الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشادلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Calcul Stochastique

Thème

Problème de Sturum-Liouville Régulier

Présenté par :

ANTOURI Zina

Devant le jury :

Dr. BOUSSAHA Hanene	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. BOUNOUALA Amina	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteuse
Dr. MECHRI Halima	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2020-2021

Dédicace

Je dédie ce modeste Travail

A ma très chère Maman

qui est la source de mon bonheur.

A mon cher Père

qui est pour moi l'exemple du succés.

A tous les gens m'aiment.

Remerciments

*Tout d'abord, je remercie **Dieu** de m'avoir permis d'être en bonne santé pour faire ce travail du début à la fin, qu'il m'a donné la volonté, la patience, et la confiance durant toutes mes années d'études.*

*Mes profondes gratitudes s'orientent vers **mes parents** pour leurs soutiens durant mon parcours d'éducation.*

A Mon Promotrice
Dr. Bounouala Amina

J´ai eu l'honneur d'être un jour parmi vos étudiants et de bénéficier de votre riche enseignement.

Je te remercie beaucoup pour votre gentilleusse, votre encadrement, votre disponibilité permanente, et vos conseils.

Merci pour votre critique tout au long de ce travail.

j'ai un profond respect pour toi.

Aux membres du jury
Dr. Boussaha Hanene
Dr. Mechri Halima

Dames les jury vous nous faites un grand honneur en acceptant de juger ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement, toute ma famille, tous mes collègues, et mes proches.

J'adresse mes remerciements aussi à l'université Chadli Bendjedid-EL TARF, et mes enseingnants du département Mathématiques.

Abstract

In this work, we study the eigenvalues of Sturm-Liouville problems under boundary conditions in finit interval.

We show that the eigenvalues are continuous functions of all the parameters of the problem and that normalized eigenfunctions can be found which depend continuously on all parametres in the uniforme norm and we proved that the eigenvalues are differentiable functions of all parameters of the problem.

Résumé

Dans cette thèse, nous considérons le problème de Sturm-Liouville avec les conditions aux limites dans un domaine fini. En utilisant quelques théorèmes pour montrer l'existence et l'unicité de la solution.

Nous étudions les propriétés générales des fonctions propres et de spectre du notre problème avec des conditions aux limites auto-adjointes, nous prouvons la différentiabilité et la continuté des valeurs propres et des fonctions propres associées, et nous prouvons la dépendance du spectre aux paramètres du problème de Sturum Liouville régulier.

ملخص

نعالج في هذه الاطروحة مشكلة ستورم-ليوفيل المرتبطة بالشروط الحدية في مجال محدود.

نتطرق لدراسة الخصائص العامة للدوال الذاتية مع شروط حدية ذاتية لمشكلة ستورم-ليوفيل. ونثبت وجود ووحدانية الحل لهذه المشكلة كما نبرهن اشتقاقية واستمرارية القيم الذاتية والدوال الذاتية المرفقة بها.

كما ندرس ارتباط معطيات مشكلة ستورم-ليوفيل وسلوك القيم الذاتية باستخدام بعض النظريات.

.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

Historique

Joseph Liouville (1809−1882) fut un bon artisan des mathématiques, déployant une activité considérable dans l'enseignement et la diffusion des idées mathématiques de son temps, il est le fondateur du Journal de mathématiques pures et appliquées appelé traditionnellement « Journal de Liouville ». Ses principaux travaux portent sur l'analyse et on lui doit un important théorème sur l'approximation des irrationnels algébriques.

L'élection de Joseph Liouville à l'Assemblée constituante de 1848 est seule à rompre l'unité d'une carrière toute scientifique : sorti de l'école polytechnique en 1827, il y revenait en 1833 comme répétiteur puis professeur d'analyse, dès sa trente et unième année, il était élu à l'Académie des sciences, dans la section d'astronomie, en remplacement de Lalande.

Il fut un des meilleurs professeurs de son temps, et ses cours, à Polytechnique et au Collège de France, prirent une grande part de son activité, les nombreuses notes qu'il publia dans son journal donnent une idée de leur richesse, et font regretter qu'ils n'aient pas été rédigés et conservés.

Charles Sturm $(1803 - 1855)$ est né à Genève, à l'époque chef lieu du département français du Léman $(1798 - 1814)$, ville dans laquelle il fit ses études. En 1826 il détermine, avec son ami Colladon, la vitesse du son dans l'eau et obtient l'année suivante à Paris, où il réside depuis 1823, le grand prix de mathématiques pour son mémoire sur la compressibilité des liquides. En 1829 il énonce le célèbre théorème qui porte son nom, et qui fait l'objet de cet article, théorème qui donne le nombre de racines réelles d'une équation entre deux limites. A partir de 1830, il étudie avec son ami Liouville la théorie générale des oscillations et aboutit à une classe d'équations différentielles (problème de Sturm-Liouville). Dans deux grands mémoires publiés en 1836, il fait connaître des méthodes de résolution (notions de valeurs propres et de développement en séries de fonctions orthogonales) qui seront à l'origine de nombreux travaux et découvertes mathématiques. Cette même année il est élu à l'Académie des sciences et en 1840 il succède à Poisson comme professeur à la faculté des sciences et à l'école polytechnique. Ses Cours d'analyse de l'école polytechnique et ses Cours de mécanique de l'école polytechnique seront publiés après sa mort prématurée.

Notation générale

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$: ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

$\mathbb{R}^n$: espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels.

$[a, b)$: intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b.

$[a, b]$: intervalle compact de $\mathbb{R}$.

(a, b) : intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

$| \ |$: La valeur absolue d'un nombre réel, ou module d'un nombre complexe.

$L_{loc}(a', b')$: l'espace des fonctions localement intégrables définies sur (a', b').

$AC_{loc}(a', b')$: l'espace des fonctions localement absoluement continues définies sur (a', b').

$L^1(a', b')$: l'espace des fonctions intégrables sur (a', b').

$L^2(a', b')$: l'espace des fonctions carrées intégrables sur (a', b').

$C^\infty([a, b])$: l'espace des fonctions indéfiniment continues sur l'intervalle $[a, b]$.

$L(X, Y)$: l'espace des opérateurs linéaires et continues de X à valeurs dans Y.

$M_{2,2}(\mathbb{R})$: l'espace vectoriel des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes, à coefficients réels.

$M_{2,2}(\mathbb{C})$: l'espace vectoriel des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes, à coefficients complexes.

$SL_2(\mathbb{k})$: le groupe des matrices de deux lignes et deux colonnes à composantes réelles (ou complexes) de déterminant égale à 1.

Problème SL : Problème de Sturm-Liouville.

BC : condition aux bords.

BVP : problème de valeur aux limites.

Introduction

Les équations différentielles linéaires d'ordre deux sont des équations différentielles de la forme :

$$ay'' + by' + cy = d$$

où a, b, c et d sont des fonctions continues. Elles ne peuvent pas toutes être résolues explicitement, cependant beaucoup de méthodes existent pour résoudre celles qui peuvent l'être, ou pour faire l'étude qualitative des solutions à défaut. Parmi les plus simples à résoudre sont les équations à coefficients constants (où a, b, c sont des constantes).

Le qualificatif de linéaire indique qu'il est possible d'appliquer des procédés de superposition de solutions, et d'exploiter des résultats d'algèbre linéaire.

Les équations d'ordre deux sont sans doute les équations différentielles les plus utilisées dans les domaines les plus variés. En particulier, les problèmes de dynamique basés sur la deuxième loi de Newton aboutissent à une équation du deuxième ordre. La résolution des problèmes aux limites qui ont conduit à des fonctions propres, ces fonctions peuvent être utilisées pour les développements. En physique nombreux problèmes se posent dans la forme des problèmes aux limites.

La théorie de Sturm-Liouville étudie le cas particulier des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux de la forme

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=\lambda y.$$

Le paramètre λ fait partie comme la fonction y des inconnues. Cette équation est fréquemment posée sur un segment $[a, b]$ et accompagnée de conditions « au limites » reliant les valeurs $y(a)$, $y'(a)$, $y(b)$ et $y'(b)$. Les solutions λ et y du problème apparaissent alors comme valeur propre et vecteur propre d'un certain opérateur autoadjoint dans un espace de Hilbert. Le résultat principal de la théorie est l'existence d'une base hilbertienne de vecteurs propres associés à des valeurs propres formant une suite infinie mais dénombrable.

Cette théorie porte le nom des mathématiciens Charles Sturm $(1803-55)$ et Joseph Liouville $(1809-82)$ qui travaillèrent conjointement à sa mise en forme.

Par multiplication par un facteur intégrant convenable, toute équation différentielle linéaire d'ordre deux peut être mise sous la forme d'une équation de Sturm Liouville.

Le mémoire est organisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, Nous avons donné un ensemble de concepts de base et quelques notions que nous avons utilisées dans la suite de notre travail. (Voir [9], [10], [24]).

Au chapitre deux, On présente le problème de Sturum Liouville avec classes des conditions aux limites auto-adjointes séparées, couplées réelles, et couplées complexes. Et quelques résultats de multiplicités des valeurs propres. (Voir [13]).

Le chapitre trois, dans ce chapitre :

Nous avons prouvé que les valeurs propres et les fonctions propres sont des fonctions continues par rapport à tous les paramètres du problème de Sturum Liouville, et qu'il existe des fonctions propres normalisées dépendent continuement du problème. Nous avons vu des Théorèmes et des Lemmes qui montrent la continuté des valeurs propres et l'unicité de la solution y sous certains conditions aux limites. Et on a prouver la différentiabilité des valeurs propres des problèmes SL réguliers par rapport à tous les paramètres dépend du notre problème. (Voir [11]).

Préliminaires et Notions

L'objectif principal de ce chapitre est de donner un aperçu sur quelques définitions et notions fondamentales qu'on a utilisée dans la suite de cette thèse.

1 Définitions de quelques Espaces

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{k}$).

Définition 1.1 *(Espace de Banach)*

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{k}$ (en général $\mathbb{k} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Définition 1.2 *(Espace préhilbertien)*

On dit que E est un espace préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire, et pour tous x, y, $z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, satisfait les conditions suivantes :

1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$,
3. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
4. $\langle x, x\rangle > 0$ *si* $x \neq 0$,
5. $\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Définition 1.3 *(Espace de Hilbert)*

Un espace préhilbertien $(H, \langle .,. \rangle)$ *est appelé espace de Hilbert s'il est complet par sa norme*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \text{ pour } x \in H.$$

Définition 1.4 *(L'espace* $L^1(\Omega)$*)*

On pose

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \quad \text{mesurable et} \ \ |f| \in L^1(\Omega) \right\}.$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)|\, dx.$$

Définition 1.5 *(L'espace* $L^2(\Omega)$*)*

On pose

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \quad \text{mesurable et} \ \ |f|^2 \in L^1(\Omega) \right\}.$$

On note que

$$\|f\|_{L^2} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2\, dx. \right]^{1/2}$$

est une norme dans $L^2(\Omega)$.

Définition 1.6 *(L'espace* $L_{loc}(\Omega)$*)*

On pose

$L_{loc}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que la restriction de* f *à tout compact* K *de* Ω *est intégrable c'est à dire* $\int_K |f(x)|\, dx < \infty \}$.

Définition 1.7 *(L'espace* $AC_{loc}(a', b')$*)*

L'espace $AC_{loc}(a', b')$ *désigne l'ensemble des fonctions à valeurs complexes qui sont absoluement continues sur tous les intervalles compacts de* (a', b').

Soit (E, d) est un espace métrique.

Définition 1.8 *(Boule ouverte, Boule fermé)*

Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r > 0$, on appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in E,\ d(x, x_0) < r\}.$$

On appelle boule fermée de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E,\ d(x, x_0) \leq r\}.$$

Définition 1.9 *(Ouvert, Fermé)*

1. *Une partie U de E est un ouvert de E si pour tout $x \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$.*
2. *Une partie F de E est un fermé de E si et seulement si son complémentaire F^c dans E est ouvert.*

Définition 1.10 *(Compact)*

On dit qu'une partie A d'un espace métrique E est compacte si toute suite de A possède une suite extraite convergente.

Définition 1.11 *(Voisinage)*

On dit qu'une partie V d'un espace vectoriel normé E est un voisinage d'un point a de E s'il existe un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre a et de rayon r soit contenue dans V.

Définition 1.12 *(Point d'accumulation)*

Soient E un espace topologique, A une partie non vide de E, et $a \in E$. On dit que le point a est un point d'accumulation de A s'il est adhérent à A sans être isolé dans A.

2 Généralités sur les Fonctions

Définition 2.1 *(Fonction Absoluement Continue)*

Soit I un intervalle dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est absolument continue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute suite finie $([a_n, b_n])_{n \leq N}$ de sous-intervalles de I d'intérieurs disjoints,

$$\sum_{n\geq 0}(b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n\geq 0}|F(a_n) - F(b_n)| < \varepsilon.$$

Définition 2.2 *(Fonction différentiable)*

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et soit a un point de U. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire l de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + l(h) + o(\|h\|).$$

L'application l, si elle existe, est unique et s'appelle la différentielle de f en a. et On le note df_a.

Définition 2.3 *(Fontion continuement différentiable)*

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et soit a un point de U. On dit que f est continuement différentiable sur U, si f est différentiable en tout point de U. et si l'application df_a est continue.

Remarque 2.1 *Si l'application f est $F-$différentiable en a alors l'opérateur l est unique.*

Remarque 2.2 *L'opérateur l est appelé différentiel de Fréchet (ou $F-$différentiel) de f au point a, et f est dite Fréchet-différentiable (ou différentiable au sens de Fréchet) au point a. La différentielle de f au point a est notée $Df(a)$.*

Remarque 2.3 *Si l'application f est $F-$différentiable en a alors elle est continue en ce point.*

Définition 2.4 *(Quasi-dérivée)*

Soient E, F deux espaces de Banach, et $f : A \to F$ une fonction continue tel que A est un ensemble ouvert de E. f est quasi-dérivée en $x_0 \in A$ si la transformation linéaire $u : E \to F$ qui vérifie que :

Pour toute fonction continue $g : [0,1] \to A$ avec $g(0) = x_0$. telle que $g'(0) \in E$ existe, et

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(g(t)) - f(x_0)}{t} = u(g'(0)).$$

Remarque 2.4 *Si f est dérivable au sens de Frechet en x_0, alors f est quasi-différentiable et sa quasi-dérivée est égale à sa dérivée de Fréchet en x_0.*

Définition 2.5 *(Restriction)*

Soient f une fonction définie sur un ensemble E, et A une partie de E, on appelle restriction de f à A la fonction $f(x)/_A$, pour tout x de A. On restreint le domaine de définition de f à une partie de l'ensemble de départ.

Définition 2.6 *(Fonction lipshitizienne)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est lipshitizienne de rapport $k > 0$ si pour toute x, y de I

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

La fonction f est dite contractante si $k < 1$.

Une application lipshitizienne et uniformément continue. On a aussi la propriété suivante :

Proposition 2.1 *[22] Une fonction lipshitizienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable presque partout.*

Définition 2.7 *(Convergence simple)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions définies sur I, et f définie sur I. On dit que (f_n) converge simplement vers f sur I, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Définition 2.8 *(Convergence uniforme)*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions définie sur I, et f définie sur I. On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall n \geq n_0,\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Définition 2.9 *(Convergence normale)*

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge normalement sur I, si la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ convergente.

Proposition 2.2 *[22] Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge normalement sur I, alors la suite des sommes partielles $S_N\ (x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge uniformément vers une fonction S sur I.*

Définition 2.10 *(Fonction poids)*

Dans un cas discret, une fonction poids $w : A \to \mathbb{R}^+$ est une fonction positive définie sur un ensemble discret A, (généralement fini ou dénombrable). Si la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est à valeurs réelles, alors la somme pondérée est définie par

$$\sum_{a\in A} f(a)w(a).$$

Dans le cas continu, $w : \Omega \to \mathbb{R}^+$ est une fonction positive mesurable. alors w est une fonction de masse. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles, alors l'intégrale pondérée est donné par

$$\int_\Omega f(a)w(a).$$

Définition 2.11 *(Fonction de Green)*

On appelle fonction de Green toute solution élémentaire (fondamentale) dune équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants.

Définition 2.12 *(Valeur propre)*

On dit que λ est une valeur propre de l'opérateur L s'il existe une fonction f non nulle tel que $Lf = \lambda f$.

Les valeurs propres de L sont donc les scalaires λ tels que $L-\lambda I$ n'est pas injectif.

Définition 2.13 *(Fonction propre)*

Soit f une fonction non nulle sur un espace fonctionnelle (espace de fonctions), f est une fonction propre d'un opérateur linéaire L s'il existe un scalaire λ tel que $Lf = \lambda f$. On dit que f est une fonction propre associée à la valeur propre λ.

Définition 2.14 *(Valeur propre simple)*

Une valeur propre λ de l'opérateur L est dite simple si sa multiplicité algébrique $m_l(\lambda) = 1$.

Définition 2.15 *(Valeur propre double)*

On dit qu'une valeur propre λ est double si une racine multiple de l'équation caractéristique de $Lf = \lambda f$.

Définition 2.16 *La forme de Lagrange $[\cdot, \cdot]$ est définie, pour tout u, v deux fonctions par*

$$[u; v] = u(p\bar{v}') - \bar{v}(pu').$$

Définition 2.17 *(Mesure)*

Une mesure sur (E, S) est une application μ de S dans $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$, vérifie la propriété suivante :

$\sigma-$**additivité** : $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(A_n)$ *pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de S qui sont deux-à-deux disjoints (i.e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$), telle que*

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

La mesure μ est dite finie, si $\mu(E) < \infty$.

Théorème 2.1 *(Mesure de Lebesgue)*

Il existe une mesure λ et une seule sur $(\mathbb{R}, B)$ qui vérifie

$$\lambda(A) = b - a \quad \text{si } A = [a, b]\,, \text{ ou } A = [a, b[\,, \text{ ou } A =]a, b]\,, \text{ ou }]a, b[\,.$$

et qu'on appelle la mesure de Lebesgue.

3 Généralités sur les Opérateurs

Définition 3.1 *Un opérateur est une application entre deux espaces vectorielles normés.*

Opérateur linéaire : Un opérateur $A : E \to F$ est dite linéaire si et seulement si :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall(x_1, x_2) \in E,\ A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2).$$

Définition 3.2 *(Opérateurs linéaires bornés)*

Soient E et F deux espaces de Banach, $A : E \to F$ On dit que l'opérateur A est borné s'il existe $C \geq 0$ tel que

$$\|Ax\| \leq C\,\|x\|\,, \quad \forall x \in E.$$

Définition 3.3 *(Opérateur auto-adjoint)*

Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur borné A est dite auto-adjoint si $A = A^*$.

Définition 3.4 *(Opérateur intégral)*

Un opérateur intégral est un opérateur linéaire défini à l'aide d'une intégrale paramétrique suivant :

$$S(f)(t) = \int_A f(x)K(x, t)d\mu(x).$$

dans laquelle la fonction K est appelée le noyau de l'opérateur.

Soit $M : [a,b] \times [a,b] \to B$ une fonction continue, tel que B est un groupe abélien normé complet de tous les endomorphismes liées de S dans S, et on a S est un groupe abélien normé et complet, et soit $H : [a,b] \to B$ une fonction définie sur sur $[a,b]$.

Théorème 3.1 *[15] (construction de Neuberger's)*

Si $\left[\int_a^b dH.M(j,a)\right]^{-1}$ *existe dans* B*, alors il existe une fonction* $R : [a,b] \to B$ *et une fonction* $K : [a,b] \times [a,b] \to B$ *telle que : $g \in C_{[a,b]}$ et $C \subset S$, alors $Y \in C_{[a,b]}$ satisfait :*

$$Y(t) = Y(u) + g(t) - g(u) + \int_a^t dF.Y \quad et \quad \int_a^b dH.Y = C.$$

pour chaque t, u dans $[a,b]$, on a :

$$Y(t) = R(t)C + \int_a^b K(t,j)dg$$

De plus,

$$R(t) = \left[\int_a^b dH.M(j,t)\right]^{-1}.$$

où

$$K(x,t) = \begin{cases} -\left[\int_a^b dH.M(j,t)\right]^{-1} \int_u^b dH.M(j,u) + M(t,u) & si \quad a \leqq u \leqq t \\ -\left[\int_a^b dH.M(j,t)\right]^{-1} \int_u^b dH.M(j,u) & si \quad a \leqq u \leqq t. \end{cases}$$

4 Les Matrices

Définition 4.1 *(L'espace $M_{n,m}(\mathbb{C})$)*

On définit l'espace des matrices à n lignes et m colonnes des composantes complexes $M_{n,m}(\mathbb{C})$ par

$$M_{n,m}(\mathbb{C}) = \left\{ A{=}(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall i = \overline{1,n}\ et\ \forall j = \overline{1,m} \right\}.$$

Définition 4.2 *(Matrice adjointe)*

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_{n,m}(\mathbb{C})$. On appelle matrice adjointe de A la matrice

$$A^* =^t (\bar{A}) = (\bar{a}_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C}).$$

Définition 4.3 *(Rang d'une matrice)*

Le rang d'une matrice A est le nombre de lignes non nulles. On le note rgA.

Définition 4.4

1. On définit l'espace des matrices à deux lignes et deux colonnes des composantes réelles $M_{2,2}(\mathbb{R})$ par

$$M_{2,2}(\mathbb{R}) = \left\{ A{=}(a_{ij})_{1\le i,j\le 2}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall i,j = \overline{1,2} \right\}.$$

2. On définit l'espace des matrices à deux lignes et deux colonnes des composantes réelles $M_{2,2}(\mathbb{C})$ par

$$M_{2,2}(\mathbb{C}) = \left\{ A{=}(a_{ij})_{1\le i,j\le 2}, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}\ \forall i,j = \overline{1,2} \right\}.$$

3. On définit le groupe des matrices de deux lignes et deux colonnes à composantes réelles $SL_2(\mathbb{R})$ par

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ A \in M_{2,2}(\mathbb{R}), \quad \det A = 1 \right\}.$$

Problème de Sturum Liouville régulier

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de Sturum Liouville régulier.

L'équation de Sturum-Liouville est une équation différentielle ordinaire du second ordre qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + (q(x) + \lambda w(x))y = 0, \ \textit{où} \ x \in [a, b] \,. \tag{1}$$

Où $p(x)$, $q(x)$, $w(x)$ sont des fonctions données à valeurs réelles sur l'intervalle $[a, b]$; tel que $p(x) \neq 0$, et $y = y(x)$ une fonction à déterminer, λ une constante à déterminer.

Beaucoup d'équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre deux sont équivalentes à une équation de Sturum-Liouville.

Soient $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, et $\alpha_3(x)$ des fonctions définis sur l'intervalle $[a, b]$ telle que

$$\alpha_1(x) \neq 0, \ \forall x \in [a, b] \quad \text{et} \ \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} \ \textit{est intégrable sur} \ [a, b] \,.$$

Si nous définissons

$$p(x) = \exp\left[\int_a^x \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)} dt\right], \ q(x) = \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} p(x), \ w(x) = \frac{p(x)}{\alpha_1(x)}.$$

Alors l'équation différentielle ordinaire

$$\alpha_1(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha_2(x)\frac{dy}{dx} + (\alpha_3(x) + \lambda)y = 0 \tag{2}$$

est équivalente à l'équation de Sturum-Liouville (1).

En effet ;

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) = p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dp}{dx}\frac{dy}{dx}$$
$$= p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\exp\left[\int_a^x \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)}dt\right]\frac{dy}{dx} \quad (3)$$

En substituant (3), et les expressions $p(x)$, $q(x)$ dans l'équation de Sturum-Liouville (1) on trouve

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}p(x)\frac{dy}{dx} + (\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}p(x) + \lambda\frac{p(x)}{\alpha_1(x)})y = 0.$$

Exemple : Quelques équations classiques ayant la forme de l'équation de Sturum-Liouville.

1. **Equation de Bessel :**

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - v^2)y = 0 \Leftrightarrow (xy')' + (\lambda^2x - \frac{v^2}{x})y = 0.$$

2. **Equation de Legendre :**

$$(1 - x^2)y'' + v(v+1)y = 0 \Longleftrightarrow ((1 - x^2)y')' + v(v+1)y = 0.$$

5 Problème de Sturum-Liouville dans un intervalle fini

On considère dans ce travail l'équation différentielle suivante

$$-(py')' + qy = \lambda\omega y \ sur \ (a', b'), -\infty \le a' < b' \le \infty \ avec \ \lambda \in \mathbb{R} \quad (4)$$

où

$$p, q, \omega : (a', b') \to \mathbb{R}, \quad 1/p, \ q, \ \omega \in L_{loc}(a', b'), \quad \omega > 0 \ a.e. \ sur \ (a', b'). \tag{5}$$

Soit

$$I = [a, b]\,, \ a' < a < b < b', \tag{6}$$

et on considère les conditions aux limites (noté par BC)

$$A \begin{pmatrix} y(a) \\ (py')(a) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} y(b) \\ (py')(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

où A et B deux matrices complexes 2×2 satisfont :

$$\text{La matrice } 2 \times 4 \ (A/B) \text{ possède un rang complet,} \tag{8}$$

et

$$AEA^* = BEB^*, \ E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

La solution de (4) dans (a', b') est une fonction $y \in AC_{loc}(a', b')$ telle que py' $\in AC_{loc}(a', b')$ et l'équation (4) est satisfaite dans (a', b'). Ici $AC_{loc}(a', b')$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs complexes qui sont absolument continues sur tous les sous-intervalles compacts de (a', b'). Il est clair que la solution de (4) sur (a', b') est aussi une solution sur tous les sous-intervalles J de (a', b').

Notons que la notation de quasi-dérivée $(py')(t)$ est nécessaire dans (4) et (7), mais sous les conditions (5), (6) - $p(t)$ et $y'(t)$ ne peut pas existes, mais le produit des fonctions $(py')(t)$ existe et est continue pour tout $t \in (a', b')$.

Le problème de valeur aux limites de Sturum-Liouville (BVP) contient l'équation (4) avec les conditions aux limites BC (7) - (9). Sous les conditions (5) et (6), il est bien connu que ce problème est un problème SL auto-adjoint régulier qui possède un nombre infini mais dénombrable de valeurs propres réelles. Dans notre travail, nous fixons tous les paramètres sauf un qui détermine le problème SL, et étudions la dépendance des valeurs propres et des fonctions propres sur ce problème.

Pour notre proposition, il convient de diviser ces conditions aux limites auto-adjointes $(7)-(9)$ en trois sous classes disjointes et d'utiliser les représentations canoniques suivantes de ces sous-classes :

1. **Les Conditions aux limites auto-adjointes séparées.**

   Soient les conditions aux limites séparées suivantes :

$$A_1 y(a) + A_2(py')(a) = 0 \ \text{ où } A_1 \ et \ A_2 \text{ sont réels et non nuls,} \tag{10}$$

$$B_1 y(b) + B_2(py')(b) = 0 \ \text{ où } B_1 \ et \ B_2 \text{ sont réels et non nuls.} \tag{11}$$

   Ces conditions séparées peuvent être paramétrées comme suit :

$$\cos\alpha \ y(a) + \sin\alpha \ (py')(a) = 0, \quad 0 \leq \alpha < \pi; \tag{12}$$

$$\cos\beta \ y(b) + \sin\beta \ (py')(b) = 0, \quad 0 \leq \beta < \pi. \tag{13}$$

   Notons les différents normalisations dans (13) pour β telle que α utilisée dans (12). C'est pour certains des résultats ci-dessus.

2. **Les conditions aux limites auto-adjoints couplées réelles.**

   Les conditions aux limites peuvent être formulés comme suit :

$$\begin{pmatrix} y(b) \\ (py')(b) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} y(a) \\ (py')(a) \end{pmatrix} \tag{14}$$

   Où

$$K \in SL_2(\mathbb{R}), \tag{15}$$

   tel que le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices deux à deux (de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$) à coefficients réels et de déterminant égale à 1, chaque élément correspond à une fonction

$$F_A(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

3. **Les conditions aux limites auto-adjointes couplées complexes.**

   Les conditions aux limites peuvent être formulés comme suit :

$$\begin{pmatrix} y(b) \\ (py')(b) \end{pmatrix} = \exp(i\theta)\ K \begin{pmatrix} y(a) \\ (py')(a) \end{pmatrix} \tag{16}$$

   Où K satisfait (15) et $-\pi < \theta < 0$, ou $0 < \theta < \pi$.

La plupart des résultats suivants sont bien connus. Voir [19] pour quelques preuves avec des coefficients intégrables ; voir [14] pour le cas où p change de signe, et voir [3] pour le cas d'une condition aux limites couplé complexe.

6 Résultats de base et Notations

Soit l'équation (4) et l'hypothèse (5) vérifiées.

(a) Supposons que

$$p \geq 0\ .\ \text{ dans } [a,b]\,. \tag{17}$$

Alors

1. Le problème de valeur aux limites (4), (12) et (13) admet des valeurs propres réelles et simples ; il y a une infinité mais un nombre dénombrable des valeurs propres ; ils sont bornés inférieurement et peuvent être ordonnés et satisfait

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...;\ \text{ avec } \lambda_n \to +\infty \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{18}$$

   Si u_n est une fonction propre associée à λ_n, alors u_n est unique jusqu'à un multiple constante et u_n possède exactement n zéros dans l'intervalle (a, b), $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$.

Soit

$$\lambda_n = \lambda_n(a, b, \alpha, \beta, 1/p, q, w); \quad u_n = u_n(., a, b, \alpha, \beta, 1/p, q, w), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{19}$$

2. Le problème de valeur aux limites de Sturum-Liouville (4), (14) et (15) admet des valeurs propres réelles ; chacun des valeurs propres peut être simple ou double ; il y a un nombre infini mais dénombrable des valeurs propres et ils peuvent être ordonnés pour satisfait

$$-\infty < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...; \text{ avec } \lambda_n \to +\infty \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{20}$$

Notons ces valeurs propres par

$$\lambda_n = \lambda_n(a, b, K, 1/p, q, w); \quad u_n = u_n(., a, b, K, 1/p, q, w) \ , \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{21}$$

Remarquons qu'il y a un certain arbitraire dans l'indexation des fonctions propres associées à une valeur propre double.

3. Le problème de valeur aux limites BVP (4), (15), (16) admet des valeurs propres simples et réelles ; il y a une infinité mais un nombre dénombrable des valeurs propres ; et ils peuvent être ordonnés pour satisfait

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...; \text{ et } \lambda_n \to +\infty \text{ lorsque } n \to \infty \tag{22}$$

Notons ces valeurs propres par

$$\lambda_n = \lambda_n(a, b, \theta, K, 1/p, q, w); \quad u_n = u_n(., a, b, \theta, K, 1/p, q, w) \ , \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{23}$$

Si nous fixons toutes les variables sauf θ et utilisons la notation de $\lambda_n = \lambda(\theta)$, alors nous avons

$$\lambda_n(-\theta) = \lambda_n(\theta), \tag{24}$$

et le conjugué complexe d'une fonction propre de $\lambda_n(\theta)$ est une fonction propre de $\lambda_n(-\theta)$.

(b) Supposons que p change de signe dans l'intervalle $[a, b]$, c'est à dire que p est positif sur un sous-ensemble de $[a, b]$ de mesure de lebegue positive, et p négative sur un sous-ensemble de $[a, b]$ de mesure de lebesgue positive. Alors

1. Le problème de valeur aux limites (4), (12) et (13) possède des valeurs propres réelles et simples ; il y a une infinité mais un nombre dénombrable des valeurs propres ; ils ne sont pas bornés inférieurement et supérieurement et peut être ordonnée comme suite

$$... < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...;$$

$$\lambda_n \to +\infty \text{ lorsque } n \to \infty, \ \ et \ \lambda_n \to -\infty \text{ lorsque } n \to -\infty. \tag{25}$$

2. Le problème de valeur aux limites (4), (14) et (15) admet des valeurs propres réelles, chacun de ces valeurs peut être simple ou double ; il y a une infinité mais un nombre dénombrable des valeurs propres ; ils ne sont pas bornés inférieurement et supérieurement et peuvent être ordonnés et satisfait

$$... \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...;$$

$$\lambda_n \to +\infty \text{ lorsque } n \to \infty, \ \ et \ \lambda_n \to -\infty \text{ lorsque } n \to -\infty. \tag{26}$$

3. Le problème de valeur aux limites (4), (15), (16) admet des valeurs propres réelles et simples ; il y a une infinité mais un nombre dénombrable des valeurs propres ; ils ne sont pas bornés inférieurement ou supérieurement et peuvent être ordonnés et satisfait

$$... < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...;$$

$$\lambda_n \to +\infty \text{ lorsque } n \to \infty, \ \ et \ \lambda_n \to -\infty \text{ lorsque } n \to -\infty. \tag{27}$$

Les notations des valeurs propres λ_n et des fonctions propres u_n, $n \in \mathbb{Z}$, pour la partie (b) sont les mêmes qu'on a introduit dans la partie (a) pour $n \in \mathbb{N}_0$.

Dans ce qui suit notons par λ_n et u_n la n-ième valeur propre et la n-ième fonction propre d'un problème de Sturum-Liouville où $n \in \mathbb{N}_0$ si $p_0 \geq 0$ sur $[a, b]$ et $n \in \mathbb{Z}$, si p_0 change de signe sur $[a, b]$, respectivement.

Valeurs propres et Fonctions propres des problèmes de Sturum-Liouville réguliers

L'objectif principale de ce chapitre est d'étudier les valeurs propres et les fonctions propres du problème de Sturum-Liouville sur un intervalle fini de la forme $[a, b]$ tel que $a, b < \infty$.

Définition 6.1 *(Fonction propre normalisée)*

On dit qu'une fonction propre u est normalisée si elle vérifie l'égalité suivante

$$\int_a^b |u|^2 w = 1, \quad w \in L^1(a, b).$$

7 Continuté des Valeurs propres et des Fonctions propres

Dans cette section, nous montrons que les valeurs propres sont des fonctions continues par rapport à tous les paramètres du problème incluant les coefficients et on peut trouver des fonctions propres normalisées qui dépendent de tous les paramètres dans la norme uniforme.

Soit

$$\Omega = \{\omega = (a, b, A, B, 1/p, q, w)\} \tag{28}$$

tels que (5), (6), (8), (9) valables.

Pour le cas particulier des conditions aux limites séparées (12), (13), et nous utilisons aussi la notation

$$\Omega_s = \{\omega = (a, b, \alpha, \beta, 1/p, q, w)\} \tag{29}$$

et pour les cas couplées(14), (15), (16), notons que

$$\Omega_c = \{\omega = (a, b, \theta, K, 1/p, q, w)\}\,. \tag{30}$$

Lorsque $\theta = 0$, (3.3) devient

$$\Omega_{rc} = \{\omega = (a, b, K, 1/p, q, w)\}\,. \tag{31}$$

Nous voulons montrer que les valeurs propres et les fonctions propres dépend continuement du problème, c'est à dire, qu'un petit changement du problème donne un petit changement de chaque valeur propre et de chaque fonction propre.

Cela signifie que nous devons comparer le spectre des différents problèmes qui peuvent être définis sur des différents intervalles. Chaque $\omega \in \Omega$ détermine un unique problème de Sturum- Liouville : (a, b) est un intervalle, A, B les conditions aux limites, et les restrictions de p, q, w sur $[a, b]$. On observe que les valeurs de p, q, w en dehors de l'intervalle $[a, b]$, c'est à dire dans $(a', b') \backslash [a, b]$, n'affecte pas le spectre du problème déterminé par ω. Pour faciliter les comparaisons entre les valeurs propres de problème défini sur différents intervalles soit

$$\tilde{\Omega} = \left\{\omega = (a, b, A, B, \widetilde{1/p}, \tilde{q}, \tilde{w})\right\} \tag{32}$$

Où

$$\widetilde{q} = \begin{cases} q & \text{sur } [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{33}$$

et $\widetilde{1/p}$, $\widetilde{w}$ sont définies de manière similaire. Maintenant nous introduisons l'espace de Banach

$$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M_{2,2}(\mathbb{C}) \times M_{2,2}(\mathbb{C}) \times L^1(a',b') \times L^1(a',b') \times L^1(a',b') \tag{34}$$

Sous la norme

$$\|\omega\| = \|\tilde{\omega}\| = |a| + |b| + \|A\| + \|B\| + \int_{a'}^{b'} (|\widetilde{1/p}| + |\tilde{q}| + |\tilde{w}|) \tag{35}$$

où $\|A\|$ une norme de matrice fixé.

Remarquons que, puisque $1/p$, q, w sont suppsés dans $L_{loc}(a',b')$, Ω n'est pas un sous ensemble de X, mais $\tilde{\Omega}$ l'est puisque $\widetilde{1/p}$, $\tilde{q}$, $\tilde{w}$ sont dans $L^1(a',b')$.

Maintenant, nous identifions Ω avec $\tilde{\Omega}$ comme un sous ensemble de X. Alors Ω possède la norme de X, et la convergence en Ω est déterminé par cette norme. Il est facile de voir que chaque point de Ω est un point d'accumulation de Ω par rapport au norme dans X.

Les valeurs propres d'un problème de Sturum-Liouville dependent du problème. Plus précisement on a :

Théorème 7.1 *Soit* $\omega_0 = (a_0, b_0, A_0, B_0, 1/p_0, q_0, w_0) \in \Omega$. *Soit* $\lambda = \lambda_n(\omega_0)$ *la n-ième valeur propre du problème de Sturum-Liouville* (4), (7)-(9). *Alors* λ *est continue en* ω_0. *Autrement dit, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que si* $\omega \in \Omega$ *satisfait :*

$$\|\omega - \omega_0\| = |a - a_0| + |b - b_0| + \|A - A_0\| + \|B - B_0\|$$
$$+ \int_{a'}^{b'} (|\ \widetilde{1/p} - \widetilde{1/p_0}\ | + |\tilde{q} - \tilde{q}_0| + |\tilde{w} - \tilde{w}_0| < \delta, \tag{36}$$

Alors

$$|\lambda(\omega) - \lambda(\omega_0)| < \varepsilon. \tag{37}$$

Preuve. La preuve est basée sur la fonction de **Green** $G(t, s, \lambda)$ en utilisant la construction de **Neuberger's** dans [15], voir aussi [6], [20], [21]. Pour a, b, w fixés et en supposant que zéro n'est pas une valeur propre, alors tous les valeurs propres du problème de Sturum- Liouville sont les réciproques des valeurs propres de l'opérateur intégral T dont le noyau est la fonction de **Green**. dans [12] la fonction de Green dépend de toutes les paramètres.

On peut maintenant faire appel à un résultat sur le spectre d'une suite convergente d'opérateurs auto-adjoints dans l'espace de Hilbert - Théorème 7.35 dans [18] - pour conclure que les valeurs propres de T, et donc aussi leur réciproques, qui sont les valeurs propres du problème de Sturum-Liouville, sont des fonctions continues. Si zéro est une valeur propre, on transforme le problème en un équivalent qui n'a pas de zéro comme une valeur propre et procède comme ci-dessus. ■

Ensuite, nous énonçons deux lemmes nécessaires dans la preuve ultérieur qui sont aussi d'un intérêt indépendent.

Le premier déclare que la solution unique de tout problème de valeurs initiales de l'équation (4) depend continuement de tous les paramètres compris les coefficients et la fonction poids, dans la norme X.

Lemme 7.1 *Soit* (5) *vérifiée, et soit* $c \in (a', b')$ *et* $h, k \in \mathbb{C}$*. Considérons le problème de la valeur initiale constitué de l'équation* (4) *et des conditions initiales*

$$y(c) = h, \ (py')(c) = k.$$

Alors la solution unique $y = y(., c, h, k, 1/p, q, w)$ *est une fonction continue de toutes ces variables. Plus précisément, étant donné* $\varepsilon > 0$ *et tout sous-intervalle compact* J *de* (a', b')*, il existe un* $\delta > 0$ *tel que si*

$$|c - c_0| + |h - h_0| + |k - k_0| + \int_a^b (|1/p - 1/p_0| + |q - q_0| + |w - w_0|) < \delta, \qquad (38)$$

alors

$$|y(t, c, h, k, 1/p, q, w) - y(t, c_0, h_0, k_0, 1/p_0, q_0, w_0| < \varepsilon \qquad (39)$$

et

$$|(py')(t, c, h, k, 1/p, q, w) - (py')(t, c_{0,} h_0, k_0, 1/p_0, q_0, w_0| < \varepsilon \qquad (40)$$

pour tout $t \in J$.

Preuve. Cela découle du Théorème 2.7 dans [12]. ■

En conséquence du Théorème 7.1 et du Lemme 7.1 nous obtenons :

Lemme 7.2 *Soit $\omega_0 = (a_0, b_0, A_0, B_0, 1/p_0, q_0, w_0) \in \Omega$. Soit $\lambda = \lambda_n(\omega)$ la n-ième valeur propre du problème de Sturum Liouville* (4)*,* (7)*-*(9)*.*

Si $\lambda(\omega_0)$ est simple, alors il existe un voisinage M de ω_0 dans Ω tel que $\lambda(\omega)$ est simple pour tout ω dans M.

En particulier on a ce qui suit :

1. *Fixons $a, b, 1/p, q, w$ et considérons $\lambda = \lambda(K)$ comme une fonction de K, pour $K \in SL_2(\mathbb{R})$. On suppose que pour certains $K_0 \in SL_2(\mathbb{R})$, $\lambda(K_0)$ est une valeur propre simple. Alors il existe un voisinage M de K_0 dans $SL_2(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(K)$ soit simple, pour tout $K \in M$.*
2. *Fixons a, b, K, q, w et considérons $\lambda = \lambda(1/p)$ comme une fonction de $1/p$, pour $1/p \in L^1(a, b)$. On suppose que pour certains $1/p_0 \in L^1(a, b)$, $\lambda(1/p_0)$ est une valeur propre simple. Alors il existe un voisinage M de $1/p_0$ dans $L^1(a, b)$ tel que $\lambda(1/p)$ soit simple, pour tout $1/p \in M$.*
3. *Fixons $a, b, 1/p, K, w$ et considérons $\lambda = \lambda(q)$ comme une fonction de q pour $q \in L^1(a, b)$. Supposons que pour certains $q_0 \in L^1(a, b)$, $\lambda(q_0)$ est une valeur*

propre simple. Alors il existe un voisinage M de q_0 dans $L^1(a,b)$ tel que $\lambda(q)$ soit simple pour tout $q \in M$.

4. *Fixons $a, b, 1/p, q, K$, et considérons $\lambda = \lambda(w)$ comme une fonction de w pour $w \in L^1(a,b)$. On suppose que pour certains $w_0 \in L^1(a,b)$, $\lambda(w_0)$ est une valeur propre simple. Alors il existe un voisinage M de w_0 dans $L^1(a,b)$ tel que $\lambda(w)$ soit simple pour tout $w \in M$.*

Remarque 7.1 *Il a été montré dans [11] que pour $b, A, B, 1/p, q, w$ fixés, $\lambda(a)$ est simple pour certains a si et seulement si c'est simple pour tout a et de même pour b. De même, pour les conditions aux limites couplées réelles dans le Lemme 3.2.*

D'aprés la partie (1) l'ensemble S de points $K \in SL_2(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(K)$ est simple est un ensemble ouvert dans $SL_2(\mathbb{R})$. D'où son complément - l'ensemble D des points K pour lequels $\lambda(K)$ est une valeur propre double - est un ensemble fermé dans $SL_2(\mathbb{R})$.

D'aprés la partie (2) l'ensemble S des points $q \in L^1(a,b)$ tel que $\lambda(q)$ soit simple est un ensemble ouvert dans $L^1(a,b)$. D'où son complément - l'ensemble D des points $q \in L^1(a,b)$ pour laquelle $\lambda(q)$ est une valeur propre double - est un ensemble fermé dans $L^1(a,b)$. Nous voyons par le Théorème 2.3 que cette ensemble D n'est pas dense dans l'espace $L^1(a,b)$.

Cette remarque s'applique également aux cas (3) et (4).

Preuve. Pour une solution y de (4) et $u(.,\omega)$ une fonction propre d'un problème de Sturum- Liouville on définit

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix} \quad et \quad U = \begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix} \tag{41}$$

la solution vectorielle et la fonction propre vectorielle correspondantes respectivement. Puisque les valeurs propres pour les conditions aux limites séparées et les conditions aux limites couplées complexes sont toujours simples (d'aprés les résultats de a et b dans la première section), alors le Lemme 7.2 est clair pour ces cas.

Pour les conditions aux limites couplées réelles (14), (15) supposons que $\lambda(\omega_0)$ est simple pour $\omega_0 = (a_0, b_0, K_0, 1/p_0, q_0, w_0) \in \Omega_{rc}$. Supposons que la conclusion soit fausse c'est à dire qu'il existe un voisinage M de ω_0 dans Ω_{rc} tel que pour tout ω dans M, $\lambda(\omega)$ est double, alors il existe une suite $(\omega_k) \subset M \subset \Omega_{rc}$ tel que

$\omega_k \to \omega_0$ lorsque $k \to \infty$ avec $\lambda(\omega_k)$ est une valeur propre double pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Choisisons les vecteurs linéairement indépendants v_1, v_2 dans $\mathbb{R}^2$ et déterminons les solutions vectorielles $U^1(., \omega_k)$ et $U^2(., \omega_k)$ de (4) avec $\lambda = \lambda(\omega_k)$ et les conditions initiales

$$U^1(a, \omega_k) = v_1, \quad U^2(a, \omega_n) = v_2.$$

Alors $U^1(., \omega_k)$ et $U^2(., \omega_k)$ sont des fonctions vectorielles satisfaisant la condition aux limites

$$U^j(b, \omega_k) = K_k U^j(a, \omega_k), \qquad k \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1, 2}. \tag{42}$$

Soit $k \to \infty$ dans (42) et en utilisant le Théorème 7.1 et le Lemme 7.1. nous concluons que Y^j est continue de toutes ses variables c'est à dire

$$\text{Pour } \omega_k \text{ une suite de } \Omega_{rc} \text{ tel que } \omega_k \to \omega_0 \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Alors

$$Y(., \omega_k) \to Y(., \omega_0), \;\; k \to \infty$$

$$i.e. \; \lim_{k \to \infty} Y(., \omega_k) = Y(., \omega_k).$$

donc on obtient

$$Y^j(b, \omega_k) = K_0 Y^j(a, \omega_0), \;\; j = \overline{1, 2} \tag{43}$$

où Y^j est la limite uniforme de U^j lorsque $k \to \infty$ pour $j = \overline{1, 2}$. Ainsi les composantes supérieurs de Y^j, $j = \overline{1, 2}$ sont deux fonctions propres linéairement indépendantes de $\lambda(\omega_0)$. Comme $\lambda(\omega_0)$ est simple et $\lambda(\omega_k)$ est double donc contradiction, alors $\lambda(\omega_k)$ est simple $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Une fonction propre normalisée u d'un problème de Sturm-Liouville est une fonction propre qui satisfait

$$\int_a^b |u|^2 \, w = 1. \tag{44}$$

Alors nous montrons un résultat pour des fonctions propres normalisées. Remarquons que ceux-ci ne sont pas uniquement déterminés par (43). Dans le cas d'une valeur propre simple elles sont uniques, mais pour une valeur propre double il existe des paires de fonctions propres normalisées linéairement indépendantes.

Théorème 7.2 *Soient les notations et les hypothèses du Théorème 7.1 vérifiées.*

(i) *Supposons que la valeur propre $\lambda(\omega_0)$ est simple pour certains $\omega_0 \in \Omega$ et soit $u = u_n(.,\omega_0)$ une fonction propre normalisée de $\lambda(\omega_0)$. Alors il existe des fonctions propres normalisées $u = u_n(.,\omega)$ de $\lambda(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$, telles que*

$$u(.,\omega) \to u(.,\omega_0), \quad (pu')(.,\omega) \to (pu')(.,\omega_0), \quad \textit{lorsque } \omega \to \omega_0 \textit{ dans } \Omega, \quad (45)$$

sont uniformséments sur tout sous-intervalle compact J de (a',b').

(ii) *Supposons que $\lambda(\omega)$ est une valeur propre double pour tout ω dans un voisinage M de ω_0 dans Ω.*

Soit $u = u(.,\omega_0)$ une fonction propre normalisée de $\lambda(\omega_0)$. Alors il existe des fonctions normalisées $u = u(.,\omega)$ de $\lambda(\omega)$ tel que

$$u(.,\omega) \to u(.,\omega_0), \quad (pu')(.,\omega) \to (pu')(.,\omega_0), \quad \textit{lorsque } \omega \to \omega_0 \textit{ dans } \Omega, \quad (46)$$

sont uniforméments sur tout sous intervalle compact J de (a',b'). Notons que dans ce cas, il y a deux fonctions propres normalisées linéairement indépendentes u_j de $\lambda(\omega_0)$, il existe une paire de fonctions propres normalisées linéairement indépendantes telle que l'une converge vers u_1 et l'autre vers u_2 lorsque $\omega \longrightarrow \omega_0$ dans Ω.

Preuve.

(i) On démontre premièrement qu'il existe des fonctions propres (pas forcément normalisées) $u_n(.,\omega)$ telles que (45) vérifiées uniformément dans J de (a',b'). Comme précédement, pour la solution y de (4) et une fonction propre $u(.,\omega)$ soient

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{U}=\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}.$$

la solution vectorielle et la fonction propre vectorielle (respectivement). Supposons que les conditions aux limites soient séparées. Choisisons les fonctions propres $u = u_n(.,\omega)$ pour $\omega \in \Omega$, ω prés ω_0 de Ω, qui satisfont la même condition initiale en $c \in (a,b)$. Alors d'aprés le Lemme 7.1 et le Théorème 7.1 on a la convergence uniforme de $U(.,\omega) \to U(.,\omega_0)$ dans J. Supposons les conditions aux limites soient couplées (14), (15), (16) avec $-\pi < \theta \leq \pi$. Supposons que $\lambda_n(\omega_0)$ est simple. Alors d'aprés le lemme 7.2 il existe un voisinage M de ω_0 *tel que* $\lambda(\omega)$ est simple pour tout $\omega \in M$. Pour tout $\omega \in \Omega$ chosissons une fonction propre $u = u_n(.,\omega)$ de $\lambda(\omega)$ qui satisfait

$$\|U(a_0,\omega)\| = |u(a_0,\omega)| + |(pu')(a_0,\omega)| = 1, \quad \text{et } u(t,\omega) > 0 \text{ pour t prés de } a_0.$$

Il suffit de montrer que

$$U(a_0,\omega) \to U(a_0,\omega_0) \qquad \text{lorsque } \omega \to \omega_0 \text{ dans } \Omega \tag{47}$$

puisque la convergence uniforme sur $[a,b]$ découle du Théorème 7.1 et du Lemme 7.1. Si (47) n'est pas vérifiée, alors il existe une suite $(\omega_k) \subset \Omega$, $\omega_k \to \omega_0$ telle que

$$U(a_0,\omega_0) - U(a_0,\omega_k) := v_k \to v_0 \neq 0, \qquad \text{lorsque } \omega \to \omega_0 \tag{48}$$

Soient Y_k, Z_k, Y les solutions vectorielles de (4) avec le même $\omega = \omega_0$, et $\lambda = \lambda(\omega_0)$ déterminés par les conditions initiales

$$Y_k(a_0) = v_k,\; Z_k(a_0) = U(a_0,w_k),\; Y(a_0) = v_0, \quad k \in \mathbb{N},$$

respectivement. On a

$$Y_k(a_0) = v_k,$$

et on a

$$Z_k(a_0) = U(a_0,w_k),$$

Alors d'aprés l'unicité de la solution du problème de valeur initiale on a

$$Y_k = U(.,\omega_0) - Z_k \text{ sur l'intervalle } [a_0, b_0]. \tag{49}$$

En utilisant les conditions aux limites (16) nous obtenons

$$\begin{aligned} Y_k(b_0) = \begin{pmatrix} (y_k)(b_0) \\ (py_k')(b_0) \end{pmatrix} &= U(b_0,\omega_0) - Z_k(b_0) \\ &= U(b_0,\omega_0) - U(b_k,\omega_k) + U(b_k,\omega_k) - Z_k(b_0) \\ &= exp(i\theta_0)K_0\ U(a_0,\omega_0) - \exp(i\theta_k)K_kU(a_k,\omega_k) + U(b_k,\omega_k) - Z_k(b_0) \\ &= exp(i\theta_0)K_0\ U(a_0,\omega_0) - exp(i\theta_0)K_0\ U(a_0,\omega_k) + exp(i\theta_0)K_0\ U(a_0,\omega_k) \\ &\quad - \exp(i\theta_k)K_kU(a_k,\omega_k)\ + U(b_k,\omega_k) - Z_k(b_0). \\ &= exp(i\theta_0)K_0\,[U(a_0,\omega_0) - \ U(a_0,\omega_k)] + exp(i\theta_0)K_0U(a_0,\omega_k) \end{aligned}$$

$$- \exp(i\theta_k)K_kU(a_k,\omega_k) + U(b_k,\omega_k) - Z_k(b_0). \tag{50}$$

Soit $k \to \infty$ et en utilisant le Lemme 7.1 on obtient

$$Y(b_0) = \exp(i\theta)K_0Y(a_0).$$

Puisque $Y(a_0) = v_0 \neq 0$, Y est une fonction propre vectorielle non nulle correspondante à la valeur propre $\lambda(\omega_0)$. Puisque $\lambda(\omega_0)$ est simple, il existe une constante $h \neq 0$ telle que $Y = hU(.,\omega_0)$.

En particulier, $v_0 = Y(a_0) = hU(a_0,\omega_0)$. Avec $k \to \infty$ dans (48) on obtient :

$$U(a_0,\omega_0) - \lim_{k\to\infty} U(a_0,\omega_k) = \lim_{k\to\infty} v_k\ = v_0 = hU(a_0,\omega_0).$$

i.e.

$$\lim_{k\to\infty} U(a_0,\omega_k) = (1-h)U(a_0,\omega_0).$$

Remarquons que $u(t,\omega_k)$ et $u(t,\omega_0)$ ont le même signe pour t prés de a_0, on a que $1-h>0$ et par conséquent

$$\lim_{k\to\infty}\|U(a_0,\omega_k)\| = (1-h)\|U(a_0,\omega_0)\|.$$

donc contradiction avec $\|U(a_0,\omega_k)\| = \|U(a_0,\omega_0)\| = 1$. Alors (47) est valable.

(ii) Supposons que $\lambda(\omega)$ est une valeur propre double pour tout ω dans un voisinage M de ω_0. Alors nous pouvons argumenter comme avant en choisissant les fonctions propres $u(.,\omega)$ de $\lambda(\omega)$ qui satisfont la même condition initiale à c pour certains $c\in(a,b)$ car une combinaison linéaire de deux fonctions propres linéairement indépendantes peut être choisi pour satisfait des conditions initiales arbitraires.

La discussion ci-dessus montre que pour chaque condition aux limites auto-adjointe et chaque indice fixé n, la fonction propre $u_n(.,\omega)$ de $\lambda(\omega)$ et sa quasi-dérivée $(pu_n')(.,\omega)$ sont uniforméments covergentes en ω, dans chaque sous-intervalle compact de (a',b') i.e.

$$u(.,\omega)\to u(.,\omega_0);\quad \text{lorsque } \omega\to\omega_0.$$

et

$$(pu')(.,\omega)\to (pu')(.,\omega_0);\quad \text{lorsque } \omega\to\omega_0.$$

Par normalisation des fonctions propres on trouve le résultat. ∎

8 Les propriétés de Différentiabilité des Valeurs propres

Dans cette section nous montrons que les valeurs propres sont des fonctions différentiables de tous les paramètres du problème.

Rappelons la définition du dérivée de Frechet :

Définition 8.1 *Un opérateur T d'un espace de Banach X dans un espace de Banach*

Y est différentiable en un point $x \in X$, s'il existe un opérateur linéaire borné dT_x : $X \to Y$ tel que pour $h \in X$

$$|T(x+h) - T(x) - dT_x(h)| = o(h) \quad losque\ h \to 0 \tag{51}$$

Définition 8.2 *On dit qu'une fonction $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ est non oscillatoire, ou on note NO, en un point $c \in (a,b)$ s'il existe un nombre positif δ tel que f est non négatif ou non positif sur $(c-\delta, c)$ et sur $(c, c+\delta)$; le signe de f n'a pas besoin d'être le même sur ces intervalles.*

Théorème 8.1 *Soit $\omega = (a, b, A, B, 1/p, q, w) \in \Omega$. Soit $\lambda = \lambda_n(\omega)$ et soit $u = u_n(., \omega)$ une fonction propre normalisée de λ pour le problème de valeur aux limites (4), (7) – (9).*

1. *Fixons toutes les composantes de ω sauf l'extrémité gauche a et soit $\lambda = \lambda(a)$ et $u = u(., a)$. Supposons que p et q soient non oscillatoires sur $(a', b']$. Alors λ est différentiable et*

$$\lambda'(a) = \frac{1}{p(a)}(pu')^2(a) - u^2(a)\left[q(a) - \lambda(a)\omega(a)\right] \quad sur\ \ (a', b']\,. \tag{52}$$

   En particulier, si p,q,w sont continues et non oscillatoires en $a \in (a', b']$. Alors

$$\lambda'(a) = \frac{1}{p(a)}(pu')^2(a) - u^2(a)\left[q(a) - \lambda(a)\omega(a)\right]. \tag{53}$$

2. *Fixons toutes les composantes de ω sauf b et soit $\lambda = \lambda(b)$ et $u = u(., b)$. Supposons que p et q soient non oscillatoires sur $[a', b')$. Alors λ est différentiable et*

$$\lambda'(b) = \frac{1}{p(b)}(pu')^2(b) - u^2(b)\left[q(b) - \lambda(b)\omega(b)\right] \ \ sur\ \ [a', b')\,. \tag{54}$$

   En particulier, si p, q, w sont continues et non oscillatoires en $a \in [a', b')$. Alors

$$\lambda'(b) = \frac{1}{p(b)}(pu')^2(b) - u^2(b)\left[q(b) - \lambda(b)\omega(b)\right]. \tag{55}$$

Preuve. La preuve est donnée dans [11] pour le cas des conditions aux limites séparées (-voir Théorème 3.4-).

La preuve du cas des conditions aux limites couplées complexes (16) est similaire à celle du cas des conditions aux limites couplées réelles aprés prise en compte du fait que les fonctions propres de $\lambda_n(\theta, K)$ et $\lambda_n(-\theta, K)$ sont des conjuguées complexes.
■

Remarque 8.1 *Il est intéressant de noter que* (52)-(55) *sont indépendants de la fonction propre normalisée particulière* u. *Ceci n'est pas étonnant dans le cas d'une valeur propre simple car alors la condition de normalisation* (42) *détermine uniquement* u *jusqu'à signe. Mais dans le cas d'une valeur propre double ceci est assez supernante car alors la condition de normalisation est satisfaite par deux fonctions propres.*

Nous arrivons maintenant à noter résultat principal.

Théorème 8.2 *Soit* $\omega = (a, b, A, B, 1/p, q, w) \in \Omega$. *Soit* $\lambda = \lambda_n(\omega)$ *et soit* $u = u_n(., \omega)$ *une fonction propre normalisée de* λ *pour le problème de valeur aux limites* (4), $(7) - (9)$. *Supposons que*

(i) $\lambda(\omega)$ *est une valeur propre simle.*

(ii) $\lambda(\rho)$ *est une valeur propre double pour chaque* ρ *dans un voisinage* $M \subset \Omega$ *de* ω.

Alors λ *est continuement différentiable par rapport à chaque variable* α, β *pour les conditions aux limites séparées* (12) (13), *continuement différentiable par rapport à chaque variable* θ, K *pour les conditions aux limites couplées* (15) (16), *et continuement différentiable par rapport à chaque variable* $1/p$,q,w *pour les conditions aux limites (BC) générales* (7)-(9) *dans le sens apprioré. Les dérivées sont données par*

1. *Fixons toutes les composantes de* ω *sauf* α, *et soit* $\lambda = \lambda(\alpha)$ *et* u=$u(.,\alpha)$. *Alors* λ *est différentiable et*

$$\lambda'(\alpha) = -u^2(a) - (pu')^2(a), \quad 0 \leq \alpha < \pi \tag{56}$$

2. *Fixons toutes les composantes de ω sauf β, et soit $\lambda = \lambda(\beta)$ et u=u(.,β). Alors λ est différentiable et*

$$\lambda'(\beta) = u^2(b) + (pu')^2(b), \quad 0 < \beta \leq \pi. \tag{57}$$

3. *Fixons toutes les composantes de ω sauf θ et soit $\lambda = \lambda(\theta)$ et u=u(.,θ). Alors λ est différentiable en θ pour tout θ satisfait$-\pi < \theta < 0$ ou $0 < \theta < \pi$ et*

$$\lambda'(\theta) = -2\,\mathrm{Im}\left[u(b)(p\bar{u}')(b)\right], \tag{58}$$

où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire de z.

4. *Fixons toutes les composantes de ω sauf K et soit $\lambda = \lambda(K)$ et $u = u(.,K)$. Suppoosons que K satisfait (15). Alors λ est différentiable dans $SL_2(\mathbb{R})$ et sa dérivée de Frechet est donnée par*

$$d\lambda_K(H) = [p\bar{u}'(b), \quad -\bar{u}(b)]\, HK^{-1}\begin{pmatrix} u(b) \\ (pu')(b) \end{pmatrix}, \ H \in M_{2,2}(\mathbb{R}),$$

$$\textit{tel que } K + H \in SL_2(\mathbb{R}). \tag{59}$$

Notons que l'expression " différentiable dans $SL_2(\mathbb{R})$" ci-dessus indique que la définition 8.1 doit être modifiée car (59) n'est pas vérifiée pour tout H dans l'espace de Banach $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

5. *Fixons toutes les composantes de ω sauf $1/p$ et on considère λ comme une fonction de 1/p $\in L^1(a,b)$. Alors λ est différentiable au sens de Frechet et sa dérivée est donnée par*

$$d\lambda_{(1/p)}(h) = \int_a^b |pu'|^2\, h, \ h \in L^1(a,b). \tag{60}$$

6. *Fixons toutes les composantes de ω sauf q et on considère λ comme une fonction de $q \in L^1(a,b)$. Alors λ est Frechet différentiable et sa dérivée de*

Frechet est donnée par

$$d\lambda_q(h) = \int_a^b |u|^2 h, \; h \in L^1(a,b). \tag{61}$$

7. *Fixons toutes les composantes de ω sauf w et on considère λ comme une fonction de $w \in L^1(a,b)$. Alors λ est différentiable et sa dérivée de Frechet est donnée par*

$$d\lambda_w(h) = \lambda \int_a^b |u|^2 h, \; h \in L^1(a,b). \tag{62}$$

Remarque 8.2 1. *L'hypothèse selon laquelle $\lambda(\omega)$ est simple ou $\lambda(\rho)$ est double pour chaque ρ dans un voisinage de ω est automatiquement satisfait pour tout condition aux limites séparé et tout condition aux limites couplé complexe. Cependant, il n'est pas toujours satisfait pour la condition aux limites couplé réel* (14), (15). *Dans ce cas, la question se pose :* (60), (63) *se maintiennent à ω_0 lorsque $\lambda(\omega_0)$ est une valeur propre double mais qu'il n'existe pas de voisinage M de ω_0 tel que $\lambda(\omega)$ est double pour tout $\omega \in M$.*

2. *Si $q_k \to q$ dans $L^1(a,b)$ Alors, d'aprés le Théorème 7.1 on a que $\lambda(q_k) \to \lambda(q)$. De même pour 1/p et w.*

Preuve. Nous établisons d'abord (56) à (62). Puisque les preuves de (56) et (57) sont similaires nous verons de prouver (57). On suppose que $\beta \neq \pi/2$, la preuve pour le cas $\beta = \pi/2$ est similaire.

Soit $u = u(.,\beta)$ et $u(.,\beta+h)$ des fonctions propres normalisées à valeurs réelles de $\lambda = \lambda_n(\beta)$ et $\lambda = \lambda_n(\beta+h)$, respectivement, pour $h \in \mathbb{R}$ suffisament petit.

De (4) nous obtenons

$$[\lambda(\beta+h) - \lambda(\beta)]\, uvw = \lambda(\beta+h)uvw - \lambda(\beta)uvw = -u(pv')' - v(-pu')' = -u(pv')' + v(pu')'$$

$$= -[u,v]'$$

où $[u,v] := u(pv') - v(pu')$ est le support de Lagrange.

De (12), (13) on a

$$\cos(\beta+h)\ v(b)-\sin(\beta+h)\ (pv\prime)(b)=0 \quad \Rightarrow \cos(\beta+h)\ v(b)=\sin(\beta+h)\ (pv\prime)(b)$$

$$\Rightarrow v(b)=\tan(\beta+h)\ (pv\prime)(b).$$

et

$$\cos\beta\ u(b)-\sin\beta\ (pu\prime)(b)=0 \quad \Rightarrow \cos\beta\ u(b)=\sin\beta\ (pu\prime)(b)$$

$$\Rightarrow u(b)=\tan\beta\ (pu\prime)(b).$$

donc par intégration on obtient :

$$[\lambda(\beta+h)-\lambda(\beta)]\int_a^b uvw=-\int_a^b [u,v]'=-\left[u,v\right](b)=[v(pu')-u(pv')](b)$$

$$=\left[\tan(\beta+h)\ (pv\prime)(pu')-\tan\beta\ (pu\prime)(pv')\right](b)$$

$$=\left[\tan(\beta+h)-\tan\beta\right](pu\prime)(b)(pv')(b). \tag{63}$$

En divisant les deux côtés de (63) par h et en prenant la limite lorsque $h\to 0$.

on obtient

$$\lambda'(b)=\sec^2\beta(pu')^2(b)=(\tan^2\beta+1)(pu')^2(b)=\tan^2\beta(pu')^2(b)+(pu')^2(b)=u^2(b)+(pu')^2(b). \tag{64}$$

Ceci complète la preuve de (57).

Maintenant, on démontre (58) et (59) , notons que (16) implique que pour toute fonction u du problème de valeur aux limites (4), (15) et (16) on a

$$(pu',-u)(b)=(u,pu')(b)\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\exp(i\theta)(u,pu')(a)K^T\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\exp(i\theta)(pu',-u)(a)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}K^T\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\exp(i\theta)(pu',-u)(a)K^{-1},$$

donc

$$(pu', -u)(b) = \exp(i\theta)(pu', -u)(a)K^{-1}.$$

ou

$$(p\bar{u}', -\bar{u})(b) = \exp(i\theta)(p\bar{u}', -\bar{u})(a)K.$$

Pour prouver (58), soit $\lambda(\theta) = \lambda_n(\theta, K)$, et soit $u = u_n(.,\theta)$, $v = u_n(.,\theta+h)$ pour $h \in \mathbb{R}$ suffisament petit, similaire à (63) nous avons :

de (4)

$$[\lambda(\theta+h) - \lambda(\theta)]uvw = -\left[u, v\right]'$$

et par intégration on a

$$[\lambda(\theta+h) - \lambda(\theta)]\int_a^b uvw = -\left[u, \bar{v}\right]_a^b = -\left[u(p\bar{v}') - \bar{v}(pu')\right]_a^b$$

$$= -\left[(p\bar{v}', \ -\bar{v})\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}\right]_a^b = -(p\bar{v}', \ -\bar{v})(b)\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(b) + (p\bar{v}', \ -\bar{v})(a)\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a)$$

$$= -\exp(i\theta)(p\bar{v}', \ -\bar{v})(b)K\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a) + \exp(i(\theta+h)(p\bar{v}', \ -\bar{v})(b)K\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a)$$

$$= -\exp(i\theta)(p\bar{v}', \ -\bar{v})(b)K\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a) + \exp(i\theta)\exp(ih)(p\bar{v}', \ -\bar{v})(b)K\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a)$$

$$= \exp(i\theta)(p\bar{v}', \ -\bar{v})(b)K\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a)\left[\exp(ih) - 1\right].$$

En divisant les deux côtés par h et en laissant $h \to 0$ on obtient

$$\lambda'(\theta) = i\exp(i\theta)(p\bar{u}', \ -\bar{u})(b)K\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a) = i(p\bar{u}', \ -\bar{u})(b)\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(b)$$

$$= i\left[u(p\bar{u}') \ - \bar{u}(ppu')\right](b) = -2\,\mathrm{Im}(u(p\bar{u})(b)).$$

Pour prouver (59), soit $u = u_n(.,K)$, $v = u_n(.,K+H)$ pour $K, K+H \in SL_2(\mathbb{R})$.

Procédant de la même manière que la démonstration ci-dessus on obtient

$$[\lambda(K+H)-\lambda(K)]\int_a^b u\bar{v}w = -((p\bar{v}'),-\bar{v})(b)\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(b) + (p\bar{v}',-\bar{v})(a)\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a)$$

$$= -\exp(i\theta)(p\bar{v}',-\bar{v})(b)K\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a) + \exp(i\theta)(p\bar{v}',-\bar{v})(b)(K+H)\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a)$$

$$= -\exp(i\theta)(p\bar{v}',-\bar{v})(b)K\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a) + \exp(i\theta)(p\bar{v}',-\bar{v})(b)K\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a)$$

$$+\exp(i\theta)(p\bar{v}',-\bar{v})(b)H\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a)$$

$$= \exp(i\theta)(p\bar{v}',-\bar{v})(b)H\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a) = (p\bar{v}',-\bar{v})(b)HK^{-1}\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(b)$$

Car on a

$$\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(b) = \exp(i\theta)K\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(a)$$

$$[\lambda(K+H)-\lambda(K)]\int_a^b u\bar{v}w = (p\bar{u}',-\bar{u})(b)HK^{-1}\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(b) - (p\bar{u}',-\bar{u})(b)HK^{-1}\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(b)$$

$$+\ (p\bar{v}',-\bar{v})(b)HK^{-1}\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(b)$$

$$= (p\bar{u}',-\bar{u})(b)HK^{-1}\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(b) + (p\bar{v}'-p\bar{u}',\bar{u}-\bar{v})(b)HK^{-1}\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(b)$$

$$= (p\bar{u}',-\bar{u})(b)HK^{-1}\begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}(b) + o(H).$$

En conséquence

$$\lambda(K+h)-\lambda(K)=(p\bar{u}',-\bar{u})(b)HK^{-1}\begin{pmatrix}u\\pu'\end{pmatrix}(b)+o(H).$$

En divisant par h lorsque $h\to 0$ on obtient (59) .

Pour prouver (60), soit $u=u_n(.,1/p)$, $v=u_n(.,1/p_h)$ ou $1/p_h=1/p+h$, $h\in L^1(a,b)$. Alors $1/p\in L^1(a,b)$ implique que $1/p_h\in L^1(a,b)$ et

$$p-p_h=pp_hh$$

En utilisant (4) et l'intégration par parties on obtient

$$[\lambda(1/p_h)-\lambda(1/p)]\int_a^b u\bar{v}w=-((p_h\bar{v}'),-\bar{v})(b)\begin{pmatrix}u\\pu'\end{pmatrix}(b)+(p\bar{v}',-\bar{v})(a)\begin{pmatrix}u\\pu'\end{pmatrix}(a)$$

$$[\lambda(1/p_h)-\lambda(1/p)]\int_a^b u\bar{v}w=[-u(p_h\bar{v}')+\bar{v}(pu')]_a^b+\int_a^b(pu')(p_h\bar{v}')h.$$

Pour toutes les conditions aux limites nous avons que

$$[-u(p_h\bar{v}')+\bar{v}(pu')]_a^b=0$$

En notant que $1/p_h\to 1/p$ lorsque $h\to 0$ dans $L^1(a,b)$ et en utilisant le Théorème 7.1 et le Lemme 7.1 nous avons

$$[\lambda(1/p\ +h)-\lambda(1/p)]\,(1+o(1))^{-1}=\int_a^b |pu'|^2\,h+o(h)$$

et par conséquent

$$\lambda(1/p \ + h) - \lambda(1/p) = (\int_a^b |pu'|^2 h + o(h))(1 + o(1))^{-1} = \int_a^b |pu'|^2 h + o(h)$$

lorsque $h \to 0$ dans $L^1(a, b)$. Ceci complète la preuve de (60).

Pour montrer (61), soient $u = u_n(., q)$, $v = u_n(., q + h)$ ou $h \in L^1(a, b)$. En utilisant (4) et l'intégration par parties on obtient

$$[\lambda(q \ + h) - \lambda(q)] \int_a^b u\bar{v}w = [-u(p\bar{v}') + \bar{v}(pu')]_a^b + \int_a^b u\bar{v}h = \int_a^b u\bar{v}h.$$

D'aprés le Théorème 7.1 et le Lemme 7.1 on obtient

$$[\lambda(q + h) - \lambda(q)] (1 + o(1)) = \int_a^b |u|^2 h + o(h)$$

et par conséquent

$$\lambda(q + h) - \lambda(q) = (\int_a^b |u|^2 h + o(h))(1 + o(1))^{-1} = \int_a^b |u|^2 h + o(h)$$

lorsque $h \to 0$ dans $L^1(a, b)$. Ceci complète la démonstration de (61).

La preuve de (62) est similaire à celle de (61). Maintenant (56) − (62) ont été établie la différentiabilité continue découle de ceux-ci et du Théorème 7.2.

■

Théorème 8.3 *Fixons toutes les composantes de ω sauf q et soit $\lambda = \lambda_n(q)$ pour n un fixé. soit S_1 et S_2 être les sous-ensembles de $L^1(a, b)$ tel que $\lambda(q)$ est similaire pour tout $q \in S_1$ et $\lambda(q)$ est une valeur propre double pour $q \in S_2$. Alors S_1 est un ouvert dans $L^1(a, b)$ et S_2 est un fermé et nulle part dense de $L^1(a, b)$.*

La conclusion çi-dessus vaut également si q est remplacé par $1/p$ ou w.

Preuve. D'aprés le Lemme 7.2 si $\lambda(q)$ est une valeur propre simple pour $q \in S_1$ alors il existe un voisinage M de q tel que pour tout q_0 dans M on a $\lambda(q_0)$ est une valeur propre simple donc on déduit que S_1 est un ouvert dans $L^1(a,b)$, et comme $\lambda(q)$ est une valeur propre double pour $q \in S_2$ alors S_2 est le complémentaire de S_1 donc S_2 est un fermé dans $L^1(a,b)$. Supposons que S_2 n'est nulle part dense (dense dans $L^1(a,b)$) i.e. $\bar{S}_2 = L^1(a,b)$ et puisque S_2 est un femé on a $S_2 = L^1(a,b)$. Alors il existe un $q \in S_2$ et un voisinage M de q dans $L^1(a,b)$ qui contenu dans S_2. Puisque $\lambda(q)$ est une valeur propre double, il y a deux fonctions propres normalisézs linéairement indépendants $u = u_1(.,q)$ et $u = u_2(.,q)$ donc contaduction avec le caractère de l'unicité du dérivée de Fréchet d'une fonction différentiable.

Les preuve pour les autres cas sont similares et sont donc omises. ■

Conclusion et prespectives

Les problèmes de Sturm-Liouville liés aux extrémités de l'intervalle sur les queles des fonctions sont définies est donc met on oeuvre toute l'arsenal provenante des opérateurs auto-adjoints et des espaces de Banach et de Hilbert pour pouvoir exprimer les solutions.

Dans ce mémoire on a démontrer l'existence et l'unicité de la solution du notre problème ainsi que les valeurs propres et les fonctions propres dépent continuement du problème posé, chaque changement du problème donne un changement des valeurs propres et des fonctions propres, et on a comparer le spectre des différents problèmes et que les valeurs propres sont des fonctions différentiables de toutes les paramètres du problème, et comme perspective on a :

1. Le problème de Sturm-Liouville inverse.
2. L'etude des points limites et des cercles limites.
3. La perturbation de l'opérateur de Sturm-Liouville.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. B. Bailey, W. N. Everitt, J. Weidmann, and A. Zettl. Regular approximations of singular Sturm-Liouville problems. Results in Mathematics, v. 23 (1993), 3-22.

[2] P. B. Bailey, W. N. Everitt, and A. Zettl. Computing eigenvalues of singular Sturm-Liouville problems. Results in Mathematics, v. 20 (1991), 391-423.

[3] P. B. Bailey, W. N. Everitt, and A. Zettl. Regular and singular Sturm-Liouville problems with coupled boundary conditions. Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, (to appear).

[4] P. B. Bailey, W. N. Everitt, and A. Zettl. Sleign2 : An eigenfunction- eigenvalue code for singular Sturm-Liouville problems. pre-print.

[5] P. B. Bailey, M. K. Gordon, and L. F. Shampine. Automatic solution ot the Sturm-Liouville problem. ACM TOMS 4(1978), 193-208.

[6] E. A. Coddington and A. Zettl. Hermitian and anti-hermitian properties of Green's matrices. Pacific J. Math. 18 (1966), 451-454.

[7] M. Dauge and B. Helffer. Eigenvalues Variation. I. Neumann Problem for Sturm-Liouville Operators. J. Diff. Equations, v. 104 (1993), 243-262.

[8] W. N. Everitt and D. Race. On necessary and su cient conditions for the existence of caratheodory solutions of ordinary di erential equations. Quaestiones Math. 3, no.2, (1976), 507-512.

[9] Haïm BREZIS. Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications. MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[10] Jean-Pierre RAYMOND. Calcul Différentiel. Université Paul Sabatier.

[11] Q. Kong and A. Zettl. Dependence of eigenvalues of Sturm-Liouville problems on the boundary. J. Differential Equations, (to appear).

[12] Q. Kong and A. Zettl. Linear ordinary differential equations. WSSIAA v.3, (1994), (Special volume dedicated to W.Walter), Inequalities and Applications, edited by R. P. Agarwal, 381-397.

[13] Q. Kong and A. Zettl. Eigenvalues of regular Sturm-Liouville problems.

[14] M. Moeller. On the unboundedness below of the Sturm-Liouville operator. Results in Mathe matics, (to appear).

[15] J. W. Neuberger. Concerning boundary value problems. Pacific J. Math. 10 (1960), 1385-1392.

[16] J. Poeschel and E. Trubowitz. Inverse Spectral Theory. Academic Press, New York /Lon don/Sydney, 1987.

[17] J. Pryce. Do2kef-nag fortran library routine document. NAG FORTRAN Library Routine Document.

[18] J. Weidmann. Linear Operators in Hilbert Spaces, volume 68 of Graduate Texts in Marhemat ics. Springer Verlag, Berlin, 1980.

[19] J. Weidmann. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, volume 1258 of Lecture Notes in Mathematics 1258. Springer Verlag, Berlin, 1987.

[20] A. Zettl. Adjoint and self-adjoint problems with interface conditions. SIAM J. Applied Math. 16, (1968), 851-859.

[21] A. Zettl. Adjointness in nonadjoint boundary value problems. SIAM J. Applied Math. 17, (1969), 1268-1279.A. Zettl. Adjointness in nonadjoint boundary value problems. SIAM J. Applied Math. 17, (1969), 1268-1279.

Sites internet

[22] Bibm@th, la bibliothèque des mathématiques. http ://www.bibmath.net.

[23] Quelques rappels de Topologie sur un espace métrique. Ecole Polytechnique, 2010-2011. EV2-Mathématiques Appliquées. https ://www.cmap.polytechnique.fr.

[24] Simple Eigenvalues. https ://mast.queensu.ca.