



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد – الطارف

Université Chadli Bendjedid – El Tarf

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات

Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Calcul Stochastique

### Thème

## Distributions Tempérées et Analyse Mathématiques de l'Equation de Schrödinger

Présenté par:

Guedouar Rayene

Devant le Jury :

|                     |     |                               |              |
|---------------------|-----|-------------------------------|--------------|
| Dr. Bouaziz Asma.   | MCB | Univ Chadli Bendjedid El Tarf | Président    |
| Dr. Mehri Allaoua   | MCA | Univ Chadli Bendjedid El Tarf | Rapporteur   |
| Dr. Bouselsal Naila | MCB | Univ Chadli Bendjedid El Tarf | Examinatrice |

Année Universitaire 2020-2021



## ***Remerciment***

Avant tous, nous tenons à remercier de tout cœur notre dieu "ALLAH" le tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

En tout premier lieu, mes profonds remerciements, ma gratitude sont destinés à mon encadreur, D.r Mehri Allaoua. Je le remercie sincèrement pour ses encouragements, ses conseils précieux et pour le temps qu'il m'a accordé.

Nous remercions les membres de jury d'avoir accepté d'évaluer notre travail.

Nous remercions vivement nos famille sur tous nos parents pour l'aide et le soutien moral.

Je tiens a remercié mes collègues de ma promotion 2021 de Mathématiques,

D'avoir passé ensemble des moments de travail agréable.





## **Je dédie ce travail à :**

**Ma chère mère "Saliha" : Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.**

**Mon très cher père "Miloude" : aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.**

**A mes chères Sœurs : Soumaya ,Nour El Houda et Taqwa.**

**A mon frère: Ahmed Amin.**

**A toute la famille Guedouar et Ziti.**

**A tous mes enseignants depuis mes premières années d'études.**

**A tous les membres de ma promotion**



**Rayene**



# Distributions Tempérées et Analyse Mathématique de l'Equation de Schrödinger

Guedouar Rayene

Département de mathématiques, université Chadli Bendjedid, El-Tarf

# Table des matières

|                                                                                                                                            |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Introduction</b>                                                                                                                        | <b>7</b> |
| <b>1 Rappel et Généralités sur l'Espace de Schwartz, les Distributions Tempérées, la Transformation de Fourier et l'Espace de Sobolev.</b> | <b>8</b> |
| 1.1 Espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ . . . . .                                                                                         | 9        |
| 1.2 Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^n)$ . . . . .                                                                             | 11       |
| 1.2.1 Transformation de Fourier inverse . . . . .                                                                                          | 11       |
| 1.2.2 Propriétés de la transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^n)$ . . . . .                                                          | 11       |
| 1.3 Espace $S'(\mathbb{R}^n)$ et la transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .                                            | 12       |
| 1.3.1 Espace $S'(\mathbb{R}^n)$ des distribution tempérées . . . . .                                                                       | 12       |
| 1.3.2 Convergence des suite des distributions tempérées . . . . .                                                                          | 13       |
| 1.3.3 Transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .                                                                          | 14       |
| 1.3.4 Propriétés de la transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .                                                         | 14       |
| 1.3.5 Transformation de Fourier et convolution . . . . .                                                                                   | 16       |
| 1.3.6 Transformation de Fourier des distributions à support compact . . .                                                                  | 16       |
| 1.4 L'espace $C^k(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ et $C^k(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^n))$ . . . . .                                           | 17       |
| 1.5 Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ . . . . .                                                                                   | 18       |
| 1.5.1 Densité des fonctions régulières . . . . .                                                                                           | 19       |

## Table des matières

---

|          |                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.5.2    | Opérations sur l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ . . . . .        | 20        |
| <b>2</b> | <b>Équation de Schrödinger</b>                               | <b>21</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .                                       | 22        |
| 2.2      | L'Équation de Schrödinger linéaire homogène . . . . .        | 23        |
| 2.3      | Régularité de la solution dans $S'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .  | 23        |
| 2.4      | Régularité de la solution dans $S(\mathbb{R}^n)$ . . . . .   | 27        |
| 2.5      | Régularité de la solution dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ . . . . . | 29        |
| 2.6      | Forme de la solution . . . . .                               | 30        |
| 2.7      | Décroissance à l'infini de la solution . . . . .             | 34        |
| 2.8      | Équation de Schrödinger linéaire non homogène . . . . .      | 34        |
|          | <b>Conclusion</b>                                            | <b>35</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>                                         | <b>36</b> |

## Résumé

Ce mémoire est une analyse mathématique de l'équation de Schrödinger qui décrit l'évolution dans le temps d'une particule quantique soumise à l'action d'un potentiel. Un théorème d'existence et d'unicité, et des résultats de régularité de la solution ont été démontrés. L'outil principal de la démonstration est basé sur la transformée de Fourier dans l'espace des distributions tempérées et les espaces de Sobolev.

**Mots clés :**

Transformation de fourier, espace des distributions tempérées, espace de Schwartz, espace de Sobolev, équation de Schrodinger.

**Mathematical sciences classification 2020 :** 82XX- 35QXX- 35Q55- 35J10.

## Abstract

This thesis is a mathematical analysis of the Schrödinger equation which describes the evolution over time of a quantum particle subjected to the action of a potential. An existence and uniqueness theorem, and regularity results of the solution have been proved. The main tool of the proof is based on the Fourier transform in spaces of tempered distributions and Sobolev spaces.

**Key words :**

Fourier transformation, temperate distribution space, Schwartz space, Sobolev space, Schrodinger equation.

**Mathematical sciences classification 2020 :** 82XX- 35QXX- 35Q55- 35J10.

## ملخص

هذه المذكرة عبارة عن تحليل رياضي لمعادلة شرودنجر التي تصف التطور بمرور الوقت لجسيم كمي خاضع لفعل جهد. قمنا فيها بإثبات نظرية الوجود و التفرد وانتظام الحل. الطريقة الرئيسية المعتمدة للإثبات هي تحويلات فورييه في فضاء التوزيعات المعتدلة و فضاءات صوبوليف.

### الكلمات المفتاحية:

تحويل فورييه ، فضاء التوزيعات المعتدلة ، فضاء شوارتز ، فضاء صوبوليف ، معادلة شرودنجر.

**Mathematical sciences classification 2020 : 82XX- 35QXX- 35Q55- 35J10.**

# Introduction

Les équations aux dérivées partielles permettent d'aborder d'un point de vue mathématique des phénomènes observés, par exemple dans les domaines de la physique et de la chimie. Les situations dépendant du temps se traduisent plus particulièrement par des équations d'évolutions tenant d'éventuelles interactions entre objets et événements.

L'équation de Schrödinger est l'équation de base de la mécanique quantique décrivant l'évolution dans le temps du vecteur d'état d'un système quantique arbitraire. Son interprétation physique est généralement faite dans le cadre de l'interprétation de Copenhague, l'interprétation standard de la mécanique quantique. Elle a été établie sous sa forme primitive en 1926 par Erwin Schrödinger et a été généralisée par Paul Dirac quelques années après. Initialement, elle reprenait les idées des mathématiciens William Rowan Hamilton et Felix Klein pour prolonger la théorie des ondes de matière de De Broglie [9].

Schrödinger découvrit donc une équation aux dérivées partielles décrivant un système mécanique Hamiltonien à l'aide d'un scalaire de champ, se propageant dans l'espace à  $n$  dimensions. Appliquée à une particule dans un champ, elle est très proche d'une équation d'onde dans l'espace et le temps, d'où parfois le nom de mécanique ondulatoire pour cette forme particulière et restreinte de mécanique quantique. Ceci explique d'ailleurs aussi pourquoi le vecteur d'état est parfois appelé fonction d'onde du système voir [1, 2, 9].

La résolution numérique de l'équation de Schrödinger reste un problème très important intervenant dans de nombreux calculs de physique. Cette équation trouve plusieurs méthodes de résolution, comme la méthode variationnelle de Ritz, méthode des semi-groupes [5], méthode des valeurs propres de Sturm-Liouville, .....etc.

Ce mémoire est divisé en deux parties. Dans la première nous rappelons quelques résultats sur les distributions tempérées, les transformations de Fourier, la convolution des distributions, puis nous définissons des espaces fonctionnels d'ordre de régularité élevé, comme les espaces de classe  $C^k$  et les espaces de Sobolev, pour plus de détails on renvoie aux ouvrages [3, 4, 6, 7, 8]. La deuxième partie est dédiée à l'étude mathématique

de l'équation de Schrödinger. Nous démontrons un théorème d'existence et d'unicité, et des théorèmes de régularité de la solution pour une donnée initiale définie dans différents espaces fonctionnels, voir les références [1, 7]. Nous prouvons également un résultat important du point de vue physique : c'est la décroissance à l'infini de la solution.

# Chapitre 1

Rappel et Généralités sur l'Espace  
de Schwartz, les Distributions  
Tempérées, la Transformation de  
Fourier et l'Espace de Sobolev.

## Notations et Hypothèses

Soit un multi indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ . On appelle ordre de  $\alpha$  et on note  $|\alpha|$  l'entier :

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

on pose  $\alpha! = \alpha_1! + \dots + \alpha_n!$ ,  $\partial^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$  où  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est un point de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha_i < \beta_i, \quad \forall i = \overline{1, n}$ , si  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ .

Soit  $u$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\alpha$  un élément de  $\mathbb{N}^n$ , on note  $\partial^\alpha u$  la dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $u$ .

$$\begin{aligned} \partial^\alpha u &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u \\ \text{et } D^\alpha u &= \frac{1}{i^\alpha} \partial^\alpha u \end{aligned}$$

On note  $D(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions test défini par,

$$D(\mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \exists K \text{ compacte telle que } K \subset \mathbb{R}^n, \text{ supp}(u) \subset K\}.$$

On munit l'espace  $D(\mathbb{R}^n)$  de la norme

$$P_m(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(x)|, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \text{supp}(u) \subset K.$$

On note  $D'(\mathbb{R}^n)$  l'espace des distributions, c'est l'ensemble des formes linéaires continues de  $D(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathbb{C}$ .

### 1.1 Espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$

La transformée de fourier d'un élément de  $D(\mathbb{R}^n)$  n'est jamais à support compact ce qui induit une difficulté pour définir la dualité à partir de  $D(\mathbb{R}^n)$ . Il faut donc trouver un autre espace soit invariant par la transformée de fourier. L'espace de Schwartz  $S(\mathbb{R}^n)$  conviendra s'appelle aussi espace des fonctions à décroissance rapide.

## Chapitre 1. Rappel et Généralités sur l'Espace de Schwartz, les Distributions Tempérées, la Transformation de Fourier et l'Espace de Sobolev.

---

**Définition 1.1.** *L'espace  $S(\mathbb{R}^n)$  est constitué des fonctions  $u$  appartenant à  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que :*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha, \beta} > 0; |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < C_{\alpha, \beta}, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

– On peut dire que toutes les dérivées de  $u$  tendant vers zéros à l'infini c'est à dire

$$|\partial^\beta \varphi(x)| \leq \frac{c}{|x^\alpha|} \rightarrow 0, \text{ quand } |x| \rightarrow \infty$$

"plus vite " que toute puissance de  $\frac{1}{|x|}$ .

– On remarque que tout élément de  $S$  vérifie l'assertion suivante : le produit des dérivées de  $u$  par un polynôme quelconque est une fonction bornée.

**Exemple 1.1.** 1. *La fonction  $u(x) = e^{-|x|^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  appartient à  $S(\mathbb{R}^n)$  mais n'appartient pas à  $D(\mathbb{R}^n)$ .*

2. *La fonction  $u(x) = e^{-\lambda|x|^2}$  telle que  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\text{Re } \lambda > 0$  appartient à  $S(\mathbb{R}^n)$ .*

3. *La fonction  $u(x) = e^{-|x|}$  est à décroissance rapide mais n'est pas de classe  $C^\infty$ , donc  $e^{-|x|} \notin S(\mathbb{R}^n)$ .*

4. *La fonction  $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$  est de classe  $C^\infty$  mais elle n'est pas à décroissance rapide, donc  $\frac{1}{1+x^2} \notin S(\mathbb{R}^n)$ .*

5.  *$D(\mathbb{R}^n)$  s'injecte dans  $S(\mathbb{R}^n)$ .*

**Proposition 1.1.** 1. *Muni de semi-normes :*

$$P_{\alpha, \beta}(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

*$S(\mathbb{R}^n)$  est un espace vectoriel métrisable et complet.*

2. *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , les applications  $\varphi \rightarrow x^\alpha \varphi$  et  $\varphi \rightarrow \partial^\beta \varphi$  sont continues de  $S(\mathbb{R}^n)$  dans  $S(\mathbb{R}^n)$  ( on dit que  $S(\mathbb{R}^n)$  est stable par la dérivation et la multiplication par des polynômes).*

3. Le produit de deux éléments de  $S(\mathbb{R}^n)$  appartient à  $S(\mathbb{R}^n)$ .

4.  $D(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $S(\mathbb{R}^n)$ .

5. Pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ .

## 1.2 Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^n)$

**Définition 1.2.** : Pour  $u \in S(\mathbb{R}^n)$ , la transformée de fourier de  $u$  que l'on note  $\hat{u}$  où  $\mathcal{F}(u)$  est la fonction sur  $\mathbb{R}^n$  définie par :

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

où  $x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_n\xi_n$ .

Cette définition à bien un sens puisque d'après la proposition(1.1(5)),  $e^{-ix\xi}u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

### 1.2.1 Transformation de Fourier inverse

**Théorème 1.1.** [6, 7] La transformée de Fourier est une application linéaire bijective bicontinue de  $S(\mathbb{R}^n)$  dans  $S(\mathbb{R}^n)$  (isomorphisme), si on pose pour  $v \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\overline{\mathcal{F}}(v)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} v(\xi) d\xi \quad (1.3)$$

alors  $\overline{\mathcal{F}}$  envoie  $S(\mathbb{R}^n)$  dans  $S(\mathbb{R}^n)$  et on a  $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = id_{S(\mathbb{R}^n)}$  i.e.  $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ .

**Remarque 1.1.** : Il en résulte de l'égalité  $\overline{\mathcal{F}}v(x) = (2\pi)^n \mathcal{F}v(-x)$  que l'on a

$$\mathcal{F}\mathcal{F}(u) = (2\pi)^n \check{u}, \quad \text{où} \quad \check{u}(x) = u(-x) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{F}}\overline{\mathcal{F}}(u) = (2\pi)^{-n} \check{u}, \quad \overline{\mathcal{F}}u = (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}}(\check{u}).$$

### 1.2.2 Propriétés de la transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^n)$

Nous résumons les propriétés de la transformée de Fourier dans le théorème suivant [1, 6, 7].

**Théorème 1.2.** : Pour  $u, v \in S(\mathbb{R}^n)$ , on a :

**Chapitre 1. Rappel et Généralités sur l'Espace de Schwartz, les Distributions Tempérées, la Transformation de Fourier et l'Espace de Sobolev.**

---

i)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)v(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\hat{v}(x)dx.$$

ii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\bar{v}(x)dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\bar{\hat{v}}(\xi)d\xi \quad (\text{formule de Plancherel}).$$

En particulier :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \quad (\text{identité de Parseval}).$$

iii)

$$u*v \in S(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(u*v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v) = \hat{u}\hat{v} \quad \text{où } (*) \text{ est le produit de convolution.}$$

iv)

$$\mathcal{F}(uv) = \widehat{uv} = (2\pi)^{-n} \hat{u} * \hat{v}.$$

v)

$$\widehat{D_j u} = \xi_j \hat{u} \quad \text{où} \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

vi)

$$\widehat{x_j u} = -D_j \hat{u} \quad .$$

## 1.3 Espace $S'(\mathbb{R}^n)$ et la transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^n)$

### 1.3.1 Espace $S'(\mathbb{R}^n)$ des distribution tempérées

**Définition 1.3.**  $S'(\mathbb{R}^n) = S'$  est le dual topologique de  $S$  i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires continues de  $S$  dans  $\mathbb{C}$ . Donc une application linéaire  $T : S \rightarrow \mathbb{C}$  appartient à  $S'$  si et seulement si :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists k, l \in \mathbb{N}, \exists c > 0 : |\langle T, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in S \quad (1.4)$$

## Chapitre 1. Rappel et Généralités sur l'Espace de Schwartz, les Distributions Tempérées, la Transformation de Fourier et l'Espace de Sobolev.

---

Nous citons quelques propriétés de l'espace des distributions tempérées.

**Proposition 1.2.** 1.  $S'(\mathbb{R}^n)$  s'injecte dans  $D'(\mathbb{R}^n)$  par l'application  $T \rightarrow T|_{D(\mathbb{R}^n)}$ .

2. L'espace des distributions à support compact  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  s'identifie à un sous espace de  $S'(\mathbb{R}^n)$ .

3. Si  $T \in S'$  alors  $\frac{\partial T}{\partial x_j}$  et  $x_j T \in S', \forall j = \overline{1, n}$ . Donc si  $P$  est un polynôme sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , le produit  $P \cdot \partial^\alpha T \in S'$ .

4. Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  vérifiant la condition suivante :

$$\exists k \in \mathbb{N}; \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha > 0 : |\partial^\alpha f(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^k, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

(on dit que  $f$  est à croissance lente). Alors pour  $T \in S'$ , le produit  $f.T \in S'$ , où  $\langle f.T, \varphi \rangle = \langle T, f.\varphi \rangle, \forall \varphi \in S$ .

5. Pour  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$  car  $S(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq q \leq \infty$  (prendre  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ).

En particulier les fonctions sommables où à carré intégrables appartiennent à  $S'(\mathbb{R}^n)$ .

On peut interpréter les inclusions des espaces par le schéma suivant,

$$\begin{array}{ccccc} D(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & S(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & S'(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & D'(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Les flèches indiquent l'inclusion.

**Définition 1.4.** : Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on dit que  $f$  est à croissance lente si elle vérifie la condition suivante :

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; \exists C_\alpha : |\partial^\alpha f(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^m, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

### 1.3.2 Convergence des suite des distributions tempérées

**Définition 1.5.** Soit  $T_j$  une suite de  $S'$ , et  $T \in S'$ , on dit que  $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T$  dans  $S'$  si  $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ .

### 1.3.3 Transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^n)$

**Définition 1.6.** : Si  $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ , on appelle transformée de Fourier de  $T$  notée  $\mathcal{F}T$  où  $\hat{T}$  la forme linéaire sur  $S(\mathbb{R}^n)$  définie par :

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in S \quad (1.5)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \\ T &\longrightarrow \mathcal{F}T \end{aligned}$$

- On définit  $\overline{\mathcal{F}}T$  par une formule analogue à (1.5) :

$$\langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

**Théorème 1.3.** [2, 3, 6] La transformation de Fourier est une application linéaire bijective et bicontinue (isomorphisme) sur les suites de  $S'(\mathbb{R}^n)$  sur  $S'(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ .

### 1.3.4 Propriétés de la transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^n)$

**Proposition 1.3.** On a les propriétés suivantes

i. La transformation de Fourier dans  $S'(\mathbb{R}^n)$  coïncide avec la transformation de Fourier dans  $S(\mathbb{R}^n)$  si  $T \in S(\mathbb{R}^n)$ .

Pour  $T \in S'(\mathbb{R}^n)$  on a :

ii.

$$\mathcal{F}\mathcal{F}T = (2\pi)^n \check{T} \quad \text{où} \quad \langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle \quad \text{et} \quad \check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

iii.

$$\mathcal{F}(D_j T) = \xi_j \mathcal{F}T \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

iv.

$$\mathcal{F}(x_j T) = -D_j(\mathcal{F}T) = -D_j \hat{T}.$$

## Chapitre 1. Rappel et Généralités sur l'Espace de Schwartz, les Distributions Tempérées, la Transformation de Fourier et l'Espace de Sobolev.

---

**Exemple 1.2.** 1.

$$\mathcal{F}(\delta_0) = 1.$$

2.

$$\mathcal{F}(1) = (2\pi)^n \delta_0.$$

3.

$$\mathcal{F}(e^{-z|x|^2}) = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}} \right)^n e^{\frac{-|\xi|^2}{4z}}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

4. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et  $T = e^{i\lambda|x|^2} \in S'(\mathbb{R}^n)$ , alors :

$$\mathcal{F}(T) = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda|}} e^{i \cdot \operatorname{sgn}(\lambda) \cdot \frac{\pi}{4}} \right)^n e^{-i \frac{|\xi|^2}{4\lambda}}$$

où  $\operatorname{sgn}(\lambda)$  désigne le signe de  $\lambda$ .

En effet pour  $\varepsilon > 0$ , posons

$$T_\varepsilon = e^{-\varepsilon|x|^2} e^{i\lambda|x|^2} \in S(\mathbb{R}^n).$$

On a  $T_\varepsilon \longrightarrow T$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ , car

$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|x|^2} e^{i\lambda|x|^2} \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

converge d'après le théorème de convergence dominée, vers

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda|x|^2} \varphi(x) dx = \langle T, \varphi \rangle.$$

On en déduit que  $\mathcal{F}(T_\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{F}(T)$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ . Ensuite,  $\mathcal{F}(T_\varepsilon) = \mathcal{F}(e^{-z_\varepsilon|x|^2})$  où  $z_\varepsilon = \varepsilon - i\lambda$ . D'après l'exemple 3,

$$\mathcal{F}(T_\varepsilon) = (\sqrt{\pi})^n \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{z_\varepsilon}} \right)^n \cdot e^{\frac{-|\xi|^2}{4z_\varepsilon}},$$

si  $\lambda > 0$ ,  $z_\varepsilon \longrightarrow \lambda e^{-i\frac{\pi}{2}}$ , donc  $\sqrt{z_\varepsilon} \longrightarrow \sqrt{\lambda} e^{-i\frac{\pi}{4}}$  et si  $\lambda < 0$ ,  $z_\varepsilon \longrightarrow |\lambda| e^{i\frac{\pi}{2}}$  donc  $\sqrt{z_\varepsilon} \longrightarrow \sqrt{|\lambda|} e^{i\frac{\pi}{4}}$ . En résumé  $\sqrt{z_\varepsilon} \longrightarrow \sqrt{|\lambda|} e^{-i \cdot \operatorname{sgn}(\lambda) \cdot \frac{\pi}{4}}$ .

D'autre part  $e^{\frac{-|\xi|^2}{4z_\varepsilon}}$  converge vers  $e^{\frac{-|\xi|^2}{4\lambda}}$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ . En effet

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4(\varepsilon - i\lambda)}} \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2(\varepsilon + i\lambda)}{4(\varepsilon^2 + \lambda^2)}} \varphi(\xi) d\xi$$

et

$$\left| e^{-\frac{|\xi|^2(\varepsilon+i\lambda)}{4(\varepsilon^2+\lambda^2)}} \right| \cdot |\varphi(\xi)| = \left| e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^2}{4(\varepsilon^2+\lambda^2)}} \right| \cdot |\varphi(\xi)| \leq |\varphi(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

donc le théorème de convergence dominée fournit la conclusion. On en déduit que

$$\mathcal{F}(e^{+i\lambda|x|^2}) = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda|}} e^{i \cdot \text{sgn}(\lambda) \cdot \frac{\pi}{4}} \right)^n e^{-i \frac{|\xi|^2}{4\lambda}}, \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

### 1.3.5 Transformation de Fourier et convolution

La convolution de deux distributions existe si au moins une distribution est à support compact. On a le théorème,

**Théorème 1.4.** Si  $T \in S'(\mathbb{R}^n)$  et  $S \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$  on a :

$$T * S \in S'(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}(T) \cdot \mathcal{F}(S).$$

La transformée du produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier. En effet,

**Théorème 1.5.** Soit  $T \in S'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$T * \varphi \in S'(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(T * \varphi) = \hat{\varphi} \cdot \hat{T}.$$

### 1.3.6 Transformation de Fourier des distributions à support compact

Une distribution nulle à l'infini en dehors d'un ensemble compact, sa transformée de Fourier est une fonction régulière. Plus précisément on a le théorème suivant.

**Théorème 1.6.** Si  $T \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\mathcal{F}(T)$  est une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  donnée par

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = \langle T_x, e^{-i \cdot x \xi} \rangle.$$

## Chapitre 1. Rappel et Généralités sur l'Espace de Schwartz, les Distributions Tempérées, la Transformation de Fourier et l'Espace de Sobolev.

---

De plus , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\left| \partial_{\xi}^{\alpha} \hat{T}(\xi) \right| \leq C_{\alpha} (1 + |\xi|)^k$$

pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

### 1.4 L'espace $C^k(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ et $C^k(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^n))$

Nous considérons dans ce paragraphes les distributions et les fonctions de la variable d'espace  $x$  et la variable temps  $t$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , soit  $T_t = T(t)$  un élément de  $S'(\mathbb{R}^n)$  [7].

**Définition 1.7.** Soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , on dit que  $T_t \in C^k(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$  si pour tout  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $t \longrightarrow \langle T_t, \varphi \rangle$  est de classe  $C^k(\mathbb{R})$ .

**Proposition 1.4.** Soit  $(T_t) \in C^k(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ , pour tout  $0 \leq l \leq k$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exists T_t^{(l)}$  une distribution telle que :

$$T_t^{(l)} \in C^{k-l}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$$

et

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^l \langle T_t, \varphi \rangle \right] (t_0) = \left\langle T_{t_0}^{(l)}, \varphi \right\rangle, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in S'(\mathbb{R}^n).$$

Ici le crochet de dualité est défini sur  $S(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi$  ne dépend que de la variable  $x$ . Si la fonction  $\varphi$  dépend des deux variables  $x$  et  $t$ , on a les deux propositions suivantes.

**Proposition 1.5.** 1. Soit  $(T_t) \in C^0(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$  et  $\psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ , alors  $t \longrightarrow \langle T_t, \psi(t, \cdot) \rangle_{S'(\mathbb{R}^n)}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $(T_t) \in C^1(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$  et  $\psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  alors  $t \longrightarrow \langle T_t, \psi(t, \cdot) \rangle$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\frac{d}{dt} \langle T_t, \psi(t, \cdot) \rangle = \left\langle T_t^{(1)}, \psi(t, \cdot) \right\rangle + \left\langle T_t, \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \cdot) \right\rangle.$$

## Chapitre 1. Rappel et Généralités sur l'Espace de Schwartz, les Distributions Tempérées, la Transformation de Fourier et l'Espace de Sobolev.

---

**Proposition 1.6.** Soit  $(T_t) \in C^0(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^n))$ . Pour  $\psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ , Posons

$$\langle T, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle T_t, \psi(t, \cdot) \rangle dt$$

alors,  $T_t \in S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ .

**Remarque 1.2.** Si  $T \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  alors  $T_t = T(t, \cdot)$  et pour  $\psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ , nous définissons le crochet de dualité sur l'espace  $S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  par

$$\langle T, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} T(t, x) \psi(t, x) dx dt.$$

**Définition 1.8.** Soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , on dit que  $\psi_t \in C^k(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^n))$  si l'application  $t \longrightarrow \frac{\partial^m \psi_t}{\partial t} \in S(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall m \leq k$ .

Si la distribution  $T$  ne dépend que de la variable  $x$ , et la fonction  $\psi$  dépend des deux variables  $x$  et  $t$ , on a la proposition suivante.

**Proposition 1.7.** Soit  $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi \in C^k(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^n))$  où  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  on pose  $F(t) = \langle T, \psi(t, \cdot) \rangle$ . Alors  $F \in C^k(\mathbb{R})$ .

### 1.5 Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$

Les espaces de Sobolev ont une structure d'espace de Hilbert et forment un outil fondamental pour mesurer la régularité de la solution des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

**Définition 1.9.** Soit  $s \in \mathbb{R}$ ,  $H^s(\mathbb{R}^n)$  est un espace vectoriel telle que

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) \mid \left\{ \xi \longrightarrow (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \right\} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

on muni  $H^s(\mathbb{R}^n)$  du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{S(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \mathcal{F}(u) \overline{\mathcal{F}(v)}(\xi) d\xi, \quad u, v \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad (1.6)$$

et

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.7)$$

La norme correspondante. Voici quelques propriétés de l'espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposition 1.8.** 1. Si  $s_1 \geq s_2$ , on a  $H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ .

2. Muni du produit scalaire (1.6),  $H^s(\mathbb{R}^n)$  est un espace de Hilbert.

3. Si  $s = k \in \mathbb{N}$  et  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $H^k(\Omega)$  et  $H^s(\mathbb{R}^n)$  coïncident algébriquement et topologiquement telle que :

$$\begin{aligned} H^k(\Omega) &= \{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega); |\alpha| \leq k\}. \\ \langle u, v \rangle_k &= \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad u, v \in H^k(\Omega) \\ \|u\|_{H^k(\Omega)} &= \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

4. Si  $s = 0$ , on a  $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ .

5. L'espace  $L^1(\mathbb{R}^n)$  est inclu dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$  pour  $s < -\frac{n}{2}$ . En effet on a  $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  d'où  $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , si  $s < -\frac{n}{2}$ .

6.  $S(\mathbb{R}^n)$  est contenu dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

7. La distribution de Dirac  $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$  si seulement si  $s < -\frac{n}{2}$ . En effet  $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  si seulement si  $s < -\frac{n}{2}$ .

### 1.5.1 Densité des fonctions régulières

Il y en a beaucoup de théorèmes de densité relatifs à l'espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . Nous citons uniquement deux théorèmes [2, 6, 7].

**Théorème 1.7.**  $S(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

**Théorème 1.8.**  $D(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

### 1.5.2 Opérations sur l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$

La multiplication par une fonction régulière, et la dérivation des distributions de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  sont stables. On a le théorème suivant.

**Théorème 1.9.** 1. Si  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  et  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  et on a

$$\|\varphi u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n} . 2^{\frac{|s|}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\xi)| d\xi \right) \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \quad (1.8)$$

2. Si  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  et  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  on a  $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|\partial^\alpha u\|_{H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} .$$

## Chapitre 2

# Équation de Schrödinger

### 2.1 Introduction

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la physique quantique, et aussi la loi de Newton en physique classique.

On retrouve cette équation pour décrire des phénomènes assez variés que ce soit dans l'optique quantique (propagation d'un faisceau de laser), la physique atomique (supraconductivité, condensation de Bose-Einstein), la technologie électronique (semiconducteurs, transistors, mémoires), la physique des plasmas, l'astrophysique, la microscopie électronique, la neutronique, la chimie ou encore la biologie.

Considérons une particule (électron ou proton) de masse  $m$  libre se déplace sur l'axe des  $X$  et soumise à une force dérivant d'un potentiel  $V(x)$ .

La fonction d'onde de la particule satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante dite équation de Schrodinger .

$$ih \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -\frac{h^2}{2m} \Delta_x u(t, x) + qV(t, x)u(t, x).$$

Où :

- $u(t, x)$  : La fonction d'onde correspondante à la particule d'énergie  $E$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , et  $t \in \mathbb{R}$ .
- $q$  : La charge électrique élémentaire.
- $h$  : La constante de Planck réduite telle que  $h = 6,62607015 \times 10^{-34} j.s$ .
- $m$  : La masse de l'électron (ou proton).
- $V$  : Le potentiel électrique.

On peut dire aussi que l'équation de Schrödinger c'est l'équation du mouvement d'une particule quantique soumise à l'action d'un potentiel  $V$ .

La signification physique de la fonction d'onde repose sur le fait suivant :

La probabilité de trouver un électron (ou proton) d'énergie  $E$  à l'instant  $t$  dans le volume  $dx$  autour de la position  $x$  est donnée par  $|u(t, x)|^2$ . Notons que la fonction  $u(t, x)$  est une valeur imaginaire.

## 2.2 L'Équation de Schrödinger linéaire homogène

Soit le problème

$$\begin{cases} ih \frac{\partial}{\partial t} u_t(t, x) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x u_t(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = g(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $g$  est une fonction donnée.

On pose  $t = \hbar t'$ ,  $x = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} x'$  et  $u(t, x) = U(t', x')$ . Pour des raisons de calcul on garde les mêmes notations, le problème (2.1) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - i \Delta u = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.2)$$

Dans ce qui suit nous allons établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1) pour une fonction  $g$  donnée dans l'espace des distributions tempérées, voir aussi [1, 7].

## 2.3 Régularité de la solution dans $S'(\mathbb{R}^n)$

**Théorème 2.1.** *Soit  $g \in S'(\mathbb{R}^n)$ . Il existe une unique  $u = (u_t)$  appartenant à  $C^\infty(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ , telle que :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - i \Delta u = 0 & \text{dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \\ u_0 = g(x) \end{cases} \quad (2.3)$$

*Démonstration.* 1°) **Existence** : Pour  $t \in \mathbb{R}$ , posons,

$$u_t = \overline{\mathcal{F}}(e^{-it|\xi|^2} \hat{g}) \quad (2.4)$$

Ceci un sens car

$$\hat{g} \in S'(\mathbb{R}^n), e^{-it|\xi|^2} \hat{g} \in S'(\mathbb{R}^n)$$

et donc  $u_t \in S'(\mathbb{R}^n)$ . D'autre part  $u_0 = g$ , et pour  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\langle \hat{u}_t, \varphi \rangle = \left\langle \hat{g}, e^{-it|\xi|^2} \varphi \right\rangle,$$

## Chapitre 2. Équation de Schrödinger

---

et d'après la proposition (1.4) on déduit que  $\hat{u}_t \in C^\infty(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ .

Comme

$$\langle \hat{u}_t, \varphi \rangle = \langle u_t, \hat{\varphi} \rangle$$

on a aussi  $u_t \in C^\infty(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ .

D'après la proposition 1.6  $u$  est définie par,

$$\langle u_t, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle u_t, \psi(t, \cdot) \rangle dt \quad , \forall \psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n). \quad (2.5)$$

Alors pour  $\psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ , et on appliquons les résultats de la section 1.3 du chapitre 1, il vient

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u - i\Delta u, \psi \right\rangle &= - \left\langle u, \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta \psi \right\rangle \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle u_t, \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta \psi \right\rangle dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle \overline{\mathcal{F}}(\hat{u}_t), \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta \psi \right\rangle dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{u}_t, \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta \psi\right) \right\rangle dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle e^{-it|\xi|^2} \hat{g}, \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta \psi\right) \right\rangle dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle e^{-it|\xi|^2} \hat{g}, \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \overline{\mathcal{F}}(i\Delta \psi) \right\rangle dt \end{aligned}$$

Et d'après la proposition 1.3, on a

$$\overline{\mathcal{F}}(i\Delta \psi) = -i\xi^2 \overline{\mathcal{F}}(\psi(t, \cdot)).$$

Alors

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u - i\Delta u, \psi \right\rangle &= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle e^{-it|\xi|^2} \hat{g}, \left(\frac{\partial}{\partial t} - i|\cdot|^2\right) \overline{\mathcal{F}}(\psi(t, \cdot)) \right\rangle dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{g}, \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - i|\cdot|^2\right) \overline{\mathcal{F}}(\psi(t, \cdot))\right] e^{-it|\xi|^2} \right\rangle dt \end{aligned}$$

or,

$$\frac{\partial}{\partial t} [e^{-it|\xi|^2} \overline{\mathcal{F}}(\psi(t, \cdot))] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - i|\cdot|^2\right) \overline{\mathcal{F}}(\psi(t, \cdot))\right] e^{-it|\xi|^2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u - i\Delta u, \psi \right\rangle &= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle \hat{g}, \frac{\partial}{\partial t} [e^{-it|\xi|^2} \overline{\mathcal{F}}(\psi(t, \cdot))] \right\rangle dt \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \hat{g}, e^{-it|\xi|^2} \overline{\mathcal{F}}(\psi(t, \cdot)) \right\rangle dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

car  $\overline{\mathcal{F}}(\psi(\pm\infty, \xi)) = 0$ .

2°) **Unicité :**

Soit  $u_1, u_2$  deux solutions du problème (2.3). Posons  $u = u_1 - u_2$ , alors  $u$  est un élément de  $C^\infty(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$  qui vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - i\Delta u = 0 & \text{dans } S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

Nous allons montrer que  $u \equiv 0$ . Pour tout  $\psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  on a :

$$\begin{aligned}
 0 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u - i\Delta u, \psi \right\rangle \\
 &= - \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t} \psi + i\Delta \psi \right\rangle \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \cdot) \right\rangle dt - \int_{\mathbb{R}} \langle u, i\Delta \psi(t, \cdot) \rangle dt
 \end{aligned}$$

D'après la proposition (1.5) on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u_t, \psi(t, \cdot) \rangle = \left\langle u_t^{(1)}, \psi(t, \cdot) \right\rangle + \left\langle u_t, \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \cdot) \right\rangle$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
 0 &= - \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \langle u_t, \psi(t, \cdot) \rangle - \left\langle u_t^{(1)}, \psi(t, \cdot) \right\rangle \right] dt - \int_{\mathbb{R}} \langle u_t, i\Delta \psi(t, \cdot) \rangle dt \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} \langle u_t, \psi(t, \cdot) \rangle dt + \int_{\mathbb{R}} \left[ \left\langle u_t^{(1)}, \psi(t, \cdot) \right\rangle - i \langle u_t, \Delta \psi(t, \cdot) \rangle \right] dt
 \end{aligned}$$

Comme  $\psi(\pm\infty, x) = 0$ , il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \left\langle u_t^{(1)}, \psi(t, \cdot) \right\rangle - i \langle u_t, \Delta \psi(t, \cdot) \rangle \right] dt = 0, \quad \forall \psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n). \quad (2.6)$$

## Chapitre 2. Équation de Schrödinger

---

D'autre part, on a  $\mathcal{F}(u_t^{(1)}) = \hat{u}_t^{(1)}$ . En effet pour  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(u_t^{(1)}), \varphi \rangle &= \langle u_t^{(1)}, \hat{\varphi} \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \langle u_t, \hat{\varphi} \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{u}_t, \varphi \rangle \\ &= \langle \hat{u}_t^{(1)}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

On déduit de (2.6) que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} [\langle \overline{\mathcal{F}(\mathcal{F}(u_t^{(1)}))}, \psi(t, \cdot) \rangle - i \langle \overline{\mathcal{F}\hat{u}_t}, \Delta \psi(t, \cdot) \rangle] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} [\langle \overline{\mathcal{F}(\hat{u}_t^{(1)})}, \psi(t, \cdot) \rangle + i \langle \hat{u}_t, |\cdot|^2 \overline{\mathcal{F}(\psi(t, \cdot))} \rangle] dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} [\langle \hat{u}_t^{(1)}, \overline{\mathcal{F}(\psi(t, \cdot))} \rangle + i \langle \hat{u}_t, |\cdot|^2 \overline{\mathcal{F}(\psi(t, \cdot))} \rangle] dt = 0 \quad (2.7)$$

Ceci est vrai pour tout  $\psi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ . En particulier, pour  $\psi$  telle que

$$\overline{\mathcal{F}(\psi(t, \cdot))} = e^{it|\xi|^2} \varphi(\xi) \chi(t) \quad \text{où} \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \chi \in S(\mathbb{R})$$

sont des fonctions quelconques. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} [\langle \hat{u}_t^{(1)}, e^{it|\cdot|^2} \varphi(\cdot) \rangle + i \langle \hat{u}_t, |\cdot|^2 e^{it|\cdot|^2} \varphi(\cdot) \rangle] \chi(t) dt = 0, \quad \forall \chi \in S(\mathbb{R}) \quad (2.8)$$

D'après les résultats du paragraphe 1.4, la fonction entre crochet étant une fonction continue de  $t$  sur  $\mathbb{R}$ , il vient de (2.8) que

$$\langle \hat{u}_t^{(1)}, e^{it|\cdot|^2} \varphi(\cdot) \rangle + i \langle \hat{u}_t, |\cdot|^2 e^{it|\cdot|^2} \varphi(\cdot) \rangle = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (2.9)$$

En utilisant encore la proposition 1.5, il vient que

$$\langle \hat{u}_t^{(1)}, e^{it|\cdot|^2} \varphi(\cdot) \rangle + i \langle \hat{u}_t, |\cdot|^2 e^{it|\cdot|^2} \varphi(\cdot) \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{u}_t, e^{it|\cdot|^2} \varphi(\cdot) \rangle.$$

Ce qui montre que la fonction  $t \longrightarrow \langle \hat{u}_t, e^{it|\cdot|^2} \varphi(\cdot) \rangle$  est une constante.

Donc

$$\left\langle \hat{u}_t, e^{it|\cdot|^2} \varphi(\cdot) \right\rangle = \langle \hat{u}_0, \varphi \rangle = 0, \quad \text{car } u_0 = 0$$

Soient  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in S(\mathbb{R}^n)$  quelconques. La fonction  $\varphi(\xi) = e^{-it_0|\xi|^2} \theta(\xi)$  est dans  $S(\mathbb{R}^n)$  et donc

$$\left\langle \hat{u}_{t_0}, e^{it_0|\xi|^2} \varphi \right\rangle = \langle \hat{u}_{t_0}, \theta \rangle = 0$$

D'où  $\hat{u}_{t_0} = 0$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ . Et par conséquent  $u_t = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . Ce qui prouve que  $u = 0$ .  $\square$

## 2.4 Régularité de la solution dans $S(\mathbb{R}^n)$

Dans cette section nous allons étudier la régularité de la fonction  $u$  pour une donnée initiale  $g$  dans l'espace des fonctions à décroissances rapides.

**Théorème 2.2.** *Si  $g \in S(\mathbb{R}^n)$ , la solution  $u$  donnée par le théorème (2.1) appartient à  $C^\infty(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^n))$ . Elle donnée par la formule*

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi - it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi \quad (2.10)$$

*Démonstration.* Soit  $g \in S(\mathbb{R}^n)$  et  $u_t(x)$  donnée par la formule (2.4). D'après les résultats de la section 1.2 du chapitre 1 la transformée de Fourier est stable sur  $S$ , et donc  $u_t(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ . De plus par définition de la transformée inverse on a

$$u(t, x) = u_t(x) = \overline{\mathcal{F}}(e^{-it|\xi|^2} \hat{g})(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi - it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi.$$

Montrons maintenant que la fonction  $(t, x) \rightarrow u_t(x)$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . En effet,

$$\begin{aligned} D_x^\beta u(t, x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\beta [e^{ix\xi - it|\xi|^2}] \hat{g}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\beta e^{ix\xi - it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi - it|\xi|^2} (\xi^\beta \hat{g}(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

## Chapitre 2. Équation de Schrödinger

---

donc

$$\begin{aligned}
 x^\alpha D^\beta u(t, x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha (e^{ix\xi}) e^{-it|\xi|^2} (\xi^\beta \hat{g}(\xi)) d\xi \\
 &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (D_\xi^\alpha e^{ix\xi}) e^{-it|\xi|^2} (\xi^\beta \hat{g}(\xi)) d\xi \\
 &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} (-D_\xi)^\alpha [e^{-it|\xi|^2} \xi^\beta \hat{g}(\xi)] d\xi \quad (\text{intégration par parties})
 \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Leibniz, il en résulte que

$$x^\alpha D^\beta u(t, x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} Q_{\alpha,\beta}(t, \xi) e^{-it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi$$

où  $Q_{\alpha,\beta}(t, \xi)$  est un polynôme en  $(t, \xi)$ .

Soit  $k \in N$ , montrons la continuité de  $t \longrightarrow \partial_t^k u(t, x)$  sur  $S(\mathbb{R}^n)$ , c.à.d pour  $t_1 \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \|\partial_t^k u(t, x) - \partial_t^k u(t_1, x)\|_{S(\mathbb{R}^n)} = \lim_{t \rightarrow t_1} P_{\alpha,\beta}(\partial_t^k u(t, x) - \partial_t^k u(t_1, x)) = 0$$

Commençons par  $k = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha,\beta}(u(t, x) - u(t_1, x)) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D_x^\beta [u(t, x) - u(t_1, x)]| \\
 &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} [Q_{\alpha,\beta}(t, \xi) e^{-it|\xi|^2} - Q_{\alpha,\beta}(t_1, \xi) e^{-it_1|\xi|^2}] \hat{g}(\xi) d\xi \right| \\
 &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |Q_{\alpha,\beta}(t, \xi) e^{-it|\xi|^2} - Q_{\alpha,\beta}(t_1, \xi) e^{-it_1|\xi|^2}| \cdot \left| (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{g}(\xi) d\xi \right| \\
 &\leq C \cdot \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |Q_{\alpha,\beta}(t, \xi) e^{-it|\xi|^2} - Q_{\alpha,\beta}(t_1, \xi) e^{-it_1|\xi|^2}|
 \end{aligned}$$

Par continuité de la fonction  $t \longrightarrow Q_{\alpha,\beta}(t, \xi) e^{-it|\xi|^2}$ , on déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ tel que } |t - t_1| < \eta \Rightarrow P_{\alpha,\beta}(u(t, x) - u(t_1, x)) < \varepsilon.$$

Pour tout  $k \in N$ , et par récurrence sur  $k$  on montre aussi que

$$P_{\alpha,\beta}(\partial_t^k u(t, x) - \partial_t^k u(t_1, x)) < \varepsilon \text{ dès que } |t - t_1| < \eta$$

D'où

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n, S(\mathbb{R}^n)).$$

□

## 2.5 Régularité de la solution dans $H^s(\mathbb{R}^n)$

Dans cette partie nous prouvons la régularité et l'estimation de l'énergie de la solution  $u$  pour une donnée initiale  $g$  dans un espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Théorème 2.3.** *Si  $g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , où  $s \in \mathbb{R}$ , la solution  $u$  donnée par le théorème 2.1 appartient à  $C^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n))$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_t^{(k)}$  appartient à  $C^0(\mathbb{R}, H^{s-2k}(\mathbb{R}^n))$ , et on a*

$$\begin{cases} \|u_t\|_{H^s} = \|g\|_{H^s} & \forall t \in \mathbb{R} \\ \|u_t^{(k)}\|_{H^{s-2k}} \leq C_k \|g\|_{H^s} & \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (2.11)$$

*Démonstration.* L'expression (2.4) montre que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\hat{u}_t = e^{-it|\xi|^2} \hat{g}$$

et comme  $g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $\hat{g}$  est une fonction mesurable donc  $\hat{u}_t$  est aussi mesurable. et on a

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}(\xi)| = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{g}(\xi)|$$

Ce qui prouve l'estimation de l'énergie suivante

$$\|u_t\|_{H^s} = \|g\|_{H^s}.$$

D'autre part en dérivant  $k$  fois l'expression (2.4), on obtient

$$u_t^{(k)} = \mathcal{F}((-i|\xi|^2)^k e^{-it|\xi|^2} \hat{g}),$$

d'où

$$\mathcal{F}(u_t^{(k)}) = (-i|\xi|^2)^k e^{-it|\xi|^2} \hat{g}.$$

Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite qui converge vers  $t^*$  dans  $\mathbb{R}$  on a, alors

$$\begin{aligned}
 \left\| u_{t_n}^{(k)} - u_{t^*}^{(k)} \right\|_{H^{s-2k}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-2k} \left| \mathcal{F}(u_{t_n}^{(k)} - u_{t^*}^{(k)}) \right|^2 d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-2k} (|\xi|^2)^{2k} \left| e^{-it_n|\xi|^2} - e^{-it^*|\xi|^2} \right|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \left( \frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^{2k} \left| e^{-it_n|\xi|^2} - e^{-it^*|\xi|^2} \right|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
 &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left( \frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^{2k} \left| e^{-it_n|\xi|^2} - e^{-it^*|\xi|^2} \right|^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
 &\leq q^{2k} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| e^{-it_n|\xi|^2} - e^{-it^*|\xi|^2} \right|^2 \cdot \|g\|_{H^s}^2, \quad q < 1 \text{ une constante} \\
 &\leq \varepsilon \quad \text{dès que } |t - t^*| < \eta.
 \end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned}
 \left\| u_t^{(k)} \right\|_{H^{s-2k}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-2k} |\mathcal{F}(u_t^{(k)})|^2 d\xi \\
 &\leq q^{2k} \cdot \|g\|_{H^s}^2.
 \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.1.** L'égalité  $\|u_t\|_{H^s} = \|g\|_{H^s}$  indique que l'énergie de la particule à l'instant  $t = 0$  est égale à l'énergie à l'instant  $t \in \mathbb{R}$  dans l'espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , et que la solution est bornée quand  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.6 Forme de la solution

Dans cette section nous prouvons la forme explicite de la solution, et nous la présentons sous forme d'une fonction à valeurs complexes.

**Théorème 2.4.** Pour  $g \in S'(\mathbb{R}^n)$ , la solution  $u$  donnée par le théorème 2.1 s'écrit pour  $t \neq 0$ ,

$$u_t(x) = \frac{1}{\left(4\pi |t|^{\frac{n}{2}}\right)} e^{-i.n.sgn(t).\frac{\pi}{4}} e^{+\frac{i|x|^2}{4t}} \left[ \mathcal{F} \left( e^{+\frac{i|\cdot|^2}{4t}} . g \right) \right] \left( \frac{x}{2t} \right) \quad (2.12)$$

où  $sgn(t)$  désigne le signe de  $t$ .

## Chapitre 2. Équation de Schrödinger

---

*Démonstration.* – **Cas 1** : Nous prouvons ce théorème par densité.

Supposons  $g \in D(\mathbb{R}^n)$ , d'après le théorème 2.1 et le théorème 1.4, on peut écrire

$$u(t, x) = \overline{\mathcal{F}}(e^{-it|\xi|^2} \hat{g}(\xi)) = [\overline{\mathcal{F}}(e^{-it|\xi|^2}) * g](x).$$

De l'exemple 1.2(4) du chapitre 1, il vient que

$$\mathcal{F}(e^{-it|\xi|^2}) = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|t|}} \right)^n e^{-i.n.\text{sgn}(t).\frac{\pi}{4}} e^{+i\frac{|\xi|^2}{4t}}.$$

Et

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}(e^{-it|\xi|^2})(x) &= (2\pi)^{-n} \mathcal{F}(e^{-it|\xi|^2})(-x) \\ &= (2\pi)^{-n} \left( \frac{\pi}{|t|} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-i.n.\text{sgn}(t).\frac{\pi}{4}} e^{+i\frac{|x|^2}{4t}} \end{aligned}$$

donc

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n} \left( \frac{\pi}{|t|} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-i.n.\text{sgn}(t).\frac{\pi}{4}} (e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} * g)(x). \quad (2.13)$$

D'autre part, comme  $g \in D(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\left( e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} * g \right)(x) = \left\langle g, e^{+i\frac{|x-\cdot|^2}{4t}} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{+i\frac{|x-y|^2}{4t}} dy.$$

En écrivant

$$|x - y|^2 = |x|^2 - 2xy + |y|^2$$

il vient

$$\begin{aligned} \left( e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} * g \right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{i\frac{|x|^2}{4t}} e^{-i\frac{2xy}{4t}} e^{i\frac{|y|^2}{4t}} dy \\ &= e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i\frac{xy}{2t}} e^{i\frac{|y|^2}{4t}} dy \\ &= e^{+i\frac{|x|^2}{4t}} \mathcal{F} \left( e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} g \right) \left( \frac{x}{2t} \right) \end{aligned}$$

En substitue cette dernière expression dans (2.13), il vient

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi |t|^{\frac{n}{2}})} e^{-i.n.\text{sgn}(t).\frac{\pi}{4}} e^{+i\frac{|x|^2}{4t}} \mathcal{F} \left( e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} g \right) \left( \frac{x}{2t} \right) \quad (2.14)$$

## Chapitre 2. Équation de Schrödinger

---

– **Cas 2 :** si  $g \in S'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\exists (g_k)_k \in D(\mathbb{R}^n)$  telle que  $g_k \longrightarrow g$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ .

Soit  $u_k$  solution de (2.3) avec donnée  $g_k$ , d'après théorème 2.2 on a  $u_k \in C^\infty(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}))$  et d'après le cas 1, la solution  $u_k$  est donnée par la formule (2.14). Considérons le membre de droite de (2.14). On a

$$e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} g_k \text{ converge vers } e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} g \text{ dans } S'(\mathbb{R}^n).$$

Soit

$$\mathcal{F}\left(e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} g_k\right)\left(\frac{x}{2t}\right) = \mathcal{F}\left(e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} g_k\right) \circ A_t$$

où  $A_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est l'application  $x \longrightarrow \frac{x}{2t}$ .

Comme la multiplication par  $e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}}$  étant continue de  $S'(\mathbb{R}^n)$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ , il en résulte que

$$\mathcal{F}\left(e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} g_k\right) \circ A_t \text{ converge vers } \mathcal{F}\left(e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} g\right) \circ A_t \text{ dans } S'(\mathbb{R}^n).$$

D'autre part la solution du problème (2.1) avec donnée  $g_k$  est définie par la formule (2.4)

$$(u_k)_t = \overline{\mathcal{F}}\left(e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} \hat{g}_k\right)(x)$$

et comme  $g_k$  converge vers  $g$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$  alors le produit  $e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} g_k$  converge vers  $e^{+i\frac{|\cdot|^2}{4t}} g$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ , donc

$$(u_k)_t \text{ converge vers } u_t \text{ dans } S'(\mathbb{R}^n)$$

L'unicité de la solution  $u$  démontrée par le théorème 2.1 prouve que la formule (2.12) est solution du problème (2.3).

□

Du théorème 2.4 nous déduisons une propriété importante de régularité.

**Corollaire 2.1.** 1. Si la donnée  $g$  est à support compact i.e  $g \in \zeta'(\mathbb{R}^n)$  et  $u$  est la solution du problème (2.1) alors pour tout  $t \neq 0$ ,  $u_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

2. Soit  $g(x) = e^{-i\lambda|x|^2}$ , où  $\lambda > 0$ . Alors  $u_{\frac{1}{4\lambda}} = (4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}} e^{-i.n.\frac{\pi}{4}} \delta_0$ .

## Chapitre 2. Équation de Schrödinger

---

*Démonstration.* **1°**) si  $g \in \zeta'(\mathbb{R}^n)$  alors  $e^{i\frac{|\cdot|^2}{4t}}g \in \zeta'(\mathbb{R}^n)$  d'après le théorème 1.6 du chapitre 1, il résulte que

$$\mathcal{F}(e^{i\frac{|\cdot|^2}{4t}}g) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

donc pour tout  $t \neq 0$ ,  $u_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**2°**) Pour  $t = \frac{1}{4\lambda}$ , où  $\lambda > 0$ , et  $g = e^{-i\lambda|x|^2}$ , on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{i\frac{|x|^2}{4t}}.e^{-i\lambda|x|^2}) &= \mathcal{F}(e^{i\frac{|x|^2}{4t}-i\lambda|x|^2}) \\ &= \mathcal{F}(e^0) \\ &= \mathcal{F}(1) \\ &= (2\pi)^n \delta_0.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}u(t, \cdot) &= \frac{1}{\left(4\pi \cdot \frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-i.n\frac{\pi}{4}} e^{+i\lambda|\cdot|^2} [\mathcal{F}(e^0)] \\ &= \frac{1}{\left(4\pi \cdot \frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-i.n\frac{\pi}{4}} . e^{+i\lambda|\cdot|^2} . (2\pi)^n \delta_0 \\ &= \frac{1}{\left(4\pi \cdot \frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-i.n\frac{\pi}{4}} . (2\pi)^n \delta_0 \\ &= 2^n \pi^{\frac{n}{2}} e^{-i.n\frac{\pi}{4}} \lambda^{\frac{n}{2}} \delta_0\end{aligned}$$

□

**Remarque 2.2.** *Le corollaire montre que la régularité de la solution pour  $t \neq 0$ , n'est pas reliée à la régularité de la donnée en  $t = 0$ , puisque une donnée irrégulière  $g \in \zeta'$  par exemple ( $g = \delta_0$ ) donne une solution  $C^\infty$  tandis qu'une donnée  $C^\infty$  fournit une solution singulière. L'explication est la suivante : la régularité de la solution, pour  $t \neq 0$  **dépend du comportement à l'infini de la donnée et non de sa régularité**. Ce phénomène est connu sous le nom de propagation à vitesse infinie.*

## 2.7 Décroissance à l'infini de la solution

**Théorème 2.5.** Si  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , la solution  $u$  donnée par le théorème (2.1) vérifie

$$\|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} |t|^{-\frac{n}{2}}, \text{ pour } |t| \neq 0.$$

*Démonstration.* Cela résulte immédiatement de la formule (2.12). En effet comme  $\mathcal{F}$  est continue de  $L^1$  dans  $L^\infty$ , on a

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{n}{2}}} e^{-i.n.\text{sgn}(t).\frac{\pi}{4}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}} \left[ \mathcal{F}(e^{\frac{i|\cdot|^2}{4t}} g) \right] \left( \frac{x}{2t} \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{n}{2}}} \left\| e^{-i.n.\text{sgn}(t).\frac{\pi}{4}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}} \right\|_{L^\infty} \left\| \mathcal{F}(e^{\frac{i|\cdot|^2}{4t}} g) \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{n}{2}}} \left\| \mathcal{F}(e^{\frac{i|\cdot|^2}{4t}} g) \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{n}{2}}} \left\| e^{\frac{i|\cdot|^2}{4t}} g \right\|_{L^1} \\ &\leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{n}{2}}} \|g\|_{L^1} \\ &\leq \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} |t|^{-\frac{n}{2}}, \text{ pour } |t| \neq 0. \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.3.** L'estimation du théorème 2.5 montre que  $u_t$  est décroissante et bornée à l'infini.

## 2.8 Équation de Schrödinger linéaire non homogène

Nous considérons ici une équation aux dérivées partielles avec second membre dépendant de la variable  $x$ . Soit le problème,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.15)$$

## Chapitre 2. Équation de Schrödinger

---

Où  $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ .

En appliquant la transformée partielle de Fourier, il vient

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - i\mathcal{F}(\Delta u) = \mathcal{F}(f),$$

qu'on peut la mettre sous la forme

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + i|\xi|^2 \hat{u} = \hat{f}$$

c'est une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre non homogène.

La solution  $\hat{u} = v + w$  où  $v$  est la solution de l'équation homogène et  $w$  une solution particulière. Par un calcul simple de l'équation différentielle homogène, on trouve

$$v(t, \xi) = C(\xi)e^{-it|\xi|^2}.$$

Appliquons la méthode des variations des constantes, et en tenant compte de la donnée initiale  $\hat{u}(0, \xi) = \hat{g}(\xi)$ , il en résulte

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{g}(\xi)e^{-it|\xi|^2} + \hat{f}(\xi) \left( \frac{e^{-it|\xi|^2} - 1}{-i|\xi|^2} \right).$$

Par conséquent

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{g}(\xi)e^{-it|\xi|^2} \right) + \mathcal{F}^{-1} \left[ \hat{f}(\xi) \left( \frac{e^{-it|\xi|^2} - 1}{-i|\xi|^2} \right) \right].$$

## Conclusion

Dans ce mémoire, on a établi l'équation de Schrödinger. En premier lieu, on a prouvé un théorème d'existence et d'unicité de la solution dans un espace de distributions tempérées. En second lieu, on a démontré des résultats de régularité, des estimations de l'énergie et une décroissance à l'infini de la fonction d'onde. En perspective nous souhaitons faire une approximation par éléments finis et une simulation numérique de ce problème.

# Bibliographie

- [1] J. M. Bony, Cours d'Analyse, Théorie des Distributions et Analyse de Fourier, [https ://www.eyrolles.com](https://www.eyrolles.com) , Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2001.
- [2] F. Golse, Distributions, analyse de Fourier, Equations aux Dérivées Partielles, [http ://www.cmls.polytechnique.fr](http://www.cmls.polytechnique.fr) , Octobre 2012.
- [3] M. T. Lacroix-Sonnier, Distributions, Espaces de Sobolev et Applications, Ellipses, Paris 1998.
- [4] A. Lesfari, Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace, Cours et Exercices, Ellipses, Paris 2012.
- [5] C. Negulescu, L'Equation de Schrodinger, Aspects Mathématiques et Numériques, Cours de Master2, 2010, [https ://www.math.univ-toulouse.fr](https://www.math.univ-toulouse.fr) .
- [6] L. Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann, Paris, 1966.
- [7] C. Zuily, Eléments de Distributions et d'Equations aux Dérivées Partielles , Cours et Problèmes Résolus, Dunod, Paris, 2002.
- [8] C. Zuily, Problems in Distributions, Hermann, Paris 1988.
- [9] Equation de Schrodinger, [www.tangenteX.com](http://www.tangenteX.com) juin 2009.