



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف  
Université Chadli Bendjedid – El Tarf  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
قسم الرياضيات  
Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Spécialité:** Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

### Thème

# Existence et unicité de la solution d'un système d'équations différentielles

Présenté par:

**BOUMENIDJEL Ilhem**

Devant le Jury :

<b>Dr. ALI KHELIL karima</b>	<b>MCB</b>	Univ Badji Mokhtar Annaba	Présidente
<b>Dr. BOUAZIZ Asma</b>	<b>MCA</b>	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
<b>Dr. BOUHADJERA Hakima</b>	<b>MCA</b>	Univ Badji Mokhtar Annaba	Examinatrice

**Année Universitaire 2021-2022**

# TABLE DES MATIÈRES

1	<b>Introduction</b> . . . . .	10
<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>12</b>
1	Quelques définitions . . . . .	12
2	Les espaces utilisés . . . . .	13
3	Fonctions utiles . . . . .	15
3.1	La fonction Gamma d'Euler . . . . .	15
3.2	La fonction Bêta . . . . .	17
4	Quelques théorèmes de point fixe . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Calcul fractionnaire</b>	<b>24</b>
1	Intégral fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .	24
2	Dérivation fractionnaire . . . . .	35
2.1	La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	35
2.2	La dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	41
2.3	Propriétés des dérivées fractionnaires . . . . .	45
2.4	Relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo . . . . .	46

<b>3</b>	<b>Systèmes d'équations différentielles fractionnaires à retards constants</b>	<b>51</b>
1	Introduction . . . . .	51
2	Existence de solution positive . . . . .	52
3	Unicité de la solution . . . . .	59

---

## REMERCIEMENT

Je tiens avant tout à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier **Dr. Bouaziz Asma**, mon encadreur de mémoire, pour la confiance qu'elle m'a donnée, ses conseils avisés, et le temps qu'elle a consacré à la réalisation du mémoire et à finalisation du travail. Je voudrais aussi lui combien j'apprécie sa grande présence et son respect indéfectible des rendez-vous.

Je voudrais également remercier les membres du jury **Dr. Ali Khelil Karima**, pour l'honneur qu'elle ma fait en acceptant d'être présidente de mon jury.

**Dr. Bouhadjera Hakima**, qui a bien voulu examiner ce travail.

Enfin, je remercie ma famille en particulier **mon père** et **ma mère**, qui m'ont toujours soutenu et fait preuve de courage dans des moments difficiles, aussi que tous **mes amis plus proches**.

---

## Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A ma très chère mère : **Aziza** qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite.

A mon père : **Mabrouk** qui sans sa grâce et ses sacrifices, je ne serais pas là  
aujourd'hui.

A ma grand-mère **Hada** qui a été plus qu'un mère et un père pour moi.

A mes chers frères **Ayoub**, **Achref** et **Yakoub**.

A toute ma famille.

A mes amis **Hala**, **Rahma**, **Amel**, **Zineb**, **Assia**, **Manar**.

A tous les étudiants de 2<sup>ième</sup> année mathématiques.

A tous mes enseignants du département de mathématique, université de Chadli

Bendjedid pour leurs utiles conseils, leur patience, et leur prévenance.

Sans oublier tous les enseignants qui m'ont enseigné à l'école primaire, au CEM et  
au lycée.

## ملخص

---

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تعلم المبادئ الأساسية لحساب التفاضل والتكامل الكسري ثم دراسة نظام من المعادلات التفاضلية الكسرية مع تأخيرات ثابتة. باستخدام نظريات النقطة الصامدة، مثل الحل السفلي والعلوي، مبدأ الانكماش من باناخ، نثبت وجود ووحداية الحل الايجابي والشامل.

**الكلمات المفتاحية:** الأنظمة الكسرية، تأخير ثابت، الحل السفلي والعلوي، مبدأ الانكماش من باناخ.

---

## Résumé

L'objectif principale de ce travail est d'apprendre les principes de base du calcul fractionnaire et ensuite d'étudier un système d'équations différentielles fractionnaires à retards constants. En utilisant les théorèmes de points fixes, tels que sous et sur solution, le principe de contraction de Banach, nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution positive et globale.

**Mots clés :** Système fractionnaire, retards constants, sous et sur solution, principe de contraction de Banach.

---

## Abstract

The main objective of this work is to understand the basic principles of fractional calculus and then to study a system of fractional differential equations with constant delays. Using the fixed point theorems, such as the lower and upper solutions, Banach contraction principle, we prove the existence and uniqueness of global positive solution.

**Keywords :** Fractional system, constant delays, lower and upper solution, Banach contraction principle.

---

## Notations

$\mathbb{N}$  : Ensemble des nombres entiers positive.

$\mathbb{N}^*$  :  $\mathbb{N} - \{0\}$ .

$\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$  : Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

$\mathbb{R}^n$  : Espace vectoriel de dimension  $n$  construit sur le corps des réels.

$\mathbb{C}$  : Ensemble des nombres complexes.

$\| \cdot \|$  : Norme.

$[a, b)$  : Intervalle semi-ouvert de  $\mathbb{R}$  d'extrémité  $a$  et  $b$ .

$C([a, b], \mathbb{R}^+)$  : Espace des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

$AC[a, b]$  : Espace des fonctions absolument continues sur  $[a, b]$ .

$R - L$  : Riemann-Liouville.

$\Gamma(\alpha)$  : Fonction Gamma d'Euler.

$B(\alpha, \beta)$  : Fonction Bêta.

$[\alpha]$  : Partie entière de  $\alpha$ .

$I_a^\alpha$  : Intégral fractionnaire de Riemann-Liouville.

$D_a^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

${}^c D_a^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Caputo.

# 1 Introduction

Le calcul fractionnaire est actuellement très prisé par les chercheurs, dont certains considèrent cette science comme une partie de l'analyse mathématique et traitent des applications d'intégration et des dérivées d'ordre arbitraire (non entier). Les origines de cette tendance remontent au *XVII<sup>e</sup>* siècle lorsque Newton et Leibniz ont posé les bases de la différenciation et de l'intégration. En particulier, Leibniz a introduit le symbole  $\frac{d^n f}{dx^n}$  pour désigner la *n<sup>ième</sup>* dérivée d'une fonction  $f$ . Lorsqu'il l'a déclaré dans une lettre adressée à l'Hôpital (apparemment avec la supposition implicite que  $n \in \mathbb{N}$ ), l'Hôpital a répondu : Que signifie  $\frac{d^n f}{dx^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel). Cette question a d'ailleurs donné naissance au nom de cette partie des mathématiques. Et donc, cette lettre de l'Hôpital, écrite le 30 Septembre 1695, est maintenant reconnue comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire.

Le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans, et les dérivées fractionnaires ont été mentionnées dans certains contextes , par exemple : Euler en 1730, Lagrange en 1772, Laplace en 1812, Lacroix en 1819, Fourier en 1822, Abel entre (1823 – 1826), Riemann en 1847, Grunwald en 1867 [5], Liouville et Letnikov en 1868 [11] [10], Sonin en 1869, Laurent en 1884, Nekrassov en 1888, Krug en 1890, Hadamard en 1892, Weyl en 1917, Marchaud en 1927, Hardy et Littlewood en 1928, Riesz en 1937, Oldham et Spanier en 1970 et enfin Ross en 1974 où il a organisé la première conférence sur ce sujet à l'Université de New Haven (voir [6] [8] [7] [13] [14] [15] [16] [17]).

D'autre part, le calcul fractionnaire est un sujet moderne car il est devenu le sujet et la cible de nombreuses conférences spécialisées et de recherches universitaires depuis plus de 20 ans. C'est grâce au développement intensif de la théorie du calcul fractionnaire et à ses vastes applications dans de nombreux domaines tels que la

---

physique, la chimie, l'ingénierie, la finance et d'autres sciences (voir [4] [8] [14] [15] [16] [17]).

L'objectif de ce mémoire est une étude introduisant le calcul fractionnaire ainsi qu'une étude détaillée d'un problème fractionnaire. Nous nous intéressons à étudier le système d'équations différentielles fractionnaires à retards constants de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_j(t) = f_j(t, x_j(t), x_1(t - \tau_1), \dots, x_n(t - \tau_n)), & j = 1, 2, \dots, n, \quad t \geq 0, \\ x(t) = \Phi(t) \geq 0, & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

où  ${}^c D^\alpha$  est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))'$ , où  $'$  désigne la transposée du vecteur et  $f_j : \mathbb{R}^+ \times C^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^+$  sont continues où  $C = C([-\tau, \infty], \mathbb{R}^+)$ .  $\Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))'$  est un vecteur donné, tel que  $\phi_i(t) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^+)$  l'espace des fonctions continue de  $[-\tau, 0]$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $\tau = \max \tau_j$ , où  $\tau_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont des constantes.

### Organisation du mémoire

Ce travail est principalement réparti en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions préliminaires essentielles utilisées et nécessaires dans ce mémoire.
- Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du calcul fractionnaire tel que l'intégrale fractionnaire et la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo.
- Le dernier chapitre a pour objet l'étude de l'existence et l'unicité d'un système d'équations différentielles fractionnaires à retards constants.

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires pour mieux comprendre ce manuscrit.

## 1 Quelques définitions

**Définition 1.1 (Norme)** [18] Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . On appelle une norme sur  $E$  toute application  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant :

$$\forall x \in E : \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ (homogénéité).}$$

$$\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (inégalité triangulaire).}$$

On dit alors que  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace vectoriel normé.

**Définition 1.2 (Opérateur)** [2] Soit  $E$  un espace vectoriel normé, une application linéaire  $A$  de  $E$  dans lui-même est appelée un opérateur linéaire dans  $E$ . On appelle le domaine de  $A$  où

$$D_A = \{x \in E, Ax \in E\}.$$

**Définition 1.3 (Suite de Cauchy)** On dit qu'une suite de réels est de Cauchy si

## 2. Les espaces utilisés

---

elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } m \geq N) \Rightarrow (|u_n - u_m| \leq \varepsilon). \quad (1.1)$$

## 2 Les espaces utilisés

**Définition 2.1 (Espace  $L^p$ )** [15] Soit  $\Omega = ]a, b[$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) un intervalle borné ou non borné de  $\mathbb{R}$ . Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit l'espace  $L^p$  comme suit :

1. Pour  $1 \leq p < \infty$ ,  $L^p(\Omega)$  est l'espace des fonction mesurables de puissance  $p$  intégrables sur  $\Omega$ , c.-à-d. :

$$f \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty; \quad (1.2)$$

où  $\|f\|_p = (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$  est une norme sur  $L^p(\Omega)$  et  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  est un Banach.

2. Pour  $p = 2$ , alors :

$$L^2(\Omega) = \{f : f \text{ mesurable à carré intégrable sur } \Omega, \int_{\Omega} f^2(x) dx < \infty\}, \quad (1.3)$$

L'espace  $(L^2(\Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)})$  est un Hilbert, où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$  est le produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x).g(x)dx, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega). \quad (1.4)$$

3. Pour  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur  $\Omega$ .

**Définition 2.2 (Espaces des fonctions continues)** [8]

Soit  $\Omega = [a, b]$  ( $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ) et  $n \in \mathbb{N}$ . On désigne par  $C^n(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  qui leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à  $n$  soit continues sur

$\Omega$ , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_C = \sum_{k=0}^n \max_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

En particulier, si  $n = 0$ ,  $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  continues sur  $\Omega$  muni de la norme :

$$\|f\|_C = \max_{x \in \Omega} |f(x)|. \quad (1.6)$$

**Définition 2.3 (Espaces des fonctions absolument continues) [8]**

Soit  $\Omega = [a, b]$  ( $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ) un intervalle fini. On désigne par  $AC([a, b])$  l'espace des fonctions  $f$  qui sont primitives de fonctions intégrables, c'est à dire :

$$AC([a, b]) = \{f / \exists \varphi \in L([a, b]) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt\}, \quad (1.7)$$

et  $AC([a, b])$  sera l'espace des fonctions absolument continues sur l'intervalle  $[a, b]$ .

**Définition 2.4 (Espace métrique)** Un espace métrique  $(E, d)$  est un ensemble  $E$  muni d'une application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  appelée distance ou métrique, qui satisfait les propriétés suivantes :

- i)  $\forall x, y \in E \quad d(x, y) \geq 0$ , et  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie).
- iii)  $\forall x, y, z \in E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

**Définition 2.5 (Espace complet) [9]** On dit qu'un espace métrique  $(E, \|\cdot\|)$  est complet si toute suite de Cauchy de  $E$  est convergente.

**Définition 2.6 (Espace de Banach) [18]** On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 3 Fonctions utiles

Dans cette section nous introduisons les fonctions Gamma d'Euler et Bêta. Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

#### 3.1 La fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma est en mathématiques, une fonction complexe, également considérée comme une fonction spéciale. Il étend la fonction factorielle à tous les nombres complexes (sauf dans certains points).

**Définition 3.1** Pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ , tel que  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , on définit la fonction Gamma d'Euler (notée  $\Gamma(\alpha)$  et représentée par la figure (FIGURE 3.1)) par la relation suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad (1.8)$$

avec

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty.$$

Et aussi

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

**Lemme 3.1**  $\Gamma(\alpha)$  est une fonction monotone et strictement décroissante pour  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Proposition 3.1** [12] La fonction  $\Gamma(\alpha)$  vérifie la propriété suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha). \quad (1.9)$$

En particulier

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!, \forall \alpha \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

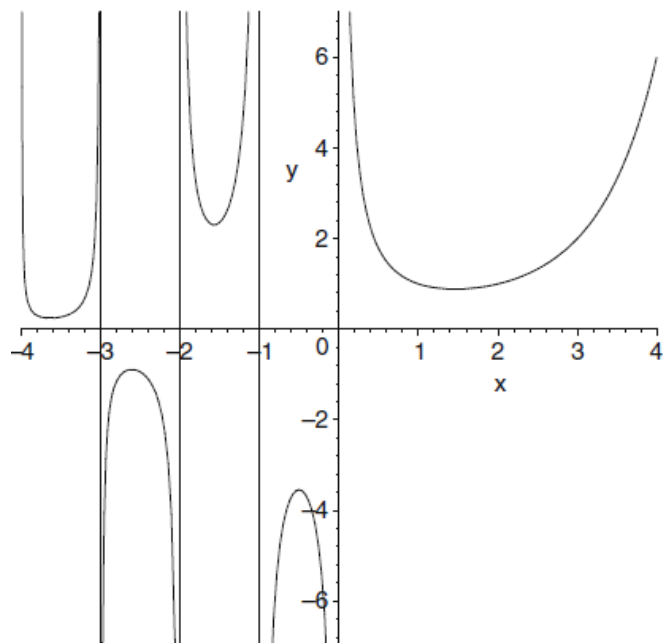


FIGURE. 3.1 - Courbe representative de la fonction Gamma.

**Preuve.** En intégrant(1.8) par parties

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(\alpha+1)-1} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt \\
 &= [-e^{-t} t^{\alpha}]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\
 &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \alpha \Gamma(\alpha).
 \end{aligned}$$

### 3. Fonctions utiles

---

Alors :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

En particulier, on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1-1}dt = 1.$$

Et en utilisant (1.9), on obtient pour  $\alpha \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1.1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

...            ...            ...            ...

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha - 1)! = \alpha!$$

Par conséquent

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!, \forall \alpha \in \mathbb{N}.$$

■

## 3.2 La fonction Bêta

**Définition 3.2** *La fonction Bêta ou bien la fonction de Bessel de seconde espèce (notée  $B(\alpha, \beta)$  et représentée par la figure (FIGURE 3.2)) est une type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes  $\alpha$  et  $\beta$  par la relation :*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \quad \text{Re}(\beta) > 0. \quad (1.11)$$

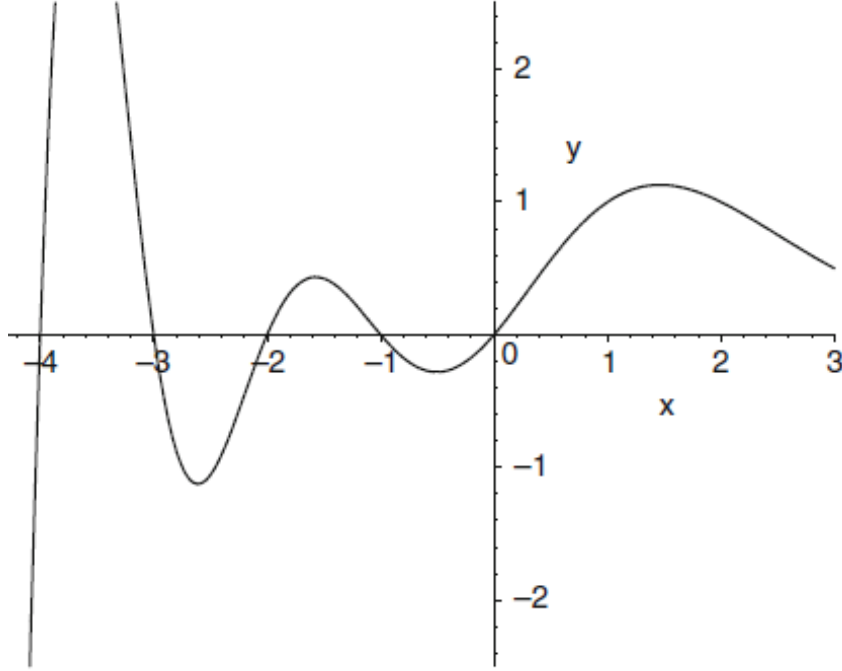


FIGURE. 3.2 - Courbe representation de la fonction Beta.

**Proposition 3.2** *La fonction Gamma est liée à la fonction Bêta par la relation suivante :*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \text{ et } \text{Re}(\beta) > 0. \quad (1.12)$$

**Preuve.** Le produit  $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$  peut s'écrire :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\beta-1} ds = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(t+s)} t^{\alpha-1} s^{\beta-1} dt ds.$$

$$\Gamma(\alpha + \beta) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(t+s)} t^{\alpha-1} s^{\beta-1} dt ds.$$

#### 4. Quelques théorèmes de point fixe

---

Nous utilisons le changement de variable  $t + s = x$ , pour  $0 < t < \infty$  et  $0 < s < \infty$  implique  $0 < x < \infty$  et  $0 < y < 1$ . Le jacobien est

$$\frac{D[t, s]}{D[x, y]} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 - y & -x \end{vmatrix} = -xy - x + xy = -x.$$

Résultant :

$$dtds = \left| \frac{D[t, s]}{D[x, y]} \right| dx dy = x dx dy.$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^1 \int_0^1 e^{-x} (xy)^{\alpha-1} x^{\beta-1} (1-y)^{\beta-1} x dx dy \\ &= \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+\beta-1} dx \int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy \\ &= \Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Alors

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

■

**Remarque 3.1** *La fonction Bêta est symétrique i.e.*

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha).$$

## 4 Quelques théorèmes de point fixe

Il existe plusieurs théorèmes qui permettent de déterminer qu'une application satisfaisant certains critères possède un point fixe (voir [9]).

Avant d'écrire les théorèmes dont nous avons besoin dans ce travail, nous aborderons d'abord quelques définitions utiles.

Soit  $E$  un espace de Banach réel.

**Définition 4.1 (point fixe)** Soit  $A$  une application d'un ensemble  $E$  dans lui-même. On appelle point fixe de  $A$  tout point  $\hat{u} \in E$  tel que :  $A(\hat{u}) = \hat{u}$ .

**Définition 4.2** Soit  $K$  un sous-ensemble non vide fermé de  $E$ .  $K$  est appelé cône si  $ax + by \in K$  pour tout  $x, y \in K$  et  $a, b$  sont réels positifs où  $K \cap (-K) = \{0\}$  et  $K \neq \{0\}$ .

**Définition 4.3** [21] Un cône  $K$  introduit un ordre partielle  $\leq$  dans  $E$  de la manière suivante

$$x \leq y \text{ si } y - x \in K.$$

**Définition 4.4** Le cône  $K$  est appelé

– Normal : s'il existe un nombre  $l \geq 1$  de telle sorte que pour tout  $x, y \in K$  :

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq l \|y\|.$$

– Régulier : si toute suite croissante qui est bornée par le dessus est convergente. Autrement dit, si  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  est une suite telle que  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq y$  pour certains  $y \in E$ , alors il existe  $x \in E$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ .

**Définition 4.5** [21] Pour  $x, y \in E$  l'intervalle d'ordre  $\langle x, y \rangle$  est définie par

$$\langle x, y \rangle = \{z \in E : x \leq z \leq y\}.$$

**Définition 4.6** [21] La fonctionnelle  $h(t, x, x_1, \dots, x_n)$  est dite croissante sur  $I \times E^{n+1}$ , si pour tout  $(t, \phi, \phi_1, \dots, \phi_n) \in I \times E^{n+1}$  et  $(t, \psi, \psi_1, \dots, \psi_n) \in I \times E^{n+1}$ , tels que

$$\phi(\theta) \leq \psi(\theta) \text{ et } \phi_i(\theta) \leq \psi_i(\theta), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

on a l'inégalité suivante

$$h(t, \phi, \phi_1, \dots, \phi_n) \leq h(t, \psi, \psi_1, \dots, \psi_n).$$

**Définition 4.7** Soit  $A : E \rightarrow F$  où  $E$  et  $F$  sont deux espaces de Banach.  $A$  est compact s'il transforme tout ensemble borné de  $E$  dans un ensemble relativement compact de  $F$ .

**Définition 4.8** Un opérateur est dit complètement continu, s'il est compact et continu.

**Remarque 4.1** –  $T$  compact  $\Leftrightarrow T(C)$  relativement compact.  
–  $T$  compact et continu  $\Leftrightarrow T$  complètement continu.

### **Théorème du point fixe (solution minimale et maximale)**

**Théorème 4.1** [21] Soit  $D$  un sous-ensemble du cône  $K$  de l'espace partiellement ordonné  $E$ ,  $F : D \rightarrow E$  est croissante. S'il existe  $x_0, y_0 \in D$  telle que  $x_0 \leq y_0$ ,  $\langle x_0, y_0 \rangle \subset D$  et  $x_0, y_0$  sont respectivement des sous et sur solutions de l'équation  $x - F(x) = 0$ , alors l'équation  $x - F(x) = 0$  a une solution minimale et une solution maximale  $x^*, y^* \in \langle x_0, y_0 \rangle$  telle que  $x^* \leq y^*$ , lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1.  $K$  est normal et  $F$  est complètement continue ;
2.  $K$  est régulier et  $F$  est continue ;
3.  $E$  est réflexif,  $K$  est normal, et  $F$  est continue ou faiblement continue.

### **Théorème du point fixe de Banach**

Le théorème de point fixe de Banach (également connu sous le nom de théorème de l'application contractante) assure l'existence et l'unicité de la solution. Ce théorème donne un critère général dans les espaces métriques complets pour garantir que le processus d'itération d'une fonction tende vers un point fixe.

**Définition 4.9** [19] Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Une application  $f : E \rightarrow E$  est dite  $k$ -Lipschitzienne ( $k \geq 0$ ) si

$$\forall u, v \in E, \quad d(f(u), f(v)) \leq kd(u, v).$$

**Définition 4.10** [19] L'application  $k$ -Lipschitzienne  $f$  est dite une contraction si  $k \in (0, 1)$ .

**Théorème 4.2** [19] (*Théorème du point fixe de Banach*)

Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet, soit  $F$  une partie fermée de  $E$ , et soit  $f : F \rightarrow E$  une contraction. Alors  $f$  admet un unique point fixe..

**Définition 4.11** Soit  $U$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $f$  une fonction avec  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Soit  $|\cdot|$  une norme quelconque dans  $\mathbb{R}^p$ .

(i)  $f$  est uniformément bornée sur  $U$  s'il existe  $L \geq 0$  tel que  $|f(t)| \leq L$  pour tout  $n$  et tout  $t \in U$ .

(ii)  $f$  est équicontinue si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que si  $t_1, t_2 \in U$  et  $|t_1 - t_2| < \delta$  alors  $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$  quel que soit  $n$ .

**Théorème 4.3** (*Théorème d'Arzela-Ascoli*)

Si une fonction  $f \in G$  est uniformément bornée et équicontinue, alors  $G$  est relativement compact.

Dans notre travail, les fonctions que nous allons utiliser sont définies sur des intervalles infinis (non bornés). Par conséquent, le théorème d'Arzela-Ascoli ne fonctionne pas. Nous avons besoin de la modification suivante :

Soit  $p : I := [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  une fonction continue telle que

$$\sup_I \{ |x(t)| p(t) \} < \infty.$$

Et soit  $\Omega \subset E$ .

**Définition 4.12** une fonction  $x \in \Omega$  est dite presque équicontinue sur  $I$  si elle est équicontinue dans chaque intervalle  $[0, T]$ ,  $0 < T < \infty$ .

**Théorème 4.4** [22] Si une fonction  $x \in \Omega$  est presque équicontinue sur  $I$  et uniformément bornée dans le sens de la norme

$$\|x\|_q = \sup_I \{ |x(t)| q(t) \},$$

#### 4. Quelques théorèmes de point fixe

---

où la fonction  $q$  est positive et continue sur  $I$  et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{q(t)} = 0,$$

alors  $\Omega$  est relativement compact dans  $E$ .

## CHAPITRE 2

## Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous présenterons l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les deux définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires, à savoir celle de Riemann-Liouville et Caputo, en donnant les propriétés les plus importantes de ces deux notions.

### 1 Intégral fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- La première primitive de  $f$  est donnée par :

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (2.1)$$

- La seconde primitive est trouvée en utilisant le théorème de Fubini pour changer les bornes :

$$\begin{aligned}
 (I_a^2 f)(x) &= \int_a^x I_a^1 f(s) ds & (2.2) \\
 &= \int_a^x \left( \int_t^x f(t) dt \right) ds \\
 &= \int_a^x \left( \int_t^x ds \right) f(t) dt \\
 &= \int_a^x (x-t) f(t) dt.
 \end{aligned}$$

- En générale, pour la  $\alpha^{\text{ième}}$  primitive, on aura :

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 \dots \int_a^{x_{\alpha-1}} f(x_\alpha) dx_\alpha = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt. \quad (2.3)$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy.

**Définition 1.1** *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par R-L) d'une fonction  $f \in L^1[a, b]$  est donnée par la relation suivante :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (2.4)$$

*Cette formule est la généralisation de (2.3) par la factoriel de la fonction Gamma :*

$$(\alpha-1)! = \Gamma(\alpha),$$

*où  $\alpha$  est un nombre réel ou complexe.*

**Exemple 1.1** *L'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction*

$$f(x) = (x - a)^\beta \text{ avec } \beta > -1,$$

*est donnée par :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt,$$

*Pour évaluer cette intégrale, on effectue le changement de variable suivant :*

$$t = a + s(x - a) \Rightarrow dt = (x - a) ds.$$

$$\text{si } t = x \Rightarrow s = \frac{x-a}{x-a} = 1 \text{ et si } t = a \Rightarrow s = 0.$$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - a - s(x - a))^{\alpha-1} (a + s(x - a) - a)^\beta (x - a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x - a) - s(x - a)]^{\alpha-1} [s(x - a)]^\beta (x - a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x - a)(1 - s)]^{\alpha-1} s^\beta (x - a)^\beta (x - a) ds \end{aligned}$$

## 1. Intégral fractionnaire de Riemann-Liouville

---

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha+\beta} (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\
 &= \frac{B(\alpha, \beta+1)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}.
 \end{aligned}$$

donc

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}. \quad (2.5)$$

Pour cet exemple, si on prend  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 1$  et  $a = 0$ , on aura :

$$I^{0.5}(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

**Exemple 1.2** L'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction

$$f(x) = x^\beta \text{ avec } \beta > 1$$

est donnée par :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^\beta (x-t)^{\alpha-1} dt. \quad (2.6)$$

En posant  $t = xu \Rightarrow dt = xdu$ .

Si  $t = x \Rightarrow u = \frac{x}{x} = 1$  et si  $t = 0 \Rightarrow u = 0$ .

Alors la formule (2.6) devient :

$$I_a^\alpha (x^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (xu)^\beta (x-xu)^{\alpha-1} xdu,$$

Par utilisation de la fonction Bêta on trouve :

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha(x^\beta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^\beta u^\beta x^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} x du \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha+\beta-1+1} u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\
 &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\
 &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$I_a^\alpha(x^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}.$$

**Théorème 1.1** [20] Si  $f \in L^1[a, b]$  et  $\alpha > 0$ , alors  $I_a^\alpha f(x)$  existe pour presque tout  $x \in [a, b]$  et on a :

$$I_a^\alpha f \in L^1[a, b]. \quad (2.7)$$

**Preuve.** Soit la fonction  $f \in L^1[a, b]$ , on a :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x-t) \varphi_2(t) dt,$$

avec

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ pour } , 0 < u \leq b-a \\ 0 \text{ pour } , u \in \mathbb{R} - \{[0, b-a]\} \end{cases} ,$$

## 1. Intégral fractionnaire de Riemann-Liouville

---

et

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} f(u), & 0 \leq u \leq b \\ 0, & \mathbb{R} - \{[a, b]\} \end{cases}.$$

par construction.  $\varphi_j \in L^1(\mathbb{R})$  pour  $j \in 1, 2$ , et on a :  $I_a^\alpha f \in L^1[a, b]$ . ■

**Théorème 1.2** [20] Soit  $\alpha > 0$  et soit  $(f_k)_{k=1}^\infty$  une suite des fonctions continues uniformément convergentes sur  $[a, b]$ , alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la limite comme suit :

$$(I_a^\alpha \lim_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) = (\lim_{k \rightarrow \infty} I_a^\alpha f_k)(x). \quad (2.8)$$

**Preuve.** Soit  $f$  la limite de la suite  $(f_k)$ , il est clair que  $f$  est continue, et on a l'estimation :

$$\begin{aligned} | I_a^\alpha f_k(x) - I_a^\alpha f(x) | &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} | f_k(x) - f(t) | dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \| f_k(x) - f(t) \| dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(x-t)} \int_a^x (x-t)^\alpha \| f_k(x) - f(t) \| dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^\alpha \| f_k(x) - f(t) \| dt. \end{aligned}$$

D'où, la convergence uniforme lorsque  $k \rightarrow \infty$ , pour  $x \in [a, b]$ . ■

**Théorème 1.3** [8][20] Soit  $\alpha, \beta > 0$ , alors pour toute fonction  $f \in L^1[a, b]$ , l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) = I_a^\beta I_a^\alpha f(x) \quad (2.9)$$

pour presque tout  $x \in [a, b]$  et  $f \in C[a, b]$ , alors (2.7) est aussi vraie pour tout

$x \in [a, b]$ .

**Preuve.** Soit  $f \in L^1[a, b]$ , la preuve découle directement de la définition

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \int_u^x (t-u)^{\beta-1} f(u) du dt.$$

D'après le théorème de Fubini on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} dt du.$$

En utilisant le changement de variable  $t = u + s(x-u)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x (x-u-s(x-u))^{\alpha-1} (u+s(x-u)-u)^{\beta-1} dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x [(x-u)-s(x-u)]^{\alpha-1} [s(x-u)]^{\beta-1} dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x [(x-u)(1-s)]^{\alpha-1} s^{\beta-1} (x-u)^{\beta-1} dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} \int_s^x (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} dt du \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x f(u)(x - u)^{\alpha + \beta - 1} du \\
 &= I_a^{\alpha + \beta} f(x).
 \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

**Théorème 1.4** [12] *Propriété de linéarité :*

$${}_a I_x^\alpha [c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_{1a} I_x^\alpha f(x) + c_{2a} I_x^\alpha g(x), \quad (2.10)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes et  $f(x)$  et  $g(x)$  sont deux fonctions arbitraires.

**Preuve.**

$$\begin{aligned}
 {}_a I_x^\alpha [c_1 f(x) + c_2 g(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} [c_1 f(t) + c_2 g(t)] dt \\
 &= c_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} f(t) dt + c_2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} g(t) dt \\
 &= c_{1a} I_x^\alpha f(x) + c_{2a} I_x^\alpha g(x).
 \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

**Proposition 1.1** [16] *Soit  $\alpha$  un nombre complexe et  $f \in C^0([a, b])$ .*

- i)  $(I_a^0 f)(x) = f(x)$ ;
- ii)  $\frac{d}{dx} (I_a^\alpha f)(x) = (I_a^{\alpha - 1} f)(x), \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 1$ ;
- iii)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x), \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0$ .

**Preuve.** *i)*

$$\begin{aligned}
 (I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) d\left(\frac{(x-t)^\alpha}{-\alpha}\right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ f(a)(x-a)^\alpha + \int_a^x f^{(1)}(t)(x-t)^\alpha dt \right].
 \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned}
 (I_a^0 f)(x) &= 1 \left[ f(a) \times 1 + \int_a^x f^{(1)}(t) dt \right] \\
 &= f(a) + f(x) - f(a) = f(x).
 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

*ii)*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right] \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t) dt
 \end{aligned}$$

1. Intégral fractionnaire de Riemann-Liouville

---

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^x (\alpha - 1)(x - t)^{\alpha-2} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-2} f(t) dt \\
 &= (I_a^{\alpha-1} f)(x),
 \end{aligned}$$

avec  $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ .

iii) Soit  $f \in C^0([a, b])$ .

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

D'après (2.5) , on peut écrire :

$$(I_a^\alpha 1)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} \times 1 dt = \frac{(x - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 1.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 &| (I_a^\alpha f)(x) - (I_a^\alpha 1)(x)f(x) | = | (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} f(x) | \tag{2.11} \\
 &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(x) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} | f(t) - f(x) | dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\gamma} (x - t)^{\alpha-1} | f(t) - f(x) | dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\gamma}^x (x - t)^{\alpha-1} | f(t) - f(x) | dt.
 \end{aligned}$$

D'une part, comme  $f$  est continue sur  $[a, b)$ , nous écrivons :

$$\forall x, t \in [a, b), \forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 : |t - x| < \gamma \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon,$$

qui conduit à

$$\int_{x-\gamma}^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt \leq \int_{x-\gamma}^x (x-t)^{\alpha-1} \varepsilon dt = \frac{\varepsilon \gamma^\alpha}{\alpha}. \quad (2.12)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_a^{x-\gamma} (x-t)^{\alpha-1} |f(t) - f(x)| dt &\leq \int_a^{x-\gamma} (x-t)^{\alpha-1} (|f(t)| + |f(x)|) dt \quad (2.13) \\ &\leq 2 \sup_{\varepsilon \in [a, x]} |f(\varepsilon)| \int_a^{x-\gamma} (x-t)^{\alpha-1} dt, \quad \forall x \in [a, b) \\ &= 2M \left( \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\gamma^\alpha}{\alpha} \right), \quad \text{où } M = \sup_{\varepsilon \in [a, x]} |f(\varepsilon)|. \end{aligned}$$

On compare entre (2.11), (2.12) et (2.13), on trouve :

$$\begin{aligned} \left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right| &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} [\varepsilon \gamma^\alpha + 2M((x-a)^\alpha - \gamma^\alpha)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [\varepsilon \gamma^\alpha + 2M((x-a)^\alpha - \gamma^\alpha)]. \end{aligned}$$

D'après la limite :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit :

$$\left| \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right| \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

C.-à-d.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x).$$

■

## 2 Dérivation fractionnaire

### 2.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 2.1** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n - 1 \leq \alpha < n$ . La dérivation fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann-Liouville d'une fonction  $f$  (notée par  $D_a^\alpha$  ou bien  ${}^{RL}D_a^\alpha$ ) définie par la relation suivante :

$$D_a^\alpha f(x) = D_a^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad x > 0, \quad (2.14)$$

avec  $D^n = \left( \frac{d}{dx} \right)^n$ .

En particulier, si  $\alpha = 0$ , alors on trouve :

$$(D_a^0 f)(x) = I_a^0 f(x) = f(x). \quad (2.15)$$

Si  $\alpha = n$ , on trouve :

$$D_a^n f(x) = D_a^{n+1} I_a^{n+1-n} f(x) = D_a^{n+1} I_a^1 f(x) = D^n f(x). \quad (2.16)$$

D'autre part, si  $\alpha < 0$

$$D_a^\alpha f(x) = I^{-\alpha} f(x). \quad (2.17)$$

**Exemple 2.1** La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction

$$f(x) = (x-a)^\beta$$

Soit  $m$  non entier et  $0 \leq n - 1 < m < n$  et  $\beta > -1$ , alors on a :

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

$$D^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} (t - a)^\beta dt$$

On utilise le changement de variable  $t = a + s(x - a)$ , on aura :

$$\begin{aligned} D^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_0^1 (x - a - s(x - a))^{n-\alpha-1} (a + s(x - a) - a)^\beta (x - a) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_0^1 [(x - a) - s(x - a)]^{n-\alpha-1} [s(x - a)]^\beta (x - a) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_0^1 [(x - a)(1 - s)]^{n-\alpha-1} s^\beta (x - a)^\beta (x - a) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x - a)^{n-\alpha+\beta} \int_0^1 (1 - s)^{n-\alpha-1} s^\beta du \\ &= \frac{B(n - \alpha, \beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x - a)^{n-\alpha+\beta} \\ &= \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x - a)^{n-\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc

$$D^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x - a)^{n-\alpha+\beta}. \quad (2.18)$$

On sait que :

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^n (x - a)^{n-\alpha+\beta} = (\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1) (x - a)^{\beta - \alpha}. \quad (2.19)$$

## 2. Dérivation fractionnaire

---

Par substitution de (2.19) dans (2.18) on trouve :

$$\begin{aligned}
 D^\alpha(x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$D^\alpha(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.20)$$

Dans cet exemple, si on prend  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$  et  $a = 0$ , on aura :

$$D^{0.5}x^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

**Exemple 2.2** La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante est en général ni nulle ni constante.

$$D^\alpha(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \quad (2.21)$$

**Théorème 2.1** [12] Soit  $n-1 < \alpha < n$  et si  $f(x)$  satisfait les conditions de théorème de Taylor

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}. \quad (2.22)$$

**Preuve.** Comme  $f(x)$  satisfait les conditions du théorème de Taylor, on peut appliquer le développement de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} x^k.$$

On dérive au sens de Riemann-Liouville, on trouve :

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} D^\alpha x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha},$$

Alors

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}.$$

■

**Lemme 2.1** [4] Soit  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$  avec  $[\alpha]$  est la partie entière de  $\alpha$  alors pour tout entier  $m \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$D_a^\alpha f(x) = D_a^m I_a^{m-\alpha} f(x), \quad m > \alpha. \quad (2.23)$$

**Preuve.** Comme  $m \geq n$ , on a :

$$\begin{aligned} D_a^m I_a^{m-\alpha} f(x) &= D^n D^m I_a^{m-n} I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_a^\alpha f(x). \end{aligned}$$

Avec  $D_a^m I_a^{m-n} = I$  (identité). ■

**Théorème 2.2** [20] Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent.

pour  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , on a :

$$D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 D_a^\alpha f(x) + c_2 D_a^\alpha g(x). \quad (2.24)$$

**Preuve.** Soient  $f, g \in L^1[a, b]$  et  $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
 D_a^\alpha(c_1f(x) + c_2g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} (c_1f + c_2g)(t) dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (c_1(x - t)^{n-\alpha-1} f(t) + c_2(x - t)^{n-\alpha-1} g(t)) dt \\
 &= \frac{c_1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \\
 &\quad + \frac{c_2}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} g(t) dt \\
 &= c_1 \left( \frac{d}{dx} \right)^n I_a^{n-\alpha} f(x) + c_2 \left( \frac{d}{dx} \right)^n I_a^{n-\alpha} g(x) \\
 &= c_1 D_a^\alpha f(x) + c_2 D_a^\alpha g(x).
 \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

**Théorème 2.3** [20] Soient  $\alpha, \beta > 0$  et  $n - 1 < \alpha < n$ ,  $m - 1 \leq \beta < m$  tel que  $n, m \in \mathbb{N}^*$  alors

1. si  $\alpha > \beta > 0$ , alors pour  $f \in L^1[a, b]$  l'égalité

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x), \quad (2.25)$$

est presque partout sur  $[a, b]$ .

2. S'il existe une fonction  $\varphi \in L^1[a, b]$  tel que  $f = I_a^\alpha \varphi$ , alors

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x), \quad (2.26)$$

pour presque tout  $x \in [a, b]$ .

3. Pour  $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$ .

Si les dérivées fractionnaires  $D_a^\alpha f$  et  $D_a^{k+\alpha} f$  existent, alors

$$D^k(D_a^\alpha f(x)) = D_a^{k+\alpha} f(x), \quad (2.27)$$

4. Si  $\beta \geq \alpha > 0$  et la dérivée fractionnaire  $D_a^{\beta-\alpha} f$  existe, alors

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x). \quad (2.28)$$

**Preuve.** En utilisant la définition (2.14) de dérivation fractionnaire et la relation (2.9) on trouve :

1. Pour  $\alpha > \beta > 0$ , alors  $n \geq m$ , on a :

$$\begin{aligned} D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) &= D^n I_\alpha^{n-\beta}(I_a^\alpha f)(x) \\ &= D^n(I_\alpha^{n+\alpha-\beta} f)(x) \\ &= D^n I_a^n(I_a^{\alpha-\beta} f)(x) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x). \end{aligned}$$

2. Par la relation (2.26) on obtien :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) &= I_a^\alpha(D_a^\alpha I_a^\alpha \varphi(x)) \\ &= I_a^\alpha \varphi(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) &= D_a^\alpha(I_a^\alpha I_a^\alpha \varphi(x)) \\ &= I_a^\alpha \varphi(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
 D^k [D_a^\alpha f(x)] &= D^k D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\
 &= D^{k+n} I_a^{n-\alpha+k-k} f(x) \\
 &= D^{k+n} I_a^{k+n-(\alpha+k)} f(x) \\
 &= D^{k+n} f(x).
 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

4. On a :

$$\begin{aligned}
 D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) &= D^\beta I_a^{n-\beta} (I_a^\alpha f)(x) \\
 &= D^n I_a^{n-(\beta-\alpha)} f(x) \\
 &= D_a^{\beta-\alpha} f(x),
 \end{aligned}$$

existe pour  $i - 1 \leq \beta - \alpha < i$  avec  $i \leq n$ . ■

## 2.2 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ait joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, sa dérivée d'une constante n'est pas nulle. Et comme les conditions initiales du problème de Cauchy sont exprimées par des dérivés fractionnaires, Caputo propose une autre approche où la dérivée d'une constante est nulle et les conditions initiales sont exprimées comme dans le cas classique par un ordre entier.

Dans cette section on va donner la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

**Définition 2.2** *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  de la fonction  $f(x)$  définie par la relation suivante :*

$${}^c D_a^\alpha f(x) = I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad x > a, \quad (2.29)$$

avec  $n - 1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Si  $\alpha = n$  on trouve

$${}^c D_a^\alpha f(x) = f^{(n)}(x). \quad (2.30)$$

En particulier, si  $\alpha = 0$ , alors

$${}^c D_a^0 f(x) = f(x). \quad (2.31)$$

**Exemple 2.3** La dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction :

$$f(x) = (x - a)^\beta.$$

Soit  $\alpha$  non entier et  $\beta > n - 1$  avec  $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ , alors on a :

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - n}.$$

D'où

$${}^c D_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} (t - a)^{\beta - n} dt.$$

En utilisant le changement de variable  $t = a + s(x - a)$ , on aura :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_0^1 (x - a - s(x - a))^{n - \alpha - 1} (a + s(x - a) - a)^{\beta - n} (x - a) ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_0^1 [(x - a) - s(x - a)]^{n - \alpha - 1} [s(x - a)]^{\beta - n} (x - a) ds \end{aligned}$$

## 2. Dérivation fractionnaire

---

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_0^1 [(x - a)(1 - s)]^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} (x - a)^{\beta-n} (x - a) ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (x - a)^{\beta-\alpha} \int_a^1 (1 - s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)B(n - \alpha, \beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (x - a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc

$${}^c D_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.32)$$

En particulier, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est nulle i.e.

$${}^c D_a^\alpha C = 0, \quad \forall C \in \mathbb{R}. \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
{}^c D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} \times 0 dt = 0
\end{aligned}$$

**Exemple 2.4** La dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction

$$f(x) = x^\beta,$$

est donné par :

$${}^c D^\alpha f(x) = {}^c D^\alpha x^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}, & \beta > \alpha - 1, \\ 0, & \beta \leq \alpha - 1. \end{cases} \quad (2.34)$$

**Corollaire 2.1** [20] Soient  $\alpha \geq 0$  et  $n = [\alpha] + 1$  si  ${}^c D_a^\alpha f$  et  $D_a^\alpha f$  existent, on suppose que  $D^k f(a) = 0$  pour tout  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , alors :

$${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x). \quad (2.35)$$

**Remarque 2.1** Soit la fonction  $f(x)$  telle que  $f^{(n)}(a) = 0, n = 0, 1, 2, \dots, m$ , alors les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo sont commutatives avec la dérivée d'ordre  $m, m \in \mathbb{N}$ .

$$D_a^m D_a^\alpha f(x) = D_a^{\alpha+m} f(x) = D_a^\alpha D_a^m f(x),$$

et

$${}^c D_a^m D_a^\alpha f(x) = {}^c D_a^{\alpha+m} f(x) = {}^c D_a^\alpha D_a^m f(x).$$

**Proposition 2.1** [8] La dérivée fractionnaire au sens de Caputo vérifie les propriétés suivantes :

1.  ${}^c D_a^\alpha (I_a^\alpha f) = f$ .
2. Si  ${}^c D_a^\alpha f = 0$  alors  $f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (x-a)^j$  où  $c_j$  sont des constantes réelles.
3.  $I_a^\alpha ({}^c D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ .

**Théorème 2.4** [4]

Soient  $f, g$  deux fonctions définies sur  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , telles que  ${}^c D_a^\alpha$  et  $D_a^\alpha$  existent presque partout, et soient  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  alors  ${}^c D_a^\alpha (c_1 f + c_2 g)$  existe presque partout et on a :

$${}^c D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 {}^c D_a^\alpha f(x) + c_2 {}^c D_a^\alpha g(x). \quad (2.36)$$

**Preuve.** Soient  $f, g \in L^1[a, b]$  et  $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
 {}^c D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} (c_1 f + c_2 g)^n(t) dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (c_1 (x - t)^{n - \alpha - 1} f(t)^n + c_2 (x - t)^{n - \alpha - 1} g(t)^n) dt \\
 &= \frac{c_1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f(t)^n dt + \frac{c_2}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} g(t)^n dt \\
 &= c_1 I_a^{n - \alpha} f^n(x) + c_2 I_a^{n - \alpha} g^n(x) = c_1 {}^c D_a^\alpha f(x) + c_2 {}^c D_a^\alpha g(x).
 \end{aligned}$$

■

### 2.3 Propriétés des dérivées fractionnaires

Diverses définitions et propriétés des dérivées fractionnaires ont été présentées dans ce chapitre. Elles sont récapitulées dans les deux tableaux suivants :

Définition	$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f(t) dt, \quad x > 0, f \in L^1$
Les propriétés	$(D_a^0 f)(x) = I_a^0 f(x) = f(x), \quad \alpha = 0$ $D_a^n f(x) = D^n f(x), \quad \alpha = n$ $D_a^\alpha f(x) = I^{-\alpha} f(x), \quad \alpha < 0$ $D_a^\alpha f(x) = D^m I_a^{m - \alpha} f(x), \quad m > \alpha$ $D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 D_a^\alpha f(x) + c_2 D_a^\alpha g(x)$ $D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha - \beta} f(x)$ $I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x)$ $D^k (D_a^\alpha f(x)) = D_a^{k + \alpha} f(x)$ $D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = D^{\beta - \alpha} f(x)$

TABLE 2.1 - Propriétés de la dérivée de Riemann-Liouville

Définition	${}^c D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, x > a, \frac{d^n}{dx^n}, f \in L^1$
Les propriétés	${}^c D_a^0 f(x) = f(x), \quad \alpha = 0$ ${}^c D_a^\alpha f(x) = f^{(n)}(x), \quad \alpha = n$ ${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x), \quad \alpha \geq 0$ $({}^c D_a^\alpha f)(x) = I_a^{n-\alpha} D^n f(x)$ ${}^c D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 {}^c D_a^\alpha f(x) + c_2 {}^c D_a^\alpha g(x)$ ${}^c D_a^\alpha (I_a^\alpha f) = f$ $I_a^\alpha ({}^c D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

TABLE 2.2 - Propriétés de la dérivée de Caputo

## 2.4 Relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Notre objectif dans cette partie est de comparer la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo. C'est ce que nous allons aborder dans le théorème suivant :

**Théorème 2.5** [8] [1] Soient  $f \in C^n([a, b])$ ,  $\alpha > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  avec  $n - 1 \leq \alpha < n$ . Si  ${}^{RL} D_x^\alpha f(x)$  et  ${}^c D_x^\alpha f(x)$  existent, alors on a :

$${}^c D_x^\alpha f(x) = {}^{RL} D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}. \quad (2.37)$$

De la relation (2.37), on déduit que si  $f^{(k)} = 0$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  et  $n = [\alpha] + 1$

$${}^c D_x^\alpha f(x) = {}^{RL} D_x^\alpha f(x). \quad (2.38)$$

Si  $0 < \alpha < 1$ , on trouve :

$${}^c D_x^\alpha f(x) = {}^{RL} D_x^\alpha (f(x) - f(a)). \quad (2.39)$$

**Preuve.** En utilise le développement de Taylor

$$f(x) = f(a) + (x-a)f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_{n-1}.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1}.$$

telle que

$$R_{n-1} = \int_a^x \frac{f^{(n)}(s)(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f^{(n)}(s)(x-s)^{n-1} ds = I^n f^{(n)}(x).$$

En utilisant les propriétés de la dérivée de Riemann-Liouville mentionnées précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_x^\alpha f(x) &= {}^{RL}D_a^\alpha \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^{RL}D_x^\alpha (x-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + {}^{RL}D_x^\alpha R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^{RL}D_x^\alpha (x-a)^k}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^{RL}D_x^\alpha (x-a)^k}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + {}^cD_a^\alpha f(x). \end{aligned}$$

Donc

$${}^cD_x^\alpha f(x) = {}^{RL}D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}.$$

■

**Théorème 2.6** [4] Soient  $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$  si  $f$  possède  $n - 1$  dérivées en  $a$  et si

$D_a^\alpha f$  existe, alors :

$${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k \right], \quad (2.40)$$

pour presque tout  $x \in [a, b]$ .

**Théorème 2.7** [8] Soit  $\alpha \geq 0$  et soit  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f \in AC^n[a, b]$ , alors la dérivée fractionnaire de Caputo  $({}^c D_a^\alpha f)(x)$  existe presque partout sur  $[a, b]$ .

i) Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , alors  $({}^c D_a^\alpha f)(x)$  est donnée par :

$$({}^c D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt = I_a^{n-\alpha} D^n f(x). \quad (2.41)$$

En particulier, lorsque  $0 < \alpha < 1$  et  $f \in AC[a, b]$ , alors

$$({}^c D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt = I_a^{1-\alpha} f'(x). \quad (2.42)$$

ii) Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors

$$({}^c D_a^\alpha f)(x) = f^{(n)}(x). \quad (2.43)$$

**Preuve.** D'après (2.40), on a

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha f(x) &= D_a^\alpha \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k \right] \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k \right]. \end{aligned}$$

Posons

$$J(x) = I_a^{n-\alpha} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k \right].$$

## 2. Dérivation fractionnaire

---

D'après (2.4), on trouve

$$J(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt.$$

On intègre par partie, on aura

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt \\ &= \frac{-(x-t)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (t-a)^k \right] \Big|_{t=a}^{t=x} \\ &\quad + \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} D \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt \\ &= I_a^{n-\alpha+1} D \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt. \end{aligned}$$

En répétant ce procédé  $n$  fois, on trouve

$$\begin{aligned} J(x) &= I_a^{n-\alpha+n} D^n \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k \right] \\ &= I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k \right]. \end{aligned}$$

Or,  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k$  est un polynôme de degré  $(n-1)$ , par conséquent

$$J(x) = I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha f(x) &= D^n J(x) \\ &= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.2** *La dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est nulle mais selon Riemann-Liouville n'est ni nulle ni constante ; elle est égale à*

$$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}.$$

# CHAPITRE 3

## Systemes d'equations differentielles fractionnaires a retards constants

### 1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous interesserons a l'etude de l'existence et l'unicite d'une solution positive de systeme d'equations differentielles fractionnaires a retard constant de la forme suivante

$${}^c D^\alpha x_j(t) = f_j(t, x_j(t), x_1(t - \tau_1), \dots, x_n(t - \tau_n)), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad t \geq 0. \quad (3.1)$$

avec la condition

$$x(t) = \Phi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad (3.2)$$

ou  ${}^c D^\alpha$  est la derivee fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))'$ , ou  $'$  designe la transposée du vecteur et  $f_j : \mathbb{R}^+ \times C^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^+$  sont continues ou  $C = C([-\tau, \infty], \mathbb{R}^+)$ .  $\Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))'$  est un vecteur donne, tel que  $\phi_i(t) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^+)$  l'espace des fonctions continues de  $[-\tau, 0]$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $\tau = \max \tau_j$ , ou

$\tau_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}$ , sont des constantes.

Dans ce travail, nous commençons par l'existence de la solution positive du problème (3.1)-(3.2). Nous traitons ensuite l'unicité de la solution positive. Et nous concluons avec un exemple illustratif qui étudie le problème.

## 2 Existence de solution positive

Dans cette section, nous allons discuter l'existence d'une solution globale positive et dans le lemme suivant nous allons présenter l'équivalence entre le problème (3.1)-(3.2) et une équation intégrale.

**Lemme 2.1** *Le problème (3.1)-(3.2) est équivalent avec*

$$x_j(t) = \phi_j(0) + I^\alpha f_j(t, x_j(t), x_1(t - \tau_1), \dots, x_n(t - \tau_n)).$$

**Preuve.** Pour  $t > 0$ , l'équation (3.1) peut s'écrire comme

$$I^{1-\alpha} D x_j(t) = f_j(t, x_j(t), x_1(t - \tau_1), \dots, x_n(t - \tau_n)).$$

Appliquant l'opérateur  $I^\alpha$  sur les deux côtés et on utilise  $I^\alpha D^\alpha = I$ ,

$$\begin{aligned} I D x_j(t) &= I^\alpha f_j(t, x_j(t), x_1(t - \tau_1), \dots, x_n(t - \tau_n)). \\ x_j(t) - x_j(0) &= I^\alpha f_j(t, x_j(t), x_1(t - \tau_1), \dots, x_n(t - \tau_n)). \end{aligned}$$

Alors

$$x_j(t) = \phi_j(0) + I^\alpha f_j(t, x_j(t), x_1(t - \tau_1), \dots, x_n(t - \tau_n)).$$

■

Maintenant, Pour trouver la solution du problème (3.1), nous utilisons la définition de l'espace  $E$ .

## 2. Existence de solution positive

---

Soit  $E = [C([-τ, ∞), \mathbb{R}^+)]^n$  la classe de toutes les fonctions  $n$ -vecteurs colonnes continues avec la norme

$$\|x\| = \sum_{j=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \{e^{-Nt} |x_j(t)|\}, \quad x \in E.$$

$(E, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach. En effet, soit  $(u_n) \subset E$  une suite de Cauchy. Nous allons montrer que  $u_n \rightarrow u \in E$  :

$$e^{-Nt} |u_n^j(t) - u^j(t)| \leq |u_n^j(t) - u^j(t)|,$$

donc

$$\sum_{j=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \{e^{-Nt} |u_n^j(t) - u^j(t)|\} \leq \sum_{j=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |u_n^j(t) - u^j(t)|,$$

il s'ensuit que

$$\|u_n - u\| \leq \|u_n - u\|_\infty$$

Comme  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach, donc  $\|u_n - u\|_\infty < \varepsilon$ . Par conséquent

$$\|u_n - u\| < \varepsilon.$$

Soit le cône  $K$  donné par

$$K = \{x \in E : x_j(t) \geq 0, \quad t \geq -\tau, \quad j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Et soit

$$D = \{x \in K : x(t) = \Phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0\} \subset K.$$

**Remarque 2.1** Le cône  $K$  est normal car il existe  $l = 1$  tel que si  $x \leq y$  alors on a

$$\|x\| \leq l \|y\|.$$

Nous définissons l'opérateur intégral  $F$  par

$$Fx_j = \begin{cases} \phi_j(t), & t \in [-\tau, 0] \\ \phi_j(0) + I^\alpha f_j(t, x_j(t), x_1(t - \tau_1), \dots, x_n(t - \tau_n)), & t > 0 \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Nous proposons les hypothèses suivantes :

( $H_1$ ) Il existe  $g_j, \psi_{ij} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continues, telle que

$$f_j(t, u_j, v_1, \dots, v_n) \leq g_j(u_j) + \sum_{i=1}^n \psi_{ij}(v_i) \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n.$$

( $H_2$ )  $\forall A, \exists B_i, B'_i : g_i(A) \subset B_i$  et  $\psi_{ij}(A) \subset B'_i$ , où  $A, B_i$  et  $B'_i$  sont des sous-ensembles bornés dans  $D$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Avant de montrer l'existence de la solution, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.2** *Supposons que les hypothèses ( $H_1$ ), ( $H_2$ ) sont vérifiées, Alors l'opérateur  $F : D \rightarrow D$  est complètement continu.*

**Preuve.** L'opérateur  $F : D \rightarrow D$  est continu, en vue de l'hypothèse de la positivité et la continuité de  $f$ .

Soit  $G \subset D$  borné, c'est à dire il existe une constante  $l$  positif telle que  $\|x\| \leq l$ ,  $\forall x \in G$ . On va montrer que  $F$  est compact. Donc on montre que  $F(G)$  est relativement compact en utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli généralisé.

Pour chaque  $x \in G$ , Compte tenu de l'hypothèse ( $H_1$ ) on a pour  $j = 1, 2, \dots, n$  :

$$\begin{aligned} |Fx_j(t)| &\leq |\phi_j(0)| + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_j(s, x_j(s), x_1(s - \tau_1), \dots, x_n(s - \tau_n))| ds \\ &\leq |\phi_j(0)| + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |g_j(x_j(s))| ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |\psi_{ij}(x_i(s - \tau_i))| ds. \end{aligned}$$

## 2. Existence de solution positive

---

Donc

$$\begin{aligned}
e^{-Nt} |Fx_j(t)| &\leq e^{-Nt} |\phi_j(0)| + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} |g_j(x_j(s))| ds + \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s+\tau_i)} e^{-N(s-\tau_i)} |\psi_{ij}(x_i(s-\tau_i))| ds \\
&\leq \|\phi\| + \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |g_j(x_j(\xi))|\} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} ds + \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{-\tau_i}^{t-\tau_i} \frac{(t-\theta-\tau_i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-\theta)} e^{-N\theta} |\psi_{ij}(x_i(\theta))| d\theta \\
&\leq \|\phi\| + \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |g_j(x_j(\xi))|\} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} ds + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |\psi_{ij}(x_i(\xi))|\} \int_{-\tau_i}^{t-\tau_i} \frac{(t-\theta-\tau_i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-\theta)} d\theta.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse  $(H_2)$ , il existe  $L_j, L'_i$  tel que  
 $L_j = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |g_j(x_j(\xi))|\}$ ,  $L'_i = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |\psi_{ij}(x_i(\xi))|\}$ ,  $\forall j$  et en effectuant le changement de variable  $u = N(t-s)$  on aura

$$\begin{aligned}
e^{-Nt} |Fx_i(t)| &\leq \|\phi\| + L_j \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha-1}}{N^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-u} du \\
&+ \sum_{i=1}^n L'_i \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha-1}}{N^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-u} e^{-N\tau_i} du.
\end{aligned}$$

Donc

$$e^{-Nt} |Fx_i(t)| \leq l + \frac{L_j + \sum_{i=1}^n e^{-N\tau_i} L'_i}{N^\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\|Fx\| \leq l + \frac{L_j + \sum_{i=1}^n e^{-N\tau_i} L'_i}{N^\alpha}.$$

Ainsi  $FG$  est borné.

Ensuite, nous allons montrer que  $FG$  est localement équicontinue. Il y a trois cas possibles pour  $j = 1, 2, \dots, n$  :

**Cas 1.** Pour chaque  $x \in G$ ,  $\epsilon_j > 0, \forall T \in [0, \infty)$ ,  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ . Soit  $\delta_j = \left( \frac{\epsilon_j \Gamma(\alpha+1)}{2(c_j + \sum_{i=1}^n c'_i)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ , puis quand  $t_2 - t_1 < \delta_j$ , on a :

$$\begin{aligned}
& |Fx_j(t_1) - Fx_j(t_2)| \\
& \leq \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_j(s, x_j(s), x_1(s-\tau_1), \dots, x_n(s-\tau_n))| ds \\
& - \int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_j(s, x_j(s), x_1(s-\tau_1), \dots, x_n(s-\tau_n))| ds \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_j(s, x_j(s), x_1(s-\tau_1), \dots, x_n(s-\tau_n))| ds \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} ((t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}) |g_j(x_j(s)) + \sum_{i=1}^n \psi_{ij}(x_i(s-\tau_i))| ds + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |g_j(x_j(s)) + \sum_{i=1}^n \psi_{ij}(x_i(s-\tau_i))| ds \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} ((t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}) \{ |g_j(x_j(s))| + |\sum_{i=1}^n \psi_{ij}(x_i(s-\tau_i))| \} ds + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \{ |g_j(x_j(s))| + |\sum_{i=1}^n \psi_{ij}(x_i(s-\tau_i))| \} ds.
\end{aligned}$$

$\exists l > 0$  tel que pour  $x \in G$ ,  $\|x\| \leq l$ , alors  $|x_j(t)| \leq le^{Nt} \leq le^{NT}$ . En effet, le sous-ensemble  $X = \{x(t), t \in [0, T], x \in G\}$  est un sous-ensemble borné fermé. Donc  $g_i, \psi_{ij}$  ont un maximum sur  $X$ . Par conséquent,  $\exists c_i, c'_i : c_i = \sup_{t \in [0, T]} |g_i(x_i(t))|$ ,  $c'_i = \sup_{t \in [0, T]} |\psi_{ij}(x_i(t-\tau_i))|$ ,  $\forall j, i = 1, 2, \dots, n$ . Alors

## 2. Existence de solution positive

---

$$\begin{aligned}
& |Fx_j(t_1) - Fx_j(t_2)| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}) (c_j + \sum_{i=1}^n c'_i) ds + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (c_j + \sum_{i=1}^n c'_i) ds \\
& \leq \frac{c_j + \sum_{i=1}^n c'_i}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \right\} \\
& \leq \frac{c_j + \sum_{i=1}^n c'_i}{\alpha \Gamma(\alpha)} \{ (t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha \} \\
& < 2 \frac{c_j + \sum_{i=1}^n c'_i}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha < 2 \frac{c_j + \sum_{i=1}^n c'_i}{\Gamma(\alpha+1)} \delta_j^\alpha = \epsilon_j.
\end{aligned}$$

**Cas 2.** Pour chaque  $x \in G$ ,  $\epsilon_j > 0$ ,  $t_1 \in [-\tau, 0]$ ,  $t_2 \in [0, T]$ ,  $\forall T \in [0, \infty)$ . Puisque  $\phi_j \in C[-\tau, 0]$ ,  $\exists \delta' : |\phi_j(t_1) - \phi_j(0)| < \frac{\epsilon_j}{2}$  quand  $0 - t_1 < \delta'$ . Quand  $t_2 - t_1 < \delta_j$ ,  $\delta_j = \min \left( \delta', \left( \frac{\epsilon_j \Gamma(\alpha+1)}{2(c_j + \sum_{i=1}^n c'_i)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)$ , on a :

$$\begin{aligned}
& |Fx_j(t_1) - Fx_j(t_2)| \\
& \leq |\phi_j(t_1) - \phi_j(0)| + \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_j(s, x_j(s), x_1(s - \tau_1), \dots, x_n(s - \tau_n))| ds \\
& \leq \frac{\epsilon_j}{2} + \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \{ |g_j(x_j(s))| + \sum_{i=1}^n |\psi_{ij}(x_i(s - \tau_i))| \} ds \\
& < \frac{\epsilon_j}{2} + \frac{c_j + \sum_{i=1}^n c'_i}{\alpha \Gamma(\alpha)} t_2^\alpha \\
& < \frac{\epsilon_j}{2} + \frac{c_j + \sum_{i=1}^n c'_i}{\Gamma(\alpha+1)} \delta_j^\alpha
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$|Fx_j(t_1) - Fx_j(t_2)| < \frac{\epsilon_j}{2} + \frac{\epsilon_j}{2} = \epsilon_j.$$

**Cas 3.** Pour chaque  $x \in G$ ,  $\epsilon_j > 0$ ,  $t_1, t_2 \in [-\tau, 0]$ . En fait, par continuité de  $\phi_j$ , quand  $t_2 - t_1 < \delta_j$ , on a

$$|Fx_j(t_1) - Fx_j(t_2)| = |\phi_j(t_1) - \phi_j(t_2)| < \epsilon_j.$$

Par conséquent,  $FG$  est équicontinue dans chaque intervalle borné. Nous appelons maintenant le Théorème (4.4) pour conclure que  $FG$  est relativement compact. Par conséquent, l'opérateur  $F$  est complètement continu. Ceci achève la preuve. ■

Dans cette définition, nous introduisons la définition de sous et sur solutions de l'équation (3.1) (opérateur F) respectivement.

**Définition 2.1** La fonction  $u \in E$  est appelée sous solution du problème (3.1)-(3.2) si

$${}^c D^\alpha u_j(t) \leq f_j(t, u_j(t), u_1(t - \tau_1), \dots, u_n(t - \tau_n)), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

et

$$u(t) \leq \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0]$$

De même, la fonction  $v \in E$  est appelée sur solution du problème (3.1)-(3.2) si

$${}^c D^\alpha v_j(t) \geq f_j(t, v_j(t), v_1(t - \tau_1), \dots, v_n(t - \tau_n)), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

et

$$v(t) \geq \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0].$$

Si les inégalités sont strictes,  $u(t), v(t)$  sont appelées sous et sur solutions strictes.

### 3. Unicité de la solution

---

Après cette définition, nous donnons le résultat d'existence pour le problème (3.1)-(3.2).

**Théorème 2.1** *Supposons que les hypothèses  $(H_1) - (H_2)$  sont vérifiées, et Supposons :*

*$(H_3)$  Pour  $j = 1, 2, \dots, n : f_j : \mathbb{R}^+ \times [C([- \tau, \infty), \mathbb{R}^+)]^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction continue et croissante pour chaque  $t \in [0, \infty)$ .*

*$(H_4)$   $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)'$ ,  $v_0 = (v_0^1, \dots, v_0^n)'$  sont respectivement des sous et sur solutions du problème (3.1)-(3.2), satisfont  $u_0(t) \leq v_0(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ ,  $u_0, v_0 \in D$ .*

*Alors le problème (3.1)-(3.2) a au moins une solution positive globale.*

**Preuve.** Par le Lemme (2.2), on a  $F : D \rightarrow D$  est complètement continue. Et par (3.3),  $u_0^i, v_0^i$  sont respectivement des sous et sur solutions de  $F$ . Par  $(H_3)$ ,  $x, y \in D$ ,  $x \leq y$ , on a pour  $j = 1, 2, \dots, n$  :

$$\begin{aligned} Fx_j(t) &= x_j(0) + I^\alpha f_j(t, x_j(t), x_1(t - \tau_1), \dots, x_n(t - \tau_n)) \\ &\leq y_j(0) + I^\alpha f_j(t, y_j(t), y_1(t - \tau_1), \dots, y_n(t - \tau_n)) \\ &\leq Fy_j(t). \end{aligned}$$

D'où  $F$  est un opérateur croissant. Il est clair que, pour  $i = 1, 2, \dots, n : Fu_0^i \geq u_0^i$ ,  $Fv_0^i \leq v_0^i$  par la définition de sous et sur solutions de  $F$ . Ainsi,  $F : \langle u_0, v_0 \rangle \rightarrow \langle u_0, v_0 \rangle$  est un opérateur continu compact. Comme  $K$  est un cône normal, d'après le Théorème (4.1),  $F$  a un point fixe  $x \in \langle u_0, v_0 \rangle$ . ■

## 3 Unicité de la solution

Dans cette section, nous allons montrer que la solution de l'équation (3.1) est unique.

**Théorème 3.1** *Soient  $f_j : \mathbb{R}^+ \times [C([- \tau, \infty), \mathbb{R}^+)]^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^+$  continues et satisfont*

la condition de Lipschitz pour  $j = 1, 2, \dots, n$  :

$$\begin{aligned} & |f_j(t, u_j, u_1, \dots, u_n) - f_j(t, v_j, v_1, \dots, v_n)| \\ & \leq l_j |u_j - v_j| + \sum_{i=1}^n k_{ij} |u_i - v_i|, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Alors le problème (3.1)-(3.2) a une unique solution globale positive.

**Preuve.** Soient  $u, v \in D$ , Alors :

$$\begin{aligned} & |Fu_j(t) - Fv_j(t)| \\ & \leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \times \\ & \quad \times |f_j(s, u_j(s), u_1(s-\tau_1), \dots, u_n(s-\tau_n)) - f_j(s, v_j(s), v_1(s-\tau_1), \dots, v_n(s-\tau_n))| ds \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\{ l_j |u_j(s) - v_j(s)| + \sum_{i=1}^n k_{ij} |u_i(s-\tau_i) - v_i(s-\tau_i)| \right\} ds \\ & \leq l_j \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |u_j(s) - v_j(s)| ds + \sum_{i=1}^n k_{ij} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |u_i(s-\tau_i) - v_i(s-\tau_i)| ds. \end{aligned}$$

Soient  $l = \sum_{j=1}^n |l_j|$ ,  $k = \sum_{j=1}^n |k_j| = \sum_{j=1}^n \max_{v_i} |k_{ij}|$ . Alors

$$\begin{aligned} & e^{-Nt} |Fu_j(t) - Fv_j(t)| \\ & \leq l_j \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} |u_j(s) - v_j(s)| ds + \\ & \quad + k_j \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s+\tau_i)} e^{-N(s-\tau_i)} |u_i(s-\tau_i) - v_i(s-\tau_i)| ds. \end{aligned}$$

### 3. Unicité de la solution

---

$$\begin{aligned}
&\leq l_j \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} |u_j(\xi) - v_j(\xi)| \right\} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} ds + \\
&+ k_j \sum_{i=1}^n \int_{-\tau_i}^{t-\tau_i} \frac{(t-\theta-\tau_i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-\theta)} e^{-N\theta} |u_i(\theta) - v_i(\theta)| d\theta \\
&\leq l_j \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} |u_j(\xi) - v_j(\xi)| \right\} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} ds + \\
&+ \sum_{i=1}^n k_i \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} |u_i(\xi) - v_i(\xi)| \right\} \int_{-\tau_i}^{t-\tau_i} \frac{(t-\theta-\tau_i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-\theta)} d\theta \\
&\leq l_j \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} |u_j(\xi) - v_j(\xi)| \right\} \frac{1}{N^\alpha} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} du + \\
&+ k_j \sum_{i=1}^n \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} |u_i(\xi) - v_i(\xi)| \right\} \frac{e^{-N\tau_i}}{N^\alpha} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} du \\
&\leq \frac{l_j}{N^\alpha} \|u - v\| + k_j \sum_{i=1}^n \frac{e^{-N\tau_i}}{N^\alpha} \|u - v\| \\
&\leq \frac{l_j + k_j \sum_{i=1}^n e^{-N\tau_i}}{N^\alpha} \|u - v\|
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|Fu - Fv\| &= \sum_{j=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R}^+} e^{-Nt} |Fu_j(t) - Fv_j(t)| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \frac{l_j + k_j \sum_{i=1}^n e^{-N\tau_i}}{N^\alpha} \|u - v\| \\
&\leq \frac{l + k \sum_{i=1}^n e^{-N\tau_i}}{N^\alpha} \|u - v\|
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|Fu - Fv\| \leq \frac{l + k \sum_{i=1}^n e^{-N\tau_i}}{N^\alpha} \|u - v\|.$$

Nous choisissons  $N$  assez grand de telle sorte  $\frac{l+k \sum_{i=1}^n e^{-N\tau_i}}{N^\alpha} < 1$ . Alors, d'après le théorème de point fixe de Banach,  $F$  a un point fixe unique dans  $D$ , qui est l'unique solution positive. ■

**Exemple 3.1** Prenons le problème suivant

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_j(t) = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i(t - \tau_i), & t \geq 0 \\ x(t) = \Phi(t) \geq 0, & -\tau \leq t \leq 0 \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

où  $A = (a_{ji})_{n \times n}$  est une matrice donnée. Les hypothèses  $(H_1) - (H_4)$  sont vérifiées, alors d'après le Théorème (2.1), le problème (3.4) a au moins une solution positive. En outre,  $\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i(t - \tau_i)$  satisfait la condition de Lipschitz, alors d'après le Théorème (3.1) le problème (3.4) a une unique solution globale positive.

---

## Conclusion

Notre but principal dans ce mémoire consistait à présenter quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions positives et globales d'un système d'équations différentielles fractionnaires à retards constants en utilisant certains théorèmes de point fixe.

---

## Annexe



FIGURE 1 - Bernhard Riemann

Né le 17 septembre 1826 à Breselenz, Royaume de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à la topologie, l'analyse, la géométrie différentielle et le calcul, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale.

En 1840, Bernhard s'établit à Hanovre pour vivre chez sa grand-mère et aller au Lyceum (collège) qu'il intègre directement en troisième année. Après le décès de sa grand-mère en 1842, il va à Lunebourg pour continuer ses études secondaires. Au Johanneum Gymnasium (lycée), ses professeurs sont surpris par ses capacités à résoudre des problèmes complexes en mathématique. Riemann a son premier contact avec les mathématiques supérieures grâce au professeur Schmalzfuss qui lui donne libre accès à sa bibliothèque personnelle.

En 1846, âgé de 19 ans, il intègre l'université de Göttingen grâce à l'argent de sa famille, et commence à étudier la philosophie et la théologie pour devenir pasteur afin de financer sa famille. Il étudie la Bible intensivement, mais il est distrait par les mathématiques. Après avoir assisté aux cours de Carl Gauss, il ne peut se soustraire

---

à sa vocation et sollicite l'autorisation de son père pour étudier les mathématiques. Riemann excelle à l'université de Göttingen, mais il n'y reste pas longtemps puisqu'il rejoint en 1847 l'université de Berlin pour y parfaire sa formation dans les matières où Göttingen ne dispose pas d'enseignants suffisamment compétents, où il a entre autres comme professeurs Jacobi, Steiner et Dirichlet.

En 1849, il retourne à Göttingen, où il commence sa thèse de doctorat, sous la direction de Gauss. En décembre 1851, il soutient sa thèse intitulée *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* qui pose les bases de la topologie moderne et fait l'unanimité du jury.

En 1859, Riemann, qui vient juste d'être nommé professeur à Göttingen et à l'Académie des Sciences de Berlin, publie un article, « Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une taille donnée ».

Riemann est fameux pour :

1. Hypothèse de Riemann généralisée,
2. Intégrale de Riemann,
3. Sphère de Riemann,
4. Théorème de représentation de Riemann,
5. Tenseur de Riemann,
6. Somme de Riemann,
7. Intégrale de Stieltjes- Riemann,
8. Equation de Cauchy- Riemann,
9. Formule de Riemann-Hurwitz,
10. Théorème de Riemann-Lebesgue,
11. Théorème de réarrangement de Riemann,
12. Fonction zêta de Riemann,
13. Problème de Riemann.



FIGURE 2 - Joseph Liouville.

Joseph Liouville est un mathématicien français, né le 24 mars 1809 en Saint-Omer (France), mort le 8 septembre 1882( à 73 ans ) paris (France).

En 1814, établit sa famille à Toul. Il est diplômé de l'École polytechnique, (X1825). Deux ans plus tard, il intègre l'École des ponts et chaussées, dont il n'obtient pas le diplôme en raison de problèmes de santé et, surtout, de sa volonté de suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur.

Il obtient le doctorat ès sciences mathématiques en 1836 devant la faculté des sciences de Paris sous la direction de Siméon Denis Poisson et Louis Jacques The-nard. Après quelques années dans diverses institutions comme assistant et comme professeur à l'École centrale (1833, où il est répétiteur depuis 1831), il est nommé professeur à l'École polytechnique en 1838.

Le 3 juin 1839, il est élu membre de l'Académie des sciences. Et dès 1840, il rejoint le Bureau des longitudes dont il sera président à plusieurs reprises (1843, 1847, 1872). En 1843, une controverse éclate, à l'Académie des sciences, entre Joseph Liouville et son confrère mathématicien Guillaume Libri, à propos des travaux mathématiques inédits d'Évariste Galois.

---

En 1850, il est admis au Collège de France, à la chaire de mathématiques. L'historien Jules Michelet vote pour son admission. Le 21 novembre 1850, il devient « membre étranger » de la Royal Society de Londres.

En 1857, il obtient une chaire en mécanique à la Faculté des sciences de Paris.

En 1857, il devient « membre étranger » de l'Académie royale des sciences de Suède.

En 1870, il est élu Président de l'Académie des sciences. Le 4 août 1875, il est promu au grade de Commandeur de la Légion d'honneur.

Liouville publia dans divers domaines des mathématiques, dont la théorie des nombres, l'analyse complexe, la géométrie différentielle et la topologie différentielle, mais aussi la physique mathématique et même l'astronomie. Il est particulièrement célèbre pour son théorème d'analyse complexe. En théorie des nombres, il fut le premier à prouver l'existence des nombres transcendants, par une construction utilisant les fractions continues (nombres de Liouville), et démontra son théorème sur les approximations diophantiennes.

Liouville est célèbre pour :

1. Analyse complexe (théorème de Liouville),
2. théorie des nombres (nombres transcendants, nombres de Liouville).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, Hala A.A. El-Saka. On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems. Article in Physics Letters A. October 2006.
- [2] N. Boccara, Analyse Fonctionnelle une introduction pour physiciens, 1984.
- [3] K. Deng, H. A. Levine, The role of critical exponents in Blow-up theorems : the sequel, J Math. Anal. Appl. 243(2000), 85-126.
- [4] K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer. (2004).
- [5] A.K. Grünwald, Ueber "begrenzte" derivationen und deren anwendung, Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, 12 (6), 441-480.
- [6] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, (2000).
- [7] A.A. Kilbas, S.A. Mazran, Nonlinear differential equations with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, Differential Equations.41 (2005), 84 - 89.
- [8] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006).

- 
- [9] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. 2<sup>e</sup> édition, Editions Mir-Moscou. 1974.
- [10] A.V. Letnikov, On the historical development of the theory of differentiation of an arbitrary order, *Mat. Sb.* 3 (1868), 85-112 (in Russian).
- [11] A.V. Letnikov, Theory of differentiation of an arbitrary order, *Mat. Sb.* 3 (1868), 1-68 (in Russian).
- [12] C.J.Luo Albert. *Nonlinear systems and complexity, Introduction to Functional Differential Equations*, Springer Nature Switzerland AG 2019.
- [13] F.Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds), Springer-Verlag, Wien, (1997), 291-348.
- [14] K.S, Miller and B, Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons Inc, New York, (1993).
- [15] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, London, (1974).
- [16] L. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, (1999).
- [17] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marchev, *Fractional Integrals and Derivatives ; Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon, (1993).
- [18] L. Schwartz, *Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Édition Corrigée Paris. (2008).
- [19] Y. Sonntag, *Topologie et analyse fonctionnelle*, ellipse, (1997).
- [20] M. Wellbeer, *Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background*, D. Univ Braunschweig, (2010).
- [21] C. Zhong, X. Fan, W. Chen, *Nonlinear Functional Analysis and Its Application*, Lanzhou Univ. Press, (1998).
- [22] K. Zima, Sur l'existence des solutions d'une équation intégrale-différentielle, *Ann. Polon. Math* 27, (1973), 181-187.