



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

**Méthode de décomposition en sous domaines
- Éléments finis et Différences finis mixte -**

Présentée par:

Meddaci Abir

Devant le Jury :

Dr. Boussaha Hanene	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. Mécheri Halima	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Kassa sara	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2023-2024

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie **Dieu** qui a illuminé mon chemin et qui j'ai armés le courage et de bonne volonté pour réaliser ce travail.

Je tenu à remercier vivement Mme **Mécheri Halima**, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire, ses conseils, ses encouragement et son expérience, je la remercie pour son soutien, sa disponibilité, sa gentillesse.

Je lui suis également reconnaissant
pour la confiance qu'il ma accordée

Je tenu également à exprimer notre gratitude au présidente du jury Mme **Boussaha Hanene** pour m'avoir consacré de sa temps il m'a fais l'honneur d'accepter de présider le jury.

Je remercie très chaleureusement Mme **Kassa Sara** d'avoir accepté d'examiner mon travail.

J'adresse également des remerciements à tous les enseignants de la faculté de l'université de Chadli Bendjdid. Ainsi que tous les membres du département de Mathématiques, pour toute l'aide qui m' été accordée.

DÉDICACE

À Dieu le tout puissant, le très miséricordieux. Que toute la gloire revienne à **Allah** qui par sa puissance et sa majesté, m'a soutenu durant tout mon cycle et m'a donné le courage, pour la réalisation de ce travail.

En témoignage d'amour et d'affection, je dédie ce modeste travail ... À l'homme de ma vie, À toi mon père.

À ma chère mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance.

À Mes chers frères, et surtout **Ramzi** que j'aime beaucoup, À ma chère Soeur **Radja**.

À mes chers nièces : **Rima** et ma princesse **Amani**. À ma grand-mère, que Dieu la guérisse.

À mes proches amis : **Chourouk, Samiha, Safa, Ilham, Hiba**. À **Hanene** l'enseignante du Coran et de ses règles.

À tous mes professeurs et à toute la promotion de Master, je vous souhaite plus de succès.

RÉSUMÉ

Soit Ω un domaine polyédrique borné de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3). Dans ce travail, Ω est décomposé en deux sous-domaines avec recouvrement Ω_1, Ω_2 ($i = 1, 2$). Sur Ω_1 nous considérons la discrétisation par la méthode des éléments finis. On définit la base usuelle des fonctions affines $\varphi_l, l = \{1, 2, \dots, M(h)\}$ par $\varphi_l(M_k) = \delta_{lk}$, où M_k désigne le sommet de la triangulation considérée.

$$V_{1,h} = \{v_h \in C(\bar{\Omega}_1) / (v_h|_{K_h} \in P_1)\}$$

Sur $\Omega_{2,h}$ on considère le schéma usuel de différence finie à cinq points (ou sept points dans les cas 3D).

De plus, on suppose que les noeuds des triangles de Ω_1 (tétraèdres dans les cas 3D) se trouvant dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$, appartiennent à $\Omega_{2,h}$.

Dans le contexte de l'hypothèse de régularité qu'implique un ordre d'approximation standard $h^2 | \log h|$ pour le problème de poisson.

Mots clés : Eléments finis, Différences finies, Méthode de Schwarz.

ABSTRACT

Let Ω be a bounded polyedral domain of \mathbb{R}^2 (or \mathbb{R}^3). In this work, Ω be decomposed into two overlapping subdomains Ω_1, Ω_2 ($i = 1, 2$). On Ω_1 we consider the discretisation by finite elements methods. We defined the usual basis of affine functions φ_l , $l = \{1, 2, \dots, M(h)\}$ by $\varphi_l(M_k) = \delta_{lk}$ where M_k is a submit of the considered triangulation .

$$V_{1,h} = \{v_h \in C(\bar{\Omega}_1)/(v_h|_{K_h} \in P_1)\}$$

On $\Omega_{2,h}$ we consider the usual five points (or seven points in the 3D cases) finite difference scheme.

Moreover we assume that the nodes of triangles of Ω_1 (tetraedrons in 3D cases) Iying in $\Omega_1 \cap \Omega_2$, belong to $\Omega_{2,h}$.

In the context of the regularity assumption wich implies standard $h^2 | \log h|$ order of approximation for poisson's problem.

Key words : Finite elements, Finite differences, Schwarz method.

ملخص

ليكن Ω مجالاً متعدد السطوح من \mathbb{R}^2 (أو \mathbb{R}^3). في هذا العمل ، Ω يتحلل إلى مجالين فرعيين متداخلين Ω_1 ، Ω_2 ($2, 1 = i$).
على مستوى Ω_1 ، نأخذ بعين الاعتبار التقطيع بطريقة العناصر المنتهية. قمنا بتعريف الأساس المألوف للدوال الثابتة φ_l ، $l \in \{1, 2, \dots, M(h)\}$ ب $\delta_{lk} = \varphi_l(M_k)$ حيث M_k يمثل رأس مثلث التثليث المختار.

$$V_{1,h} = \{v_h \in C(\bar{\Omega}_1) / (v_h|_{K_h} \in P_1)\}$$

على مستوى $\Omega_{2,h}$ ، قمنا بتمثيل مخطط الفرق المحدود المألوف المكون من خمس نقاط (أو سبع نقاط في حالات ثلاثية الأبعاد). إضافة إلى ذلك ، نفترض أن عقدة المثلثات ل Ω_1 (رباعي الأضلاع في حالات ثلاثية الأبعاد) التي تقع في $\Omega_2 \cap \Omega_1$ ، تنتمي إلى $\Omega_{2,h}$. في سياق فرضية الانتظام نتحصل على $h^2 |\log h|$ كرتبة تقريب قياسية لمسألة بواسون.

الكلمات المفتاحية : طريقة العناصر المنتهية، طريقة الفرق المحدودة، طريقة شوارتز.

TABLE DES MATIÈRES

1	Problème continu	13
1.1	Position de problème :	13
1.1.1	Formulation Variationnelle :	14
1.1.2	Existence et Unicité de la solution :	14
1.2	Discrétisation par la méthode des éléments finis :	16
1.2.1	Domain d'application :	16
1.2.2	Discrétisation :	16
1.3	Application de la méthode de relaxation :	21
1.4	Discrétisation par la méthode des différences finis :	22
1.4.1	Domaine d'application :	22
1.4.2	Discrétisation :	23
1.5	La résolution du système (P_h) :	27
1.6	Comparaison entre les deux méthodes :	28
1.6.1	Analytiquement :	28
1.6.2	Généralement :	29
2	Méthode Alternée de Schwarz "Matching grid method"	30
2.1	Le problème continu :	30
2.1.1	Description de l'alternative de Schwarz :	31

2.1.2	Convergence de l'Alternative de Schwarz dans le cas continu :	35
2.1.3	Convergence de l'Alternative de Schwarz dans le cas discret :	36
2.1.4	Alternative de Schwarz en tant que problème de point fixe :	38
2.1.5	Etude de la convergence du problème de point fixe discret :	39
2.1.6	Le problème de point fixe discret :	40
3	Méthode Alternée de Schwarz "Nomatching grid method"	43
3.1	Position de problème :	43
3.1.1	Application de point fixe associée au système (3.2) :	45
3.1.2	Application de point fixe dans le cas continu :	45
3.2	Le problème discret :	46
3.2.1	Application du point fixe au système (3.13) :	48
3.2.2	Principe de maximum discret (PMD) [2] :	49
3.3	Estimation d'erreur :	51
4	"Nomatching grid method" éléments finis et différences finis mixte	55
4.1	Notations et hypothèses :	55
4.1.1	Application de point fixe discret associé au système (4.3) :	58
	Bibliographie	66

PRELIMINAIRE

1. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N à frontière lipschitzienne.
2. L^∞ est l'espace de Banach, des fonctions mesurables et bornées définies presque partout de Ω dans \mathbb{R} .

La norme de $L^\infty(\Omega)$ est :

$$\|f\|_\infty = \inf\{ c > 0, \quad |f(x)| < c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

3. $L^p(\Omega)$ est l'espace de Banach, des fonctions définies p.p de Ω dans \mathbb{R} mesurables tel que $|f(x)|^p$ est intégrable sur Ω .

La norme de $L^p(\Omega)$ est :

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

4. Soit $m > 1$; un entier, et p un réel avec $1 \leq p \leq \infty$: $W^{m,p}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m sont dans $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

5. $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

$$H_0^1 = \{v \in H^1(\Omega), \quad \gamma v = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}$$

Où γ est l'application de trace sur la frontière de Ω .

6. V désigne un espace de Hilbert de $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$.

$$\|v\|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} (v)^2 + \int_{\Omega} (\nabla v^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

7. Le lemme de **LAX-MILGRAM** :

a) Soit V un espace de Hilbert de la norme $\|\cdot\|_V$.

b) f est une forme linéaire continue sur V , il existe une constante positive notée $\|f\|_V$ telle que :

$$\langle f, v \rangle \leq \|f\|_V \|v\|_V$$

c) a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$, il existe une constante α telle que :
 $\forall u, v \in V$:

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_V \|v\|_V$$

d) La forme bilinéaire a est coercive, i.e $\exists \beta > 0$ tel que :

$$a(u, v) \geq \beta \|u\|_V \quad \forall u \in V$$

Alors, il existe une solution unique $u \in V$ telle que :

$$a(u, v) = l(v)$$

8. Inégalité de **CAUCHY-SCHWARZ** :

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}, \quad |a(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H$$

9. Inégalité de **MINKWISKY** : $1 \leq p \leq \infty$ et $u, v \in L^p(\Omega)$ alors :

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

10. Soit P_1 est l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égale à 1 telle que :

$$P_1 = \{p : p(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

11. Formule de **GREEN** :

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma$$

∇ désigne le gradient.

12. Classification des **EDP** :

Il existe des types d'équations très différents avec des dérivées partielles qui peuvent être classées selon ce qui suit :

EDP elliptiques, paraboliques et hyperboliques, Si on considère la forme générale d'une EDP d'ordre 2 :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = G$$

Où A, B, C, D, E, F et G sont considérés constants pour simplifier.

Le type de l'EDP dépend du signe de $B^2 - 4AC$.

Si : $B^2 - 4AC < 0$, Alors l'EDP est dite : Elliptique.

Si : $B^2 - 4AC = 0$, Alors l'EDP est dite : Parabolique.

Si : $B^2 - 4AC > 0$, Alors l'EDP est dite : Hyperbolique.

INTRODUCTION

Les méthodes de décomposition de domaine ont subi depuis leur introduction par Schwarz en 1890 un développement intense et très accéléré durant les deux dernières décennies. Ceci est dû principalement au développement considérable qu'a vécu le monde des ordinateurs durant cette période.

Ces méthodes permettant principalement de réduire des systèmes de grande taille à des systèmes de petite taille facile et moins coûteux de point de vue résolution. Elle permettent aussi de transformer des problèmes aux limites posés sur des régions à géométrie irrégulière à un ensemble des problèmes posés sur des sous domaines réguliers et simples.

La première idée a été introduite par Schwarz, c'est pour quoi une attention particulière a été accordée et un nombre important de travaux réalisés depuis plus de deux décennies sur la méthode Alternée de Schwarz en particulier et les méthodes de décomposition en sous domaines sur les équations aux dérivées partielles, et plus précisément avec recouvrement pour un problème elliptique modèle avec conditions de Dirichlet aux bord.

Dans ce travail, on étudie quatre parties essentielles :

Dans la première partie, on donne un rappel de notre problème dans le cas continu (assurer l'existence et l'unicité de la solution) et dans le cas discret (deux types de discrétisations supposés).

La deuxième partie consiste à l'étude de la méthode Alternée de Schwarz "Matching grid method", puis dans la troisième on étudie la même méthode avec "Nomatching grid method".

Enfin, une discrétisation mixte (éléments finis - différences finis) a été faite pour le cas nomatching. L'ordre de convergence obtenu est $h^2 |\log h|$.

CHAPITRE

1

PROBLÈME CONTINU

1.1 Position de problème :

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, on choisit f telle que la solution exacte est :

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

1.1.1 Formulation Variationnelle :

Soit $H_0^1(\Omega)$ l'espace de Hilbert telle que $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Multiplions l'équation (1.1) par $v \in H_0^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u + \alpha u) v dx &= \int_{\Omega} f v dx \\ \Rightarrow \int_{\Omega} (-\Delta u v + \alpha u v) dx &= \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

On utilisant la formule de GREEN :

$$\text{On a } u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Alors :

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + \alpha u v) dx = \int_{\Omega} f v dx$$

Donc la formulation variationnelle du problème (1.1) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1 \text{ telle que :} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Où :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + \alpha u v) dx \\ \langle f, v \rangle &= \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

1.1.2 Existence et Unicité de la solution :

Si $a(., .)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et la forme linéaire $\langle f, v \rangle$ est continu sur $H_0^1(\Omega)$, le lemme de LAX-MILGRAM assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.1).

a- Continuité :

$$|a(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + \alpha uv) dx \right|$$

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u \nabla v + \alpha uv| dx \leq \int_{\Omega} (|\nabla u \nabla v| dx + \alpha |uv|) dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \alpha \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max(1, \alpha) \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (\beta > 0) \end{aligned}$$

D'où la continuité de $a(\cdot, \cdot)$.

b- Coercivité :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \alpha u^2) dx \\ &\geq \min(1, \alpha) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\geq \gamma \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (\gamma > 0) \end{aligned}$$

D'où la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$.

c- Continuité de $l(v)$:

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \delta \|v\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \delta \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (\delta > 0) \end{aligned}$$

D'où la continuité de $l(v)$.

Finalement, le problème (1.1) admet une solution unique.

1.2 Discrétisation par la méthode des éléments finis :

1.2.1 Domain d'application :

La méthode des éléments finis est principalement utilisée pour résoudre des problèmes de domaines continus et complexes en ingénierie et en sciences appliquées, tels que les problèmes de structures, de thermodynamiques, de fluides.....etc.

1.2.2 Discrétisation :

La méthode des éléments finis est la méthode de référence par le calcul des solutions des problèmes aux limites elliptique. Le principe de cette méthode est directement issu de l'approche variationnelle. Elle est basée sur le remplacement de l'espace de Hilbert V sur lequel la formulation variationnelle par un sous espace V_h de dimension fini.

Le problème posé sur V_h se ramène à la simple résolution d'un système linéaire, dont la matrice est approchée ; matrice de rigidité.

Par ailleurs, on peut choisir le mode de construction de V_h soit une bonne approximation de V tel que la solution u_h dans V_h de la formulation variationnelle soit "proche" de la solution exacte u dans V .

On pose le problème suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

$\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ et $f \in L^2(0,1)$.

$$V = H^0(0, 1) = \{v \in H^1(0, 1) / v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$I = [0, 1]$ on discrétise sur l'espace des éléments finis suivant :

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{I}) \mid v_h \in P_1(I_i) \quad 1 \leq i \leq N \quad v_h \setminus \partial\Omega = 0\}$$

Où $0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N = 1$

Les points sont appelés les noeuds, et les sous intervalles $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ sont appelés les éléments.

h est le pas de discrétisation tel que :

$$h = \max h_i \quad h_i = x_i - x_{i-1} \quad 1 \leq i \leq N$$

Pour les fonctions de base, on introduit les fonctions associées à les noeuds x_1, \dots, x_N .

Pour $i = 1, \dots, N - 1$

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $i = N$

$$\Phi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{h_N} & x_{N-1} \leq x \leq x_N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ces fonctions sont linéairement indépendantes et continues.

La méthode des élément finis correspondante est comme suit :

Trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ telle que :

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h \nabla v_h + \alpha \mathbf{u}_h v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h$$

Avec

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, v_h) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h \nabla v_h + \alpha \mathbf{u}_h v_h \\ l(v_h) &= \int_{\Omega} f v_h \end{aligned}$$

Alors

$$a(\mathbf{u}_h, v_h) = l(v_h)$$

Admet une solution unique (d'après le lemme de Lax-Milgram).

On écrit :

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^N u_i \Phi_i$$

Cette méthode est équivalente au système linéaire suivant :

$$a(\mathbf{u}_h, \Phi_j) = l(\Phi_j) \quad j = \overline{1, N}$$

$$a(u_1 \Phi_1 + u_2 \Phi_2 + \dots u_N \Phi_N, \Phi_1) = l(\Phi_1)$$

$$\Rightarrow u_1 a(\Phi_1, \Phi_1) + \dots u_N a(\Phi_N, \Phi_1) = l(\Phi_1)$$

⋮

$$u_1 a(\Phi_1, \Phi_N) + \dots u_N a(\Phi_N, \Phi_N) = l(\Phi_N)$$

$$\Rightarrow a_{ij}(\Phi_i, \Phi_j) = \int_{\text{supp}\Phi_i \cap \text{supp}\Phi_j} (\nabla \Phi_i \nabla \Phi_j + \alpha \Phi_i \Phi_j) dx.$$

D'après la définition des fonctions de base, obtient la discrétisation de terme :

$$\Delta u = 4U_{ij} - U_{i-1,j} - U_{i,j-1} - U_{i+1,j} - U_{i,j+1}$$

et

$$\int_K \nabla \Phi_i \nabla \Phi_j = \frac{1}{2j} \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_2 a_3}^2 & \overrightarrow{a_2 a_3} \cdot \overrightarrow{a_3 a_1} & \overrightarrow{a_3 a_1} \cdot \overrightarrow{a_1 a_2} \\ \overrightarrow{a_2 a_3} \cdot \overrightarrow{a_3 a_1} & \overrightarrow{a_3 a_1}^2 & \overrightarrow{a_3 a_1} \cdot \overrightarrow{a_1 a_2} \\ \overrightarrow{a_3 a_1} \cdot \overrightarrow{a_1 a_2} & \overrightarrow{a_3 a_1} \cdot \overrightarrow{a_1 a_2} & \overrightarrow{a_1 a_2}^2 \end{pmatrix}$$

Avec

$$|J| = 2\text{air}(K) = 2 \cdot \frac{h^2}{2} = h^2$$

$$\overrightarrow{a_2 a_3}^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = 2h^2$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_2 a_3} \cdot \overrightarrow{a_3 a_1} &= (x_3 x_2) \cdot (x_1 x_3) + (y_3 y_2) \cdot (y_1 y_3) \\ &= (-h^2) + (-h)(0) \\ &= -h^2 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{a_3 a_1} \cdot \overrightarrow{a_1 a_2} = (h^2)(0) + (-h)(h) = -h^2$$

La matrice de rigidité local est alors :

$$R = \frac{2h^2}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

D'après le calcul, on obtient une matrice d'assemblage telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{ii} = 4 \\ \mathbf{a}_{i,i+1} = -1 \\ \mathbf{a}_{i,i+N} = -1 \end{array} \right.$$

De même pour la discrétisation du terme $\alpha \mathbf{u}$:

$$\alpha \frac{h^2}{2} U_{ij} + \alpha \frac{h^2}{12} (U_{ij} - U_{i-1,j} - U_{i,j-1} - U_{i+1,j} - U_{i,j+1})$$

Alors la discrétisation du problème : $-\Delta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}$ est :

$$\begin{aligned} & (4 + \alpha \frac{h^2}{2}) U_{ij} + (\alpha \frac{h^2}{12} - 1) U_{i-1,j} + (\alpha \frac{h^2}{12} - 1) U_{i,j-1} + (\alpha \frac{h^2}{12} - 1) U_{i+1,j} \\ & + (\alpha \frac{h^2}{12} - 1) U_{i,j+1} + \alpha \frac{h^2}{12} (U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j+1}) = h^2 f \end{aligned}$$

On pose :

$$A = 4 + \alpha \frac{h^2}{2} \quad , \quad B = \alpha \frac{h^2}{12} - 1 \quad , \quad C = \alpha \frac{h^2}{12}$$

Finalement on trouve la matrice tridiagonale globale suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 & B & C & 0 & 0 \dots \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 & B & C & 0 \dots \\ 0 & B & A & B & 0 & 0 & 0 & B & C \dots \\ 0 & 0 & B & A & B & 0 \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & 0 & \dots & \dots \\ B & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \ddots & \dots \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \ddots & \dots \ddots \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \ddots & \dots \ddots \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

1.3 Application de la méthode de relaxation :

La méthode de relaxation est une méthode itérative associée à la décomposition :

$$M = \frac{D}{W} - E \quad N = \frac{1-W}{W}D + F$$

telle que : $Q = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ et $Q = D - E - F$

Où : $D = \text{diag}(q_{i,i})$

E : la partie triangulaire inférieure.

F : la partie triangulaire supérieure .

Pour que cette méthode soit bien définie, il faut que la matrice D soit inversible .

Soit $w_{opt} \in \mathbb{R}^+$ un paramètre qui minimise le rayon spectral de la matrice d'itération $M^{-1}N$, et donc qui maximise la vitesse de convergence.

Algorithme :

U^0 donnée

U^n étant connue

Déterminer U^{n+1}

D'après l'algorithme, calcule $\overline{U^{N+1}}_{ij}$:

$$\overline{U^{N+1}}_{ij} = \frac{1}{A} [h^2 f_{ij} - BU_{i-1,j} + BU_{i,j-1} + BU_{i+1,j} + BU_{i,j+1} + C(U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j+1})]$$

$$U_{i,j}^{N+1} = \frac{w}{q_{ii}} \left[h^2 f_{ij} - \sum_{j=1}^{i-1} q_{ij} \overline{U^{N+1}}_j - \sum_{j=i+1}^N q_{ij} \overline{U}_j^k \right] + (1-w)U_i^k \quad (i, k = 1, \dots, N)$$

On arrête le processus itératif quand :

$$\| U^{N+1} - U^N \|_{\infty} < \xi$$

telle que : ξ est suffisamment petit.

1.4 Discrétisation par la méthode des différences finis :

1.4.1 Domaine d'application :

La méthode des différences finies est principalement utilisée pour résoudre des équations différentielles ordinaires ou partielles dans des domaines simples, tels que des problèmes unidimensionnels ou bidimensionnels.

1.4.2 Discrétisation :

La méthode des différences finis consiste à remplacer le problème "continu" par le problème "discret" dont la solution est donnée par résolution d'un système linéaire.

Plus précisément, elle consiste à remplacer approximativement chaque dérivée des équations différentielles du problème par le rapport des différences.

Prenons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

$\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$.

On subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en sous intervalles de longueur $h = \frac{1}{N}$ telle que :

$$\begin{aligned} x_i &= ih & i &= 1, \dots, N \\ x_j &= jh & j &= 1, \dots, N \end{aligned}$$

On prend un maillage uniforme c.à.d la longueur de chaque intervalle égale h selon l'axe de x ou de y .

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \alpha u = f(x, y)$$

Utilisant maintenant la formule de Taylor en (x_i, y_i) en avant :

$$x_i = x_{i-1} + ih \quad , \quad y_i = y_{i-1} + ih$$

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1}, y_j) &= u(x_i, y_j) + \frac{h}{1!} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \\
&+ \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^1, y_j) \quad \xi_i^1 \in (x_i, x_{i+1})
\end{aligned}$$

La variable \mathbf{y} est supposé comme constante. De même, on applique la formule de Taylor en (x_i, y_i) en arrière :

$$\begin{aligned}
u(x_{i-1}, y_j) &= u(x_i, y_j) - \frac{h}{1!} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \\
&- \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^2, y_j) \quad \xi_i^2 \in (x_i, x_{i+1})
\end{aligned}$$

$$u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) = 2u(x_i, y_j) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^1, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i^2, y_j) \right]$$

On appliquant le théorème de la moyenne :

$\exists \xi_i : (\xi_i^1, \xi_i^2)$ où $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

$$u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) = 2u(x_i, y_j) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} - \Psi(h^2)$$

$$\Psi(h^2) = \frac{h^4}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j)$$

$\Psi(h^2)$ tend vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$.

On refait la même chose pour y c.à.d :

$$\begin{aligned} u(x_i, y_{j+1}) &= u(x_i, y_j) + \frac{h}{1!} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \\ &+ \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \theta_j^1) \dots (1) \quad \theta_j^1 \in (y_j, y_{j+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x_i, y_{j-1}) &= u(x_i, y_j) - \frac{h}{1!} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \\ &- \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \theta_j^2) \dots (2) \quad \theta_j^2 \in (y_{j-1}, y_j) \end{aligned}$$

Additionant (1) et (2) et appliquant le théorème de moyenne, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h^2} - \Phi(h^2)$$

Avec

$$\Phi(h^2) = \frac{h^4}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(\theta_j, y_j)$$

$\Phi(h^2)$ tend vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$.

On peut alors approximer $u(x_i, y_i) = u_{ij} \quad 1 \leq i \leq N - 1$

$$f(x_i, y_i) = f_{ij}$$

Le problème alors :

$$-\left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} \right] + \alpha u_{ij} = f_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N - 1$$

Multiplions par h^2 et regroupons les termes identiques, on obtient le système :

$$(P_h) \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + (\alpha h^2 + 4)u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} = h^2 f_{ij} \\ u_{i,0} = 0, \quad u_{0,j} = 0, \quad u_{N,j} = 0, \quad u_{i,N} = 0 \end{cases}$$

(P_h) est appelé le problème discret.

Ecrivons le problème discret (P_h) sous forme d'un système matriciel, pour $i = j = 1$

$$-u_{2,1} - u_{1,2} + (\alpha h^2 + 4)u_{1,1} - u_{0,1} - u_{1,0} = h^2 f_{11}$$

Le système devient ; par exemple dans le cas d'une matrice $(9 \times 9)(9 \times 9)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{99} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_{11} + u_{0,1} + u_{1,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h^2 f_{99} + u_{9,8} + u_{8,9} \end{pmatrix}$$

Remarque 1.4.1 La convergence finale de cette méthode est assurée grâce aux deux propriétés fondamentales qui sont : consistance et stabilité.

1.5 La résolution du système (P_h) :

La matrice de ce système est sous forme :

$$A^* = \begin{pmatrix} K & -I & 0 \\ -I & K & 0 \\ 0 & -I & K \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système $A^* X = b$, On propose un algorithme de CROUT-LITT car :

$|A^*| \neq 0$ avec $A^* = LU$ vérifier :

$$\begin{cases} A^* X = b \\ LU X = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} LU = b \\ UX = Y \end{cases}$$

telle que :

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{NN} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1N} \\ 0 & \beta_{22} & \dots & \beta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \beta_{(N-1)N} \\ 0 & 0 \dots & 0 & \beta_{NN} \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{b_1}{\alpha_{11}}$$

$$y_i = \frac{1}{\alpha_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} y_j \right)$$

$$x_N = \frac{y_N}{\beta_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^N \beta_{ij} y_j \right)$$

1.6 Comparaison entre les deux méthodes :

1.6.1 Analytiquement :

a. Méthode des éléments finis :

Formulation intégrale (variationnelle) :

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V : \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \end{cases}$$

V_h est un espace de fonction définie sur Ω :

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}_h \in V_h : \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \end{cases}$$

b. Méthode de différences finis :

Formulation ponctuelle :

$$(Q) \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ L\mathbf{u} = \mathbf{g} \end{cases}$$

A_h, L_h sont les opérateurs linéaires "approximation" de L et A :

$$(Q_h) \begin{cases} A_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h \\ L_h \mathbf{u}_h = \mathbf{g}_h \end{cases}$$

1.6.2 Généralement :

Les problèmes (P_h) et (Q_h) conduisent à des systèmes linéaires dont les matrices ont des propriétés similaires creuses et grande taille.

La méthode des éléments finis a l'avantage de permettre une prise en compte simple et systématique des conditions aux limites quelle que soit la forme de domaine.

Cependant, la méthode de différences finis est plus facile à mettre en oeuvre sur des problèmes simples.

La méthode des éléments finis est plus adaptée pour les domaines complexes avec des géométries irrégulières, tandis que la méthode de différences finis est plus adaptée pour les domaines réguliers avec des équations différentielles simples.

La méthode des éléments finis offre une meilleure précision pour les problèmes continus mais elle est généralement plus complexe à mettre en oeuvre et à résoudre que la méthode de différences finis .

La méthode de différences finis est plus simple et plus intuitive, mais elle peut être limitée en termes de capacité à gérer des domaines complexes et des conditions aux limites non standard.

En résumé, bien que les deux méthodes soient utilisées pour résoudre des problèmes numériques, elles sont adaptées à des types différents de problèmes et présentent des compromis différents en termes de précision et de complexité de mise en oeuvre.

CHAPITRE

2

MÉTHODE ALTERNÉE DE SCHWARZ "MATCHING GRID METHOD"

2.1 Le problème continu :

On considère une méthode de décomposition en sous domaines avec recouvrement pour un problème elliptique modèle avec conditions de Dirichlet au bord. Plus précisément il s'agit de problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Où Ω est un ouvert borné, à frontière régulière de \mathbb{R}^2 .

f étant une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$.

La formulation variationnelle de ce problème est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} dx \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} dx \end{aligned}$$

D'après le lemme de Lax-Milgram, ce problème admet une solution unique.

2.1.1 Description de l'alternative de Schwarz :

On décompose Ω en l'union de deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 tels que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad \text{et} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$$

On note par :

$$\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \quad i, j = 1, 2$$

$$\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

Théorème 2.1.1 [5] Le problème (2.1) est équivalent aux problèmes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega_i} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_i) \quad (i = 1, 2) \\ \mathbf{u}_i \setminus_{\Gamma_i} = \mathbf{u}_j \setminus_{\Gamma_i} \quad i \neq j \quad i = 1, 2 \\ \mathbf{u}_i \setminus_{\partial\Omega \cap \Omega_i} = 0 \quad i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Preuve : Soit $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$, v son prolongement par 0 à Ω .

On a :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, v) &= a_i(\mathbf{u}_i, v_i) \\ (\mathbf{f}, v)_\Omega &= (\mathbf{f}, v)_{\Omega_i} \end{aligned}$$

Comme $a(\mathbf{u}, v) = (\mathbf{f}, v)_\Omega$ alors :

$$a_i(\mathbf{u}_i, v_i) = (\mathbf{f}, v)_{\Omega_i}$$

Réciproquement, montrons que si \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont des solutions de système (2.3), on a :

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ \mathbf{u}_2 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$$

est la solution de : $a(\mathbf{u}, v) = (\mathbf{f}, v)$.

Soit $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$, il existe $(v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$v = v_1 + v_2$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= a(u, v_1) + a(u, v_2) \\
 &= a(u_1, v_1) + a(u_2, v_2) \\
 &= (f, v_1)_{\Omega_1} + (f, v_2)_{\Omega_2} \\
 &= \int_{\Omega_1} f v_1 dx + \int_{\Omega_2} f v_2 dx \\
 &= \int_{\Omega} f v_1 dx + \int_{\Omega} f v_2 dx \\
 &= \int_{\Omega} f (v_1 + v_2) dx = \int_{\Omega} f v dx \\
 &\Rightarrow a(u, v) = (f, v)_{\Omega}
 \end{aligned}$$

L'alternative de Schwarz consiste à résoudre les deux sous problèmes suivants :

Soit u^0 une initialisation dans $H_0^1(\Omega)$. On construit les deux suites $(u^{2n+1})_{n \geq 0}$, $(u^{2n})_{n \geq 1}$ solutions respectives de :

$$\begin{cases} -\Delta u^{2n+1} = f & \text{sur } \Omega_1 \\ u^{2n+1} = u^{2n} & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} -\Delta u^{2n} = f & \text{sur } \Omega_2 \\ u^{2n} = u^{2n-1} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

Les problèmes (2.4) et (2.5) ont les formulations variationnelles suivantes :

$$\begin{aligned} a(u^{2n+1}, v_1) &= (f, v)_{\Omega_1} \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega_1) & u^{2n+1} &= u^{2n} \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ a(u^{2n}, v_2) &= (f, v)_{\Omega_2} \quad \forall v_2 \in H_0^1(\Omega_2) & u^{2n} &= u^{2n-1} \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned}$$

qui sont équivalentes à :

$$\begin{aligned} a(u^{2n+1} - u, v_1) &= 0 \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega_1) \\ u^{2n+1} - u^{2n} &\in H_0^1(\Omega_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(u^{2n} - u, v_2) &= 0 \quad \forall v_2 \in H_0^1(\Omega_2) \\ u^{2n} - u^{2n-1} &\in H_0^1(\Omega_2) \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1 La suite $\{u^{2n}, u^{2n+1}\}$ solution de problème (2.4) et (2.5) vérifie :

$$u^{2n+1} - u = P_{V_1}(u - u^{2n}) \quad \forall n \geq 0 \quad (2.6)$$

$$u^{2n} - u = P_{V_2}(u - u^{2n-1}) \quad \forall n \geq 1 \quad (2.7)$$

Où P_{V_i} est la projection sur V_i pour $i = 1, 2$.

Remarque 2.1.1 On peut réécrire ces résultats sous la forme :

$$u - u^{2n+1} = P_{V_1}^\perp (u - u^{2n}) \quad \forall n \geq 0 \quad (2.8)$$

$$u - u^{2n} = P_{V_2}^\perp (u - u^{2n-1}) \quad \forall n \geq 1 \quad (2.9)$$

Où V_i^\perp est l'orthogonale de V_i .

2.1.2 Convergence de l'Alternative de Schwarz dans le cas continu :

L'Alternative de Schwarz pour les problèmes (2.4) et (2.5) est équivalente à une suite de projection sur des espaces \mathbf{V} de Hilbert. Pour étudier la convergence de la méthode, on est ramené à étudier le comportement de la suite (\mathbf{v}_n) définie par :

$$\mathbf{v}_{2n+1} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{2n+1} \quad n \geq 0 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v}_{2n} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{2n} \quad n \geq 1 \quad (2.11)$$

D'après (2.8) et (2.9) on a :

$$\mathbf{v}_{2n+1} = P_{V_1}^\perp \mathbf{v}_{2n} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{2n} = P_{V_2}^\perp \mathbf{v}_{2n-1}$$

D'où :

$$\mathbf{v}_{2n+1} = P_{V_1}^\perp P_{V_2}^\perp \mathbf{v}_{2n-1}$$

On a le théorème de convergence suivant :

Théorème 2.1.2 [6] Si $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ ou $\mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2}$, alors la suite (\mathbf{v}_n) converge vers $\mathbf{0}$, de plus il existe une constante $k \in]0, 1[$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \| P_{V_1}^\perp P_{V_2}^\perp \| \leq k \\ |\mathbf{v}_{2n+1}| \leq k^2 |\mathbf{v}_0| \quad \forall n \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

La décomposition de ce théorème est basée sur les deux lemmes suivants :

Lemme 2.1.1 Si Ω est un L-domaine alors $H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Lemme 2.1.2 Il existe une constante C_0 positive telle que :

$$|v| \leq C_0 \{ |P_{V_1}^\perp v|^2 + |P_{V_2}^\perp v|^2 \}^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

Preuve : Voir [3].

2.1.3 Convergence de l'Alternative de Schwarz dans le cas discret :

Soit $V_i = V_h \cap H_0^1(\Omega)$, où V_h est l'espace des éléments finis défini sur Ω_i , i.e $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

La solution approchée de (2.1) est un élément $u_h \in V_h$ définie par :

$$a_h(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.14)$$

La formulation variationnelle de l'alternative de Schwarz dans le cas discret est :

$$\begin{aligned} a_\Omega(u^{2n+1} - u^{2n}, v_h) &= (f, v_h)_\Omega - a_\Omega(u^{2n}, v_h) \\ &= a_\Omega(u_h - u^{2n}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_\Omega(u^{2n} - u^{2n-1}, v_h) &= (f, v_h)_\Omega - a_\Omega(u^{2n-1}, v_h) \\ &= a_\Omega(u_h - u^{2n-1}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega_2) \end{aligned}$$

Où :

$$u^{2n+1} - u^{2n} \in H_0^1(\Omega_1) \quad \text{et} \quad u^{2n} - u^{2n-1} \in H_0^1(\Omega_2)$$

Ces valeurs sont les projections sur V_i de $u_h - u^{2n}$ et $u_h - u^{2n-1}$ respectivement :

$$u_h^{2n+1} - u_h^{2n} = P_{V_i}(u_h - u_h^{2n}) \quad \text{et} \quad u_h^{2n} - u_h^{2n-1} = P_{V_i}(u_h - u_h^{2n-1})$$

Où $P_{V_i(i=1,2)}$ est la projection orthogonale de V_h sur V_i .

Pour étudier la convergence d'un autre point de vue, qui dépend de la triangulation et qui transforme l'alternative de Schwarz en deux problèmes indépendants définis sur Ω_1 et Ω_2 respectivement.

On procède de la manière suivante :

Soit z la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta z = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ z = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.15)$$

A ce problème, on associe le système suivant qui a pour solution (z_1, z_2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta z_i = f = f_i \quad \text{sur} \quad \Omega_i \\ z_i = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ z_i \setminus \Gamma_i = z_j \setminus \Gamma_i \quad i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Considérons \mathbf{y}_i la solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{y}_i = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Omega_i \\ \mathbf{y}_i = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Omega_i \cap \partial\Omega \\ \mathbf{y}_i = \mathbf{v}_i \quad \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Et enfin, soit $\tilde{\mathbf{y}}_i$ la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{\mathbf{y}}_i = \mathbf{f}_i = \mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega \\ \tilde{\mathbf{y}}_i = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega_i \quad i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Remarque 2.1.2 Il est facile de vérifier que $\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i + \tilde{\mathbf{y}}_i$ sur Ω_i .

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.16), on le transforme à un problème du point fixe.

2.1.4 Alternative de Schwarz en tant que problème de point fixe :

Soit \mathbf{E} l'espace de trace défini par :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \quad i = 1, 2 \quad (2.19)$$

et $\bar{\mathbf{T}}_j$ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_j &: \mathbf{E}_i \rightarrow \mathbf{E}_j \\ \mathbf{v}_i &\longmapsto \bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{v}_i) = \mathbf{y}_i \setminus \Gamma_j \end{aligned}$$

Posons $\mathbf{t}_i = \tilde{\mathbf{y}}_i \setminus_{\Gamma_i}$ et définissons l'application \mathbf{T} par :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{E} \\ (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &\longmapsto \mathbf{T}(\mathbf{v}) = (\bar{\mathbf{T}}_1(\mathbf{v}_2) + \mathbf{t}_1, \bar{\mathbf{T}}_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{t}_2) \\ &= (\mathbf{T}_1(\mathbf{v}_2), \mathbf{T}_2(\mathbf{v}_1)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Associions le problème de point fixe :

$$\mathbf{u}_j = \bar{\mathbf{T}}_j(\mathbf{u}_j) + \mathbf{t}_j = \mathbf{T}_j(\mathbf{u}_j)$$

Lemme 2.1.3 \mathbf{T} est une application contractante sur $\mathbf{E}_i \times \mathbf{E}_i$.

Preuve : Voir[6].

2.1.5 Etude de la convergence du problème de point fixe discret :

Considérons sur chaque sous domaine Ω_i ($i = 1, 2$), une triangulation régulière τ^h et on considère les fonction de base affines définies par :

$$\Phi(\mathbf{m}_k) = \delta_{k,l}$$

Où \mathbf{m}_k est un noeud d'un élément et $\delta_{k,l}$ le symbole de kronecker.

$r_{i,h}$ l'opérateur d'interpolation usuel sur Γ_i .

Définissons à présent les espaces suivants :

$$\mathbf{V}_{i,h} = \{\mathbf{v}_h \in H^1(\Omega), \mathbf{v}_h \setminus_{k_h} \in P_1\} \quad \mathbf{K}_h \in \tau^h$$

et pour $\mathbf{w}_i \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$

$$\mathbf{V}_{i,h}^{(\mathbf{w}_i)} = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{i,h} \setminus_{v_h} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \text{ et } \mathbf{v}_h = r_{i,h}(\mathbf{w}_i) \text{ sur } \Gamma_i\}$$

D'où, on a :

$$V_{i,h}^{(0)} = \{v_h \in V_{i,h} \setminus v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i\}$$

L'espace $E_{i,h}$ étant l'image de $V_{i,h}$ par l'application de trace γ_i .

Posons $E_h = E_{1,h} \times E_{2,h}$.

On considère le système suivant :

$$\{u_{1,h}, u_{2,h}\} \in E_{1,h} \times E_{2,h} \text{ et } z_{i,h} \in V_{i,h}^{(u_{i,h})}$$

telle que :

$$\begin{cases} a_i(z_{i,h}, v_h) = (f, v_h)_{\Omega_i} & \forall v_h \in V_{i,h}^{(0)} \\ z_{i,h} \setminus \Gamma_i = u_{i,h} \end{cases}$$

Où $a_i(u, v) = \int_{\Omega_i} \nabla u \nabla v dx$ et $(f, v)_{\Omega_i} = \int_{\Omega_i} f v dx$

2.1.6 Le problème de point fixe discret :

Soient $\tilde{y}_{i,h}$ et $y_{i,h}$ solutions respectivement de :

$$\begin{cases} a_i(\tilde{y}_{i,h}, v_h) = (f, v_h)_{\Omega_i} & \forall v_h \in V_{i,h}^{(0)} \\ \tilde{y}_{i,h} = 0 \text{ sur } \Gamma_i & (\tilde{y}_{i,h} \in V_{i,h}^{(0)}) \end{cases} \quad (2.21)$$

et

$$\begin{cases} a_i(y_{i,h}, v_h) = 0 & \forall v_h \in V_{i,h}^{(0)} \\ y_{i,h} = r_{i,h}(u_{i,h}) \text{ sur } \Gamma_i & (y_{i,h} \in V_{i,h}^{(u_{i,h})}) \end{cases} \quad (2.22)$$

On considère l'opérateur $\bar{T}_{i,h}$ défini par :

$$\begin{aligned}\bar{T}_{i,h} &: E_{j,h} \rightarrow E_{i,h} \\ \mathbf{u}_{j,h} &\mapsto \bar{T}_{i,h}(\mathbf{u}_{j,h}) = r_{i,h}(\gamma_i(\mathbf{u}_{i,h}))\end{aligned}$$

Enfin, on a l'application \mathbf{T}_h telle que :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_h &: E_{1,h} \times E_{2,h} \rightarrow E_{1,h} \times E_{2,h} \\ (\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{2,h}) &\mapsto \bar{T}_{1,h}(\mathbf{u}_{2,h}) + \mathbf{t}_{1,h}, \bar{T}_{2,h}(\mathbf{u}_{1,h}) + \mathbf{t}_{2,h} \\ &= (\mathbf{T}_{1,h}(\mathbf{u}_{2,h}), \mathbf{T}_{2,h}(\mathbf{u}_{1,h}))\end{aligned}$$

telle que :

$$\mathbf{t}_{i,h} = r_{i,h}(\gamma_i(\tilde{\mathbf{y}}_{i,h}))$$

Alors le système (2.21) est équivalent au problème de point fixe :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{i,h} &= \mathbf{T}_{i,h}(\mathbf{u}_{j,h}) \\ &= \bar{T}_{i,h}(\mathbf{u}_{j,h}) + \mathbf{t}_{i,h}\end{aligned}\tag{2.23}$$

De la même manière que dans le cas continu, on démontre que \mathbf{T}_h est contractance .

D'où l'existence et l'unicité d'un couple $(\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{2,h}) \in \mathbf{E}_{1,h} \times \mathbf{E}_{2,h}$ telle que :

$$\mathbf{T}_h(\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{2,h}) = (\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{2,h})$$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{T}}_{1,h}(\mathbf{u}_{2,h}) + \mathbf{t}_{1,h} = \mathbf{u}_{1,h} \\ \bar{\mathbf{T}}_{2,h}(\mathbf{u}_{1,h}) + \mathbf{t}_{2,h} = \mathbf{u}_{2,h} \end{cases}$$

On énonce le théorème de convergence suivant :

Théorème 2.1.3 [6]

$$\| z_i - z_{i,h} \|_{1,\Omega_i} \leq Ch(|z|_{2,\Omega_1} + |z|_{2,\Omega_2}) \quad (2.24)$$

La preuve du théorème est basée sur les deux lemmes suivants :

Lemme 2.1.4 [6] Il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\| \mathbf{T}_{i,h}(\mathbf{u}_j) - \mathbf{T}_i(\mathbf{u}_j) \|_{\frac{1}{2},\Gamma_j} \leq Ch |z|_{2,\Omega_2} \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2$$

Lemme 2.1.5 [6]

$$\| \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i,h} \|_{\infty} \leq Ch(|z|_{2,\Omega_1} + |z|_{2,\Omega_2})$$

CHAPITRE

3

MÉTHODE ALTERNÉE DE SCHWARZ "NOMATCHING GRID METHOD"

3.1 Position de problème :

La méthodologie proposée ici permet d'analyser la convergence des problèmes discrets obtenus quand chaque sous domaine est discrétisé indépendamment avec une méthode des éléments finis. Les triangles appartenant à la partie commune aux sous domaine ne coïncident pas nécessairement (Nomatching grids). Plus précisément il s'agit du problème modèle suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 à frontière lipschitzienne.

f désigne une fonction régulière.

On décompose Ω en deux domaines Ω_1 et Ω_2 , à frontière lipschitzienne avec recouvrement telles que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

et

$$\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$$

$$\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$$

$$\Omega_{1,2} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

On suppose que : $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

L'idée consiste à associer au problème (3.1) le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_i + \alpha u_i = f_i = f \quad \text{dans } \Omega_i \\ u_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ u_i|_{\Gamma_i} = u_j|_{\Gamma_i} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Dont la solution est obtenue via la résolution d'un problème de point fixe.

3.1.1 Application de point fixe associée au système (3.2) :

Pour résoudre le système (3.1), on introduit les sous problèmes suivants :

Soit w_i une donnée de $C(\Gamma_i)$ et ξ_i la solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \xi_i + \alpha \xi_i = f_i = f \quad \text{dans } \Omega_i \\ \xi_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ \xi_i = w_i \quad \text{sur } \Gamma_i \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Soit aussi $\tilde{\xi}_i$ l'unique solution de problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{\xi}_i + \alpha \tilde{\xi}_i = f_i = f \quad \text{dans } \Omega_i \\ \tilde{\xi}_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_i \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Remarque 3.1.1 Il est clair que : $u_i = u_i \setminus \Omega_i$ et $u_i = \xi_i + \tilde{\xi}_i$ dans Ω_i pour $i = 1, 2$.

3.1.2 Application de point fixe dans le cas continu :

Notons par $E_i = C(\Gamma_i)$ et $b_i = \tilde{\xi}_i \setminus \Gamma_i$. L'application de point fixe associée au système (3.2) est définie par :

$$\begin{aligned} T_i : E_i &\rightarrow E_j \\ w_j &\mapsto T_i(w_i) = \bar{T}_i(w_j) + b_i \end{aligned}$$

Où :

$$\bar{T}_i(w_i) = \xi_i \setminus \Gamma_i \quad (3.5)$$

Il est clair que la résolution du système (3.2) se ramène à celle de point fixe suivant :

$$z_i = T_i(z_j) \quad (3.6)$$

Soit :

$$\| T_i \|_{\infty} = k_i < 1$$

Par conséquent, il existe un point fixe unique pour (3.6) et donc le système (3.2) admet une solution unique.

3.2 Le problème discret :

Pour $i = 1, 2$, Soit $\tau_{k_{h_i}}^h$ une famille de triangulations régulières de Ω_i où K_{h_i} est un triangle et h_i est son diamètre. On suppose que les triangulations sur Ω_1 et Ω_2 sont indépendantes au sens où sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$ un triangle appartenant à une triangulation n'appartient pas nécessairement à l'autre.

On considère les espaces des éléments finis suivants :

$$V_{i,h} = \{v \in C(\Omega_i) : v|_{K_{h_i}} \in P_1\} \quad (3.7)$$

Où P_1 est l'espace des polynômes de degré ≤ 1 .

Maintenant r_{ih} l'opérateur d'interpolation sur Γ_i . Pour $w_i \in C(\Gamma_i)$, on définit :

$$r_{ih}(w_i) = \sum_{l=1}^{m(h)} w_i(M_l) \Phi_l(x, y)$$

Où $(M_l)_{1,2,\dots,m(h)}$ désignent les sommets de la triangulation qui n'appartiennent à $\bar{\Gamma}_i$.

On note par $\Phi_{l=1,2,\dots,m(h)}$ les fonctions de base usuelles $\Phi_l(\mathbf{m}_s) = \delta_{ls}$ (δ_{ls} étant le symbole de Kronecker).

et

$$\mathbf{V}_{ih}^{(w_i)} = \{v \in V_{ih} : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \text{ et } v = r_{ih}(w_i) \text{ sur } \Gamma_i\} \quad (3.8)$$

Donc

$$\mathbf{V}_{ih}^{(0)} = \{v \in V_{ih} : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i\} \quad (3.9)$$

Enfin

$$\mathbf{E}_{ih} = \gamma_i(\mathbf{V}_{jh}) \text{ pour } i \neq j \quad (3.10)$$

tel que γ_i est l'application de trace sur Γ_i , et $\mathbf{E}_h = \mathbf{E}_{1,h} \times \mathbf{E}_{2,h}$.

Soit

$$a_i(\mathbf{u}, v) = \int_{\Omega_i} (\nabla \mathbf{u} \nabla v + \alpha \mathbf{u} v) dx \quad (3.11)$$

$$(\mathbf{f}, v) = \int_{\Omega_i} (\mathbf{f} v) dx \quad (3.12)$$

L'analogie discret du système (3.2) consiste à trouver $(\mathbf{u}_{1h}, \mathbf{u}_{2h})$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i(\mathbf{u}_{ih}, v) = (\mathbf{f} v) \\ \mathbf{u}_{ih} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \quad \forall v \in \mathbf{V}_{i,h}^{(0)} \\ \mathbf{u}_{ih} \setminus \Gamma_i = \mathbf{u}_{jh} \setminus \Gamma_i \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Comme dans le cas continu, ce système peut être également décomposé en deux problèmes découplés :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_i(\boldsymbol{\xi}_{ih}, \mathbf{v}) = 0 \\ \boldsymbol{\xi}_{ih} \in V_{i,h}^{w_i} \quad \forall \mathbf{v} \in V_{i,h}^{(0)} \end{cases} \quad (3.14)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{a}_i(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{ih}, \mathbf{v}) = 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{ih} \in V_{i,h}^{w_i} \quad \forall \mathbf{v} \in V_{i,h}^{(0)} \end{cases} \quad (3.15)$$

Ceci donne lieu au problème de point fixe suivant :

3.2.1 Application du point fixe au système (3.13) :

Soit l'application de point fixe :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{i,h} : E_j &\rightarrow V_{i,h} \\ \mathbf{w}_i &\mapsto \mathbf{T}_{i,h}(\mathbf{w}_j) = \bar{\mathbf{T}}_{i,h}(\mathbf{w}_j) + \mathbf{b}_{i,h} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Où :

$$\bar{\mathbf{T}}_{i,h}(\mathbf{w}_j) = \mathbf{r}_{ih}(\gamma_i(\boldsymbol{\xi}_{jh})) \quad (3.17)$$

et

$$\mathbf{b}_{ih} = \mathbf{r}_{ih}(\gamma_i(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{ih})) \quad (3.18)$$

Aussi, comme dans le continu, la résolution du système (3.13) se ramène à celle du point fixe discret suivant :

$$\mathbf{z}_{ih} = \mathbf{T}_{i,h}(\mathbf{z}_{jh}) \quad (3.19)$$

Remarque 3.2.1 Comme les deux triangulations sur le domaine de recouvrement sont indépendantes, il est impossible de formuler l'approximation global du problème qui est l'analogue discret du problème (3.1).

3.2.2 Principe de maximum discret (PMD) [2] :

Les matrices des coefficients générique $\mathbf{a}_i(\Phi_i, \Phi_j)$ sont supposées M-matrices.

Théorème 3.2.1 [6] Sous les suppositions des problèmes (3.1), (3.7), et le (PMD), il existe $\bar{h} > 0$ tel que pour tout $0 \leq h \leq \bar{h}$, le système (3.13) admet une solution Ψ_{1h}, Ψ_{2h} . Soit Ψ_1, Ψ_2 la solution de (3.13) à équivalent Ψ_i qui est la restriction à Ω_i de Ψ ; la solution du problème global (3.2).

Alors pour h assez petit :

$$\max \|\Psi_i - \Psi_{ih}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch |\log h| \quad (3.20)$$

C est une constante générique indépendante de h .

La preuve est basée sur les deux lemmes suivants :

Lemme 3.2.1 Sous les notations et les suppositions précédentes, l'application $T_{j,h}$ est isotone sur $C(\bar{\Gamma}_i)$ donné avec un ordre naturel.

Preuve : L'analogue discret du problème (3.3) peut être définir par le système suivant :

$$\forall p \in \Omega_{j,h} \quad \mathbf{a}_i\left(\sum_{M \in \Omega_{j,h}} \xi_{jh} \Phi_p(x)\right) = -\mathbf{a}_i\left(\sum_{M \in \Gamma_{j,h}} \mathbf{w}_j(M), \Phi_p(x)\right)$$

qui équivalents à :

$$\forall p \in \Omega_{j,h} \quad \sum_{M \in \Gamma_{j,h}} \xi_{jh}(M) \mathbf{a}_j(\Phi_M, \Phi_p) = -\left(\sum_{M \in \Gamma_{j,h}} \mathbf{w}_j(M) \mathbf{a}_j(\Phi_M, \Phi_p)\right) \quad (3.21)$$

On considère v_i^1, v_i^2 telles que pour l'ordre naturel :

$$v_i^1 \geq v_i^2 \quad (3.22)$$

Alors, si on considère ζ_i^1 et ζ_i^2 les solutions de problème (3.3) avec les valeurs de bord respectivement v_i^1 et v_i^2 sur Γ_i .

Les analogues discrets correspondantes donnent les systèmes suivants :

$$\forall p \in \Omega_{i,h} : \quad \sum_{M \in \Omega_{i,h}} \xi_{ih}^1(M) a_i(\Phi_M, \Phi_p) = - \sum_{M \in \Gamma_{i,h}} v_i^1(M) a_i(\Phi_M, \Phi_p)$$

et

$$\sum_{M \in \Omega_{i,h}}^2 \xi_{ih}^2(M) a_i(\Phi_M, \Phi_p) = - \sum_{M \in \Gamma_{i,h}} v_i^2(M) a_i(\Phi_M, \Phi_p)$$

Par soustraction :

$$\forall p \in \Omega_{i,h} : \quad \sum_{M \in \Omega_{i,h}} (\xi_{ih}^2 - \xi_{ih}^1)(M) a_i(\Phi_M, \Phi_p) = - \sum_{M \in \Gamma_{i,h}} v_i^2(M) - v_i^1(M) a_i(\Phi_M, \Phi_p)$$

D'après (3.22), on a :

$$v_i^1(M) \geq v_i^2(M) \quad \forall M \in \Gamma_{i,h}$$

Le (PMD) donne :

$$a_i(\Phi_M, \Phi_p) \leq 0 \quad \forall M \in \Omega_{i,h} \quad \forall p \in \Gamma_{i,h}$$

Ces inéquations impliquent :

$$\sum_{M \in \Omega_{i,h}} (\xi_{ih}^2 - \xi_{ih}^1)(M) \mathbf{a}_i(\Phi_M, \Phi_p) \leq 0 \quad \forall p \in \Omega_{i,h}$$

D'où, (PMD) implique :

$$\xi_{ih}^2 - \xi_{ih}^1 \leq 0 \quad \forall M \in \Omega_{i,h}$$

Alors

$$\mathbf{T}_{jh}(\mathbf{v}_i^1) \geq \mathbf{T}_{jh}(\mathbf{v}_i^2)$$

Lemme 3.2.2 L'application \mathbf{T}_{ih} est une contraction strict. i.e

$$\| \mathbf{T}_{ih} \|_{\infty} = l_i < 1 \tag{3.23}$$

Par conséquent, il existe un unique point fixe pour (3.19) et donc le système (3.13) admet une solution unique.

Preuve : Voir [6].

3.3 Estimation d'erreur :

Cette section est consacrée à la démonstration du résultats principal de ce travail. Mais pour \mathbf{y} par venir on a besoin de quelques résultats intermédiaires contenus dans les lemmes suivants :

Lemme 3.3.1 $\| \mathbf{T}_{jh}(z_i) - \mathbf{T}_j(z_i) \|_{L^\infty(\Gamma_j)} \leq Ch^2 |\log h|$

Preuve : Considérons le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_i(\bar{\mathbf{u}}_{ih}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ \bar{\mathbf{u}}_{ih} \in \mathbf{V}_{ih}^{(z_i)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{ih}^0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Donc

$$\| \mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_{ih} \|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 |\log h|$$

Comme

$$| \mathbf{u}_i \setminus_{\Gamma_j} - \bar{\mathbf{u}}_{ih} \setminus_{\Gamma_j} | = | \mathbf{T}_{jh}(z_i) - \mathbf{T}_j(z_i) |$$

D'où le résultat.

Lemme 3.3.2 Sous les hypothèses du lemme (3.2.2) on a :

$$\| z_i - z_{ih} \|_{L^\infty(\Gamma_i)} \leq \frac{1}{1 - l_i} [Ch^2 |\log h|]$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \| z_i - z_{ih} \|_{L^\infty(\Gamma_i)} &\leq \| z_i - \mathbf{T}_{ih}(z_{jh}) \|_{L^\infty(\Gamma_i)} + \| \mathbf{T}_{ih}(z_{jh}) - z_{ih} \|_{L^\infty(\Gamma_i)} \\ &\leq \| \mathbf{T}_i(z_j) - \mathbf{T}_{ih}(z_i) \|_{L^\infty(\Gamma_i)} + \| \mathbf{T}_{ih}(z_j) - \mathbf{T}_{ih}(z_{jh}) \|_{L^\infty(\Gamma_i)} \end{aligned}$$

D'après le lemme (3.2.2) et on sait que :

$$\| \mathbf{T}_{jh} \|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Gamma_i), L^\infty(\Gamma_j))} \leq 1$$

Alors

$$\| z_i - z_{ih} \|_{L^\infty(\Gamma_i)} \leq Ch^2 |\log h| + l_i \| z_j - z_{jh} \|_{L^\infty(\Gamma_j)}$$

De façon similaire, on obtient également :

$$\| z_j - z_{jh} \|_{L^\infty(\Gamma_j)} \leq Ch^2 |\log h| + l_j \| z_i - z_{ih} \|_{L^\infty(\Gamma_i)}$$

Ce qui achève la preuve.

Théorème 3.3.1 [6] $\| u_i - u_{ih} \|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 |\log h|$

Preuve : u_i et u_{ih} étant les solutions des problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i(u_i, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_i \in H^2(\Omega) \quad , \quad u_i|_{\Gamma_i} = z_i \\ u_i|_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega} = 0 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i(u_{i,h}, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_{ih}^0 \\ u_{ih} \in V_{ih}^{(z_i)} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Considérons le problème auxiliaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i(\tilde{u}_{i,h}, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_{ih}^0 \\ \tilde{u}_{ih} \in V_{ih}^{(z_i)} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Alors compte tenu des hypothèses de régularité, on a :

$$\| u_{ih} - \tilde{u}_{ih} \|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 |\log h|$$

et

$$\begin{aligned} \| \mathbf{u}_{ih} - \tilde{\mathbf{u}}_{ih} \|_{L^\infty(\Omega_i)} &\leq \| \mathbf{r}_h(\mathbf{z}_i) - \mathbf{r}_i(\mathbf{z}_{ih}) \|_{L^\infty(\Gamma_i)} \\ &\leq \| \mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{ih} \|_{L^\infty(\Gamma_i)} \\ &\leq Ch^2 |\log h| \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \| \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{ih} \|_{L^\infty(\Omega_i)} &\leq \| \mathbf{u}_i - \tilde{\mathbf{u}}_{ih} \|_{L^\infty(\Omega_i)} + \| \tilde{\mathbf{u}}_{ih} - \mathbf{u}_{ih} \|_{L^\infty(\Omega_i)} \\ &\leq Ch^2 |\log h|. \end{aligned}$$

CHAPITRE

4

"NOMATCHING GRID METHOD" ÉLÉMENTS FINIS ET DIFFÉRENCES FINIS MIXTE

4.1 Notations et hypothèses :

- a- On considère sur Ω_1 , la discrétisation par les éléments finis ; voir chapitre (3).
- b- On définit un quadrillage du carré régulier (ou cube en 3D) grille avec le pas h sur \mathbb{R}^n ; $\Omega_{2,h}$ sont les points de cette grille qui sont intérieurs de Ω_2 .
 $\partial\Omega_{2,h}$ est inclu dans $\partial\Omega_2$.
- c- Soit $\bar{\Omega}_{2,h} = \Omega_{2,h} \cup \partial\Omega_{2,h}$ et $\Gamma_{2,h} = \partial\Omega_{2,h} \cap \Omega_1$
Alors : $\Gamma_{2,h} \subset \Gamma_2 = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$

d- On considère sur $\Omega_{2,h}$, les cinq points usuels (ou les sept points de 3D) est dit schéma en croix ou formule de cinq points de différence finie.

e- De plus, on suppose que les noeuds des triangles de Ω_1 sont dans Γ_1 appartient à $\Omega_{2,h}$, alors :

$$\Gamma_{1,h} = \Omega_{2,h} \cap \Gamma_1$$

$$\Omega_{2,h} = \blacksquare$$

$$\partial\Omega_{2,h} = \bullet$$

$\bar{\Omega}_2$ est un carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

On chaque point de grille : $\Omega_{2,h} = \{(ih, jh), i, j = 1 \dots n\} = \blacksquare$

$$\bar{\Omega}_{2,h} = \begin{cases} (ih, jh) & i, j = 1 \dots n + 1 \\ (i, j) \neq (0, 0); (0, n + 1); (n + 1, 0); (n + 1, n + 1) \end{cases}$$

$$\partial\Omega_{2,h} = \bar{\Omega}_{2,h} - \Omega_{2,h} = \bullet$$

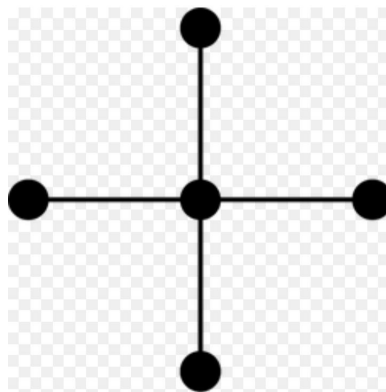


FIGURE 4.1 –

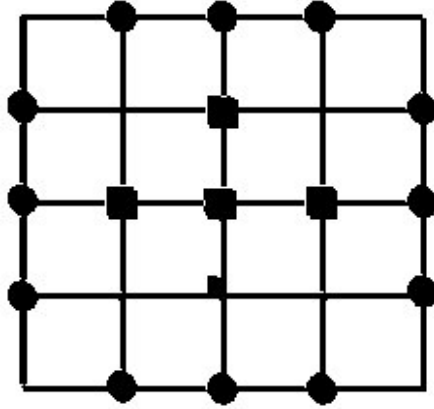


FIGURE 4.2 –

f- Soit $\tilde{r}_{i,h}$ est la restriction de Γ_i à $\Gamma_{i,h}$ et p_h^i est l'opérateur de prolongation de $\Gamma_{i,h}$ par l'opérateur d'interpolation à une fonction continue définie sur Γ_i :

$$r_{i,h} = p_h^1 \tilde{r}_{i,h} \quad (4.1)$$

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } z_{1,h} \in V^{(p_h^1 u_{1,h})} \text{ telle que :} \\ a_1(z_{1,h}, v_h) = (f, v) \quad \forall v_h \in V_{1,h}^{(0)} \end{cases} \quad (4.2)$$

Δ_5 est l'analogie discret des cinq points de l'aplacien Δ , alors on a le problème :

Trouver $z_{2,h}$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta_5(z_{2,h})(M) + \alpha(z_{2,h})(M) = f(M) \\ z_{2,h} \setminus \partial\Omega_{2,h} \cap \partial\Omega = 0 \quad z_{2,h} \setminus \Gamma_{2,h} = u_{2,h} \end{cases} \quad (4.3)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1,h} &= \gamma_{1,h}(z_{2,h}) = z_{2,h} \setminus \Gamma_{1,h} \\ \mathbf{u}_{2,h} &= \tilde{r}_{2,h} \circ \gamma_2(z_{1,h}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.1.1 Application de point fixe discret associé au système (4.3) :

Sur Ω_1 , on considère tout d'abord :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{y}}_{1,h} \in V_{1,h}^{(0)} \text{ telle que :} \\ \mathbf{a}_1(\tilde{\mathbf{y}}_{1,h}, v_h) = (f, v_h)_i \quad \forall v_h \in V_{1,h}^{(0)} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Alors $\mathbf{w}_{1,h}$ sera une fonction sur $\Gamma_{1,h}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{1,h} \in V^{(p_h^1 w_{1,h})} \text{ telle que :} \\ \mathbf{a}_1(\mathbf{y}_{1,h}, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_{1,h}^{(0)} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Sur $\Omega_{2,h}$ on a $\tilde{\mathbf{y}}_{2,h} \in \Omega_{2,h}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_5(\tilde{\mathbf{y}}_{2,h})(M) + \alpha(\tilde{\mathbf{y}}_{2,h})(M) = f(M) \\ \tilde{\mathbf{y}}_{2,h}(M) = 0 \quad \forall M \in \partial\Omega_{2,h} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Alors \mathbf{w}_2 sera une fonction continue sur Γ_2 .

D'autre part, on a $\mathbf{y}_{2,h}$ défini sur $\Omega_{2,h}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_5(\mathbf{y}_{2,h})(M) + \alpha(\mathbf{y}_{2,h})(M) = f(M) \quad \forall M \in \partial\Omega_{2,h} \\ \mathbf{y}_{2,h}(M) = 0 \quad \forall M \in \partial\Omega_{2,h} \cap \partial\Omega \\ \mathbf{y}_{2,h}(M) = \tilde{r}_{2,h}(\mathbf{w}_2)(M) \quad \text{sur } \Gamma_{2,h} \end{array} \right. \quad (4.8)$$

On définit l'application linéaire suivante :

$$\bar{\mathbf{T}}_h = \{\bar{\mathbf{T}}_{1,h}, \bar{\mathbf{T}}_{2,h}\}$$

$\bar{\mathbf{T}}_{2,h}$ qui associé à $\mathbf{w}_{1,h}$:

$$\bar{\mathbf{T}}_{2,h}(\mathbf{w}_{1,h}) = \tilde{r}_{2,h} \circ \gamma_2(\mathbf{y}_{1,h}) \quad (4.9)$$

Avec

$$\gamma_2(\mathbf{y}_{1,h}) = \mathbf{y}_{1,h} \setminus \Gamma_2$$

$\bar{\mathbf{T}}_{1,h}$ qui associé à \mathbf{w}_2 :

$$\bar{\mathbf{T}}_{1,h}(\mathbf{w}_2) = \gamma_{2,h}(\mathbf{y}_{2,h}) = \mathbf{y}_{2,h} \setminus \Gamma_{1,h}$$

Alors l'application affine $\mathbf{T}'_h = \{\mathbf{T}'_{1,h}, \mathbf{T}'_{2,h}\}$ avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_{1,h}(\mathbf{w}_2) &= \bar{\mathbf{T}}'_{1,h}(\mathbf{w}_2) + \mathbf{t}_{1,h} \\ \mathbf{T}'_{2,h}(\mathbf{w}_{1,h}) &= \bar{\mathbf{T}}'_{2,h}(\mathbf{w}_{1,h}) + \mathbf{t}_{2,h} \end{aligned} \quad (4.10)$$

et

$$\begin{aligned} t_{1,h} &= \tilde{y}_{2,h} \setminus_{\Gamma_{1,h}} = \gamma_{1,h}(\tilde{y}_{2,h}) \\ t_{2,h} &= \tilde{y}_{1,h} \setminus_{\Gamma_{2,h}} = \tilde{r}_{2,h} \circ \gamma_2(\tilde{y}_{1,h}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Donc le système (4.3) est équivalent à :

Trouver un point fixe $\{\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{2,h}\}$ tel que :

$$\mathbf{u}_{i,h} = \mathbf{T}_{i,h}(\mathbf{u}_{j,h}) \quad (4.12)$$

et $\mathbf{z}_{1,h} \in \mathbf{V}^{(p_h^1 \mathbf{u}_{1,h})}$ tel que :

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{z}_{1,h}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{1,h}^{(0)}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_5(\mathbf{z}_{2,h})(M) + \alpha(\mathbf{z}_{2,h})(M) = \mathbf{f}(M) & \forall M \in \partial\Omega_{2,h} \\ \mathbf{z}_{2,h} \setminus_{\partial\Omega_{2,h} \cap \partial\Omega} = \mathbf{0} & \mathbf{z}_{2,h} \setminus_{\Gamma_{2,h}} = \mathbf{u}_{2,h} \end{cases} \quad (4.13)$$

Théorème 4.1.1 [6] Sous les hypothèses du problème (3.1) et les notations précédentes, il existe $\bar{h} > \mathbf{0}$ tel que pour tout $\mathbf{h} \leq \bar{h}, \mathbf{h} > \mathbf{0}$ le système admet une solution unique $\{\mathbf{z}_{1,h}, \mathbf{z}_{2,h}\}$ et \mathbf{z}_i sera la restriction de \mathbf{z} , solution du problème (2.1) à Ω_i .

Alors

$$\begin{cases} \| \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_{1,h} \|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq C h^2 | \log h | \\ \| \mathbf{z}_2 \setminus_{\Omega_{2,h}} - \mathbf{z}_{2,h} \|_{L^\infty(\Omega_{2,h})} \leq C h^2 | \log h | \end{cases} \quad (4.14)$$

Où C est une constante indépendante de \mathbf{h} .

La preuve est basée sur les lemmes suivants :

Lemme 4.1.1 Sous les hypothèses de problème (3.1) et les notations précédantes, $\forall \zeta > 0$, il existe une constante M_ζ et une fonction $\mathbf{h} \rightarrow \theta_1(\mathbf{h})$, avec $0 \leq \theta_1(\mathbf{h}) \leq M_\zeta \mathbf{h}^2 |\log \mathbf{h}| + \zeta$ telle que :

$$\| \bar{\mathbf{T}}_{j,h} \|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Gamma_{i,h}), L^\infty(\Gamma_{j,h}))} \leq \mathbf{q}_j + \theta_1(\mathbf{h}) \quad (4.15)$$

Où

$$\mathbf{q}_j = \| \bar{\mathbf{T}}_j \|_{\mathcal{L}(L^\infty(\Gamma_i), L^\infty(\Gamma_j))}$$

Preuve : $\bar{\mathbf{T}}_{2,h}$ est la même application que dans le cas du lemme (3.2.1), et $\bar{\mathbf{T}}_{1,h}$ est utilisé tel que la matrice associée aux cinq points usuels, est une M-matrice, on associe au problème (3.24) et aux problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \hat{\Psi}_i + \alpha \hat{\Psi}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \\ \hat{\Psi}_i = \hat{g}_i \quad \text{sur } \partial\Omega_i \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \check{\Psi}_i + \alpha \check{\Psi}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \\ \check{\Psi}_i = \check{g}_i \quad \text{sur } \partial\Omega_i \end{array} \right.$$

tels que $\hat{\Psi}_i, \check{\Psi}_i$ les solutions de ces deux dernières et \hat{g}_i, \check{g}_i deux fonctions de $C^\infty(\partial\Omega_j)$ vérifies :

$$\| \hat{g}_i - \check{g}_i \|_{L^1(\partial\Omega_i)} \leq \frac{\bar{\zeta}}{C}$$

pour $i = 2$ leurs analogue de différences finis et on obtient sur $\Omega_{1,h}$ l'analogue de l'inégalité :

$$\Psi_{ih} \geq \hat{\Psi}_{ih} \geq \check{\Psi}_{ih}$$

D'après les hypothèses de régularité, on obtient dans $L^\infty(\Omega_{i,h})$, $(\hat{\Psi}, \check{\Psi})$ sont restrictés dans $\Omega_{i,h}$ l'analogue de :

$$\| \hat{\Psi}_i - \hat{\Psi}_{ih} \|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq C_{\bar{\zeta}} h^2 | \log h |$$

$$\| \check{\Psi}_i - \check{\Psi}_{ih} \|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq C_{\bar{\zeta}} h^2 | \log h |$$

Où $C_{\bar{\zeta}}$ est une constante dépendant de $\bar{\zeta}$.

La suite de preuve est la même que dans le cas de lemme (3.2.1).

Lemme 4.1.2 D'après les hypothèses du lemme (4.1.1), $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ est la solution de (2.20), alors :

$$\| T'_{1,h}(\tilde{\mathbf{r}}_{2,h}(\mathbf{u}_2) - \tilde{\mathbf{r}}_{1,h}(\mathbf{u}_1)) \|_{L^\infty(\Gamma_{1,h})} \leq \theta_0(h) = Ch^2 | \log h | \quad (4.16)$$

$$\| T'_{2,h}(\tilde{\mathbf{r}}_{1,h}(\mathbf{u}_1) - \tilde{\mathbf{r}}_{2,h}(\mathbf{u}_2)) \|_{L^\infty(\Gamma_{2,h})} \leq \theta_0(h) = Ch^2 | \log h |$$

Preuve : On considère sur Ω_1 , le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_5(\bar{z}_{2,h})(M) + \alpha(\bar{z}_{2,h})(M) = f(M) \quad \forall M \in \partial\Omega_{2,h} \\ \bar{z}_{2,h} \setminus \Gamma_{2,h} = \tilde{\mathbf{r}}_{2,h} \mathbf{u}_2 \quad \bar{z}_{2,h} \setminus \partial\Omega_1 \circ \Gamma_{2,h} \end{array} \right. \quad (4.17)$$

et d'après les hypothèses de régularité, on obtient ici, par l'approximation classique L^∞ :

$$\| z_2 \setminus_{\Omega_{2,h}} - \bar{z} \|_{L^\infty(\Omega_{2,h})} \leq Ch^2 |\log h|$$

qui implique (4.16).

Pour $\mathbf{T}'_{2,h}$ qui supposé dans le chapitre (3).

$$p_h^2 \mathbf{T}'_{2,h} \tilde{r}_{1,h}^h \mathbf{u}_1 = \mathbf{T}_{2,h} \mathbf{u}_1$$

où $\mathbf{T}_{2,h}$ est la même que dans (3.2).

D'après le lemme (3.2.2), on sait que :

$$\| \mathbf{T}_{2,h}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{u}_2 \|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq \theta_0(\mathbf{h}) \quad (4.18)$$

Soit l'opérateur $\tilde{r}_{1,h}$ vérifie :

$$\| \tilde{r}_{2,h} \mathbf{T}_{2,h}(\mathbf{u}_1) - \tilde{r}_{2,h} \mathbf{u}_2 \|_{L^\infty(\Gamma_{2,h})} \leq \theta_0(\mathbf{h}) \quad (4.19)$$

Mais

$$\tilde{r}_{2,h} \mathbf{T}_{2,h} = \tilde{r}_{2,h} p_h^2 \mathbf{T}'_{2,h} = \mathbf{T}'_{2,h}$$

Donc, on obtient (4.16).

Preuve : du théorème (4.1.1) : Comme dans le cas de théorème (3.2.1), on peut choisir ici, par le lemme (4.1.1), $\bar{\mathbf{h}}$ tel que pour $\mathbf{h} \leq \bar{\mathbf{h}}$.

$$\| \bar{\mathbf{T}}_{j,h} \|_{l(L^\infty(\Gamma_{i,h}), L^\infty(\Gamma_{j,h}))} \leq \frac{1+q}{2} < 1 \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \max_{j \in (1,2)} \| \tilde{r}_{j,h}(\mathbf{u}_j) - \mathbf{u}_{j,h} \|_{L^\infty(\Gamma_{j,h})} &\leq \| \tilde{r}_{j,h} \mathbf{u}_j - \mathbf{T}_{j,h}(\tilde{r}_{i,h} \mathbf{u}_i) \|_{L^\infty(\Gamma_{j,h})} \\ &+ \| \mathbf{T}_{j,h}(\tilde{r}_{j,h} \mathbf{u}_i) - \mathbf{T}_{j,h}(\mathbf{u}_{i,h}) \|_{L^\infty(\Gamma_{j,h})} \\ &\leq \theta_0(\mathbf{h}) + l \max_{i \in (1,2)} \| \tilde{r}_{i,h}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{u}_{i,h} \|_{L^\infty(\Gamma_{i,h})} \end{aligned}$$

Donc :

$$\max_{j \in (1,2)} \|\tilde{r}_{j,h}(u_j) - u_{j,h}\|_{L^\infty(\Gamma_{j,h})} \leq \frac{2\theta_0(h)}{1-l}$$

On considérons maintenant le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1(\tilde{z}_{1,h}, v_h) = (f, v_h)_1 & \forall v_h \in V_{1,h}^0 \\ \tilde{z}_{1,h} \in V_{1,h}^{(u_1)} = V^{(p_h^1 \tilde{r}_1 u_1)} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_5(\tilde{z}_{2,h})(M) + \alpha(\tilde{z}_{2,h})(M) = f(M) & \forall M \in \partial\Omega_{2,h} \\ \tilde{z}_{2,h} \setminus_{\partial\Omega_{2,h} \cap \partial\Omega} = 0 & \tilde{z}_{2,h} \setminus_{\Gamma_{2,h}} = \tilde{r}_{2,h} u_2(M) \end{cases} \quad (4.21)$$

et on a les estimations suivantes :

$$\begin{cases} \|\tilde{z}_{1,h} - z_1\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \theta_0(h) \\ \|\tilde{z}_{2,h} - z_2 \setminus_{\Omega_{2,h}}\|_{L^\infty(\Omega_{2,h})} \leq \theta_0(h) \end{cases} \quad (4.22)$$

Donc :

$$\|z_1 - z_{1,h}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \|\tilde{z}_{1,h} - z_1\|_{L^\infty(\Omega_1)} + \|\tilde{z}_{1,h} - z_{1,h}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \quad (4.23)$$

$$\|z_2 \setminus_{\Omega_{2,h}} - z_{2,h}\|_{L^\infty(\Omega_{2,h})} \leq \|z_2 - \tilde{z}_{2,h}\|_{L^\infty(\Omega_{2,h})} + \|\tilde{z}_{2,h} - z_2 \setminus_{\Omega_{2,h}}\|_{L^\infty(\Omega_{2,h})}$$

D'après (4.22), (4.23) et l'hypothèse du principe de maximum, qui est validé pour les deux problèmes discrets distincts, on obtient finalement (4.20).

CONCLUSION

Dans tout les résultats, il est bien dit que dans le cas du théorème (3.2.1) de chapitre (3), comme dans le cas du théorème (4.1.1) nos résultats sont présentés dans le contexte des suppositions de régularité du système (2.1) qui donne un ordre d'approximation standard $h^2 | \log h|$ pour le problème de poisson .

Si ces hypothèses ne sont pas satisfaites, la méthodologie présentée ici est bien faite, à condition qu'on assure la convergence de $\theta_1(\mathbf{h})$ vers $\mathbf{0}$ en \mathbf{h} , mais ceci va conduire à une réduction de l'ordre de convergence donnée par cette méthodologie.

EXTENSION DU TRAVAIL

1. Expérimentation numérique pour un problème de poisson discrétisé par éléments finis et différences finis mixte (cas nomatching grid).
2. Méthode de décomposition en m -sous-domaines ($m > 2$), éléments finis - différences finis mixte.
3. Méthode de décomposition en deux sous-domaines éléments finis - différences finis mixte, pour un système d'équations elliptiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Krasnosel'skiï et Alt :**

Approximate solution of operator equation.

Walters Noordhoff, (1972).

[2] **P.G.Ciarlet, P.A.Raviart :**

Maximum principle and uniform convergence for the finite element method.

Comp.Math.in Appl.Mech, and Eng, 2, p. 1-20, (1973).

[3] **R.Glowinski :**

Numerical methods for linear variational problems, Springer-Verlag, New York,

(1984).

[4] **M.Boulbrachène, Ph.Cortey-Dumont, J.C.Miellou :**

La notion de α -contraction.

Applications, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 302, série I, n°16, (1986).

-
- [5] **M.Boulbrachène, Ph.Cortey-Dumont, J.C.Miellou :**
Approximation convergence for a subdomain decomposition method.
1er symposium international sur les méthode de sous-domaine, Paris, (1987).
- [6] **M.Boulbrachène, Ph.Cortey-Dumont PH.Miellou J.C :**
Mixing Finite Element and Finite Differences in a Subdomain Method.
In Domain decomposition methods SIAM, Philadelphia, (1988).
- [7] **M.Dryja :**
An additive Schwarz algorithm for two-and three-dimensional finite element elliptic problems, in T.Chan et al.eds, domain decomposition methods, philadephia, (1989), SIAM, pp.168-172.
- [8] **M.Dryja and O.Widlund :**
Some domain decomposition algorithms for elliptic problems in L. Hayes and D. Kincaid, eds, Iterative methods for large systems, Boston, (1990), Academic Press, pp.273-291.
- [9] **J.Bramble, J.Pascial, J.wang and J.xu :**
Convergence estimates for product iterative methods with applications to damain decomposition, math.Comp, 57 (1991), pp.1-21.
- [10] **T.Chan, T.Hou and P.Lions :**
Geometry relate 28 (1991), pp.378-391.d convergence results for domain decomposition algorithms, SIAM. J.Numer. Anal.
- [11] **XIAO-Chuan CAI,TAREK P.MATEW, and MACUS VSAKIS :**
Maximum nom analysis of overlapping non-mathing grid discretisations of elliptic equation .SIAMJ.NUMER ANAL (2000) No.5, pp.1709-1728.