الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Existence de valeurs propres pour le p-Laplacien fractionnaire

Présenté par:

Chouabbi Chaima

Devant le Jury :

Dr. Saifia Ouarda	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
M. Bourara Abdelfettah	MAA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Youbi Zahra	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2022-2023

Table des matières

Remerciements

Avant toute chose je tiens à remercier **Dieu** de m'avoir donné la force et la patience pour traverser tous les moments difficiles et faire ce travail .

je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadrant Monsieur **Bourara Abdelfettah** pour sa trés grande expertise, ses précieux conseils, ainsi que pour sa patience. il s'est toujours montré à l'écoute et disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire. je le remercie pour son soutien inestimable .

Mes remerciements s'adressent aussi au membres du jury **Madame Youbi Zahra** et **Madame Saifia Ouarda** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner ce travail.

j'adresse mes sincères remerciements à tous ceux qui m'ont apporté, de près ou de loin, leur aide pour la réalisation de ce travail, ainsi que de m'avoir accompagneé tout au long de mes années d'études.leur soutien m'a été précieux et je leur en suis profondément reconnaissante.

Dédicace

Du plus profond de mon coeur, je dédie ce modeste travail à tous ceux qui me sont chers.

Maman aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consentis pour mon bien être.

je vous remercie pour tout le soutein et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagnera toujours.

A mon cher père, mon guide qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse, je suis très fière d'être votre fille .

mes parents vous n'avez jamais cessé de déployer tous vos efforts afin de subvenir à nos besoins vous nous avez encouragés et nous avez aidés à choisir le chemin de la réussite. Que dieu vous protège et vous garde.

A mes chères soeurs je ne saurai point vous remercier comme il se doit, votre présence à mes côtés a toujours été ma source de force, pour affronter les différents obstacles.Merci d'être là

A mon cher frère pour ses encouragements et son soutien moral.

À mon neveu et à mes nièces.

A tous mes amis merci pour vos encouragements.

.

Notations

Ω : ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

$\overline{\Omega}$: L'adhérence de Ω .

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels .

$\mathbb{R}^N$: Espace euclidien de dimension N, $N \geq 2$.

$\langle .,. \rangle$: Produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

$\partial\Omega$: Frontière de Ω.

dx : mesure de Lebesgue de dimension N.

∇u : Gradient de u.$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.

Δu : Laplacien de u. $\Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_N} \right)$

$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$: Espaces des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact inclus dans Ω.

$C^{k,\alpha}$: Espace des fonctions Holeriennes de classe k dans Ω.

$C^{0,\alpha}$: Espace des fonctions Holeriennes sur Ω.

$L^p(\Omega)$: L'espace des fonctions p-intégrables.

$W^{1,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev standart sur Ω d'exposant p.

$W_0^{1,p}(\Omega)$: Adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, i.e $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.

$W^{-1,p'}(\Omega)$: Dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$\rightarrow$: convergence forte.

$\rightharpoonup$: convergence faible.

$p.p$: Presque partout.

$X \hookrightarrow Y$: L'injection continue de X dans Y.

$X \hookrightarrow_c Y$: L'injection compacte de X dans Y.

$df(a)$: La différentielle de f au point u.

$W^{s,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev fractionnaire pour s dans $(0,1)$.

$W_0^{s,p}(\Omega)$: la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{s,p}(\Omega)$.

$\Delta^s u$: Laplacien fractionnaire de u.

$(\Delta)_p^s u$: p-Laplacien fractionnaire de u.

λ_1 : première valeur propre sur Ω

T.C.D théorème de convergence dominé de Lebesgue

Introduction générale

L'étude des équations aux dérivées partielles est l'un des sujets de grande importance dans l'analyse non linéaire, pour interpréter des phènomènes physiques ou biologiques, par exemple dans l'étude des fluides non Newtoniens et dans les phènomènes de couche limite pour des fluides visqueux ...etc et par conséquent, les "EDP" représentent un champ d'étude trés vaste aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

les espaces fractionnaire de sobolev et les opérateurs non locaux ont des applications aux divers problèmes non linéaire tels que les transitions de phase, le problème de phase, le problème des obstacles minces, surfaces minimales, science des matériaux ...etc
parmi les opérateurs non locaux, le p-laplacien fractionnaire $\left(-\triangle_p^s\right)$ plus precisément :

$$\left(-\triangle_p^s\right) u(x) = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\left(u(x)-u(y)\right)}{|x-y|^{N+sp}} dy$$

où Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, p \in (1, +\infty)$ et $s \in (0,1)$
Pour $P = 2$ la définition se réduit au laplacien fractionnaire linéaire $(-\triangle^s)$

cet opérateur coïncide jusqu'à une certaine constante de normalisation selon N et S, une caractérstique typique du p-laplacien fractionnaire est la non localité.
Dans ce travail nous considérons le problème faisant intervenir le p-laplacien fractionnaire

$$\begin{cases} (-\triangle)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Notre objectif dans ce travail est consacré à l'étude de l'existence de la première valeur propre et d'examiner ses différentes propriétes .
Ce travail est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques résultats sur l'espace $L^p(\Omega)$ et les espaces de Sobolev classique ainsi quelques inégalités et critères de convergence qui seront utilisés dans la suite du travail.

Dans le second chapitre on introduit les espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}$,qui sont le cadre fonctionnel des équations liés au p-laplacien fractionnaire et c'est la que nous allons approfondir la définition du p-laplacien fractionnaire.

Enfin dans le troixième chapitre nous étudions l'existence et les différentes propriétes de la première valeur propre du problème.

Chapitre 1

préliminaire et outils de base

Ce chapitre a pour but de présenter quelques définitions et rappels des résultats nécessaires d'analyse fonctionnelle pour comprendre la suite de ce travail .

1.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx .

Définition 1.1. *(voir* [7]*) soit* $P \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq P < \infty$ *on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \ \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

on note

$$\|f\|_{L^P} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{P}}$$

on peut vérifier facilement que $\|\|_{L^P}$ définit une norme sur l'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ ce qui montre que $L^P(\Omega)$ est un espace normé.

on pose

$$L^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable . } \exists C > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

$L^{\infty}(\Omega)$ est un espace normé muni de la norme :

$$\|f\|_{L^{\infty}} = inf\,\{c, |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

Théorème 1.1. *(voir* [1]*) soit $p \in \mathbb{R}$ avec 1 $\leq P \leq \infty$,on pose*

$$L^{p}_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\ ,\ f \ \textit{est mesurable} \ / f.xk \in L^{p}(\Omega), \forall K \ \textit{compact} \ \subset \Omega\}$$

1.L´espace $L^{P}(\Omega)$ est de banach pour $1 \leq P \leq \infty$,

2.L´espace $L^{p}(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$,

3.L´espace $L^{p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < P < \infty$.

Notation 1.1. *soit* $1 \leq P \leq \infty$,*on désigne par p' l'exposant* ***conjugué*** *de p c'est à dire :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{où } P' = \frac{p}{p-1}$$

1.1.1 Quelques inégalités utiles

Lemme 1.1. ***(Inégalité de Hölder)****(voir* [5]*) soient $f \in L^{p}$ et $g \in L^{p'}$avec $1 \leq P \leq \infty$.Alors $f.g \in L^{1}$et*

$$\|fg\|_{L^{1}} \leq \|f\|_{L^{p}} \|g\|_{L^{p'}}$$

Lorsque $p = 2$, on a $p' = 2$ donc l'inégalité de hölder se réduit alors à l'inégalité de **cauchy-schwarz**

$$\|fg\|_{L^{1}} \leq \|f\|_{L^{2}} \|g\|_{L^{2}}$$

Remarque 1.1. *pour* $p = 2, L^2(\Omega)$ *est un espace de hilbert muni du produit scalaire suivant*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega uvdx$$

Lemme 1.2. ***(Inégalité de young)****(voir* [1]$)\forall\ a \geq 0, \forall b \geq 0,$ *supposons que :* $1 < P < \infty$

$$ab \leq \frac{1}{P}a^p + \frac{1}{P'}b^{p'}$$

L´écriture $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ $p.p$ sur Ω, signifie que la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ presque partout sur Ω.

Inégalité de poincaré :

Théorème 1.2. *(voir* [4]*) soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, soient* $s \in]0,1[$ *et* $p \in [1,+\infty[$ *alors il existe* $c > 0$ *telle que :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\,\|u\|_{w_0^{s,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in w_0^{s,p}(\Omega)$$

par conséquent si Ω est borné alors $\|\|_{w_0^{s,p}}$ est une norme de $W_0^{s,p}(\Omega)$ équivalente à $\|\cdot\|_{W^{S,p}(\Omega)}$ avec

$$\|u\|_{W_0^{S,P}(\Omega)} = \left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^P}{|x-y|^{n+SP}}\right)^{\frac{1}{P}}$$

Lemme 1.3. *soient* $a \geq 0, b \geq 0$ *et soit* $1 \leq P \leq +\infty$ *alors nous avons :*

$$(a+b)^p \leq 2^{P-1}(a^p + b^p)$$

1.1.2 Quelques critères de convergence

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Lemme 1.4. ***(lemme de fatou)****(voir* [4]*)*

soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que :

(**1**) pour chaque n , $f_n(x) \geq 0$ $p.p$ sur Ω.

(2) sup $\int_\Omega f_n(x)dx < +\infty$.

pour chaque $x \in \Omega$ on pose

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \inf \; f_n(x), \text{alors } f \in L^1(\Omega) \text{ et} \\ \int_\Omega f(x)dx &\leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \inf \int_\Omega f_n(x)dx \end{aligned}$$

Théorème 1.3. ***(Fubini)***(*voir* [4])

soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, on suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, alors pour presque tout $x \in \Omega_1$:

$$F(x,y) \in L^1_Y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$:

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) et \int_{\Omega_1} f(x,y)dx \in L^1_Y(\Omega_2)$$

De plus nous avons :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x,y)dx = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)dxdy$$

Théorème 1.4. ***(convergence dominéé de lebesgue)***(*voir* [1]) *soit* $(f_{n)}$ *une suite de fonction de* $L^1(\Omega)$*.on suppose que :*

1.$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ $p.p$ sur Ω,

2.il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque $n, |f_n(x)| \leq g(x)$ $p.p$ sur Ω

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \; et \; \|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$$

Lemme 1.5. *E un espace de Banach uniformément convexe, alors tout suite* (u_n) *de E telle que* u_n *converge faiblement vers u dans E Alors*

$$\|u\|_E \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \inf \|u_n\|_E$$

Théorème 1.5. ***(convergence dominéé de lebesgue inverse)***(*voir* [1]) *soit* (f_n) *une suite de* $L^P(\Omega)$*, tels que :*$\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$*.Alors, il existe une sous suite extraite* (f_{nk}) *telle que :*

i) $f_{nk}(x) \longrightarrow f(x)$ $p.p$ sur Ω,

ii) $|f_{nk}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$ et p.p sur Ω avec $h \in L^p(\Omega)$.

Le résultat suivant introduit quelques propriétes topologiques des espaces de lebesgue .

Théorème 1.6. ***(Egorov)***(*voir* [5]) *on suppose que* $|\Omega| < \infty$*, soit* $(f_{n)}$ *une suite de fonction mesurables de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x)\ p.p.sur\ \Omega\ (avec\ |f(x)| < \infty\ p.p)$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathrm{A} \subset \Omega \text{ mesurable tel que}$$
$$|A^c| < \varepsilon \text{ et } f_n \longrightarrow f \text{ uniformément sur A}$$

Où $|A^c|$ désigne la mesure de lebesgue de complémentaire de l'ensemble A.

1.2 Espace de Sobolev classique

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ et soient $m \in \mathbb{N}$ et $P \in [1, +\infty]$

Définition 1.2. (*voir* [9]) *on définit l'espace de sobolev classique* $W^{m,p}(\Omega)$ *par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \text{tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\, |\alpha| \leq m\}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ et $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}_{X_1} ... \partial^{\alpha_N}_{x_N}}, |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$

D^α les dérivéés au sens de distributions, c-à-d :

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} < u, D^\alpha \varphi >, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

$W^{m,p}$est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on le muni de la norme :

$\star$ pour $p \in [1, +\infty[$:

$$\|u\|_{m,p} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{p}^{p})^{\frac{1}{p}}$$

$\star$pour $p = +\infty$

$$\|u\|_{\infty} = max_{|\alpha \leq m|} \|D^{\alpha}\|_{\infty})$$

cas particulier $(p = 2)$

$W^{m,2}(\Omega)$ (noté aussi $H^m(\Omega)$) muni par produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^{\alpha}u)(D^{\alpha}v)dx$$

est un espace de hilbert.

on a $\langle u, u \rangle_{H^m} = \|u\|_{H^m}^2$

· $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq P \leq +\infty$

· $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace séparable pour tout $1 \leq P < +\infty$

· $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < P < +\infty$

· $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace uniformément convexe pour tout $1 < P < +\infty$

Définition 1.3. *(voir [9]) on pose* $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$

$W_0^{m,p}(\Omega)$ est un sous espace de Banach de $W^{m,p}(\Omega)$, en général $W_0^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$

Théorème 1.7. *soit* $p \in [1, +\infty[$ *nous avons :* $D(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$*;c-à-d :*

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$$

Théorème 1.8. *(les injections de sobolev)(voir [9])*

pour $1 \leq p < +\infty$ et $m \in \mathbb{N}$ nous avons :

1) si $N > mp$ alors pour tout q satisfait : $p \leq q \leq \frac{Np}{P-mp}$ nous avons :

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

plus précisément dans les conditions données, il existe une constante C telle que :

$$\forall u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}$$

2) pour $p = 1$ nous avons

$$W^{N,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^N)$$

3) si $N = mp$ et $p > 1$, alors pour tout q satisfait $p \leq q \leq +\infty$ nous avons :

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

4) si $p > N$, alors nous avons :

$$0 < \lambda \leq 1 - \frac{N}{P} \Longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{0,\lambda}(\mathbb{R}^N)$$

5) si $mp > N$, alors nous avons :

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$$

plus précisément :

* Si $\frac{N}{P} \notin \mathbb{N}$,et j satisfait $(j-1)p < N < jp$, alors :

$$0 < \lambda \leq j - \frac{N}{P} \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^N)$$

$*$ Si $\frac{N}{P} \in N$, et $m \geq j = \frac{N}{P} + 1$, alors :

$$0 < \lambda \leq j - \frac{N}{P} \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-\frac{N}{p}-1,\lambda}(\mathbb{R}^N) \forall \lambda < 1$$

Corollaire 1.1. *(voir* [9]*) soit Ω un ouvert borné a frontière lipschitzienne de $\mathbb{R}^N$, alors nous avons :*

1) Si $N > mp$ alors : $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \leq \frac{Np}{N-mp}$

2) Si $N = mp$ alors : $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q < +\infty$

3) Si $p = 1$ alors :$W^{N,1}(\Omega) \hookrightarrow C_b(\Omega)$

4) Si $mp > N$ alors nous avons :

*Si $\frac{N}{P} \notin \mathbb{N}$, et j satisfait$(j-1)p < N < jp$, alors

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}(\mathbb{R}^N) \forall \lambda \leq j - \frac{N}{p}$$

*Si $\frac{N}{P} \in \mathbb{N}$,et $m \geq j = \frac{N}{P} + 1$, alors :

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-\frac{N}{P}-1,\lambda}(\mathbb{R}^N) \forall \lambda < 1$$

1.3 Les espaces de hölder

Définition 1.4. *(voir [5]) soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $0 \leq \alpha < 1$, on dit qu'une fonction est höldérienne d'exposant α au voisinage de $x_0 \in \Omega$*

$$\exists\ \delta, M > 0\ \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \delta), \quad |u(x) - u(x_0)| \ \leq \ M\,|x - x_0|^{\alpha}$$

on désigne par $C^{K,\alpha}(\Omega)$ les fonctions de classe $C^k(\Omega)$ telles que les dérivées d'ordre k sont höldériennes d'exposant α au voisinage de tout point $x_0 \in \Omega$.

• Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue, on écrit

$$\|f\|_{c(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} \ |f(x)|$$

• La semi norme d'ordre α de la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est

$$[f]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \right\}$$

•La norme d'ordre α de la fonction f est

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \ \|f\|_{c(\overline{\Omega})} + [f]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

1.4 Différentiabilité

Définition 1.5. *(Différentiabilité au sens de Fréchet)(voir* [2]*) soient* E *un espace de Banach,* Ω *un ouvert de* E *et* $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction, et* $u \in \Omega$*,on dit que* f *est différentiable au sens de fréchet (ou F-différentiable) au point u, s'il existe une application linéaire continue de* E *vers* $\mathbb{R}$ *notée* $Df(a)$*, telle que :*

$$f(v) - f(u) = \langle Df(u), v - u \rangle + o(v - u)$$

Définition 1.6. *(Différentiabilité au sens de Gâteaux)(voir* [2]*) soient* E *un espace de Banach,* Ω *un ouvert de* E *et* $F : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. soit* $u \in \Omega$*, on dit que* f *est différentiable au sens de Gâteaux (ou G-différentiable) au point u, s'il existe une application linéaire continue de* E *vers* $\mathbb{R}$ *notée* $D_G f(u)$*, telle que pour tout* $v \in E$ *on a :*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = \langle D_G f(u), v \rangle$$

1.5 Théorème de Lax-milgram

problème variationnelle abstrait

soit E un espace de Hilbert, réel muni du produit scalaire $(.,.)$, et de la norme associéé $\|\cdot\|_E$.
soit a une forme bilinéaire sur $E \times E$, et soit f une forme linéaire sur E.

Définition 1.7. *(voir* [5]*) on dit que la forme bilinéaire* a *est continue s' il existe une constante* $M > 0$*, telle que pour tout* $u, v \in E$ *on a*

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_E \|v\|_E$$

Définition 1.8. *on dit que la forme bilinéaire a est symetrique si, pour tout $u, v \in E$ on a*

$$a(u, v) = a(v, u)$$

Définition 1.9. *on dit que la forme bilinéaire a est coercive sur E si, il existe une $\beta > 0$ telle que pour tout $u \in E$ on a*

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|_E^2$$

Théorème 1.9. *(de Lax-Milgram)*

soit E un espace de Hilbert, a est une forme bilinéaire continue et coercive et L une forme linéaire continue sur E. Alors le problème suivant

admet une solution unique.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{trouver } u \in E \text{ telle que} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in E \end{array} \right\}$$

.

Théorème 1.10. *(Formule de Green)(voir* [5])

$$\int_\Omega \triangle u(x) v(x) dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds \qquad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}), \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

où ds est la mesure superficielle sur $\partial\Omega$, et $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u.n, n$ la normale extérieure unité de Ω.

1.6 Opérateurs compacts, décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints compacts

opéraeurs compacts

soient E et F deux espaces de Banach

Définition 1.10. *(voir [5]) on dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est **compact** si $T\ (B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte, on note que*

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$$

on désigne par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires et on pose $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ $k(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires et on pose $k(E) = k(E,E)$

Proposition 1.1. *: soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}(E,F)$*

on dit que T est compact si et seulement si de toute suite bornée $(x_n)_{n\in N}$ de E, on peut extraire une sous suite telle que $(T(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans F quand $k \longrightarrow +\infty$.

Opérateurs adjoints

Théorème 1.11. *soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$.il existe un seul opérateur $T^* \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant*

$$\forall (f,g) \in E \times F, \langle T(f), g\rangle_F = \langle f, T^*(g)\rangle_E$$

L'opérateur T*est appelé **opérateur adjoint** de T, et on a

$$\|T\|_{L(E,F)} = \|T^*\|_{L(F,E)}$$

.

Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

Définition 1.11. *(voir [5]) soit E un espace de hilbert, on dit que $T \in \mathcal{L}(E)$ est un **opérateur auto-adjoints** si T=T^*, c'est -a-dire*

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle T(x), y\rangle_E = \langle x, T(y)\rangle_E$$

Théorème 1.12. *on suppose que **E** est séparable. soit T un opérateur autoadjoint compact .*

Alors E admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

Chapitre 2

Espace de sobolev fractionnaire

Dans ce chapitre on va introduire les espaces de sobolev de type fractionnaire noté $W^{S,P}(\Omega)$ et quelques proprietés de ces espaces, puis on donne la définition de l´opérateur p-laplacien fractionnaire et ces propriétés.

2.1 L´espace de Sobolev $W^{S,P}(\Omega)$

2.1.1 Espace de Sobolev fractionnaire, $0 < s < 1$

Définition 2.1. *(voir [8]) soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$, on définit l´espace de Sobolev fractionnaire $W^{S,P}(\Omega)$ par :*

$$W^{S,P}(\Omega) = \left\{ u \; \in \; L^p(\Omega) \; \textit{tell que} \; \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{P}+s}} \; \in \; L^p(\Omega \times \Omega). \right\}$$

c´est un espace vectoriel, on le muni par la norme :

$$\|u\|_{W^{S,P}}(\Omega) = \left([u]_{s,p}^p + \; \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{P}}$$

avec :

$$[u]_{s,p} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \right)^{\frac{1}{P}}$$

Proposition 2.1. *soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$, nous avons alors :*

1− $W^{S,P}(\Omega)$ est un espace séparable , et de Banach pour tout $1 \leq P < +\infty$.

$2 -$ $W^{S,P}(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < P < +\infty$.

$3 -$ $W^{S,P}(\Omega)$ est un espace uniformément convexe pour tout $1 < P < +\infty$.

Démonstration. soit $(u_n)_n$ suite de cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{w^{s,p}(\Omega)}$, alors $(u_n)_n$ est de cauchy dans $L^P(\Omega)$, donc converge vers u dans $L^p(\Omega)$. □

On suppose $(v_n)_n$:

$$v_n(x,y) = \frac{u_n(x)-u_n(y)}{|x-y|^{\frac{N}{P}+s}}$$

Qui est de cauchy dans $L^p(\Omega)$,donc converge dans $L^p(\Omega)$.

Soit $(u_{\sigma(n)})_n$ une sous suite de $(u_n)_n$, et par T.C.D converge p.p vers $u(x)$ et par suite $(v_{\sigma(n)})_n$ converge p.p pour tout (x,y) vers :

$$u(x,y) = \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}$$

On applique lemme de fatou, on obtient :

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \leq \lim_{x \longrightarrow \infty} \inf \int_\Omega \int_\Omega \frac{\left|u_{\sigma(n)}(x)-u_{\sigma(n)}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy$$

Alors $u \in W^{S,p}(\Omega)$ (car $u_{(n)}(x) \in W^{S,P}(\Omega)$).

De plus d´après T.C.D nous avons

$$\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \text{ dans } L^p(\Omega \times \Omega)$$

D´où $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{S,P}(\Omega)$.

2.1.2 Espace de Sobolev fractionnaire , $s > 1$

Définition 2.2. *voir* [8] *soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ *avec* $s > 1$ *et* $p \in [1, +\infty[$.

L´espace $W^{S,P}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{S,P}(\Omega) = \left\{ u \in W^{[S],p}(\Omega) \text{ tq } D^\alpha u \in W^{s-[s],p}(\Omega), \forall \alpha, \ |\alpha| = s \right\}$$

ou $[s]$ désigne la partie entiére de s.
C'est un espace vectoriel, on le muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{S,P}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{W^{[S],P}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} \|D^\alpha u\|^p_{W^{S-[S],P}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{P}}$$

Si $s = [s]$, alors l´espace $W^{S,P}(\Omega)$ coïncide avec l´espace de Sobolev classique.
$\left(W^{S,P}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{S,P}(\Omega)} \right)$ est un espace de Banach .

2.2 Des Exemples d´Application sur les Espaces de Sobolev de Type fractionnaire :

Exemple 2.1. *Montrons que :*

$$\begin{aligned} u &: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &: \longrightarrow \ln|x| \end{aligned}$$

appartient à $w^{s,p}((0,1))$ où $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$ avec $sp < 1$.

Démonstration. comme $u \in L^p((0,1))$ c-à-d : on sait que u est continue donc elle est mésurable dans (0,1) de plus, on calcule $\int_0^1 (\ln|x|)^p dx$: on sait que $\square$

$$|\ln|x|| < |x|$$

alors

$$|\ln|x||^p < |x|^p,$$

$$\int_0^1 |\ln|x||^p \, dx < \int_0^1 |x|^p \, dx,$$

$$\int_0^1 |x|^p \, dx = \left[\frac{1}{p+1} |x|^{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1} < \infty,$$

alors :

$$\int_0^1 |\ln|x||^p \, dx < \infty.$$

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^P((0,1) \times (0,1))$$

donc, on pose :

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln|x| - \ln|y||^p}{|x-y|^{sp+1}} dxdy$$

on a :

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln|x| - \ln|y||^p}{y^{sp+1} \left|\frac{x}{y} - 1\right|} dxdy$$

en faisant le changement de variable $t = \frac{x}{y}$ alors :

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{y}} y^{-sp} \frac{|\ln|ty| - \ln|y||^p}{|t-1|^{sp+1}} dtdy$$

$$I = \int_0^1 y^{-sp} dy \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{\left|\ln\left|\frac{ty}{y}\right|\right|^p}{|t-1|^{sp+1}} dt$$

$$I = \int_0^1 y^{-sp} dy \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln|t||^p}{|1-t|^{sp+1}} dt$$
$$\leq \int_0^1 \frac{1}{y^{sp}} dy \int_0^1 \frac{|\ln|t||^p}{|1-t|^{sp+1}} dt + \int_0^1 \frac{1}{y^{sp}} dy \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln|t||^p}{|1-t|^{sp+1}} dt$$

$$= I_1 + I_2$$

pour I_1 on a les equivalences suivantes :

au voisinage de 0 :

$$f_1(t) = \frac{|\ln|t||^p}{|1-t|^{sp+1}} \sim f_2(t) = |\ln|x||^p$$

car

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = 1$$

et au voisinage de 1 :

$$f_1(t) = \frac{|\ln|t||^p}{|1-t|^{sp+1}} \sim f_3(t) = |1-t|^{p-sp-1}$$

car

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{f_1(t)}{f_3(t)} = 1$$

De plus : on a $sp < 1$ alors d'aprés l'integrale de Riemann type 2 on a :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{y^{sp}} dy < +\infty.$$

Pour I_2, d'aprés la formule de Fubini nous avons :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{y^{sp}} dy \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln|t||^p}{|1-t|^{sp+1}} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{|\ln|t||^p}{|1-t|^{sp+1}} dt \int_0^{\frac{1}{t}} y^{-sp} dy$$

$$= \frac{1}{-sp+1} \int_1^{+\infty} \frac{|\ln|t||^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} dt$$

or on a au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{|1-t|^{sp+1}} \sim \frac{1}{|t|^{sp+1}}$$

Alors

$$\frac{|\ln|t||^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} \sim \ln|x|^p \, t^{-2}$$

et au voisinage de 1 :

$$\frac{|\ln|t||^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} \sim |1-t|^{p-sp-1}.$$

Donc

$$I_2 < +\infty$$

Exemple 2.2. *Montrons que :*

$$\begin{aligned} u \ &: \ (0,1) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \ &: \ \longrightarrow u(x) = |x|^\alpha \end{aligned}$$

appartient à $W^{S,P}((0,1))$ où $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$ avec $sp < 1$

Démonstration. alors on pose □

$$I = \int_0^1 (|x|)^p dx$$

avec $\alpha = 1$ et comme $u \in L^p((0,1))$ c-à-d : on sait que u est continue donc elle est mésurable dans $(0,1)$ de plus, on calcule

$$I = \int_0^1 (|x|)^p dx = \left[\frac{|x|^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1} < \infty.$$

on montre que

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p((0,1)) \times (0,1))$$

on pose :

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|x-y|^p}{|x-y|^{sp+1}} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^{p-sp-1}\, dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^y (y-x)^{p-sp-1} dx + \int_Y^1 (x-y)^{p-sp-1} dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[\left[-\frac{1}{p-sp}(y-x)^{p-sp} \right]_0^y + \left[\frac{1}{p-sp}(x-y)^{p-sp} \right]_y^1 \right] dy$$

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{p-sp} y^{p-sp} + \frac{1}{p-sp}(1-y)^{p-sp} \right] dy$$

$$= (\frac{1}{p-sp})(\frac{1}{p-sp+1}) \left[y^{p-sp+1} \right]_0^1 - (\frac{1}{p-sp})(\frac{1}{p-sp+1}) \left[(1-y)^{p-sp+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{(p-sp)(p-sp+1)} + \frac{1}{(p-sp)(p-sp+1)}$$

$$= \frac{2}{(p-sp)(p-sp+1)}$$

$$< \infty.$$

2.3 Dualité de l´Espace $W^{S,P}(\Omega)$

Définition 2.3. *voir* [3] *si* $s < 0$ *et* $p \in]1, +\infty[$ *alors :*

$$W^{S,P}(\Omega) = (w_0^{-s,q}(\Omega))^\star$$

où $W^{S,P}(\Omega)$ est l´espace dual $W_0^{-s,q}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Proposition 2.2. *soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$, nous avons alors :*

1. $W^{S,P}(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p < +\infty$.

2. $W^{S,P}(\Omega)$ est un espace séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.

3. $W^{S,P}(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.

2.4 Les Injections de type Sobolev

Théorème 2.1. *voir* [3] *soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [1,+\infty[$ alors :*

1. Si $0 < s < s' < 1$, alors l'injection :

$$w^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow w^{s,p}(\Omega)$$

est continue

pour cela il existe un $c_1(n,s,p) \geq 1$ telle que :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq c_1(n,s,p)\,\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}$$

pour tout $u \in w^{s',p}(\Omega)$.

2. Si $0 < s < 1$ et Ω est de classe $C^{0,1}$avec une frontière borné $\partial\Omega$, alors l'injection :

$$w^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow w^{s,p}(\Omega)$$

est continue

pour cela il existe un $c_2(n,s,p) \geq 1$ telle que :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq c_2(n,s,p)\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

3. Si $1 < s < s'$et Ω est de classe $C^{0,1}$alors l'injection :

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega).$$

est continue

2.5 Espace $H^s(\Omega)$

Définition 2.4. *voir* [1] *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soient $s \in \left]0,1\right[$ et $p = 2$.L ´espace $H^s(\Omega)$ est défini par :*

$$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$$

Proposition 2.3. *Le produit scalaire dans $H^s(\Omega)$ est défini par :*

$$\langle u, v\rangle_{H^S(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_{\Omega\times\Omega} \frac{(u(x) - u(y))\,(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}}dxdy, \qquad \forall u, v \in H^s(\Omega)$$

Alors $H^s(\Omega)$ est espace de Hilbert.

Clairement, pour tout $s \in \left]0,1\right[$,on a

$$H^s(\mathbb{R}^N) = W^{s,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : [u]_{s,2} < +\infty\right\}$$

Définition 2.5. *voir* [1] *L ´espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ peut être défini de manière alternative via la transformée de Fourier. Alors :*

$$\hat{H}^s(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^{2s})\,|\digamma u(\xi)|^2\,dx < +\infty\right\}$$

2.6 Opérateur P-Laplacien fractionnaire

Définition 2.6. *voir* [9] *soient $p \in \left]1,+\infty\right[$ et $s \in \left]0,1\right[$, alors on définit le P-Laplacien fractionnaire par :*

$$\left(-\triangle_p^s\right)u(x)=2\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(x)}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\left(u(x)-u(y)\right)}{|x-y|^{N+sp}}dy$$

$$=2PV\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\left(u(x)-u(y)\right)}{|x-y|^{N+sp}}dy$$

Remarque 2.1. • *Si $p\neq 2$: $(-\triangle)_p^s$ est non linéaire .*

• Une caractéristique typique de cet opérateur susmentionné est la non-localité, en ce sens que la valeur de p-laplacien fraction $u(x)$ à tout point $x\in\Omega$ dépend non seulement des valeurs de x sur l´ensemble Ω, mais en fait sur tout $\mathbb{R}^N$.

• cette définition est une généralisation de l´opérateur laplacien fractionnaire lorsque $p=2$, est qui défini par :

$$(-\triangle)^s u(x)=2C(N,s)PV\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))}{|x\_y|^{N+sp}}dy$$

avec une normalisation de la constante $C=C(N,s)$

• $(-\triangle)_p^s\longrightarrow(-\triangle)_p$quand $s\longrightarrow 1^-$

Proposition 2.4. *soit $s\in\,]0,1[$ et $p\in\,]1,+\infty[$ .Alors :*

$$(-\triangle)_p^s:W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)\longrightarrow(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N))'$$

est bien défini , et de plus :

1) $\forall u,v\in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ nous avons :

$$\left\langle(-\triangle)_p^s u,v\right\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\left(u(x)-u(y)\right)\left(v(x)-v(y)\right)}{|x-y|^{N+sp}}dxdy$$

2)$\forall u,v\in W_0^{s,p}(\Omega)$:

$$\left\langle\left(-\triangle_p^s\right)u,v\right\rangle\leq[u]_{s,p}^{p-1}\,[v]_{s,p}$$

et par suite : $\left\|(-\triangle)_p^s u\right\|_*\leq\|u\|_{W^{S,P}}^{p-1}$

Démonstration. 1) puisque $u \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ alors l'intégrale dans la définition de $(-\triangle)_p^s$ existe donc :

$$(-\triangle)_p^s u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} dy$$

alors $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ nous avons : (on utilise Fubini) :

$$\left\langle (-\triangle)_p^s u, v \right\rangle = 2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} dy v(x) dx$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(x) dx dy \tag{2.1}$$

D'autre part on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(x) dx dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}} dx dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(y) dx dy$$

dans le second intégral nous changeons le rôle entre x et y i.e :$x \longrightarrow y$ et $y \longrightarrow x$ nous avons alors :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(x) dx dy$$

$$\begin{aligned} = \quad & \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}} dx dy \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(x) dx dy \end{aligned}$$

et par suite :

$2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} v(x)dxdy =$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy$$

et d'après (2.1) nous avons :

$$\left\langle (-\triangle)_p^s u, v \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}$$

2)$\forall u, v \in X^s$ nous avons par l'inégalité de Holder :

$$\begin{aligned}
\langle A(u), v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{(N+sp)(\frac{p-1}{p})}\,|x-y|^{N+sp)(\frac{1}{p})}} dxdy \\
&\leq (\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p}}{|x-y|^{N+sp}} dxdy)^{\frac{p-1}{p}} \times \left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}} \frac{|v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{N+sp}} dxdy)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\quad [u]_{s,p}^{p-1}[v]_{s,p}
\end{aligned}$$

Proposition 2.5. *soit* $s \in]0,1[$, $p \in]1,+\infty[$ *et soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$,*on pose*

□

$X_p^s(\Omega) = \left\{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \text{ tel que : } u = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\right\}$ Alors :

$$(-\triangle)_p^s : X_p^s(\Omega) \longrightarrow (X_p^s(\Omega))'$$

1) est de classe (S)

2) est strictement monotone

3) est coercive .

Démonstration. D'abord nous avons $\forall u, v \in X_p^s(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\left\langle (-\triangle)_p^s u - (-\triangle)_p^s v, u-v \right\rangle &= \left\langle (-\triangle)_p^s u, u-v \right\rangle - \left\langle (-\triangle)_p^s v, u-v \right\rangle \\
& \left\langle (-\triangle)_p^s u, u \right\rangle + \left\langle (-\triangle)_p^s v, v \right\rangle - \left\langle (-\triangle)_p^s u, v \right\rangle - \left\langle (-\triangle)_p^s v, u \right\rangle \\
&\geq [u]_{s,p}^p + [v]_{s,p}^p - [u]_{s,p}^{p-1}[v]_{s,p} - [v]_{s,p}^{p-1}[u]_{s,p} \\
&= \left([u]_{s,p}^{p-1} - [v]_{s,p}^{p-1}\right)\left([u]_{s,p} - [v]_{s,p}\right)
\end{aligned}$$

1) Soit $u_n \longrightarrow u$ dans $X_p^s(\Omega)$ telle que $(-\triangle)_p^s u_{n,} u_n - u > \longrightarrow 0$ alors nous avons :

$$\left\langle (-\triangle)_p^s u_{n,} - (-\triangle)_p^s u, u_n - u \right\rangle = \left\langle (-\triangle)_p^s u_n, u_n - u \right\rangle - \left\langle -\triangle)_p^s u, u_n - u \right\rangle \longrightarrow 0$$

et puisque :

$$\left\langle (-\triangle)_p^s u_{n,} - (-\triangle)_p^s u, u_n - u \right\rangle \geq ([u_n]_{s,p}^{p-1} - [u]_{s,p}^{p-1})([u_n]_{s,p} - [u]_{s,p})$$

□

alors $[u_n]_{s,p} \longrightarrow [u]_{s,p}$or nous avons $[.]_{s,p}$est une norme dans $X_p^s(\Omega)$ équivalent à la norme $\|\cdot\| W^{s,p}$donc puisque X_p^sest uniformément convexe alors $u_n \longrightarrow u_n$,donc $(-\triangle)_p^s$ est de classe (S).

2) soit $u \neq v \in X_p^s(\Omega)$ montrons que :

$$\left\langle (-\triangle)_p^s u - (-\triangle)_p^s v, u-v \right\rangle > 0$$

nous avons :

$$\left\langle (-\triangle)_p^s u \right\rangle - \left\langle (-\triangle)_p^s v, u-v \right\rangle \geq ([u]_{s,p}^{p-1} - [v]_{s,p}^{p-1})([u]_{s,p} - [v]_{s,p})$$

supposons que :

$$\begin{aligned}
\left\langle (-\triangle)_p^s u \right\rangle - \left\langle (-\triangle)_p^s v, u-v \right\rangle &= 0, \text{alors :} \\
\left\langle (-\triangle)_p^s u \right\rangle - \left\langle (-\triangle)_p^s v, u-v \right\rangle &= ([u]_{s,p}^{p-1} - [v]_{s,p}^{p-1})([u]_{s,p} - [v]_{s,p}) = 0
\end{aligned}$$

et par suite :$[u]_{s,p} = [v]_{s,p}$ et de plus puisque $\left\langle -\triangle\right)_p^s u, v\right\rangle \leq [u]_{s,p}^{p-1}\, [v]_{s,p}$alors :

$$[u]_{s,p}^{p-1}\, [v]_{s,p} = \left\langle (-\triangle)_p^s u, v\right\rangle \text{ et } [v]_{s,p}^{p-1}\, [u]_{s,p} = \left\langle (-\triangle)_p^s v, u\right\rangle$$

$\forall \alpha, \beta \geq 0$,pas à la fois zéro, nous avons $\alpha u = \beta v$,ce qui est absurde avec le fait que $u \neq v$ pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

3) évident

Proposition 2.6. *Soit* $s \in]0,1[$ *et* $p \in]1, +\infty[$ *.alors :*

$$\left(-\triangle\right)_p^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N))'$$

est continue i.e($-\triangle)_p^s \in C(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N), (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N))')$

Démonstration. soit $u_n \longrightarrow u$ dans $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ montrons que ($-\triangle)_p^s u_n \longrightarrow$ ($-\triangle)_p^s u$ dans $(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N))'$.En effet nous avons d'après la proposition (2.6) :

$$\left\|(-\triangle)_p^s u_n - (-\triangle)_p^s u\right\| * \quad \leq [u_n - u]_{s,p}^{p-1}$$

alors il suffit de montrer que :$[u_n - u]_{s,p}^{p-1} \longrightarrow 0$;nous avons : $u_n \longrightarrow u$ dans $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ alors $u_n \longrightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ donc pour une sous suite nous avons :$\exists g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que :

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \text{ p.p et } |u_n| \leq g(x)$$

et d'après théorème de convergence dominée nous obtenons le résultat souhaité. □

Chapitre 3

Problème de valeur propre pour p-Laplacien fractionnaire

Dans ce chapitre on va étudier l'existence de solution d'un probléme aux valeurs propres faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien fractionnaire, puis on va examiner les différentes propriétés de la premiére valeur propre (positivité , simplicité).

3.1 présentation du problème

soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$et $s \in (0,1)$, $p > 1$.on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} (-\triangle)_p^s u = \lambda \left|u\right|^{p-2} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

le but de cette partie d'étudier l'existence de la premiére valeur propre d'un problème.la nature du problème exige d'introduire la définition de la solution faible du problème (3,1) comme suit :

Définition 3.1. *on dit que u est une solution faible de (3,1) si* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *telle que :*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy = \lambda\int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx \quad \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega) \tag{3.2}$$

Définition 3.2. *soit* $s \in (0,1)$ *et* $p > 1$,*on dit que* λ *est une valeur propre de l'opérateur p-Laplacien fractionnaire, s'il existe une fonction* $u \in W_0^{s,p}(\Omega), u \neq 0$ *du problème (3,2).*

la solution faible u s'appelle fonction propre associé à λ.

Remarque 3.1. *Remarquons que si on remplace v par* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *dans (3,2).on obtient* λ *comme le quotient suivant :*

$$\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy}{\int_{\Omega}|u(x)|^p dx}$$

ce quotient est appelé le quotient de **Rayleigh**.

3.2 Etude d'existence de la première valeur propre

Définition 3.3. *on note la première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien fractionnaire* λ_1 *est définie par :*

$$\lambda_1 = \inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\diagup\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy}{\int_{\Omega}|u(x)|^p dx} = \inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\diagup\{0\}} \frac{\|u\|^p_{w_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}}$$

Le théorème suivant de l'existence de la première valeur propre :

Théorème 3.1. *voir* [4]*soit* $s \in (0,1)$ *et* $p > 1, \Omega$ *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, *Alors il existe une fonction* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *associée à* $\lambda_1 > 0$ *qui est caractérisée comme suit,*

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

pour démontrer ce théorème on utilise le résultat suivant :

Théorème 3.2. *voir* [4]*soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, avec* $n \geq 2$ *pour* $p \in]1, +\infty[$ *nous définissons la fonction*

$G : W_0^{s,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$u \longmapsto \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy$$

alors G est différentiable sur $W_0^{s,p}(\Omega)$ et

$$\langle G'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)))}{|x - y|^{n+sp}} dxdy$$

Démonstration. □

on montre que G est Gâteaux différentiable c'est -à-dire

$$\forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega) \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{G(u + tv) - G(u)}{t} = \langle G'(u), v \rangle .$$

on observe l'application $\eta \longrightarrow \frac{1}{p} \frac{|\eta|^p}{|x-y|^{n+sp}}, \eta \in \mathbb{R}^n, p > 1$ est différentiable, dans ce cas sa différentielle est
donné par $\frac{|\eta|^{p-2}\eta}{|x-y|^{n+sp}}, \forall \eta \in \mathbb{R}^n$
d'où

$$\forall \eta, \xi \in \mathbb{R}^n \frac{1}{p} \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{|\eta + t\xi|^p}{|x - y|^{n+sp}} - \frac{|\eta|^p}{|x - y|^{n+sp}} \right) = \frac{|\eta|^{p-2} \eta.\xi}{|x - y|^{n+sp}}$$

donc $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\frac{1}{p} \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{|(u(x) - u(y)) + t(v(x) - v(y))|^p}{|x - y|^{n+sp}} - \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} \right) \tag{3.3}$$

$$= \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+sp}}$$

on pose pour $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n, \psi(t) = \frac{\frac{1}{p}|\eta+t\xi|^p}{|x-y|^{n+sp'}} \psi$ est différentiable et

$$\psi'(t)) = \frac{|\eta + t\xi|^{p-2}(\eta + t\xi)\xi}{|x-y|^{n+sp}}$$

on applique **le théorème des accroissement finis**

$\exists\theta$ entre 0 et t $(0 < |\theta| < |t|)$ telle que :

$$\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t - 0} = \psi'(\theta)$$

on a

$$\frac{1}{p}\frac{1}{t}\left(\frac{\frac{1}{p}|\eta + t\xi|^p}{|x-y|^{n+sp}} - \frac{\frac{1}{p}|\eta|^p}{|x-y|^{n+sp}}\right) = \frac{|\eta + \theta\xi|^{p-2}(\eta + \theta\xi)\xi}{|x-y|^{n+sp}}$$

par conséquent

$$\frac{1}{p}\frac{1}{t}\left(\frac{|u(x) - u(y) + t(v(x) - v(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}} - \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\right)$$

$$= \frac{|(u(x) - u(y)) + \theta(v(x) - v(y))|^{p-2}((u(x) - u(y) + \theta(v(x) - v(y)))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+sp}}$$

on peut supposer que $|t| < 1, d'où\ |\theta| < 1$, et d'après le lemme 1.3 on voit

$$\frac{1}{p}\left|\frac{1}{t}\left(\frac{|u(x) - u(y) + t(v(x) - v(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}} - \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\right)\right|$$

$$\leq |(u(x) - u(y)) + \theta(v(x) - v(y))|^{p-1}|v(x) - v(y)|$$

$$\leq C(|(u(x) - u(y))|^{p-1}(v(x) - v(y)) + |v(x) - v(y)|^p)$$

on a $|u(x) - u(y)|^{p-1} \in L^{p'}$ et $|v(x) - v(y)| \in L^p$

D'après l'inégalité de hölder on a $|u(x) - u(y)|^{p-1}|v(x) - v(y)| \in L^1(\Omega)$

d'où

$h = |u(x) - u(y)|^{p-1}|v(x) - v(y)| + |v(x) - v(y)|^p \in L^1(\Omega)$

en conséquence

$$\left|\frac{1}{t}(\frac{|(u(x)-u(y))+t(v(x)-v(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}}-\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}})\right| \leq ch \in L^1(\Omega) \tag{3.4}$$

En utilisant la relation (3.3) et (3.4) et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient :

$$\frac{1}{p}\lim_{t\longrightarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{t}(\frac{|u(x)-u(y)+t(v(x)-v(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}}-\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}})dxdy$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy,$$

ce qui termine que G est Gâteaux différentiable comme suit :

$$\langle G'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

D'après la proposition 2.6, G' est continue alors G est différentiable .

Théorème 3.3. *voir* [4]*Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$,*avec* $n \geq 2$ *pour* $p \in]1,+\infty[$ *nous définissons la fonction*

$H : W_0^{s,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$u \longmapsto \frac{1}{p}\int_{\Omega}|u(x)|^p\,dx$$

alors H est différentiable sur $W_0^{s,p}(\Omega)$ et

$$\langle H'(u),v\rangle=\int_{\Omega}|u|^{p-2}\,uvdx$$

Démonstration. □

on montre que H est Gâteaux différentiable c'est-à-dire

$$\forall u,v\in W_0^{s,p}(\Omega)\quad \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{H(u+tv)-H(u)}{t}=\langle H'(u),v\rangle .$$

considérons l'application $x \longrightarrow \frac{1}{p}|x|^p, x \in \mathbb{R}^n, p > 1$ est différentiable, sa différentiable est donné par $|x|^{p-2}x, \forall x \in \mathbb{R}^n$
d'où

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \frac{1}{p} \lim_{t \longrightarrow 0} (\frac{|x+ty|^p - |x|^p}{t}) = |x|^{p-2} x.y$$

par suite $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\frac{1}{p} \lim_{t \longrightarrow 0} (\frac{|u(x)+tv(x)|^p - |u(x)|^p}{t}) = |u(x)|^{p-2} u(x)v(x) \tag{3.5}$$

d'autre part, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n, \varphi(t) = \frac{1}{p}|x+ty|^p, \varphi$ est différentiable et

$$\varphi'(t) = |x+ty|^{p-2}(x+ty)y$$

on applique **le théorème des accroissement finis**
$\exists \theta$ entre 0 et t $(0 < |\theta| < |t|)$ telle que :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t-0} = \varphi'(\theta)$$

où

$$\frac{1}{p}(\frac{|x+ty|^p - |x|^p}{t}) = |x+\theta y|^{p-2}(x+\theta y)y$$

par conséquent

$$\frac{1}{p}(\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}) = |u+\theta v|^{p-2}(u+\theta v)v$$

supposons que $|t| < 1$,d'où $|\theta| < 1$,d'après lemme 1.3 on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\left|\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t}\right| &\leq |u+\theta v|^{p-1}|v| \\ &\leq C(|u|^{p-1}|v| + |v|^p) \end{aligned}$$

soit $|u|^{p-1} \in L^{p'}$et $|v| \in L^p$ et par l'inégalité de Hölder on a $|u|^{p-1}|v| \in L^1(\Omega)$

d'où

$h = |u|^{p-1}|v| + |v|^p \in L^1(\Omega)$ donc

$$\left|\frac{|u(x)+tv(x)|^p - |u(x)|^p}{t}\right| \leq Ch \in L^1(\Omega) \tag{3.6}$$

par la relation (3.5) et (3.6) et D'aprés le théorème de la convergence dominée de lebesgue, on obtient

$$\frac{1}{p}\lim_{t\longrightarrow 0}\int_{\Omega}\frac{|u(x)+tv(x)|^p - |u(x)|^p}{t}dx = \int_{\Omega}|u(x)|^{p-2}u(x)v(x)dx,$$

Enfin H est Gâteaux différentiable et

$$\langle H'(u), v\rangle = \int_{\Omega}|u|^{p-2}uvdx$$

Il est facile de montrer la continuité de H'. D'où H est différentiable .

preuve du Théorème 3.1

D'abord on commence par montrer que

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy.$$

$$\lambda_1 = \inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)/\{0\}}\frac{\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}} \leq \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}}\|u\|^p_{w_0^{s,p}(\Omega)} \tag{3.7}$$

en effet que $\left\{u \in W_0^{s,p}(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1\right\} \subset \{u \in W_0^{s,p}(\Omega)/\{0\}\}$.

pour $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$,

on pose

$$v = \frac{u}{\|u\|_{L^p(\Omega)}} \in W_0^{s,p}(\Omega), \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$$

alors

$$u(x) - u(y) = \|u\|_{L^p(\Omega)}(v(x) - v(y))$$

donc

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|u\|_{L^p}^p(v(x)-v(y))^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy}{\int_\Omega |u(x)|^p\,dx} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(v(x)-v(y))^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy.$$

de plus

$$\frac{\|u\|^p_{w_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p}} = \|v\|^p_{w_0^{s,p}(\Omega)} \geq \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)=1}}} \|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}$$

ce qui implique

$$\inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)/\{0\}} \frac{\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}} \geq \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)=1}}} \|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)} \tag{3.8}$$

de (3.7) et (3.8) on obtient :

$$\lambda_1 = \inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)/\{0\}} \frac{\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}} = \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)=1}}} \|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}$$

Pour montrer le théorème on utilise la méthode direct de minimisation .

pour $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\lambda_1 = \inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)/\{0\}} \frac{\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}}$$

D'après l'inégalité de poincaré

$$\exists C > 0 : \|u\|^p_{L^P} \leq C\,\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}$$

en conséquence $\lambda_1 \geq \frac{1}{C} > 0$.

Soit $\{u_n\}_{n\in N}$ est une suite minimisante ,telle que :

$\forall n > 0, \exists u_n : \lambda_1 \leq \frac{\|u_n\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)}} < \lambda_1 + \frac{1}{n}$ alors

$$\frac{\|u_n\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)}} \longrightarrow \lambda_1$$

$$\|u_n(x)\|^p_{L^p(\Omega)} = 1 \text{ et } \|u_n\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)} \longrightarrow \lambda_1$$

alors $\{u_n\}_{n\in N}$ est borné dans $W_0^{s,p}(\Omega)$
en effet il existe un sous suite $\{u_n\}_{n\in N}$ et $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } W_0^{s,p}(\Omega)$$

en vertu le lemme 1.5, on obtient

$$\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)} \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \|u_n\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \lambda_1$$

d'où$\|u\|^p_{W_0^{s,p}} = \lambda_1$ alors le minimum existe .
on pose :

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy,$$

$$H(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx,$$

et nous considérons le quotient $F : w_0^{s,p}(\Omega)/\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définit par

$$F(u) = \frac{G(u)}{H(u)}$$

alors

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} F(u)$$

Ainsi $\exists u \in W_0^{s,p}(\Omega)/\{0\}$ et $F(u) = \lambda_1$.les fonctions G et H sont différentiable alors il en est de même pour F, et

$$\langle F'(u), v\rangle = \frac{1}{H(u)}(\langle G'(u), v\rangle - F(u)\langle H'(u), v\rangle).$$

comme u est un point minimum de F donc $F'(u) = 0$,et par conséquent

$$\langle G'(u), v\rangle - F(u)\langle H'(u), v\rangle = 0$$

ce qui implique

$$\langle G'(u), v\rangle = \frac{G(u)}{H(u)}\langle H'(u), v\rangle = \lambda_1 \langle H'(u), v\rangle .$$

alors u est une solution faible de (3,2)

3.3 Régularité de la fonction propre

Dans cette section On montre le résultat suivant :

Théorème 3.4. *voir* [4]*soit* $s \in (0,1), p > 1$ *et* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *est une solution de (3,1) , Alors* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 3.1. *voir* [4]*Soit* (a_n) *une suite réel telle que* $a_n > 0, a_{n+1} \leq C^n a_n^{1+\alpha}, \alpha > 0$ *alors*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{si } a_0 \text{ est assez petit}$$

Démonstration. □

on a

$$a_n \leq C^{n-1} a_{n-1}^{1+\alpha}$$

$$a_{n-1}^{1+\alpha} \leq C^{(n-2)(1+\alpha)} a_{n-2}^{(1+\alpha)^2}$$

$$a_{n-2}^{(1+\alpha)^2} \leq C^{(n-3)(1+\alpha)^2 a_{n-3}^{(1+\alpha)^3}}$$

$$\vdots$$

$$a_1^{(1+\alpha)^{n-1}} \leq C^{0\times(1+\alpha)^{n-1}} a_0^{(1+\alpha)n}$$

Par multiplication, on obtient

$$a_n \leq C^{S_n} a_0^{(1+\alpha)^n}$$

avec $S_n = (n-1) + (n-2)(1+\alpha) + (n-3)(1+\alpha)^2 + \ldots + (1+\alpha)^{n-2}$
donc

$$a_n \leq C^{\frac{(1+\alpha)^n}{\alpha^2}} a_0^{(1+\alpha)^n} = (C^{\frac{1}{\alpha^2}} a_0)^{(1+\alpha)^n}$$

alors

$$a_n \longrightarrow 0 \ si \ C^{\frac{1}{\alpha^2}} a_0 < 1$$

c'est-à-dire

$$a_0 < C^{\frac{-1}{\alpha^2}}$$

Lemme 3.2. *voir* [4]*si* $\|u^+\|_{L^P} \leq \delta$ *alors* $\|u^+\|_{L\infty} \leq 1$

pour certain $\delta > 0$.

Démonstration. □

- pour tout entier $K \geq 1$,on considère la fonction w_k définie comme suit :

$$w_k = (u - (1 - 2^{-k}))^+.$$

tq : $w_k \in W_0^{s,p}(\Omega)$ et $w_k = 0$ p.p dans Ω.
On a les inégalités suivantes

$$w_{k+1}(x) \leq w_k(x) \text{ dans } \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

et

$$u(x) < (2^{k+1}-1)w_k(x) \text{ pour } x \in \{W_{k+1} > 0\}. \tag{3.10}$$

on vérifie cette inégalité

$$\begin{aligned}(2^{k+1}-1)w_k &= (2^{k+1}-1)(u-(1-2^{-k}))\\ &\geq (2^{k+1}-1)(u-\frac{1-2^{-k}}{1-2^{-(k+1)}}.u)\\ &= u(2^{k+1}-1)(1-\frac{1-2^{-K}}{1-2^{-(k+1)}})\\ &= u.\end{aligned}$$

et on remarque les inclusions

$$\{w_{k+1} > 0\} \subseteq \left\{w_k > 2^{-(k+1)}\right\}, \tag{3.11}$$

on vérifie cette inclusion

pour $x \in \{w_{k+1} > 0\}$alors

$$u(x) > 1-2^{-(k+1)},$$

et on d'après (3,10)

$$u(x) < (2^{k+1}-1)w_k,$$

alors

$$1-2^{-(K+1)} < (2^{k+1}-1)w_k$$

ce qui implique $w_k > \frac{1-2^{-(k+1)}}{(2^{K+1}-1)} = \frac{2-(K+1)(2^{K+1}-1)}{(2^{k+1}-1)} = 2^{-(k+1)}$.

donc

$$w_k > 2^{-(K+1)},$$

d'ou

$$x \in \left\{ w_k > 2^{-(k+1)} \right\}$$

-si $v \in W_0^{s,p}(\Omega), alors$

$$|v(x) - v(y)|^{p-2} (v^+(x) - v^+(y))(v(x) - v(y)) \geq \left| v^+(x) - v^+(y) \right|^p ,$$

on vérifie cette inégalité

si $x \in \{v > 0\}$ et $y \in \{v < 0\}$.

$$I = |v(x) - v(y)|^{p-2} (v^+(x) - v^+(y)(v(x) - v(y)) > \left| (v^+(x) - v^+(y) \right|^p ,$$

si $x \in \{v < 0\}$ et $y \in \{v < 0\}$.

$$I = |v(x) - v(y)|^{p-2} (v^+(x) - v^+(y))(v(x) - v(y)) = \left| v^+(x) - v^+(y) \right|^p ,$$

si $x \in \{v > 0\}$ et $y \in \{v > 0\}$.

$$I = |v(x) - v(y)|^{p-2} (v^+(x) - v^+(y))(v(x) - v(y)) = \left| v^+(x) - v^+(y) \right|^p$$

alors

$$|v(x) - v(y)|^{p-2} (v^+(x) - v^+(y))(v(x) - v(y)) = \left| v^+(x) - v^+(y) \right|^p ,$$

pour $v^+ = w_{k+1}$ et $v = u - (1 - 2^{-(k+1)})$,

on a

$$\|w_{k+1}\|^p_{w_0^{s,p}} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w_{k+1}(x) - w_{k+1}(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(w_{k+1}(x)-w_{k+1}(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

$$= \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2} u(x) w_{k+1}(x)dx = \lambda \int_{\{w_{k+1}>0\}} |u(x)|^{p-2} u(x) w_{k+1}(x)dx$$

$$\leq \lambda(2^{k+1}-1)^{p-1} \int_{\{w_{k+1}>0\}} w_k(x)^{p-1} w_{k+1(x)} \quad d'aprés (3.10) \qquad \text{alors}$$

$$\leq \lambda(2^{k+1}-1)^{p-1} \int_{\{w_{k+1}>0\}} w_k(x)^p dx \quad \text{d'après (3.9)}$$

$$\leq \lambda(2^{k+1}-1)^{p-1} U_k$$

$$avec \quad U_k = \|w_k\|_{L^p}^p = \int_{\{w_k>0\}} w_k(x)^p dx$$

$$\|w_{k+1}\|_{w_0^{s,p}}^p \leq \lambda(2^{k+1}-1)^{p-1} U_k. \tag{3.12}$$

D'autre part, nous avons par l'inégalité de hölder

$$U_{k+1} = \|w_{k+1}\|_{L^p}^p = \int_{\{w_{k+1}>0\}} w_{k+1}(x)^p dx,$$

$$\leq \left(\int_{\{w_{k+1}>0\}} w_{k+1}^{\alpha p}(x)dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\{w_{k+1}>0\}} 1^{\beta} dx\right)^{\frac{1}{\beta}}, tq : \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

on met $\alpha : \alpha p = p^* \Longrightarrow \alpha = \frac{p^*}{p}$,donc $\beta = \frac{n}{sp}$.

$$U_{k+1} \leq \left(\int_{\{w_{k+1}>0\}} w_{k+1}^{p^*}(x)dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \qquad |\{w_{k+1}>0\}| \, \frac{sp}{n}$$

et d'après le théorème d'injection continue de Sobolev ($W_0^{s,p} \hookrightarrow L^{p^*}$), on obtient :

$$U_{k+1} \leq c \|w_{k+1}\|_{w_0^{s,p}}^p |\{w_{k+1}>0\}|^{\frac{sp}{n}}. \tag{3.13}$$

$$|\{w_{k+1} > 0\}| \leq \left|\left\{w_k > 2^{-(k+1)}\right\}\right| \leq 2^{p(k+1)} U_k. \tag{3.14}$$

on vérifier cette inégalité

d'après (3.11), on obtient

$$|\{w_{k+1} > 0\}| \leq \left|\left\{w_k > 2^{-(k+1)}\right\}\right|$$

d'autre part on a

$$U_k = \int_{\{w_{k+1}>0\}} w_k^p = \int_{\left\{w_{k>2^{-(k+1)}}\right\}} w_k^p + \int_{\left\{w_{k<2^{-(k+1)}}\right\}} w_k^p$$

$$\geq \int_{\left\{w_{k>2^{-(k+1)}}\right\}} w_k^p$$

$$\geq \int_{\left\{w_{k>2^{-(k+1)}}\right\}} 2^{-(k+1)p}$$

$$= 2^{-(k+1)p} \left|\left\{w_k > 2^{-(k+1)}\right\}\right|$$

cela implique

$$\left|\left\{w_k > 2^{-(k+1)}\right\}\right| \leq 2^{(k+1)p} U_k$$

par suite le résultat est évident

on remplace (3.12) et (3.14) dans (3.13), on obtient :

$$U_{k+1} \leq c\lambda (2^{p(k+1)} U_k)^{1+\frac{sp}{n}}$$

d'où

$$U_{k+1} \leq C^k U_k^{1+\frac{sp}{n}}$$

avec $C^k = (c^{\frac{1}{k}} \lambda^{\frac{1}{k}} 2^{\frac{p(k+1)(1+\frac{sp}{n})}{k}})^k$

alors

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} U_k = 0.$$

D'après le lemme 3.1, si

$$\left\|u^+\right\|^p_{L^p(\Omega)} = U_0 \leq C^{\frac{-1}{\alpha^2}} = \delta^p$$

avec $\alpha = \frac{sp}{n}$

on

$$U_k = \|w_k\|^p_{L^p(\Omega)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors

$$w_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.15}$$

d'autre part on a , si $k \to \infty$ alors $w_k \to (u-1)^+$p.p

et $w_k \leq u^+ \in L^P$.D'après le théorème de convergence dominée.

$$w_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (u-1)^+ \text{ dans } L^P. \tag{3.16}$$

D'après (3.15) et (3.16) et par l'unicité de la limite,

$$(u-1)^+ = 0 \Longrightarrow u \leq 1.$$

donc

$$u^+ \leq 1$$

d'ou

$$\left\|u^+\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1.$$

donc, on obtient

$$\left\|u^+\right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \delta^p \text{ alors } \left\|u^+\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1.$$

Démonstration. (preuve de théorème 3.4) □

Si $sp > n$ on a $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ d'après l'injection de Sobolev (voir proposition 2.3).
donc, on suppose que $sp \leq n$.
pour la démonstration du théorème, il reste de prouver que la partie positive $u^+ \in L^\infty$,ensuite on déduit que $u^- \in L^\infty$si on pose $(-u)^+ = u^-$.
on a

$$\left\|u^+\right\|_{L^p(\Omega)} \leq 1 \text{ car } \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1.$$

d'ou

$$\left\|\frac{\delta}{2}u^+\right\|_{L^p} \leq \frac{\delta}{2} < \delta.$$

d'aprés le lemme précédent

$$\left\|\frac{\delta}{2}u^+\right\|_{L^\infty} \leq 1$$

d'ou

$$\left\|u^+\right\|_{L^\infty} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$$

donc $u^+ \in L^\infty(\mathbb{R})$

3.4 Propriété de la première fonction propre

3.4.1 Positivité

Nous montrons dans cette section que la fonction propre associée à la première valeur propre est de signe constant .

Lemme 3.3. *voir* [4]*soit* $s \in (0,1)$, $p > 1$,*soient* $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *telle que* $u, v \neq 0$, *considérons la fonction* σ_t *définie par :*

$\sigma t(x) = ((1-t)v^p(x) + tu^p(x))^{\frac{1}{p}}, \forall t \in [0,1]$.
alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x)-\sigma_t(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy &\leq (1-t)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy + t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy,\\ \forall t &\in [0,1]\end{aligned}$$

Démonstration. □

On observe que

$$\sigma_t = \left\|(t^{\frac{1}{p}}u, (1-t)^{\frac{1}{p}}v\right\|_{l^p},$$

où $\|.\|_{l^p}$ la norme dans $\mathbb{R}^2$.
par l'inégalité triangulaire

$$|\|\xi\|_{l^p} - \|\eta\|_{l^p}| \leq \|\xi - \eta\|_{l^p}.$$

on pose $\xi = (t^{\frac{1}{p}}u(x) + (1-t)^{\frac{1}{p}}v^p(x))$ et $\eta = (t^{\frac{1}{p}}u(y) + (1-t)^{\frac{1}{p}}v^p(y))$
on obtient

$$\left|(tu^p(x) + (1-t)v^p(x))^{\frac{1}{p}} - (tu^p(y) + (1-t)v^p(y))^{\frac{1}{p}}\right|$$

$$\leq (t(u(x) - u(y))^p + (1-t)(v(x - v(y))^p)^{\frac{1}{p}}.$$

alors

$$|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)| \leq (t(u(x) - u(y))^p + (1-t)(v(x) - v(y))^p)^{\frac{1}{p}}.$$

donc

$$|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p \leq t(u(x) - u(y))^p + (1-t)(v(x) - v(y))^p.$$

on multiplie l'inégalité par $\frac{1}{|x-y|^{n+sp},}$ et on intègre sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \leq (1-t)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy + t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

Théorème 3.5. *voir* [4]*soit $s \in (0,1), p > 1$ et $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ est une solution de (3.2),telle que $v > 0$ dans Ω.*

Alors

$$\lambda = \lambda_1.$$

Démonstration. □

Supposons que $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ est une solution strictement positive de (3.2).
Soit $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ une solution du problème (3.2)

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

on pose $u_\epsilon = u + \epsilon, v_\epsilon = v + \epsilon$ et

$$\sigma_t^\epsilon(x) = (tu_\epsilon^p(x) + (1-t)v_\epsilon^p(x))^{\frac{1}{p}}, x \in \Omega, \forall t \in [0,1].$$

d'après le lemme 3.3 on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\sigma_t^\epsilon(x)-\sigma_t^\epsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy-\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

$$\begin{aligned}
&\leq\ (1-t)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy+t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\\
&\leq\ t(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy-\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v((y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy)
\end{aligned}$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\sigma_t^\epsilon(x)-\sigma_t^\epsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy-\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v((y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy)\leq t(\lambda_1-\lambda) \tag{3.17}$$

pour tout $t\in[0,1]$ et $\epsilon>0$,par la convexité de la fonction $|x|^p$on a l'inégalité suivante :

$$|x|^p-|y|^p\geq p\,|y|^{p-2}\,y(x-y)$$

par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\sigma_t^\epsilon(x)-\sigma_t^\epsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy-\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v((y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

$$\geq p\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v((y)|^{p-2}\,(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \tag{3.18}$$

$$\times(\sigma_t^\epsilon(x)-\sigma_t^\epsilon(y)-(v(x)-v(y))),$$

pour $u,v\in W_0^{s,p}(\Omega)$ la fonction $\sigma_t^\epsilon\in W_0^{s,p}(\Omega)$,Alors on pose $\phi=\sigma_t^\epsilon-v_\epsilon$ une fonction test, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v((y)|^{p-2}\,(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\ \sigma_t^\epsilon(x)-\sigma_t^\epsilon(y)-(v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)))$$

$$= \lambda \int_{\Omega} v(z)^{p-1}(\sigma_t^{\epsilon}(z) - v(z))dz,$$

on a $v(x) - v(y) = v_{\epsilon}(x) - v_{\epsilon}(y)$,cela implique

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v((y)|^{p-2}(v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dxdy\ (\sigma_t^{\epsilon}(x) - \sigma_t^{\epsilon}(y) - (v_{\epsilon}(x) - v_{\epsilon}(y)))$$

$$= \lambda \int_{\Omega} v(z)^{p-1}(\sigma_t^{\epsilon}(z) - v(z))dz, \tag{3.19}$$

en combinant (3.17) et (3.18) et (3.19) on obtient :

$$p\lambda \int_{\Omega} v(z)^{p-1}(\sigma_t^{\epsilon}(z) - v(z))dz \leq t(\lambda_1 - \lambda),$$

alors

$$p\lambda \int_{\Omega} v(z)^{p-1}\frac{(\sigma_t^{\epsilon}(z) - v(z))}{t}dz \leq (\lambda_1 - \lambda),$$

on pose $f_t(z) = p\lambda v(z)^{p-1}\frac{(\sigma_t^{\epsilon}(z) - v(z))}{t}$

alors

$$\begin{aligned}
& \lim_{t\longrightarrow 0} p\lambda v(z)^{p-1}\frac{((1-t)v_{\epsilon}^p(z) + tu_{\epsilon}^p(z))^{\frac{1}{p}} - v(z)}{t} \\
= & \lim_{t\longrightarrow 0} p\lambda v(z)^{p-1}\frac{(v_{\epsilon}(z)^p + t(u_{\epsilon}(z)^p - v_{\epsilon}(z)^p))^{\frac{1}{p}} - v(z)}{t} \\
= & \lim_{t\longrightarrow 0} p\lambda v(z)^{p-1}\frac{(v_{\epsilon}(z)^p + t(u_{\epsilon}(z)^p - v_{\epsilon}(z)^p))^{\frac{1}{p}} - (v(z)^p)^{\frac{1}{p}}}{t(u_{\epsilon}(z)^p - v_{\epsilon}(z)^p)}(u_{\epsilon}(z)^p - v_{\epsilon}(z)^p) \\
= & \lambda v(z)^{p-1}(v_{\epsilon}(z)^p)^{\frac{1}{p}-1}(u_{\epsilon}(z)^p - v_{\epsilon}(z)^p) \\
= & \lambda v(z)^{p-1}(v_{\epsilon}(z)^{1-p})(u_{\epsilon}(z)^p - v_{\epsilon}(z)^p) \\
= & \lambda(\frac{v(z)}{v_{\epsilon}(z)})^{p-1}(u_{\epsilon}(z)^p - v_{\epsilon}(z)^p),
\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}|f_t(z)| &\leq p\lambda\left|v(z)^{p-1}\right|\left|\frac{((1-t)v_\epsilon^p(z)+tu_\epsilon^p(z))^{\frac{1}{p}}-v(z)}{t}\right| \\ &= p\lambda\left|v(z)^{p-1}\right|\left|\frac{(v_\epsilon(z)^p+t(u_\epsilon(z)^p-v_\epsilon(z)^p))\frac{1}{p}-(v(z)^p)^{\frac{1}{p}}}{t}\right|\end{aligned}$$

on pose $\varphi(t)=(v_\epsilon(z)^p+t(u_\epsilon(z)^p-v_\epsilon(z)^p))^{\frac{1}{p}}$alors

$\varphi'(t)=\frac{1}{p}(u_\epsilon^p(z)-v_\epsilon^p(z))(v_\epsilon(z)^p+t(u_\epsilon(z)^p-v_\epsilon(z)^p))^{\frac{1}{p}-1}$

on applique le théorème **des accroissements finis**

$\exists\theta$ entre 0 et t $(0<|\theta|<|t|)$ telle que :

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}=\varphi'(\theta)$$

d'où

$$\frac{(v_\epsilon(z)^p+t(u_\epsilon(z)^p-v_\epsilon(z)^p))^{\frac{1}{p}}-(v(z)^p)^{\frac{1}{p}}}{t}$$

$$=\frac{1}{p}(u_\epsilon^p(z)-v_\epsilon^p(z))(v_\epsilon(z)^p+\theta(u_\epsilon(z)^p-v_\epsilon(z)^p))^{\frac{1}{p}-1}$$

alors

$$\begin{aligned}|f_t| &\leq p\lambda\left|v^{p-1}\right|\left|\frac{(v_\epsilon^p+t(u_\epsilon^p-v_\epsilon^p))^{\frac{1}{p}}-(v^p)^{\frac{1}{p}}}{t}\right| \\ &\leq \lambda\left|v^{p-1}\right|\left|(u_\epsilon^p-v_\epsilon^p)(v_\epsilon^p+\theta(u_\epsilon^p-v_\epsilon^p))^{\frac{1}{p}-1}\right| \\ &\leq C\lambda\left|v^{p-1}\right|\left|u_\epsilon^p+v_\epsilon^p\right|\left|v_\epsilon^{1-p}+u_\epsilon^{1-p}\right| \\ &\leq C\lambda(\left|\frac{v}{v_\epsilon}\right|^{p-1}\left|u_\in^p+v_\epsilon^p\right|+\left|\frac{v}{u_\epsilon}\right|^{p-1}\left|u_\epsilon^p+v_\epsilon^p\right|)\in L^1(\Omega)\end{aligned}$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\int_\Omega p\lambda v(z)^{p-1}\frac{(\sigma_t^\epsilon-v(z))}{t}dz=\int_\Omega\lambda(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)})^{p-1}\ (u_\in^p(z)-v_\epsilon^p(z))$$

et par suite

$$\int_{\Omega} \lambda(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)})^{p-1} \quad (u_\epsilon(z)^p - v_\epsilon^p(z)) \leq (\lambda_1 - \lambda).$$

pour ϵ assez petit, alors

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \lambda(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)})^{p-1}((u^p(z)+\epsilon) - (v^p(z)+\epsilon)) = \lambda(u^p(z) - v^p(z))$$

et on a

$$\begin{aligned}
(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)})^{p-1}((u(z)+\epsilon)^p - (v(z)+\epsilon)^p) &\leq \left|(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)})^{p-1}\right| |(u(z)+\epsilon)^p - (v(z)+\epsilon)^p| \\
&\leq 1 \times |C(u^p+\epsilon^p) + C(v^p+\epsilon^p)| \\
&\leq C\,|u^p + v^p + 2| \in L^1(\Omega)
\end{aligned}$$

on applique le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \longrightarrow 0}(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)})^{p-1}((u^p(z)+\epsilon) - (v^p(z)+\epsilon)) &= \int_{\Omega}(u^p(z) - v^p(z)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

alors, on obtient

$$0 \leq (\lambda_1 - \lambda)$$

d'où

$$\lambda \leq \lambda_1$$

puisque λ_1 est la plus petite valeur propre, alors

$$\lambda_1 \leq \lambda$$

donc

$$\lambda_1 = \lambda$$

3.4.2 Simplicité

Théorème 3.6. *voir* [4]*soit* $s \in (0,1)$ *et* $p > 1$.*Alors la première valeur propre* λ_1 *est simple, c'est -à-dire si* u, v *deux fonctions propres associées à* λ_1 *alors* $u = \alpha v$ *pour certain* α.

Démonstration. □

Soient u, v deux fonctions propres associées à $\lambda_1, u, v > 0$. on rappelle la définition de la fonction σ_t :

$$\sigma_t(x) = ((1-t)v^p(x) + tu^p(x))^{\frac{1}{p}}$$

Alors, D'après le lemme 3.3 nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \leq (1-t)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy + t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy$$

et on a

$$(1-t)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy + t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy = (1-t)\lambda_1 + t\lambda_1 = \lambda_1$$

d'où, d'après la définition de $\lambda_{1,}$on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy = \lambda_1$$

Donc

$$u(x)v(y) = u(y)v(x)$$

Donc

$$\frac{u(y)}{v(y)} = \frac{u(x)}{v(x)} = C$$

ce qui implique

$$u = Cv$$

.

Conclusion

L'objet de ce travail à été l'étude d'un problème typique aux valeurs propres faisant intervenir l'opèrateur p-Laplacien fractionnaire dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

Nous avons montré l'existence de la première valeur propre et nous avons montré qu'elle est simple et qu'elle est l'unique valeur propre tel que la fonction propre associée est positive .

plusieurs questions restent ouvertes concernant le spectre de l'opérateur p-laplacien fractionnaire, nous envisageons d'explorer l'étude de l'existence de la première valeur propre de l'opérateur p-laplacien fractionnaire dans un domaine non borné .

Bibliographie

[1] **AMMARI IMANE**, Mémoire de Master (2019/2020) , "Etude d'un problème p-laplacien fractionnaire avec un terme non linéaire singulier". Université Mohamed Boudiaf de M'sila, Option : EDPs et applications.

[2] **AMMI AMIRA**, Mémoire de Fin d'étude(2020/2021) , "Spectre du laplacien dans $L^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ". Uninersité Chadli Bendjdud-El Tarf, Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Calcul Stochastique.

[3] **BELAM ABDEALLAH** ,Mémoire de fin d'étude (2020/2021) , "Analyse spectrale d'un opérateur d'ordre Deux de type fractionnaire ".Centre universitaire Salhi Ahmed -Naama ,Spécialité : Analyse Fonctionnelle et EDPs .

[4] **BELHOUT KHADRA**, Mémoire de Master (2018/2019), "problème de valeurs propres pour le laplacien fractionnaire". Université Mohamed Boudiaf de M'sila, Opion : EDP et application.

[5] **DEBIH IBTISSEM** ,Mémoire de Master (2018/2019) , "problème de valeurs propres pour le laplacien et le p-laplacien".Université Mohamed Boudiaf de M'sila, Opion : EDP et application

[6] **G.FANZINA** , **G.PALATUCCI** : fractional p-eigenvalues , pp.1-13.

[7] **Hain BREZIS. ANALYSE FONCTIONNELLE**, "théorie et application". "Université Pierre et Marie Curie et Ecole Polytechnique".

[8] **MIRA SOUMIA,** Mémoire de Fin D'etude (2018/2019) , "Sur un espace fractionnaire de sobolev avec exposant variable et applications"

[9] **SRATI MOHAMMED**, Mémoire de Fin d'étude (soutenue le 22/6/2017) , "P-laplacien fractionnaire $(-\Delta)_p^s$". Université de Sidi Mohamed Ben Abdellah, FSDM, Spécialité : EDP et l'analyse Numériques.

Résumé

Ce mémoire donne un aperçu sur les espaces de Sobolev fractionnaire et l'opérateur p-Laplacien fractionnaire, nous allons étudie l'existence de la première valeur propre d'un problème faisant intervenir le p-Laplacien fractionnaire de la forme :

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} \mathrm{u} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ou Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $1 < p < +\infty$. Nous montrons l'existence de la première valeur propre et montrons qu'elle est simple et la fonction propre associée est strictement positive.

Mots clés : Espace de Sobolev fractionnaire, p-Laplacien Fractionnaire, valeur propre .

Abstract

This Memory provides an overview of the fractional Sobolev spaces and the fractional p-Laplacian operator, we will study the existence of the first eigenvalue of a problem involving the fractional p-Laplacian in the form :

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} \mathrm{u} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Where Ω is a open bounded domain of $\mathbb{R}^n$ and $1 < p < +\infty$. We demonstrate the existence of the first eigenvalue and show that it is simple and the associated eigenfunction is strictly positive.

Key Words : Fractional space of Sobolev, Fractional p-Laplacian, eigenvalue .

ملخص

تقدم هذه المذكرة لمحة حول فضاء صوبولاف الكسري و المؤثر $p-$ لابلاسيان الكسري, قمنا بدراسة وجود القيمة الذاتية الأولى لمشكلة تتطلب استعمال $p-$ لابلاسيان الكسري من الشكل:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} \mathrm{u} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

حيث Ω هو ميدان محدود و مفتوح في $\mathbb{R}^n$ و $1 < p < +\infty$. أظهرنا وجود القيمة الذاتية الأولى وبينا أنها عادية و الدالة المرتبطة بها موجبة تماما

كلمات مفتاحية: فضاء صوبولاف الكسري, $p-$ لابلاسيان الكسري, قيمة ذاتية.