الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد الطارف-
Université Chadli Bendjedid-El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de mathématiques

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématique

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Calcule Stochastique

Thème

Existance de solution d'un problème elliptique engendré par l'opérateur p-Laplacien

Présenté par :

Boudjema Inesse

Devant le jury :

Dr. Boussaha Hanen	**MCB**	Univ Chadli Bendjedid-El Tarf	Présidente
Dr. Bounoula Amina	**MCB**	Univ Chadli Bendjedid-El Tarf	Rapporteur
Dr. Bouaziz Asma	**MCB**	Univ Chadli Bendjedid-El Tarf	Examinateur

Année universitaire : 2021/2022

Remerciements

Avant tout je remercie Allah le tout puissant, de m'avoir guidée toutes ces années d'études et nous avoir données la volonté, la patience et le courage pour terminer notre travail.

Nous voudrons tout d'abord exprime notre profonde reconnaissance à Dr « Bounouala Amina » ma promotrice, qui diriger notre travail, ses conseils et ses commentaires précieux nous ont permis de surmonter nos difficultés et de se progresser dans notre mémoire de fin d'étude.

En suite nous tenons à remercier les membres du jury Dr « Bouaziz Asma » et Dr « Boussaha Hanen » qui nous fait l'honneur d'accepter de lire ce mémoire et de l'évaluer.

Nous adressons aussi nos vifs remerciements à tous nos enseignants (es) et à tout membre de département Mathématique de la faculté des Sciences et de Technologie.

Je tiens a remercier chaleureusement, toute ma famille, tous mes collèges et mes proches. Merci pour tous les gens qui ont contribué de prés ou de loin dans la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À *mes parents pour leur amour, leur vigilance et leur sacrifices*

pour le bien de mon éduction et m'avoir conduit au plus haut niveau

Merci pour tout ce que vous avez fait pour moi

À *tous ceux avec qui les jours nous ont réunis*

A *toute la famille « Boudjema »*

À *tous mes professeur*

À *toute la promo Mathématique*

A *tous les étudiants en Mathématique*

INESSE

ملخص

في هذا العمل نثبت وجود حل لمشكلة من النوع p-laplacien.

حيث X هو فضاء انعكاسي منتظم الذي يحقق خاصية Kadec-Klee ويقبل التمديد في فضاء بناخ V. ونضع G تحليل دالي $G : V \to \mathbb{R}$ لحل هذه المشكلة نستعمل نظرية كول، كما هناك طرق أخرى لحل مثل هذه المشكلات وهو نظرية فونتان Fountain وثنائي نظرية فونتان Fountain .

الكلمات المفتاحية

نظرية كول، تطبيق ثنائي، خاصية Kadec-Klee ، فضاء أورليش سوبوليف.

RESUME

Soit X un espace de Banach régulier réflexif vérifier la propriété de Kadec-Klee, qui s'injecte dans un espace de Banach réel V et soit $G : V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable.

En utilisant la version Z_2 du théorème de Col, La multiplicité des solutions d'opérateurs-équations $J_\varphi u = G'(u)$, où J_φ est une application duale sur l'espace des applications X, correspondante à la fonction de gauge φ à été étudie, en utilisant respectivement le "théorème de Fountain" et le "duale du théorème de Fountain", respectivement, les équations de la forme ci dessus avec J_φ est une application de dualité sur les espaces d'Orlicz-Sobolev.

Mots clés

Théorème du Col, Application duale, Propriété de Kadec-Klee, Espace Orlicz-Sobolev.

ABSTRACT

Let X be a reflexive smooth Banach space having the Kadec-Klee property, compacity unbedded in a real Banach space V and let $G : V \to \mathbb{R}$ a differentiable functional.

By using the Z_2-version of the Mountain pass theorem, the multiplicity of solutions to operator equation $J_\varphi u = G'(u)$, where J_φ is the duality mapping on X, corresponding to the gauge function φ is studied, by using the "Fountain theorem" and the "dual Fountain theorem", respectively, equations of the above form with J_φ a duality mapping on Orlicz-Sobolev spaces.

Key words

Mountain pass theorem, Duality mapping, The Kadec-Klee property, Orlicz-Sobolev space.

TABLE DES MATIÈRES

Notations

- Ω : Ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- $\partial\Omega$: Frontière de Ω.
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ Gradient de u.
- $\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$: p-Laplacien de u.
- Δu Laplacien de u.
- $\| \, . \, \|_X$: Norme dans l'espace X.
- $\langle ., . \rangle$: Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$/ Crochet de dualité X, X'.
- X^* : Espace dual de X.
- $\setminus$: Différence d'ensemble.
- p' :Exposent conjugué de $p, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
- $p^* = \frac{Np}{(N-p)}$: Exposent critique de Sobolev.
- $(ps)_c$: Condition de Palais-Smale.

INTRODUCTION GÉNÉRALE :

L'opérateur p-Laplacien est un modèle d'opérateurs elliptiques quasi-linéaires qui permet de modéliser des phénomènes physiques tels que l'écoulement des fluides non-Newtoniens, les systèmes de réaction-diffusion, l'élasticité non-linéaire, extraction de pétrole, l'astronomie, la propagation à travers des milieux poreux. A titre d'exemple dans les années 70 M.C. Pélissier modélise l'écoulement des glaciers de montagne par des équations aux dérivées partielles faisant intervenir le p-Laplacien
Cet opérateur sous forme divergence est défini par

$$\Delta pu := div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$$

Il est dégénéré lorsque

$$p \neq 2$$

et équivalent à l'opérateur de Laplace usuel lorsque

$$p = 2.$$

Il apparaît dans de nombreux contextes, citons par exemple

- le problème non-linéaire

$$\Delta pu + \lambda |u|^{p-2} u = 0$$

- l'équation de p-Poisson

$$\Delta pu = f(x)$$

-Les équations de la forme

$$\Delta pu + |u|^{\alpha} u = 0$$

qui présentent notamment un interêt particulier lorsque l'exposant α est "critique".

- les équations paraboliques de type

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta pv$$

où $v = v(x,t)$.

L'objectif de ce travail est l'étude du problème aux valeurs propres non-linéaire de type suivant :

$$\begin{cases} J_p u = \sum \lim_{|p| \leq m} (-1)^p D^p g_p(x, D^p u), \text{dans } \ \Omega \\ \qquad D^p u, \text{ dans } \ \partial\Omega \text{ tel que } \ |\alpha| \leq m-1 \end{cases}$$

Il s'agit de trouver l'existence et la multiplicité des solutions faibles u . Pour cela, nous utilisons des méthodes variationnelles et plus précisément la théorie des points critiques (théorème du Col) qui occupe une place importante dans le vaste champ de l'analyse non-linéaire. Notre travail est organisé de la manière suivante Dans le premier chapitre, nous commençons par rappeler quelques notions et résultats de base sur les espaces de Sobolev et quelques éléments de la théorie des points critiques qui seront utilisés tout au long de ce travail. Dans la seconde partie, nous étudions l'existence d'une suite infinie de valeurs critique du notre problème.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET OUTILS DE BASE

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E et on la note $\| \, . \, \|$ toute application définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifier :*

1. $\| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$.
2. $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \forall x, y \in E$ *(L'inégalité triangulaire)*

Le couple $(E, \| \, . \, \|)$ est appelé espace vectoriel normé

Définition 1.2. *Un espace normé $(E, \| \, . \, \|)$ est complet si toute suite de Cauchy dans E converge vers un point dans E.*

On appelle espace de Banach tout espace normé complet

Définition 1.3. ***(L'injection continue)*** *Soit $(X, \| \, . \, \|_X)$ et $(Y, \| \, . \, \|_Y)$ deux espace de Banach, on dit que X s'injecte continûment dans Y et on* *écrit* $X \hookrightarrow Y$ *si :*

$$\begin{cases} X \subset Y \\ et \\ \text{il existe une constante } c > 0 \text{ tel que } \parallel f \parallel_Y \leq c \parallel f \parallel_X, \ \forall f \in X. \end{cases}$$

Définition 1.4. ***(La réflexivité)*** *Un espace de Banach* E *est réflexif lorsque l'injection canonique* π *est surjective c'est-à-dire :* $\pi(E) = E^{**}$*, où* π *est définie par :*

$$\pi : E \to E^{**}$$
$$x \mapsto \pi(x)$$

avec $\pi(x)(f) = f(x)$, $\forall x \in E$.

Définition 1.5. ***(Fonction différentiable)***

Soit f *une fonction définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^p$ *et soit* a *un point de* U*, on dit que* f *est différentiable au point* a *s'il existe une application linéaire* L *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$ *telle que :*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + (\parallel h \parallel).$$

L'application L *si elle existe, est unique et s'appelle la différentielle de* f *au point* a*, et on le note* df_a.

Définition 1.6. ***(L'espace dual)***

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ *un corps,* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, on appelle forme linéaire sur* E *toute application linéaire de* E *vers* $\mathbb{K}$*, c'est à dire toute application*

$\phi : E \to \mathbb{K}$ *telle que :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \phi(\lambda x + y) = \lambda \phi(x) + \phi(y).$$

L'ensemble $L(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dit espace dual de E, il est noté E^* si ϕ est un élément de E, on écrit $\langle \phi, x \rangle$ pour $\phi(x)$, cette notation désigne le crochet de dualité.

Le crochet de dualité est la forme bilinéaire non dégénérée :

$$\langle , \rangle : E^* \times E \to \mathbb{K},\ \langle \phi, x \rangle \to \langle \phi, x \rangle := \phi(x).$$

La condition-Δ_2

La condition-Δ_2 est une condition de croissance sur les fonctions d'Orlicz. Elle joue un rôle très important dans l'étude de la géométrie des espaces d'Orlicz.

Définition 1.7. *Une fonction d'Orlicz ϕ satisfait :*

1) *La condition-Δ_2 globalement ($\phi \in \Delta_2$), s'il existe $k > 2$ et $x_0 > 0$ tel que,*

$$\phi(2x) \leq k\phi(x), \quad \forall x > 0.$$

2) *La condition-Δ_2 à l'infini ($\phi \in \Delta_2(\infty)$), s'il existe $k > 2$ et $x_0 > 0$ tel que,*

$$\phi(2x) \leq k\phi(x), \quad \forall x \geq x_0.$$

3) *La condition-Δ_2 au voisinage de zéro ($\phi \in \Delta_2(0)$), s'il existe $k > 2$ et $x_0 > 0$ tel que,*

$$\phi(2x) \leq k\phi(x), \quad \forall x \leq x_0.$$

Évidement, $\phi \in \Delta_2$ si et seulement si :

$$\phi \in \Delta_2(\infty) \quad et \quad \phi \in \Delta_2(0).$$

1.2 Espace d'Orlicz Sobolev

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue μ et $M(\Omega)$ l'ensemble des fonctions μ-mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.8. ***(Modulaire d'Orlicz)***
La fonctionnelle,

$$\begin{aligned}\rho_\phi : M(\Omega) &\to [0,\infty[\\ f &\mapsto \rho_\phi(f) = \int_\Omega \phi(f(x))d\mu\end{aligned}$$

est une modulaire convexe sur $M(\Omega)$, dite modulaire d'Orlicz.

Définition 1.9. ***(Classe d'Orlicz)***
On appelle classe d'Orlicz l'ensemble des fonctions $f \in M(\Omega)$ vérifiant

$$\int_\Omega \phi(f(x))d\mu < \infty$$

on note $\overset{\circ}{L}_\phi(\Omega)$ la classe d'Orlicz, c'est à dire :

$$\overset{\circ}{L}_\phi(\Omega) = \left\{ f \in M(\Omega) \text{ telle que } \int_\Omega \phi(f(x))d\mu < \infty \right\}$$

- On définit l'espace d'Orlicz $E_\phi(\Omega)$ comme suit :

$$E_\phi(\Omega) : \{f \in M(\Omega) : \rho_\phi(\lambda f) < \infty \text{ pour chaque } \lambda > 0\}.$$

- On définit l'espace d'Orlicz $L_\phi(\Omega)$ a :

$$\begin{aligned} L_\phi(\Omega) : & \Big\{ f \in M(\Omega), \text{ tel que } \exists \lambda > 0 : \lambda f \in \overset{\circ}{L}_\phi(\Omega) \Big\} \\ & = \Big\{ f \in M(\Omega) \text{ telle que, } \int_\Omega \phi(f(x)) d\mu < \infty \text{ pour certain } \lambda < 0 \Big\}. \end{aligned}$$

Définition 1.10. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ et ϕ une fonction de Young. L'espace d'Orlicz Sobolev $W^{m,\phi}(\Omega)$ est l'ensemble de toute les (classes d'équivalence de fonctions $u \in L_\phi(\Omega)$ dont les dérivées au sens des distribution $D^\alpha u$ sont aussi dans $L_\phi(\Omega)$ pour tout α tel que $|\alpha| \leq m$.*

L'espace $W^{m,\phi}(\Omega)$ muni de la norme

$$\| u \|_{m,\phi} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_\phi .$$

est un espace de Banach.

Définition 1.11. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et Φ une fonction de Young, on définit les espaces d'Orlicz-Sobolev d'ordre un générés par Φ et notés $W^1 L_\Phi(\Omega)$ et $W^1 E_\Phi(\Omega)$ par :*

$$W^1 L_\Phi(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_\Phi(\Omega), \forall i = 1, N \Big\}$$

$$W^1 E_\Phi(\Omega) = \Big\{ u \in E_\Phi(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in E_\Phi(\Omega), \forall i = 1, N \Big\}$$

Où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, N$, sont les N dérivées partielles d'ordre un, au sens des distributions de u. En identifiant $W^1 L_\Phi(\Omega)$ (respectivement $W^1 E_\Phi(\Omega)$) à un sous espace de l'espace produit $(L_\Phi(\Omega))^{N-1} = \Pi L_\Phi$ par l'application $P : u \to Pu = (u, \frac{\partial}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$, on déduit les propriétés de base de ces espaces a *partire de celles correspondantes aux espaces d'Orlicz et sont résumées dans la proposition suivante.*

Proposition 1.1. *On a les principales propriétés des Sobolev-Orlicz suivantes :*

1. $W^1L_\Phi(\Omega)$, *muni de la norme :* $\| u \|_{1,\Phi} = \| u \|_\Phi + \| \nabla u \|_\Phi$, *est un espace de Banach.*
2. $(W^1E_\Phi(\Omega), \| u \|_{1,\Phi})$ *est un espace fermé de* $(W^1L_\Phi(\Omega), \| u \|_{1,\Phi})$.
3. $W^1E_\Phi(\Omega) = W^1L_\Phi(\Omega)$ *si et seulement si* Φ *vérifie la* Δ_2*-condition.*
4. $W^1E_\Phi(\Omega)$ *est séparable.*
5. $W^1L_\Phi(\Omega)$ *et réflexif si et seulement si* Φ *et* Ψ *vérifient la* Δ_2*-condition.*

Définition 1.12. ***(N-fonction)***

Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une N-fonction si* A *est continue convexe et vérifiant :* $A(t) > 0$ *pour* $t > 0$ *et* $\dfrac{A(t)}{t} \to 0$ *(resp.* $\to +\infty$*) lorsque* $t \to 0$ *(resp* $t \to \infty$*).*

Ce qui est équivalent à dire que A *admet la représentation*

$$A(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau.$$

où $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est croissante, continue à droite telle que :*

$$\begin{cases} a(0) = 0, & \\ a(t) > 0 & si\ t > 0, \\ a(t) \to +\infty & si\ t \to +\infty. \end{cases}$$

Définition 1.13. ***(p-laplacien)***

L'opérateur p-Laplacien est un opérateur différentiel partiel elliptique quasi-

linéaire tel que $1 < p < \infty$, il on écrit :

$$\Delta_p u = div\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big).$$

où $|\nabla u|^{p-2}$ est définit comme suit :

$$|\nabla u|^{p-2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]^{\frac{p-2}{2}}$$

Définition 1.14. ***(Fonction de Young)***
Une fonction de Young ϕ est vérifier la Δ_2-condition (on écrit $\phi \in \Delta_2$), s'il existe $k > 0$, et $T \geq 0$ telles que :

$$\phi(2t) \leq k\phi(t), \quad \forall t \geq T.$$

Définition 1.15. ***(Fonction de Carathéodory)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Une fonction f de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite de Carathéodory, si elle vérifie :

1 L'application : $t \to f(x,t)$ est continue p.p. $x \in \Omega$

2 L'application : $x \to f(x,t)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.16. ***(Fonction semi-continue inférieurement (s.c.i))***
Soit J une fonction définie sur un espace de Banach X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Est dite faiblement semi continue inférieurement (s.c.i) en x si pour toute suite $\{x_n\}$ telle que x_n converge faiblement vers x, $(x_n \rightharpoonup x)$ on a :

$$J(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(x_n).$$

Définition 1.17. ***(Condition de Palais-Smale)***
Soit X un espace de Banach et $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(X)$. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau $c \in \mathbb{R}$) si de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que

$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'(u_n) \to 0 \text{ dans } X',$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarque 1.1. *La condition de Palais-Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite, celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façons utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.*

Théorème 1.1. ***(Théorème de Col [23])***
Soit X un espace de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ et $r > 0$ tels que $\| e \| > r$ et

$$b := \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(e).$$

si φ satisfait la condition $(PS)_c$ avec

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)),$$
$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\},$$

alors c est une valeur critique de φ.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec $M = [0, 1]$, $M_0 = \{0, 1\}$, $\Gamma_0 = \{\gamma_0\}$, $\gamma_0(0) = 0$ et $\gamma_0(1) = e$. □

Définition 1.18. *Soient V une partie d'un espace de Banach X et $F : V \to \mathbb{R}$. Si $u \in V$, on dit que F est dérivable au sens de Gâteaux (ou G-Différentiable en u), s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction z où $F(u+tz)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $F'_z(u)$ existe et on a :*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u+tz) - F(u)}{t} = \langle l, z \rangle.$$

On posera $F'(u) = l$.

L'espace de toutes les fonctionnelles dérivables au sens de Gâteaux sur un espace de Banach X est noté $C^1(X, \mathbb{R})$.

Définition 1.19. ***(Gradient de Gâteaux)***

X un ensemble non vide quelconque, soit f une fonction de u dans $]-\infty, +\infty[$ de domaine non vide, u^* est le dual de u, et $u \in Dom f$. Nous rappelons $\nabla f(x) \in u^*$ le gradient de f en X.

Définition 1.20. ***(Fonction de classe C^1)***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1, si f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

Définition 1.21. ***(L'exposant critique de Sobolev)***

Nous définissons l'exposant critique de Sobolev de $p(x)$ par

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)} & si\ p(x) < N \\ +\infty & si\ p(x) \geq N \end{cases}.$$

Définition 1.22. *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on appelle exposant conjugué de p, le nombre réel q vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*

Lemme 1.1. ***(Inégalité de Young)***
Soit $a, b > 0$ *et* $1 \leq p, q \leq \infty$*, tel que :* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Alors :*

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}.$$

Définition 1.23. ***(Proposition de Kadec-Klee)***
Soit X *un espace de Banach, possède la propriété de Kadec-Klee si pour tout* $x \in X$ *et* $\{x_n\}$ *est une suite dans* X *telle que* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement et* $\| x_n \| \to \| x \|$*, alors* $x_n \to x$*.*

Définition 1.24. ***(Fonction de gauge)***
Une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est dite une fonction de gauge si* φ *est continue, strictement croissante qui vérifier* $\varphi(0) = 0$ *et* $\varphi(t) \to \infty$ *comme* $t \to \infty$*.*

Définition 1.25. ***(Forme bilinéaire)***
E *est un espace vectoriel sur un corps* K*.*

Une application

$$b : E \times E \to \mathbb{K}$$

est appelée une forme bilinéaire quand

$$\forall x_1, x_2, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad b(x_1 + \lambda x_2, y) = b(x_1, y) + \lambda b(x_2, y)$$
$$\forall x, y_1, y_2 \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad b(x, y_1 + \lambda y_2) = b(x, y_1) + \lambda b(x, y_2)$$

On dit que b *est symétrique si*

$$\forall x, y \in E \quad b(x, y) = b(y, x).$$

CHAPITRE 2

SOLUTION MULTIPLES DES ÉQUATIONS-OPÉRATEURS IMPLIQUANT DES APPLICATIONS DE DUALITÉ

Soit X un espace de Banach régulier réflexif vérifier la propriété de Kadec-Klee, tel que l'espace X s'injecte dans un espace de Banach réel V et soit $G : V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable, en utilisant la version Z_2 du théorème de Col, pour démontrer nos résultats.

2.1 Introduction

Dans cet travail, on étudie les équations de type

$$J_\varphi u = G'(u), \tag{2.1}$$

où

(i) X est un espace de Banach réel réflexif et régulière vérifier la propriété de Kadec-Klee, tel que l'espace X s'injecte dans l'espace de Banach réel V (l'injection est compacte).

(ii) $J_\varphi : X \to X^*$ est une application de dualité correspondante à la fonction de gauge φ (voir définition 1.24, ci dessus).

(iii) $G' : V \to V^*$ est la différentielle de la fonction $G : V \to \mathbb{R}$. On note X^* (resp. V^*) l'espace dual de X (resp. V) et $\langle .,. \rangle_{X,X^*}$ (resp. $\langle .,. \rangle_{V,V^*}$) le crochet de dualité entre X^* et X (resp. V^* et V).

Notre approche variationnelle, utilisée dans ce travail est la version-Z_2 du théorème du Col (due à Rabinowitz[17]).

Les équations de la forme (2.1) avec J_φ est une application de dualité sur les espaces d'Orlicz-Sobolev, sont considérées comme des applications, comme cas particulière de ces résultats, certain résultat de multiplicité concernent les applications de dualité sur les espaces de Sobolev.

De plus, ces résultats s'appliquent à des nombreux opérateurs différentiels qui sont en fait des applications de dualité sur certains espaces appropriés de fonctions (par exemple, si $\Delta_p, 1 < p < \infty$, est le p-Laplacien, alors $-\Delta_p$ est l'application de dualité sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ correspondant à la fonction de gauge $\varphi(t) = t^{p-1}, t \geq 0$).

2.2 Résultat principale

Théorème 2.1. *Soit X un espace de Banach régulier réflexif réel vérifier la propriété de Kadec-Klee et s'injecte dans un espace de Banach réel V (l'injection est compacte).*
Soit $H \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonctionnelle paire de la forme

$$H = \Psi - G. \tag{2.2}$$

où :

(i) $\psi(u) = \Phi(\| u \|)$ *pour tout* $u \in X$

$$\phi(t) = \int_0^t \varphi(\xi) d\xi, \ \forall t \geq 0, \tag{2.3}$$

$\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *étant une fonction de gauge qui vérifie :*
$p^* = \sup_{t>0} \dfrac{t\varphi(t)}{\phi(t)} < \infty,$

(ii) $G : V \to \mathbb{R}$ *satisfait :*

a) $G(0) = 0,$

b) $G' : V \to V^*$ *est semi-continue,*

c) il existe une constante $\theta > p^*$ *telle que pour quelque* $y \in V$,

$$\langle G'(y), y\rangle_{V,V^*} - \theta G(y) \geq C, \tag{2.4}$$

(iii) il existe $c_0 > 0$ *tel que pour tout* $u \in X$ *avec* $\| u \|_X < c_0$ *on ait*

$$H(u) > c_1 \| u \|_X^p - c_2 \| i(u) \|_V^q, \tag{2.5}$$

où i *représente l'injection compacte de* X *dans* V *tel que* $0 < p < q$ *et* $c_1 > 0, c_2 > 0,$

(iv) pour tout sous espace de dimension fini $X_1 \subset X$, *il existe des constantes* $d_0 > 0$, $d_1, d_2 > 0$, $d_3, s > 0$ *et* $r < s$ *(généralement dépendant de* X_1*) telles que*

$$H(u) \leq d_1 \| u \|_X^r - d_2 \| u \|_X^s + d_3, \tag{2.6}$$

pour tout $u \in X_1$ *avec* $\| u \|_X > d_0$.

Alors la fonctionnelle H *possède une suite infinie de valeurs critiques.*

Avant de démontrer le théorème 2.1, nous listons quelques résultats qu'on a besoins dans la suite.

Premièrement, on rappelle qu'un espace de Banach réel X est dit régulière s'il possède la propriété suivante : pour tout $x \in X$, $x \neq 0$, il existe une unique $u^*(x) \in X^*$ tel que $\langle u^*(x), x\rangle =\| x \|_X$ et $\| u^*(x) \|_{X^*}= 1$, il est bien connu (voir par exemple [8], [22]) que la régularité de X est équivalente a la dérivabilité de Gâteaux de la norme. Par conséquent, si $(X, \| \, . \, \|_X)$ est régulier pour tout $x \in X$, $x \neq 0$. Le seul élément $u^*(x) \in X^*$ avec les propriétés $\langle u^*(x), x\rangle =\| x \|_X$ et $\| u^*(x) \|_{X^*}= 1$ est $u^*(x) =\| \, . \, \|'_X (x)$ (où $\| \, . \, \|'_X (x)$ désigne le gradient de Gâteaux de la norme $\| \, . \, \|_X$ en x).

Définition 2.1. *Si X est un espace réel régulier de Banach et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de gauge. L'application de dualité sur X, correspondant à φ est l'application $J_\varphi : X \to X^*$ définie par*

$$J_\varphi(0) = 0, \quad J_\varphi x = \varphi(\| x \|_X) \| \, . \, \|'_X (x) \quad \text{si } x \neq 0. \tag{2.7}$$

Les propriétés métrique suivante sont des conséquences de la définition 2.1 :

$$\| J_\varphi x \|_{X^*}= \varphi(\| x \|_X), \quad \langle J_\varphi x, x\rangle = \varphi(\| x \|_X) \| x \|_X, \quad \forall x \in X. \tag{2.8}$$

pour plus de propriétés des applications de dualités voir [6], [9], [22].

Pour énoncer le résultat suivant, on rappelle que si X est un espace réel de Banach et $H \in C^1(X, \mathbb{R})$ on dit que H satisfait la condition de Palais-Smale en X, (si toute suite $(u_n) \subset X$ avec $(H(u_n))$ borné et $H'(u_n) \to 0$ comme $n \to \infty$, possède une sous suite convergente).

Théorème 2.2. *(RabinowitZ [17, théorème 9.12]) Soit X un espace de Banach réel de dimension infinie, supposons que $H \in C^1(X, \mathbb{R})$ est pair, satisfait* *la condition (PS) et $H(0) = 0$, si*

(G_1) *il existe $\rho > 0$ et $r > 0$ tel que $H(u) \geq r$ pour $\| u \| = \rho$;*

(G_2) *pour chaque sous espace de dimension finie X_1 de X l'ensemble $\{u \in X_1 |\, H(u) \geq 0\}$ est borné, alors H possède une suite non borné de valeurs critiques.*

Maintenant, on peut commencer la preuve du théorème 2.1. L'idée est que les hypothèses du théorème 2.1 entraînent celles du théorème 2.2.

Proposition 2.1. *Soit X un espace de Banach régulier réflexif vérifie la propriété de Kadec-Klee et s'injecte dans un espace de Banach réel V (l'injection compacte). Soit $H \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonctionnelle de la forme*

$$H = \psi - G, \tag{2.9}$$

où :

i) $\psi(u) = \phi(\| x \|)$ en tout $u \in X$ avec

$$\phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds, \quad \forall t \geq 0,$$

et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ étant une fonction du gauge qui satisfait

$$\sup_{t>0} \frac{t\varphi(t)}{\phi(t)} = p^* < \infty,$$

ii) $G : V \to \mathbb{R}$ satisfait :

(a) $G' : V \to V^*$ est semi-continue,

(b) il existe une constante $\theta > p^*$ telle que

$$\langle G'(y), y\rangle_{Y,Y^*} - \theta G(y) \geq C = const, \quad \forall y \in V. \tag{2.10}$$

Alors H satisfait la condition (PS).

Démonstration. Il est clair que, sous les hypothèses du théorème 2.1, le fait que H satisfait la condition (PS) est une conséquence direct de la proposition 2.1.

Nous allons montrer que l'hypothèse (G_1) du théorème 2.2 est satisfaite.

En effet, comme $\| i(u) \|_V \leq c \| u \|_X, \ \forall x \in X$, il résulte de (2.5) que

$$H(u) > \| u \|_X^p .(c_1 - c_2 c^q \| u \|_X^{q-p}).$$

pour tous $u \in X$ avec $\| u \|_X < c_0$. Donc,

$$\| u \|_X = \rho \leq \min \left(c_0, \left(\frac{c_1}{2c^q c_2} \right)^{\frac{1}{q-p}} \right),$$

on a

$$H(u) > \frac{C}{2}\rho^p > 0,$$

c'est à dire que, l'hypothèse (G_1) du théorème 2.2 est satisfaite avec $r = \dfrac{C}{2}\rho^p$.

D'autre part, soit X_1 un sous espace de dimension finie de X, nous allons montrer que l'ensemble $S = \{u \in X_1 | \ H(u) \geq 0\}$ est borné.

En effet, d'après (2.6), si

$u \in S, \ \| u \|_X > d_0$ alors

$$d_1 \| u \|_X^r - d_2 \| u \|_X^s + d_3 \geq 0. \tag{2.11}$$

comme $s > r$, on conclut que S est borné, donc l'hypothèse (G_2) du théorème 2.2 est vérifier. □

2.3 Applications aux espace OrlicZ-Sobolev

Dans cette section on note Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire strictement croissante avec $\lim_{t\to+\infty} a(t) = +\infty$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ notons $W_0^m E_A(\Omega)$. L'espace d'Orlicz-Sobolev noté par N-fonction A, défini par

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds. \tag{2.12}$$

On supposera toujours que

$$\lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+1}{N}}} d\tau < \infty, \tag{2.13}$$

on remplaçant, si nécessaire A par une autre N-fonction équivalente à A proche de l'infinie (qui détermine le même espace d'Orlicz).

Supposons aussi que

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+1}{N}}} d\tau = \infty. \tag{2.14}$$

Avec (2.14) satisfait, on définit le conjugué de Sobolev A_* de A en posant (2.15)

$$A_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+1}{N}}} d\tau, \quad t > 0. \tag{2.15}$$

L'existence et multiplicité des solutions faibles au problème des valeurs limites

$$J_a u = \sum_{|\alpha|<m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g_\alpha(x, D^\alpha u) \text{ en } \Omega. \tag{2.16}$$

$$D^\alpha u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad |\alpha| \leq m-1, \tag{2.17}$$

est étudié dans cette section dans le cadre fonctionnel suivant

- $T[u,v]$ est une forme bilinéaire symétrique positive dans l'espace d'Orlicz-Sobolev $W_0^m E_A(\Omega)$, qui impliquent les dérivées d'ordre m des fonctions $u, v \in W_0^m E_A(\Omega)$, qui satisfait :

$$c_1 \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u)^2 \leq T[u,u] \leq c_2 \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u)^2, \quad \forall u \in W_0^m L_A(\Omega), \tag{2.18}$$

avec c_1, c_2 constantes positives,

- $\| \ u \ \|_{m,A} = \| \ \sqrt{T[u,u]} \ \|_{(A)}$ est une norme sur $W_0^m E_A(\Omega), \| \ . \ \|_{(A)}$ il désigne la norme de Luxemburg sur l'espace d'Orlicz $L_A(\Omega)$.

- $J_a : (W_0^m E_A(\Omega), \| \ . \ \|_{m,A}) \to (W_0^m E_A(\Omega), \| \ . \ \|_{m,A})^*$ est l'application de dualité sur $(W_0^m E_A(\Omega), \| \ . \ \|_{m,A})$ subordonné à la fonction de gauge a,

- $g_\alpha : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|\alpha| < m$, sont des fonction Carathéodory vérifiant les hypothèses $(\mathrm{H})_1$ et $(\mathrm{H})_2$ ci-dessous :

$(\mathrm{H})_1$ il existe des N-fonction M_α, $|\alpha| < m$, qui décroit, plus précisement A_* proche de l'infini.

$$|g_\alpha(x,s)| \leq c_\alpha(x) + d_\alpha \overline{M}_\alpha^{-1}(M_\alpha(s)), \quad x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},\ |\alpha| < m, \tag{2.19}$$

où $\overline{M}_\alpha$ sont les N-fonctions complémentaires de $M_\alpha, c_\alpha \in K_{\overline{M}_\alpha}$ et d_α sont constantes positives ;

$(\mathrm{H})_2$ pour tout α avec $|\alpha| < m$, il existe donc $s_\alpha > 0$ et $\theta_\alpha > p^* = \sup_{t>0} \dfrac{ta(t)}{A(t)}$ tel que

$$0 < \theta_\alpha G_\alpha(x,s) \leq s g_\alpha(x,s). \tag{2.20}$$

pour a.e $x \in \Omega$ et tout s avec $|s| \geq s_\alpha$, où

$$G_\alpha(x,s) = \int_0^s g_\alpha(x,\tau)d\tau \tag{2.21}$$

Supposons aussi que

(H)$_3$ La fonction $\dfrac{a(t)}{t}$ est décroissante sur $(0,+\infty)$, (2.13) et (2.14) soit satisfait.

D'après la solution (faible) du problème (2.16), (2.17) on peut trouver la solution de l'équation

$$J_\alpha u = G'(u) \tag{2.22}$$

dans le cadre fonctionnel suivante :

i) $X = W_0^m E_A(\Omega)$ normé avec $\| \ . \ \|_{m,A}$ $V = \cap_{|\beta|<m} W^{m-1} L_{M_\beta}(\Omega)$ normé avec la norme

$$\| \ u \ \|_V = \sum_{|\beta|<m} \| \ u \ \|_{W^{m-1}} \ L_{M_\beta}(\Omega);$$

ii) J_a est l'application de dualité sur $(W_0^m E_A(\Omega), \| \ . \ \|_{m,A})$ correspondant à la fonction de gauge a ;

iii) $G' : V \to V^*$ est la différentielle de la fonctionnelle $G : V \to \mathbb{R}$;

$$G(u) = \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega G_\alpha(x, D^\alpha u(x))dx, \quad u \in V.$$

D'après [11, proposition 6.2], X est s'injecte dans V pour appliquer le théorème 2.1.

Proposition 2.2. *Soit X un espace de Banach réflexive réel, qui s'injecte dans Z (Z est un espace de Banach réel). Notons i l'injection compacte de X dans Z et, pour tout $p \in [1, \infty)$, définie*

$$\lambda_{1,p} = \inf \left\{ \frac{\| u \|_X^p}{\| i(u) \|_Z^p} \mid u \in X \backslash \{0_X\} \right\}.$$

Alors $\lambda_{1,p}$ est atteint et $\lambda_{1,p}^{-\frac{1}{p}}$ est la meilleur constante c_Z l'injection de X dans Z,

$$\| i(u) \|_Z \leq c_Z \| u \|_X \quad \text{pour tout } u \in X.$$

Maintenant, considérons l'espace de Banach $Z = W_0^{m-1} E_A(\Omega)$, avec la norme

$$\| u \|_{W_0^{m-1} E_A(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|<m} \| D^\alpha u \|_{(A)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'après ([20, théorème 2.7]), on a :

Proposition 2.3. *Soit Ω un domaine quelconque de $\mathbb{R}^N$. Soit $A(u) = \int_0^{|u|} a(t)dt$ une N-fonction et soit $m \in \mathbb{N}^*$ donné. Ensuite l'injection*

$$W_0^m E_A(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} W_0^{m-1} E_A(\Omega) \tag{2.23}$$

existe et est compacte.

Du fait des propositions 2.2 et 2.3, on a aussi :

Corollaire 2.1. *Sous les hypothèses de la proposition 2.3, nous supposons en outre que les N-fonctions A et $\bar{A}$ vérifiant la Δ_2-conditions (c'est à dire que,*

$W_0^m E_A(\Omega)$ *est un espace réflexif) pour tout* $p \in [1, \infty)$ *définir :*

$$\lambda_{1,p} := \inf \left\{ \frac{\| u \|_{m,A}^p}{\| i(u) \|_{W_0^{m-1}E_A(\Omega)}^p} \mid u \in W_0^m E_A(\Omega) \backslash \{0_{W_0^m E_A(\Omega)}\} \right\}, \tag{2.24}$$

où i *est l'injection compacte* (2.23). *Ensuite* $\lambda_{1,p}$ *est atteint et* $\lambda_{1,p}^{-\frac{1}{p}}$ *est la meilleure constante* c *dans l'injection de* $W_0^m E_A(\Omega)$ *en* $W_0^{m-1} E_A(\Omega)$, *et*

$$\| i(u) \|_{W_0^{m-1}E_A(\Omega)} \leq c \| u \|_{m,A} \quad \textit{pour tous} \;\; u \in W_0^m E_A(\Omega).$$

Nous avons besoin du résultat technique suivant :

Lemme 2.1. *Soit* $A(u) = \int_0^{|u|} a(t)dt$ *une N-fonctions. Si* A *satisfait la condition-*Δ_2 *et*

$$p_0 = \inf_{t>0} \frac{ta(t)}{A(t),}$$

alors $\infty > p_0 \geq 1$ *et pour tout* $u \in L_A(\Omega)$ *avec* $\| u \|_{(A)} < 1$ *on a*

$$\int_\Omega A(u(x)dx \leq \| u \|_{(A)}^{p_0} . \tag{2.25}$$

Démonstration. D'abord, remarquons qu'on partir de l'égalité de Young on a

$$\frac{ta(t)}{A(t)} > 1 \quad \text{pour tout} \;\; t > 0,$$

donc, $p_0 \geq 1$ puisque A satisfait la condition-Δ_2, on a $kA(t) \geq A(2t) > ta(t)$, donc

$$\frac{ta(t)}{A(t)} < k \quad \text{avec} \;\; k > 2.$$

Ainsi, p_0 est fini et

$$\frac{a(\tau)}{A(\tau)} \geq \frac{p_0}{\tau}, \quad \tau > 0.$$

Maintenant, soit u tel que $\| u \|_{(A)} < 1$. En intégrant sur l'intervalle $\left[|u(x)|, \frac{|u(x)|}{\| u \|_{(A)}}\right]$, on obtient

$$A(u(x)) \leq A\left(\frac{|u(x)|}{\| u \|_{(A)}}\right) \| u \|_{(A)}^{p_0} .$$

En intégrant sur Ω on trouve

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\| u \|_{(A)}}\right) dx = 1,$$

l'inégalité (2.25) s'ensuit. $\square$

On va appliquer le théorème 2.1 à la fonctionnelle $F : W_0^m E_A(\Omega) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$F(u) = A(\| u \|_{m,A}) - \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega G_\alpha(x, D^\alpha u(x))dx, \tag{2.26}$$

où A et G_α, $|\alpha| < m$, sont données par (2.12) et (2.21), respectivement.

Le résultat suivante est utile.

Proposition 2.4. *(Voir [12, proposition 4]). Soit $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, la N-fonction donnée par* (2.12)*. De plus, supposons que A vérifie* (2.13) *et* (2.14)*. La condition-Δ_2 étant également satisfaite pour A et $\overline{A}$. Soit $g_\alpha : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|\alpha| < m$ des fonctions de Carathéodory vérifiant la condition (H)$_1$.*

Puis la fonctionnelle $H : W_0^m E_A(\Omega) \to \mathbb{R}$ definie par

$$H(u) = \psi(u) - G(u), \tag{2.27}$$

avec

$$\psi(u) = A(\| u \|_{m,A}), \quad G(u) = \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega G_\alpha(x, D^\alpha u(x))dx,$$

pour tout $u \in W_0^m E_A(\Omega)$ *est bien définie et* C^1 *sur* $W_0^m E_A(\Omega)$*, avec*

$$H'(u) = J_a u - \sum_{|\alpha|<m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g_\alpha(x, D^\alpha u).$$

Le résultat principale de cette section est dans le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *la N-fonction donnée par* (2.12)*, d'après* (2.13)*,* (2.14) *et hypothèse (H)*$_3$*. Soit* $g_\alpha : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, |\alpha| < m$*, des fonctions de Caratheodory vérifiant (H)*$_1$*, (H)*$_2$ *et étant impaires au second argument :* $g_\alpha(x, -s) = -g_\alpha(x, s)$*. Supposons que les N-fonctions* $A, \overline{A}$ *et* $\overline{M}_\alpha$*,* $|\alpha| < m$*, satisfaire la condition-*Δ_2 *avec*

$$p_0 = \inf_{t>0} \frac{ta(t)}{A(t)}, \quad p^* = \sup_{t>0} \frac{ta(t)}{A(t)} < \infty, \quad p_* = \liminf_{t\to\infty} \frac{tA'_*(t)}{A_*(t)}, \tag{2.28}$$

A_* *étant le conjugué de Sobolev de A, en suppose de plus :*

(H)$_4$ *il existe une constante positive* $C > 0$ *telle que*

$$A(t) \geq C.t^{p_0}, \quad \forall t \in (0, 1),$$

(H)$_5$

$$\limsup_{s\to s} \frac{g_\alpha(x, s)}{a(s)} < \frac{C\lambda_{1,p_0}}{2N_0}, \quad |\alpha| < m,$$

uniformément par rapport à presque tous les $x \in \Omega$*, où* λ_{1,p_0} *est donné par* (2.24) *et* $N_0 = \sum_{|\alpha|<m} 1$ *;*

(H)$_6$ $p_0 < p_*$*.*

Alors la fonctionnelle (2.27) *admet une suite infinie de valeurs critique.*

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses (H)*$_1$*-(H)*$_5$*, la fonctionnelle F donnée par* (2.26) *vérifier les conditions du théorème de Col.*

Démonstration. Nous allons prouver que l'hypothèse (G_1) du théorème des Col est vérifiée, pour le première terme de (2.26) , d'après $((\mathrm{H})_1)$, on a

$$A(\| u \|_{m,A}) \geq C \| u \|_{m,A}^{p_0}, \tag{2.29}$$

si $\| u \|_{m,A} < 1$.

Dans ce que suit, nous supposerons que $\| u \|_{m,A} < 1$. Nous traiterons maintenant les estimations pour le second terme de (2.26). De $(\mathrm{H})_5$ on déduit que pour tout α avec $\| \alpha \| < m$ il existe $\mu_\alpha \in \left(0, \dfrac{c\lambda_\alpha}{2N_0}\right)$ et $s_\alpha > 0$ tel que

$$G_\alpha(x,s) < \mu_\alpha A(s), \quad x \in \Omega,\ 0 < |s| < s_\alpha. \tag{2.30}$$

En effet, de $(\mathrm{H})_5$ il résulte que pour tout α avec $|\alpha| < m$, on peut trouver $\mu_\alpha \in \left(0, \dfrac{c\lambda_\alpha}{2N_0}\right)$ et $s_\alpha > 0$ tel que

$$\frac{g_\alpha(x,s)}{a(s)} < \mu_\alpha, \quad x \in \Omega,\ 0 < |s| < s_\alpha.$$

Les inégalités ci-dessus impliquent

$$g_\alpha(x,s) < \mu_\alpha a(s), \quad \text{pour } x \in \Omega,\ s \in (0, s_\alpha) \tag{2.31}$$

et puisque a est impaire

$$g_\alpha(x,s) > -\mu_\alpha a(|s|), \ \text{ pour } \ x \in \Omega,\ s \in (-s_\alpha, 0). \tag{2.32}$$

Donc

$$|g_\alpha(x,s)| < \mu_\alpha a(|s|), \ \text{ pour } \ x \in \Omega,\ |s| \in s_\alpha. \tag{2.33}$$

(Clairement (2.33) implique que $g_\alpha(x,0) = 0$, pour $x \in \Omega$ et tout α avec $|\alpha| <$

m. Par conséquence, le problème (2.16), (2.17) admet la solution triviale.)

En intégrant dans (2.31) de 0 à $s \in (0, s_\alpha)$, on obtient que (2.30) est vrai pour $0 < s < s_\alpha$. Pour $s \in (-s_\alpha, 0)$, d'après (2.32) et de l'impair de a, on trouve

$$\begin{aligned} G_\alpha(x,s) &= -\int_s^0 g_\alpha(x,\tau)d\tau \\ &< \mu_\alpha \int_s^0 a(|\tau|)d\tau \\ &= -\mu_\alpha \int_{-s}^0 a(t)dt \\ &= \mu_\alpha \int_0^{|s|} a(t)dt = \mu_\alpha A(s), \end{aligned}$$

montrons que (2.30) est également vrai pour $s \in (-s_\alpha, 0)$. Maintenant, considérons $|s| \in [s_\alpha, +\infty)$.
La fonction $\dfrac{M_\alpha(s)}{s}$ étant croissante, on a

$$|s| \leq \frac{s_\alpha}{M_\alpha(s_\alpha)}.M_\alpha(|s|).$$

D'après l'inégalité

$$|G_\alpha(x,s)| \leq c_\alpha|s| + 2d_\alpha M_\alpha(|s|),$$

il s'ensuit que

$$|G_\alpha(x,s)| \leq C_\alpha M_\alpha(|s|), \quad \text{pour } |s| \geq s_\alpha, \tag{2.34}$$

où $C_\alpha = c_\alpha \dfrac{s_\alpha}{M_\alpha(s_\alpha)} + 2d_\alpha$. Comme M_α est décroit que tel que A_* proche de l'infini, nous avons

$$\lim_{s\to\infty}\frac{M_\alpha(s)}{A_*(ks)}=0,\quad \forall k>0,$$

en particulier

$$\lim_{s\to\infty}\frac{M_\alpha(s)}{A_*(s)}=0.$$

Par conséquent, il existe $s'_\alpha > s_\alpha$ tel que

$$M_\alpha(s)\le C'_\alpha A_*(s),\quad \forall s\ge s'_\alpha \tag{2.35}$$

La définition de p_* implique qu'il existe $\mu\in(0,p_*-p_0)$ et $s''_\alpha > s'_\alpha$ tel que

$$\frac{A'_*(s)}{A_*(s)}\ge\frac{p_*-\mu}{s},\qquad \text{pour } s\ge s''_\alpha. \tag{2.36}$$

Notons $s_\alpha=\max(s'_\alpha,s''_\alpha)$, $k_\alpha=\dfrac{s_\alpha}{s_\alpha}>1$, $|\alpha|<m$. D'après théorème 2.4, il existe une constante positive K telle que

$$\| D^\alpha u \|_{(A_*)}\le K\| u \|_{m,A}, \tag{2.37}$$

pour tout α avec $|\alpha|<m$. Si nous supposons que

$$\| u \|_{m,A}<\frac{1}{(\max_{|\alpha|<m}k_\alpha)K}, \tag{2.38}$$

alors, il résulte de (2.37) que pour tout α avec $|\alpha|<m$,

$$k_\alpha\| D^\alpha u \|_{(A_*)}<1. \tag{2.39}$$

Dans ce qui suit nous supposons que

$$\| u \|_{m,A}<\min\left(1,\frac{1}{\max_{|\alpha|<m}k_\alpha)K}\right). \tag{2.40}$$

Par conséquent, les inégalités (2.39) permettent de définir pour $|\alpha| < m$, les intervalles

$$\left[k_\alpha |D^\alpha u(x)|, \frac{|D^\alpha u(x)|}{\| D^\alpha u \|_{(A_*)}}\right], \quad x \in \Omega \tag{2.41}$$

Maintenant, si on note pour tout $\Omega_\alpha = \{x \in \Omega : |D^\alpha u(x)| \geq s_\alpha\}$, $|\alpha| < m$, alors pour tout $x \in \Omega_\alpha$, on a $k_\alpha |D^\alpha u(x)| \geq s'_\alpha$. Par conséquent, à partir de (2.35)

$$M_\alpha(|D^\alpha u(x)|) \leq M_\alpha(k_\alpha |D^\alpha u(x)|) \leq C'_\alpha A_*(k_\alpha |D^\alpha u(x)|), \quad \forall x \in \Omega_\alpha. \tag{2.42}$$

Parallèlement, si $x \in \Omega_\alpha$ alors $k_\alpha |D^\alpha u(x))| \geq s''_\alpha$, donc en intégrant (2.36) sur les intervalles (2.41), on obtient

$$A_*(k_\alpha |D^\alpha u(x)|) \leq k_\alpha^{p_* - \mu} \| D^\alpha u \|_{(A_*)}^{p_* - \mu} . A_* \left(\frac{|D^\alpha u(x)|}{\| D^\alpha u \|_{(A_*)}} \right). \tag{2.43}$$

pour tout $x \in \Omega_\alpha$.

En intégrant sur Ω_α et d'après l'inégalité $\int_\Omega A_* \left(\frac{v(x)}{\|v\|_{(A)}} \right) dx \leq 1$, nous trouvons que

$$\int_{\Omega_\alpha} A_*(k_\alpha |D^\alpha u(x)|) dx \leq k_\alpha^{p_* - \mu} \| D^\alpha u \|_{(A_*)}^{p_* - \mu} \tag{2.44}$$

pour tout α avec $|\alpha| < m$, par conséquent pour tout $u \in W_0^m E_A(\Omega)$ satisfaisant (2.40) et α avec $|\alpha| < m$, en utilisant successivement (2.34), (2.42), (2.44), on a

$$\int_{\Omega_\alpha} G_\alpha(x, D^\alpha u(x)) dx \leq C_\alpha C'_\alpha \int_{\Omega_\alpha} A_*(k_\alpha |D^\alpha u(x)|) dx \leq C_\alpha C'_\alpha k_\alpha^{p_* - \mu} \| D^\alpha u \|_{(A_*)}^{p_* - \mu} \tag{2.45}$$

Ainsi, d'après (2.37), on obtient

$$\sum_{|\alpha|<m} \int_{\Omega_\alpha} G_\alpha(x, D^\alpha u(x))dx \leq D. \parallel u \parallel_{m,A}^{p_*-\mu}, \tag{2.46}$$

où $D = \sum_{|\alpha|<m} D_\alpha$, $D_\alpha = C_\alpha C'_\alpha k_\alpha^{p_*-\mu} K^{p_*-\mu}$, $|\alpha| < m$.

Par contre, pour tout α avec $|\alpha| < m$, d'après (2.30) et la définition de λ_α

$$\lambda_\alpha = \inf_{u \in W_0^m E_A(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega A\left(\sqrt{T\left[u,u\right](x)}\right) dx}{\int_\Omega A(D^\alpha u(x))dx}, \quad |\alpha| < m,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Omega_\alpha} G_\alpha(x, D^\alpha u(x))dx \leq & \mu_\alpha \int_\Omega A(D^\alpha u(x))dx \\ \leq & \frac{\mu_\alpha}{\lambda_\alpha} \int_\Omega A\left(\sqrt{T[u,u](x)}\right) dx \\ < & \frac{C}{2N_0} \int_\Omega A(\sqrt{T[u,u](x)})dx. \end{aligned} \tag{2.47}$$

De la définition de p_0, on a

$$\frac{a(t)}{A(t)} \geq \frac{p_0}{t} \quad \forall t > 0. \tag{2.48}$$

Comme $\parallel u \parallel_{m,A} < 1$, on peut considère l'intervalle $\left[\sqrt{T[u,u](x)}, \frac{\sqrt{T[u,u](x)}}{\parallel u \parallel_{m,A}}\right]$. Par en intégrant dans (2.48) sur cet intervalle, on obtient

$$A\left(\sqrt{T[u,u](x)}\right) \leq \parallel u \parallel_{m,A}^{p_0} .A\left(\frac{\sqrt{T[u,u](x)}}{\parallel u \parallel_{m,A}}\right).$$

En intégrant cette inégalité sur Ω on trouve que

$$\int_{\Omega} A\left(\sqrt{T[u,u](x)}\right) dx \leq \| u \|_{m,A}^{p_0} . \tag{2.49}$$

Par conséquent, D'après (2.47) et (2.49) et en sommant par α, on a

$$\sum_{|\alpha|<m} \int_{\Omega\Omega_\alpha} G_\alpha(x, D^\alpha u(x))dx < \frac{C}{2} \| u \|_{m,A}^{p_0} . \tag{2.50}$$

Alors, à partir de (2.29), (2.46), (2.50), on obtient

$$F(u) > C \| u \|_{m,A}^{p_0} - \frac{C}{2} \| u \|_{m,A}^{p_0} - D. \| u \|_{m,A}^{p_*-\mu} = \| u \|_{m,A}^{p_0} \left[\frac{C}{2} - D \| u \|_{m,A}^{p_*-\mu-p_0}\right].$$

Donc, pour

$$\| u \|_{m,A} = \rho \leq \min\left(1, \frac{1}{(\max_{|\alpha|<m} k_\alpha)k}, \left(\frac{C}{3D}\right)^{\frac{1}{p_*-\mu-p_0}}\right)$$

il s'ensuit que $F(u) > \dfrac{C}{6}\rho^p > 0$.

Maintenant, nous allons vérifier l'hypothèse (G_2) du théorème du Col. Soit θ_α et s_α comme dans $(\mathrm{H})_2$. On en déduit que pour tout α avec $|\alpha| < m$, on a

$$G_\alpha(x,s) \geq \gamma_\alpha(x).|s|^{\theta_\alpha}, \quad \text{pour a.e } x \in \Omega \text{ et } |s| \geq s_\alpha. \tag{2.51}$$

où les fonctions $\gamma_\alpha, |\alpha| < m$, seront précisées ci-dessus.

En effet, de (2.20) il résulte que pour tout α avec $|\alpha| < m$,

$$G_\alpha(x,s) > 0, \quad \text{pour a.e. } x \in \Omega \text{ et } |s| \geq s_\alpha. \tag{2.52}$$

Ensuite, pour a.e. $x \in \Omega$ et $\tau \geq s_{\alpha'}$ d'après (2.20), on a

$$\frac{\theta_\alpha}{\tau} \leq \frac{g_\alpha(x,\tau)}{G_\alpha(x,\tau)}.$$

Intégration de s_α à $s \geq s_\alpha$, il s'ensuit que

$$\frac{s^{\theta_\alpha}}{s_\alpha^{\theta_\alpha}} \leq \frac{G_\alpha(x,s)}{G_\alpha(x,s_\alpha)},$$

ce qui implique que

$$G_\alpha(x,s) \geq G_\alpha(x,s_\alpha).\frac{s^{\theta_\alpha}}{s_\alpha^{\theta_\alpha}}, \text{ pour a.e. } x \in \Omega \text{ et } s \geq s_\alpha, \tag{2.53}$$

pour tout α avec $|\alpha| < m$. En revanche, pour a.e. $x \in \Omega$ et $\tau \leq -s_\alpha$, d'après (2.20) et (2.52), on a

$$\frac{\theta_\alpha}{\tau} \geq \frac{g_\alpha(x,\tau)}{G_\alpha(x,\tau)}.$$

En intégrant de $s \leq -s_\alpha$ à $-s_\alpha$, il s'ensuit que

$$\frac{s_\alpha^{\theta_\alpha}}{|s|^{\theta-\alpha}} \geq \frac{G_\alpha(x,-s_\alpha)}{G_\alpha(x,s)},$$

ce qui implique que

$$G_\alpha(x,s) \geq G_\alpha(x,-s_\alpha).\frac{|s|^{\theta_\alpha}}{s_\alpha^{\theta_*}}, \text{ pour a.e. } x \in \Omega \text{ et } s \leq -s_\alpha, \tag{2.54}$$

pour tout α avec $|\alpha| < m$, paramètre

$$\gamma_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{G_\alpha(x,s_\alpha)}{s_\alpha^{\theta_\alpha}} & \text{si } s \geq s_\alpha, \\ \frac{G_\alpha(x,-s_\alpha)}{s_\alpha^{\theta_\alpha}} & \text{si } s \geq -s_\alpha. \end{cases}$$

à partir de (2.53) et (2.54), on obtient (2.51).

Pour $\lambda \geq 1$, $|\alpha| < m$ et $u \in W_0^m E_A(\Omega)$, on définit

$$\Omega_\lambda^\alpha(u) = \{u \in \Omega|\, \lambda|D^\alpha u(x)| \geq s_\alpha\}.$$

on choisit une fonction $u \in W_0^m E_A(\Omega)$ tel que $|D^\alpha u(x)| > 0$, si a.e. $x \in \Omega$, et $vol(\Omega_1^\alpha(u)) > 0$, $|\alpha| < m$. Il est clair que $\Omega_1^\alpha(u) \subset \Omega_\lambda^\alpha(u)$ et donc $vol(\Omega_1^\alpha(u)) \leq vol(\Omega_\lambda^\alpha(u))$, pour tout $\lambda \geq 1$,.

Nous allons montrer que $F(\lambda u) \to -\infty$ comme $\lambda \to \infty$. Pour α fixe avec $|\alpha| < m$ et $\lambda \geq 1$, on a

$$\int_\Omega G_\alpha(x, \lambda D^\alpha u(x))dx = \int_{\Omega_\lambda^\alpha(u)} G_\alpha(x, \lambda D^\alpha u(x))dx + \int_{\Omega\backslash\Omega_\lambda^\alpha(u)} G_\alpha(x, \lambda D^\alpha u(x))dx.$$

utilisant (2.51), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\lambda^\alpha(u)} G_\alpha(x, \lambda D^\alpha u(x))dx &\geq \lambda^{\theta_\alpha} \int_{\Omega_\lambda^\alpha(u)} \gamma_\alpha(x)|D^\alpha u(x)|^{\theta_\alpha} dx = \lambda^{\theta_\alpha} K_\alpha(D^\alpha),\\ &\geq \lambda^{\theta_\alpha} \int_{\Omega_1^\alpha(u)} \gamma_\alpha(x)|D^\alpha u(x)|^{\theta_\alpha} dx = \lambda^{\theta_\alpha} K_\alpha(D^\alpha),\end{aligned}$$

avec

$$K_\alpha(D^\alpha) = \int_{\Omega_1^\alpha(u)} \gamma_\alpha(x)|D^\alpha u(x)|^{\theta_\alpha} dx > 0.$$

Par contre, si $x \in \Omega\backslash\Omega_\lambda^\alpha(u)$, alors $\lambda D^\alpha u(x) < s_\alpha$, et en vertu de

$$|G_\alpha(x, s)| \leq c_\alpha |s| + 2d_\alpha M_\alpha(|s|),$$

on a

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_\lambda^\alpha(u)} |G_\alpha(x, \lambda D^\alpha u(x))|dx \leq (c_\alpha s_\alpha + 2d\ _{alp} M_\alpha(s_\alpha)) vol\Omega = K'_\alpha;$$

Donc

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\lambda^\alpha(u)} G_\alpha(x,\lambda D^\alpha u(x))dx \geq -K'_\alpha.$$

Par conséquent,

$$F(\lambda u) \leq A(\lambda \parallel u \parallel_{m,A}) - \sum_{|\alpha|<m} \lambda^{\theta_\alpha} K_\alpha(D^\alpha) + \sum_{|\alpha|<m} K'_\alpha.$$

Si $1 < t,\ A(t) \leq A(1)t^{p^*}$, il s'ensuit que pour $\parallel u \parallel_{m,A} > 1$, on a

$$A(\lambda \parallel u \parallel_{m,A}) \leq A(1)\lambda^{p^*} \parallel u \parallel_{m,A}^{p^*} - \sum_{|\alpha|<m} \lambda^{\theta_\alpha} K_\alpha(D^\alpha) + \sum_{|\alpha|<m} K'_\alpha.$$

Puisque $\theta_\alpha > p^*$ pour tout α avec $|\alpha| < m$, il s'ensuit que $F(\lambda u) \to -\infty$ comme $\lambda \to \infty$. Par conséquent, pour un grand λ, disons $\lambda \geq \lambda_0$, $F(\lambda u) < 0$. Alors, en posant $e = \lambda_0 u$, on a $F(\lambda_0 u) < 0$ pour un certain $\lambda_0 > 1$ et deuxième hypothèse du théorème du Col satisfaite. □

Lemme 2.3. *Sous les hypothèses $(H)_1$-$(H)_5$, la fonctionnelle F donnée par* (2.26) *a la propriété suivante : toute suite $(u_n)_n \subset W_0^m E_A(\Omega)$ pour laquelle $(F(u_n))_n$ est bornée et $F'(u_n) \to 0$ comme $n \to \infty$, est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n \subset W_0^m E_A(\Omega)$ une suite telle que $(F(u_n))_n$ est bornée et $F'(u_n) \to \infty$ comme $n \to \infty$. Nous allons montrer que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $W_0^m E_A(\Omega)$. En effet, posons

$$\theta = \min_{|\alpha|<m} \theta_\alpha.$$

puisque $F = \Phi - \Psi$ avec Φ et Ψ donnée par

$$\Phi(u) = A(\parallel u \parallel_{m,A}),$$

et

$$\Psi(u) = \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega G_\alpha(x, D^\alpha u(x))dx.$$

et $F' = \Phi' - \Psi'$ avec Ψ' et Φ' données respectivement par

$$\langle \Phi'(u), h\rangle = a(\| u \|_{m,A}).\frac{\int_\Omega a\left(\frac{\sqrt{T[u,u](x)}}{\| u \|_{m,A}}\right)\frac{T[u,h](x)}{\sqrt{T[u,u](x)}}dx}{\int_\Omega a\left(\frac{\sqrt{T[u,u](x)}}{\| u \|_{m,A}}\right)\frac{\sqrt{T[u,u](x)}}{\| u \|_{m,A}}dx},$$

et

$$\langle \Psi'(u), h\rangle = \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega g_\alpha(x, D^\alpha u(x))D^\alpha h(x)dx.$$

On a

$$\begin{aligned} & F(u_n) - \frac{1}{\theta}F'(u_n)(u_n) \\ & = A(\| u_n \|_{m,A}) - \frac{1}{\theta} \| u_n \|_{m,A} \, a(\| u_n \|_{m,A}) \\ & + \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta}g_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))D^\alpha u_n(x) - G_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))\right] dx \end{aligned} \tag{2.55}$$

puisque $(F(u_n))_n$ est bornée, il s'ensuit que

$$F(u_n) - \frac{1}{\theta}F'(u_n)(u_n) \leq M + \frac{\varepsilon_n}{\theta} \| u_n \|_{m,A}, \tag{2.56}$$

avec $\varepsilon_n =\| F'(u_n) \|\to 0$ comme $n \to \infty$. Maintenant, nous allons donner une estimation pour

$$\sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta}g_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))D^\alpha u_n(x) - G_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))\right] dx,$$

apparaissant dans (2.55)

Soit n fixé. Pour tout α avec $|\alpha| < m$, définir $\Omega_{\alpha,n} = \{x \in \Omega|\, |D^\alpha u_n(x)| > s_\alpha\}$ et $\Omega'_{\alpha,n} = \Omega \backslash \Omega_{\alpha,n}$. Clairement

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta} g_\alpha(x, D^\alpha u_n(x)) D^\alpha u_n(x) - G_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))\right] dx \\
&= \sum_{|\alpha|<m} \int_{\Omega_{\alpha,n}} \left[\frac{1}{\theta} g_\alpha(x, D^\alpha u_n(x)) D^\alpha u_n(x) - G_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))\right] dx \qquad (2.57) \\
&+ \sum_{|\alpha|<m} \int_{\Omega'_{\alpha,n}} \left[\frac{1}{\theta} g_\alpha(x, D^\alpha u_n(x)) D^\alpha u_n(x) - G_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))\right] dx.
\end{aligned}$$

D'après $(\mathrm{H})_2$,

$$\int_{\Omega_{\alpha,n}} \left[\frac{1}{\theta} g_\alpha(x, D^\alpha u_n(x)) D^\alpha u_n(x) - G_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))\right] dx \geq 0. \qquad (2.58)$$

D'après l'inégalité

$$|G_\alpha(x, s)| \leq c_\alpha |s| + 2d_\alpha M_\alpha(|s|),$$

on a

$$\begin{aligned}
|\int_{\Omega'_{\alpha,n}} G_\alpha(x, D^\alpha u_n(x)) dx| &\leq \int_{\Omega'_{\alpha,n}} \left[c_\alpha |D^\alpha u_n(x)| + 2d_\alpha M_\alpha(|D^\alpha u_n(x)|)\right] dx \\
&\leq \left[c_\alpha s_\alpha + 2d_\alpha M_\alpha(s_\alpha)\right] vol(\Omega) = K'_\alpha \qquad (2.59)
\end{aligned}$$

D'autre part, de l'inégalité

$$|g_\alpha(x, s)| \leq c_\alpha + d_\alpha \overline{M}_\alpha^{-1}(M_\alpha(s)), \quad x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}, |\alpha| < m,$$

il résulte de

$$\begin{aligned} &|\int_{\Omega'_{\alpha,n}} g_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))D^\alpha u_n(x)dx| \\ &\leq \int_{\Omega'_{\alpha,n}} \left[c_\alpha|D^\alpha u_n(x)| + d_\alpha \overline{M}_\alpha^{-1}(D^\alpha u_n(x))(|D^\alpha u_n(x)|)\right]dx \\ &\leq \left[c_\alpha s_\alpha + d_\alpha s_\alpha \overline{M}_\alpha^{-1} M_\alpha(s_\alpha)\right] vol(\Omega) = K_\alpha. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Ainsi

$$|\int_{\Omega'_{\alpha,n}} \left[\frac{1}{\theta} g_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))D^\alpha u_n(x) - G_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))\right] dx| \leq \frac{K_\alpha}{\theta} + K'_\alpha = C_\alpha. \tag{2.61}$$

De (2.58), (2.61) et (2.57), nous déduisons que

$$\sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta} g_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))D^\alpha u_n(x) - G_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))\right] dx| \geq -\sum_{|\alpha|<m} C_\alpha.$$

Par conséquent (voir (2.55)).

$$F(u_n) - \frac{1}{\theta}F'(u_n)(u_n) \geq A(\| u_n \|_{m,A}) - -\frac{1}{\theta} \| u_n \|_{m,A} a(\| u_n \|_{m,A}) - \sum_{|\alpha|<m} C_\alpha \tag{2.62}$$

En comparant (2.62) et (2.56), on obtient

$$A(\| u_n \|_{m,A}) - \frac{1}{\theta} \| u_n \|_{m,A} a(\| u_n \|_{m,A}) - \sum_{|\alpha|<m} C_\alpha \leq M + \frac{\varepsilon_n}{\theta} \| u_n \|_{m,A} . \tag{2.63}$$

Par définition de p^*, on a

$$\| u_n \|_{m,A} a(\| u_n \|_{m,A}) \leq p^* A(\| u_n \|_{m,A}). \tag{2.64}$$

Finalement, en comparant (2.64) et (2.63), on obtient

$$\left(1-\frac{p^*}{\theta}\right)A(\| u_n \|_{m,A}) \leq M_1 + \frac{\varepsilon_n}{\theta} \| u_n \|_{m,A}, \tag{2.65}$$

avec $M_1 = M + \sum_{|\alpha|<m} C_\alpha$, pour tout n.

Les dernières inégalités impliquent la bornitude de $(u_n)_n$. Dans le cas contraire, en passant à une sous-suite, on peut supposer que $\| u_n \|_{m,A} \to \infty$, comme $n \to \infty$. En divisons par $\| u_n \|_{m,A}$ dans (2.65) et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient une contradiction : $\dfrac{A(\| u_n \|_{m,A})}{\| u_n \|_{m,A}} \to \infty$ comme $n \to \infty$ avec $\dfrac{M_1}{\| u_n \|_{m,A}} + \varepsilon_n \to 0$ comme $n \to \infty$. □

Démonstration du théorème 2.3.
On applique le théorème 2.1. En effet, puisque $\dfrac{a(t)}{t}$ est non décroissante sur $(0,\infty)$, $W_0^m E_A(\Omega)$ est uniformément convexe ([11, théorème 3.14]). Par conséquence, $W_0^m E_A(\Omega)$ est réflexif et possède la propriété de Kadec-Klee. Le même espace est régulière [11, théorème 3.6] et s'injecte dans $\cap_{|\beta|<m} W^{m-1}L_{M_\beta}(\Omega)$ [11, Proposition 6.2].

La fonctionnelle $H \in C^1(x,\mathbb{R})$ (proposition 2.4) est paire (puisque g_α est impaire dans le second argument) et vérifie les hypothèses (i)-(iv) du théorème 2.1.

Puisque (2.28) est vérifiée, l'hypothèse (i) est évidement satisfaite avec $\varphi = a$. Puisque $G' : V \to V^*$ est continue ([11, proposition 6.3]), a) est évidement satisfaite. D'après (Lemme 2.3) il existe une constante positive C telle que :

$$\sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta} g_\alpha(x, D^\alpha u_n(x)) D^\alpha u(x) - G_\alpha(x, D^\alpha u_n(x))\right] dx \geq -C, \tag{2.66}$$

où $\theta = \min_{|\alpha|<m} \theta_\alpha$. On remarque que (2.66) peut se réecrive sous la forme :

$$\frac{1}{\theta}\langle G'(u_n), u_n\rangle - G(u) \geq -C,$$

donc b) du théorème 2.1 est vérifiée.

Montrons que l'hypothèse (iii) du théorème 2.1 est vérifiée.
Pour la premier terme de (2.27), d'après $(\mathrm{H})_4$, on a

$$A(\| u \|_{m,A}) \geq C \| u \|_{m,A}^{p_0} \tag{2.67}$$

pour tout $u \in W_0^m E_A(\Omega)$ avec $\| u \|_{m,A} < 1$.

Nous allons maintenant traiter les estimations pour le second terme dans (2.27). Comme dans lemme 2.2, de $(\mathrm{H})_5$ on déduit que, pour tout α avec $|\alpha| < m$, il existe $\mu_\alpha \in \left(0, \dfrac{C\lambda_{1,p_0}}{2N_0}\right)$ et $s_\alpha > 0$ tel que :

$$G_\alpha(x, s) < \mu_\alpha A(s) \tag{2.68}$$

pour $x \in \Omega$, $0 < |s| < s_\alpha$. On note $\Omega_\alpha = \{x \in \Omega \,|\, |D^\alpha u(x)| \geq s_\alpha\}$, $|\alpha| < m$, il est montré dans lemme 2.2, qu'il existe des constante positives $c \leq 1$ et D telle que , si $\| u \|_{m,A} < \underline{c}$ alors on a :

$$\sum_{|\alpha|<m} \int_{\Omega_\alpha} G_\alpha(x, D^\alpha u(x))dx \leq D. \| u \|_{m,A}^{p_* - \mu} . \tag{2.69}$$

D'autre part, par la définition de λ_{1,p_0}, pour tout α avec $|\alpha| < m$ on a

$$\lambda_{1,p_0} \geq \frac{\| u \|_{m,A}^{p_0}}{\| u \|_{W_0^{m-1}}^{p_0} E_A(\Omega)} \leq \frac{\| u \|_{m,A}^{p_0}}{\| D^\alpha u \|_{(A)}^{p_0}}. \tag{2.70}$$

Donc, pour tout α avec $|\alpha| < m$, de (2.68), lemme 2.1 et (2.70), on déduit

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\alpha} G_\alpha(x, D^\alpha u(x))dx \leq \mu_\alpha \int_\Omega A(D^\alpha u(x))dx$$
$$\leq \mu_\alpha \parallel D^\alpha u \parallel_{(A)}^{p_0} \leq \frac{\mu_\alpha}{\lambda_{1,p_0}} \parallel u \parallel_{m,A}^{p_0} < \frac{C}{2N_0} \parallel u \parallel_{m,A}^{p_0} .$$

Par conséquent, par sommation sur α, nous avons :

$$\sum_{|\alpha|<m} \int_{\Omega\setminus\Omega_\alpha} G_\alpha(x, D^\alpha u(x))dx < \frac{c}{2} \parallel u \parallel_{m,A}^{p_0} . \tag{2.71}$$

Alors, à partir de (2.67), (2.69), (2.71) on obtient

$$F(u) > C \parallel u \parallel_{m,A}^{p_0} - \frac{C}{2} \parallel u \parallel_{m,A}^{p_0} - D. \parallel u \parallel_{m,A}^{p_*-\mu} = \frac{C}{2} \parallel u \parallel_{m,A}^{p_0} - D \parallel u \parallel_{m,A}^{p_*-\mu},$$

c'est à dire (2.5).

Maintenant, nous allons prouver que l'hypothèse (iv) du théorème 2.1 est vérifiée.

Soit X_1 un sous espace de dimension finie de $W_0^m E_A(\Omega)$. D'après [lemme 2.2, inégalité (2.51)], pour tout α avec $|\alpha| < m$, on a

$$G_\alpha(x, s) \geq \gamma_\alpha(x)|s|^{\theta_\alpha}$$

pour a.e. $x \in \Omega$ et $|s| \geq s_\alpha$, où $\gamma_\alpha \in L^\infty(\Omega)$.

Pour α avec $|\alpha| < m$ et $v \in W_0^m E_A(\Omega)$, définie

$$\Omega_\geq^\alpha = \{x \in \Omega \,|\, |D^\alpha v(x)| \geq s_\alpha\}, \quad \Omega_<^\alpha = \Omega\setminus\Omega_\geq^\alpha.$$

puis

$$\int_{\Omega} G_\alpha(x, D^\alpha v(x))dx \geq \int_{\Omega^\alpha_\geq} \gamma_\alpha(x)|D^\alpha v(x)|^{\theta_\alpha}dx + \int_{\Omega^\alpha_<} G_\alpha(x, D^\alpha v(x))dx,$$

Mais

$$\int_{\Omega^\alpha_\geq} \gamma_\alpha(x)|D^\alpha v(x)|^{\theta_\alpha}dx = \int_{\Omega} \gamma_\alpha(x)|D^\alpha v(x)|^{\theta_\alpha}dx - \int_{\Omega^\alpha_<} \gamma_\alpha(x)|D^\alpha v(x)|^{\theta_\alpha}dx.$$

De plus

$$\int_{\Omega^\alpha_<} \gamma_\alpha(x)|D^\alpha v(x)|^{\theta_\alpha}dx \leq \| \gamma_\alpha \|_\infty s_\alpha^{\theta_\alpha} vol(\Omega),$$

On a

$$\int_{\Omega} G_\alpha(x, D^\alpha v(x))dx \geq \int_{\Omega} \gamma_\alpha(x)|D^\alpha v(x)|^{\theta_\alpha}dx + \int_{\Omega^\alpha_<} G_\alpha(x, D^\alpha v(x))dx - k_\alpha,$$

où $k_\alpha = \| \gamma_\alpha \|_\infty s_\alpha^{\theta_\alpha} vol(\Omega)$. D'autre part, il résulte de (2.20) que

$$\int_{\Omega^\alpha_<} G_\alpha(x, D^\alpha v(x))dx \leq \| c_\alpha \|_{L^1(\Omega)} s_\alpha + 2d_\alpha M_\alpha(s_\alpha) vol(\Omega).$$

Donc,

$$\int_{\Omega} G_\alpha(x, D^\alpha v(x)dx \geq \int_{\Omega} \gamma_\alpha(x)|D^\alpha v(x)|^{\theta_\alpha}dx - K_\alpha,$$

où $K_\alpha = k_\alpha + \| c_\alpha \|_{L^1(\Omega)} s_\alpha + 2d_\alpha M_\alpha(s_\alpha) vol(\Omega)$.

Par conséquence,

$$F(v) \leq A \| v \|_{m,A} - \sum_{|\alpha|<m} \int_{\Omega} \gamma_\alpha(x)|D^\alpha v(x)|^{\theta_\alpha}dx + K,$$

où K est une constante positive et θ_α sont donnée par $(\mathrm{H})_2$. Par la définition de p^*, pour $\| v \|_{m,A} > 1$ on a :

$$F(v) \leq A(1) \| v \|_{m,A}^{p^*} - \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega \gamma_\alpha(x) |D^\alpha v(x)|^{\theta_\alpha} dx + K. \tag{2.72}$$

Maintenant, la fonctionnelle $\| \, . \, \|_\gamma : W_0^m E_A(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\| u \|_\gamma = \sum_{|\alpha|<m} \left(\int_\Omega \gamma_\alpha(x) |D^\alpha u(x)|^{\theta_\alpha} dx \right)^{\frac{1}{\theta_\alpha}}$$

est une norme sur $W_0^m E_A(\Omega)$, défini par

$$\| D^\alpha u \|_{\theta_\alpha} = \left(\int_\Omega \gamma_\alpha(x) |D^\alpha u(x)|^{\theta_\alpha} dx \right)^{\frac{1}{\theta_\alpha}},$$

on a

$$\| u \|_\gamma = \sum_{|\alpha|<m} \| D^\alpha u \|_{\theta_\alpha} .$$

Soit $\underline{\alpha}$ un multi-indice satisfaisant

$$\| D^{\underline{\alpha}} u \|_{\theta_{\underline{\alpha}}} = \max_{|\alpha|<m} \| D^\alpha u \|_{\theta_\alpha} .$$

puis

$$\| u \|_\gamma \leq N_0 \| D^{\underline{\alpha}} u \|_{\theta_{\underline{\alpha}}},$$

où $N_0 = \sum_{|\alpha<m} 1$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega \gamma_\alpha(x) |D^\alpha u(x)|^{\theta_\alpha} dx &\geq \int_\Omega \gamma_{\underline{\alpha}}(x) |D^\alpha u(x)|^{\theta_{\underline{\alpha}}} dx \\ &= \| D^{\underline{\alpha}} u \|_{\theta_{\underline{\alpha}}}^{\theta_{\underline{\alpha}}} \geq \frac{1}{N_0} \| u \|_\gamma^{\theta_{\underline{\alpha}}} . \end{aligned} \tag{2.73}$$

De puis la $\| \, . \, \|_{m,A}$ et $\| \, . \, \|_\gamma$ normes sont équivalentes sur les sous-espace de dimension finie X_1, il existe une constante $\delta = \delta(X_1) > 0$ telle que

$$\| u \|_{m,A} \leq \delta \| u \|_{\gamma} . \tag{2.74}$$

Donc

$$F(v) \leq A(1) \| v \|_{m,A}^{p^*} - \frac{1}{N_0 \delta^{\theta_{\underline{\alpha}}}} \| v \|_{m,A}^{\theta_{\underline{\alpha}}} + K$$

si $v \in X_1$, $\| v \|_{m,A} > 1$.

D'après le théorème 2.1, la fonctionnelle F possède une suite de valeurs positives critiques. D'après la proposition 2.4, l'équation (2.22) possède une suite de solutions dans $W_0^m E_A(\Omega)$ ou de manière équivalente, le problème (2.16), (2.17) possède une suite de solutions faibles dans $W_0^m E_A(\Omega)$. □

Théorème 2.4. *[24] Si la N-fonction A satisfait* (2.13) *et* (2.14) *alors*

$$W_0^1 L_A(\Omega) \to L_{A_*}(\Omega).$$

De plus, si Ω_0 est un sous-domaine borné de Ω, alors l'injections

$$W_0^1 L_A(\Omega) \to L_B(\Omega_0)$$

existe et sont compacts pour toute N-fonction B est décroit que tel que A_* proche de l'infini.

CONCLUSION

Les résultats de cet mémoire généralisent le résultat d'existence de solution de problème elliptique avec p-laplacien

nous étudierons la multiplicité de solution pour l'équation-opérateur.

Nous avons démontré le problème des valeurs limites possède une suite de solutions faibles et en utilisent le théorème du Col.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces. Academic Press*, New York-San Francisco-London, 1975.

[2] E. Asplund, *Positivity of duality mappings*. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 200-203.

[3] T. Bartsch, *Infinetely many solutions of a symmetric Dirichlet problem.* Nonlinear Anal. 20 (1993), 1205-1216.

[4] T. Bartsch, M. Willem, *On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities*. Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 3555-3561.

[5] F.E. Browder, *Problèmes non-linéaires.* Presses de l'Université de Montréal, 1964.

[6] I. Cioranescu, *Duality mappings in nonlinear functional analysis.* Publishing House of Romanian Academy, Bucharest, 1974. (Romanian)

[7] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1985.

[8] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces-Selected Topics.* Lecture Notes in Math. 485. Springer-Verlag, 1975.

[9] G. Dinca , *Variational methods and applications*, Technical Publ. House, Bucharest, 1980. (Romanian)

[10] G. Dinca and P. Jebelean, *Some existence results for a class of nonlinear equations involving a duality mapping.* Nonlinear Anal. 46 (2001), 347-363.

[11] G. Dinca and P. Matei, *Variational and topological methods for operator equations involving duality mappings on Orlicz-Sobolev spaces.* Electron J. Differential Equations 93 (2007), 1-47.

[12] G. Dinca and P. Matei, *Multiple solutions for operator equations involving duality mappings on Orlicz-Sobolev spaces.* Differential Integral Equations 21 (2008), 9-10, 891-916.

[13] G. Dinca and P. Matei, *Infnitely many solutions for operator equations involving duality mappings on Orlicz-Sobolev spaces*. TMNA (accepted)

[14] P.S. Ilias, *Nonlinear operator equations in locally convex spaces*. Ph.D. Thesis, Univ. Bucharest, 2005. (Romanian)

[15] M.A. Krasnosel'skij and Ja.B. Rutitskij, *Convex Functions and Orlicz Spaces*. Gröningen, Noordhoff, 1961.

[16] J. Mawhin and M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[17] P.H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. Conference Board of the Math. Sci. Regional Conference Series in Math, no. 65, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[18] M.M. Rao and Z.D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*. Marcel Dekker, New York-Basel-Hong Kong, 1991.

[19] R.E. Showalter, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*. Amer. Math. Soc., Providence RI, 1997.

[20] M. Tienari, *A degree theory for a class of mappings of monotone type in Orlicz-Sobolev spaces*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math.

Dissertationes 97 (1994), 1-68.

[21] M. Willem, *Minimax Theorems*. Birkhäuser, Basel, 1996.

[22] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B : Nonlinear Monotone Operators*. Springer, New York, 1990.

[23] Ambrosette-Rabinowitz, 1973.

[24] G. Dinca and p. Matei, Variational and topological methods for operator inuolving duality mappings ou Orlicz space. Electronj Differential Equations 93 (2007), théorème 2.12.