^n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_t}{\partial x_i} dt dX = - \int_{Q^n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dt dX \\ &= - \int_0^T \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dt = - \int_0^T \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dt = - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right]_0^T \\ &= - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(T, X)}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(0, X)}{\partial x_i} \right)^2 = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(T, X)}{\partial x_i} \right)^2. \end{aligned}$$

On a  $v(T, X) = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}(T, X)$ , donc:

$$= - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}(T, X)) \right)^2 = - \frac{1}{2} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \mathcal{N}(T, X))^2.$$

Donc:

$$- \sum_{i=1}^n \int_{Q^n} \frac{\partial^2 (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}(t, X))}{\partial x_i^2} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t(t, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k/x_i} \mathcal{N}(T, X))^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (3.3.4)$$

Montrons par récurrence que l'équation (3.3.4) est vraie pour  $n = 1$

$$- \int_{Q^1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\mathcal{J}_{x_1} \mathcal{N}) (\mathcal{J}_{x_1} \mathcal{N}_t) dt dx_1 = - \int_{Q^1} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_1} (\mathcal{J}_{x_1} \mathcal{N}_t) dt dx_1,$$

car

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\mathcal{J}_{x_1} \mathcal{N}) = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_1}.$$

Maintenant, en effectuant l'intégration par parties, on obtient:

$$\int_0^1 \int_0^T \mathcal{N} \mathcal{N}_t dt dx_1,$$

$$\int_0^T \mathcal{N} \mathcal{N}_t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{N}^2) = \frac{1}{2} [\mathcal{N}^2]_0^T = \frac{1}{2} \mathcal{N}^2(T, x_1).$$

Donc:

$$\int_0^1 \int_0^T \mathcal{N} \mathcal{N}_t dt dx_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{N}^2 dx_1.$$

Pour  $n = 2$  :

$$= - \int_{Q^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\mathcal{J}_{x_1 x_2} \mathcal{N}) (\mathcal{J}_{x_1 x_2} \mathcal{N}_t) dt dx_1 dx_2 - \int_{Q^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\mathcal{J}_{x_1 x_2} \mathcal{N}) (\mathcal{J}_{x_1 x_2} \mathcal{N}_t) dt dx_1 dx_2$$

Comme

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\mathcal{J}_{x_1 x_2} \mathcal{N}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{J}_{x_2} \mathcal{N})$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\mathcal{J}_{x_1 x_2} \mathcal{N}) = \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{J}_{x_1} \mathcal{N}).$$

Alors:

$$= - \int_{Q^2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{J}_{x_2} \mathcal{N}) (\mathcal{J}_{x_1 x_2} \mathcal{N}_t) dt dx_1 dx_2 - \int_{Q^2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{J}_{x_1} \mathcal{N}) (\mathcal{J}_{x_1 x_2} \mathcal{N}_t) dt dx_1 dx_2.$$

En effectuant l'intégration par parties, on obtient:

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_{x_2} \mathcal{N}(T, X))^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\mathcal{J}_{x_1} \mathcal{N}(T, X))^2 dx_1 dx_2.$$

**L'étape de récurrence:** On va décomposer la somme et l'intégrale  $\int_{Q^{n+1}}$  devient  $\int_0^1 (\int_{Q^n} \dots) dx_{n+1}$  et on a:  $\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} = \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \circ \mathcal{J}_{x_{n+1}}$ , donc:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{Q^{n+1}} \frac{\partial^2 (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} \mathcal{N}(t, X))}{\partial x_i^2} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} \mathcal{N}_t(t, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_{n+1} \\ &= \int_0^1 \left( - \sum_{i=1}^n \int_{Q^n} \frac{\partial^2 \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} (\mathcal{J}_{x_{n+1}} \mathcal{N})}{\partial x_i^2} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \cdot \mathcal{J}_{x_{n+1}} \cdot \mathcal{N}_t dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) dx_{n+1} \\ &+ \int_0^1 \left( - \int_{Q^n} \frac{\partial^2 (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} \mathcal{N}(t, X))}{\partial x_{n+1}^2} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} \mathcal{N}_t(t, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) dx_{n+1} \\ &= \int_0^1 \left( - \sum_{i=1}^n \int_{Q^n} \frac{\partial^2 \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} (\mathcal{J}_{x_{n+1}} \mathcal{N})}{\partial x_i^2} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{J}_{x_{n+1}} \mathcal{N}) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) dx_{n+1} \\ &+ \int_0^1 \left( - \int_{Q^n} \frac{\partial^2 (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} \mathcal{N}(t, X))}{\partial x_{n+1}^2} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k} \mathcal{N}_t(t, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) dx_{n+1}. \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration par parties, on obtient:

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \mathcal{N}(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) dx_{n+1} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega^n} \int_0^1 \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_{n+1}} \mathcal{N}(T, X) dx_1 dx_2 \dots dx_n dx_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^{n+1}} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k / x_i} \mathcal{N}(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n dx_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k / x_{n+1}} \mathcal{N}(T, X) dx_1 dx_2 \dots dx_n dx_{n+1} \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Omega^{n+1}} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^{n+1} x_k / x_i} \mathcal{N}(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n dx_{n+1}.
\end{aligned}$$

En substituant les équations (3.3.3) et (3.3.4) dans (3.3.2), et en multipliant par deux, on obtient:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{Q^n} ({}^C \partial_t^\alpha (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t)) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t) dt dx_1 \dots dx_n \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \mathcal{N}(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3.2.6), et le lemme 6, on obtient:

$$\int_0^T ({}^C \partial_t^\alpha (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t)) (\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t) dt \geq \frac{1}{2} \int_0^T ({}^C \partial_t^\alpha \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t\|_{L^2(\Omega^n)}^2) dt,$$

l'équation devient

$$\int_0^T ({}^C \partial_t^\alpha \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t\|_{L^2(\Omega)}) dt + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \mathcal{N}(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq 0.$$

Comme

$$\int_0^T {}^C \partial_t^\alpha u(t) dt = I_T^{\alpha-1} u(T),$$

alors on a:

$$I_T^{\alpha-1} \|\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k} \mathcal{N}_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \mathcal{N}(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq 0.$$

Pour le deuxième terme, il est positif si  $\mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k \setminus x_i} \geq 0$  et  $\mathcal{N}(T, X) \geq 0$  ainsi que

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega^n} \mathcal{J}_{\Pi_{k=1}^n x_k / x_i} \mathcal{N}(T, X) dt dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq 0,$$

il faut que chaque terme soit nul ce qui implique  $\|\mathcal{N}\|_E = 0 \Rightarrow \Psi = 0$ .

**Étape 2:** On va montrer le Théorème suivant.

**Théorème 20:** Pour tout  $(f, \varphi) \in F$  ; le problème (3.1.1–3.1.4) admet une solution forte unique  $u$  tel que  $u = \bar{\mathcal{E}}^{-1}(f, \varphi)$ .

**Démonstration:** Il suffit de montrer  $\overline{R(\mathcal{E})} = F$ . Posons  $W = (w, w_0) \in R(\mathcal{E})^\perp$ ,  $u \in D(\mathcal{E})$ , comme  $\mathcal{E}u = Lu + \ell u$  donc on a:

$$\langle \mathcal{E}u \mid W \rangle_F = \langle Lu \mid w \rangle_{L^2(Q^n)} + \langle \ell u \mid w_0 \rangle_{L^2(\Omega^n)}. \quad (3.3.5)$$

Il faut montrer que  $W = 0$ . Alors (3.3.5) sera

$$\langle Lu \mid w \rangle_{L^2(Q^n)} = 0. \quad (3.3.6)$$

Ce qui implique  $w = 0$ . Alors (3.3.5) sera

$$\langle \ell u \mid w_0 \rangle_{L^2(\Omega^n)} = 0.$$

Comme l'image de l'opérateur  $\ell$  partout dense dans l'espace de Hilbert  $F$ , on conclut que  $w_0 = 0$ , donc  $W = 0$  et

$$\overline{R(\mathcal{E})} = F, \quad \forall u \in D_0(\mathcal{E}).$$

**Étape 3:** Considérons le cas général. Soit  $L_0$  la partie principale de  $L$  i.e.

$$L_0 u = {}^C_0 \partial_t^{\alpha+1} u(t, X) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u(t, X)}{\partial x_k^2},$$

avec le domaine  $D_0(\mathcal{E}_0) = D_0(\mathcal{E})$ , où  $\mathcal{E}_0 = (L_0, \ell)$ . On note que l'opérateur  $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = (L - L_0, 0)$  de  $E$  dans  $F$ , est continu, donc on peut montrer  $\overline{R(\mathcal{E})} = F$ ,  $\forall u \in D(\mathcal{E})$  par une méthode de continuité. On introduit l'opérateur  $\mathcal{E}_\mu$  tel que:  $D(\mathcal{E}_\mu) = D(\mathcal{E})$ ,  $\mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}$ , pour  $\mu = 1$ . D'après la définition de  $\mathcal{E}_\mu$ , on peut dire que:  $\mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_{\mu_0} + (\mu - \mu_0)(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)$ ,  $\forall \mu, \mu_0 \in \mathbb{R}$ .

Premièrement, on va montrer que  $\bar{\mathcal{E}}u = (f, \ell)$  admet une solution dans  $E$ .

Pour ce but, on considère l'équation:  $\bar{\mathcal{E}}_\mu u = (f, \ell)$ , donc on a:

$$\mathcal{E}_\mu u = \mathcal{E}_{\mu_0} u + (\mu - \mu_0)(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)u, \quad \forall \mu, \mu_0 \in \mathbb{R}.$$

En multipliant par  $u$ :

$$\mathcal{E}_\mu u = \mathcal{E}_{\mu_0} u + (\mu - \mu_0)(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)u.$$

$$\bar{\mathcal{E}}_\mu u = \bar{\mathcal{E}}_{\mu_0} u + (\mu - \mu_0)(\bar{\mathcal{E}} - \bar{\mathcal{E}}_0)u.$$

On a:  $\bar{\mathcal{E}}_\mu u = (f, \ell)$ , donc:

$$\bar{\mathcal{E}}_{\mu_0} u + (\mu - \mu_0)(\bar{\mathcal{E}} - \bar{\mathcal{E}}_0)u = (f, \ell).$$

En multipliant par l'inverse de l'opérateur  $\bar{\mathcal{E}}_{\mu_0}$  on obtient:

$$u + (\mu - \mu_0)\bar{\mathcal{E}}_{\mu_0}^{-1}(\bar{\mathcal{E}} - \bar{\mathcal{E}}_0)u = \bar{\mathcal{E}}_{\mu_0}^{-1}(f, \ell). \quad (3.3.7)$$

Soit

$$B = (\mu - \mu_0)\bar{\mathcal{E}}_{\mu_0}^{-1}(\bar{\mathcal{E}} - \bar{\mathcal{E}}_0).$$

$$u + Bu = \bar{\mathcal{E}}_{\mu_0}^{-1}(f, \ell) \implies (I + B)u = \bar{\mathcal{E}}_{\mu_0}^{-1}(f, \ell).$$

Donc:

$$u = (I + B)^{-1}\bar{\mathcal{E}}_{\mu_0}^{-1}(f, \ell),$$

et

$$(I + B)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-B)^k,$$

donnée par la série de Neumann. Donc pour  $\|B\| < 1$ , alors l'équation (3.3.7) admet une solution donnée par:

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} (-B)^k \bar{\mathcal{E}}_{\mu_0}^{-1}(f, \ell).$$

On déduit que l'opérateur  $\bar{\mathcal{E}}_{\mu_0}$  est surjectif donc:  $R(\bar{\mathcal{E}}_{\mu_0}) = F$ , par continuité, on a:  $R(\bar{\mathcal{E}}) = F$  ce qui donne:  $\overline{R(\bar{\mathcal{E}})} = F$ .

## CONCLUSION

Grâce à la redoutable efficacité de la méthode des estimations a priori et à la rigueur implaçable de l'analyse fonctionnelle, nous avons prouvé, de manière irréfutable, l'existence et l'unicité des solutions fortes. Le calcul fractionnaire s'impose ainsi comme un outil indispensable et révolutionnaire pour la modélisation des phénomènes non locaux.

Notre prochain défi sera de conquérir les problèmes non linéaires et d'explorer d'autres définitions de dérivées fractionnaires, modélisant des phénomènes physiques, sur un domaine borné ou non borné, et en généralisant le fractionnaire d'ordre  $\alpha$ , et même régner sur  $L^p$  et  $L^{p(x)}$ , parfois sur un domaine borné et parfois sur un domaine non borné.

## Références

- [1] Anatoly Alikhanov "A priori Estimates for solutions of Boundry value Problems for Fractionnal Orders Equations", North caucasus federal university, 2010.
- [2] Zaur Alisultanov and Ramazan Meilanov, "Some problems of the theory of quantum statistical systems with an energy spectrum of the fractional power type", *Theor. Math. Phys.*, 173: 135-148, 2012
- [3] Gregoire Allaire "Analyse numérique et optimisation", 2005.
- [4] Ronald Bagley "Application of generalized derivatives to viscoelasticity." *PHD thesis. Air Force Institue of Technologie*, 1979.
- [5] Tayebah Bashiri, Mansour Vaezpour et Juan Nieto. "Approximating Solution of Fabrizio-Caputo Volterra's Model for Population Growth in a Closed System by Homotopy Analysis Method". *Journal of Function Spaces*, vol. 2018, 2018.
- [6] Jean-Luc Battaglia and Ludovic Le Lay and Jean-Christophe Batsale and Alain Oustaloup and Olivier Cois. "Heat flux simulation through inverted non integer identification models." *International Journal of Thermal Sciences* 39: 374–389, 2000.
- [7] Meriem Bechaa, Meroua Boutamine . "Problèmes aux limites avec conditions non locales". *Mémoire de master, Université Abbes Laghrour - Khenchela*, 2020-2021.
- [8] Saïd Beloul. "Introduction à la théorie des opérateurs". *Université Hamma Lakhdar El-Oued*, 2019-2020.
- [9] Mouffak Benchohra et Mohamed Abdalla Darwish. "On unique solvability of quadratic integral equations with linear modification of the argument". *Miskolc Mathematical Notes*, Vol. 10 (2009), No 1, pp. 3-10.
- [10] Hanen Benseddik. "Étude de l'existence de solution pour certaines classes d'équations paraboliques d'ordre fractionnaire avec résultat numérique". *Mémoire de master, Université Kasdi Merbah Ouargla*, 2022.
- [11] Brahim Bougherara. "Formulation variationnelle". *Université Mohamed Boudiaf M'sila*, 2022-2023.



- [12] *Franck Boyer. "Analyse Fonctionnelle". Aix-Marseille Université, 13 décembre 2015.*
- [13] *Haïm Brezis. "Analyse Fonctionnelle : théorie et applications". 2<sup>ème</sup> tirage, Paris, 1983.*
- [14] *Michele Caputo et Mauro Fabrizio. "A new definition of fractional derivative without singular kernel". Prog. Fract. Differ., 1(2):73-85, 2015.*
- [15] *Isabelle Chalendar. "Cours", Université de Lyon 2008.*
- [16] *Constantin Corduneanu. "Integral Equations and Applications". University Press, Cambridge, 1991.*
- [17] *Francois Cuvelier. "Note de cours: méthodes numériques 2". Université Paris, 2020.*
- [18] *Robert Darling and John Newman. "On the short behaviour of porous interaction electrodes". Journal of the Electrochemical Society, 144: 3057–3063, 1997.*
- [19] *Souheyla Debbouche. "Etude de quelques problèmes fractionnaires avec des conditions intégrales". Mémoire de doctorat, Université Larbi Ben M'hidi, Oum El Bouaghi, 2023-2024.*
- [20] *Lokenath Debnath, "A brief historical introduction to fractional calculus", Int. J. Math. Educ. Sci. Technol, vol. 35, no. 4, pp. 487–501, 2004.*
- [21] *Françoise Demengel et Gilbert Demengel. "Espaces fonctionnels - Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles". EDP Sciences/CNRS Éditions, Paris, 2007.*
- [22] *Hamid Dib. "Équations Différentielles Fractionnaires". EDA-EDO (3<sup>ème</sup> École). Université Aboubker Belakid Tlemcen, 2009.*
- [23] *Kai Diethelm. "The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type". Springer, 2010.*
- [24] *Nelson Dunford et Jacob Schwartz. "Linear Operators", Part I: General Theory. John Wiley et Sons, New York, 1958.*

- [25] Francis Filbet. *"Cours", Université de Toulouse, 2019.*
- [26] Lars Gårding. *"Cauchy's Problem for Hyperbolic Equations". University of Chicago, Lecture notes, 1957.*
- [27] Ali Hameida et Ameer Memou. *"Cours et exercices corrigés d'Analyse Fonctionnelle  $L^3$ ". Université Frères Mentouri constantine et Université de M'sila 2020-2021.*
- [28] Ram Kanwal. *"Linear Integral Equations : theory and applications". Academic Press, 1971.*
- [29] Anatoly Kilbas, Hari Srivastava et Juan Trujillo. *"Theory and Applications of Fractional Differential Equations". North-Holland Mathematics Studies 204, Elsevier Science, Amsterdam, 2006.*
- [30] Harvé Le Dret. *"Equation aux dérivées partielles elliptiques non linéaires", 2013.*
- [31] Jean Leray. *"Lecture on Hyperbolic Differential Equations with Variable Coefficients". Institute for Advanced Study, New York, 1952.*
- [32] Joël Merker. *"cours," Université de paris.*
- [33] Kenneth Miller and Bob Ross *"An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations." Wiley, New York (1993).*
- [34] Gösta Mittag-Leffler. *"Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène". Acta Math. 29(1):101-181, 1905, cinquième note.*
- [35] Harald Mönch. *"Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces". Nonlinear Analysis, 4(1980), 985-999.*
- [36] Keith Oldham and Jonathan Spanier. *"The Fractional Calculus," Academic Press. Inc (1974).*
- [37] Sourya Ouali et Lamia Idir. *"Espaces de sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  et  $W^{m,p}(\Omega)$  ". Mémoire de master, Université de Bejaia, 2012.*

- [38] *Lev Petrovsky. "Über das Cauchysche Problem für Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen im Gebiet der nichtanalytischen Funktionen". Bull. Univ. d'État de Moscou, No. 7, p.1-74, 1938.*
- [39] *Igor Podlubny, "Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications", vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1993.*
- [40] *Aude Rondepierre et Adeline Rouchon, "Introduction aux équations aux dérivées partielles", Université de toulouse 2012-2013.*
- [41] *Cédric Raymond Serment, "Synthèse d'un isolateur d'ordre entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélectriques quasi-identiques", Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, France, 2001.*
- [42] *Stefan Samko, Anatoly Kilbas, Oleg Marichev, "Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications", Gordon and Breach, Yverdon, Switzerland, Rostov state University and Belorussian state university 1993.*