



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Application du degré topologique aux équations
aux dérivées partielles semi linéaires

Présenté par :

BOUSSAHA Amar

Devant le Jury :

Dr. BENSEGHIR Rym	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. GHARBI Ouahiba	MCB	Univ Badji Mokhtar Annaba	Rapporteur
Dr. ALI KHELIL Karima	MCA	Univ Badji Mokhtar Annaba	Examinatrice

Année Universitaire 2022-2023

TABLE DES MATIÈRES

1	Préliminaires	10
1	Rappels	11
1.1	Les espaces de Hilbert et Théorème de Lax-Milgram	12
1.2	Les espaces L^p	15
1.3	Les espaces de Sobolev	17
1.4	Résultats supplémentaires	20
2	Degré topologique	23
2.1	Degré de Brouwer	23
2.2	Le degré topologique de Leray-Schauder	24
2	Application	27
1	Position du problème	28
2	Résolution par la méthode variationnelle	29
2.1	Théorème d'existence	29
3	Résolution par la méthode topologique	34
3.1	Théorème d'existence	34
3	Résultats d'existence pour une classe de systèmes elliptiques semi-linéaires	36

1 Estimation à priori de la solution 39

Remerciements

Avant tout je tiens à remercier Allah le tout-puissant, de m'avoir guidée toutes ces années d'études et m'avoir donné la volonté, la patience et le courage pour terminer mon travail.

Je voudrais tout d'abord exprime ma profonde reconnaissance à *Dr. GHARBI Ouahiba*

ma promotrice, qui dirigeaient mon travail, ses conseils et ses commentaires précieux

m'a permis de surmonter mes difficultés et de se progresser dans ma mémoire de fin d'études.

Ensuite je remercie très chaleureusement les membres du jury *Dr. BENSEGHIR Rym* et

Dr. ALI KHELIL Karima qui

me fait l'honneur d'accepter de lire ce mémoire et de l'évaluer.

J'adresse aussi mes vifs remerciements à tous mes enseignants (es) et à tout membre de département Mathématique de la faculté des Sciences et de Technologie. Je

tiens à remercier chaleureusement, toute ma famille, tous mes collègues et mes proches.

Merci pour tous les gens qui ont contribué de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse aux deux résultats d'existence de solutions non triviales le premier pour un problème aux limites elliptique avec les conditions de Dirichlet nulles sur le bord, dans un domaine borné de \mathbb{R}^N .

Où on présentera deux démonstrations l'une basée sur le théorème de Lax-Milgram et l'autre sur le théorème du point fixe de Schauder, et en utilisant quelques outils d'analyse fonctionnelle.

Le deuxième problème quand à lui a été traité avec le degré topologique de Leray-Schauder et un choix judicieux d'une homotopie.

Mots clés : Théorème de Lax Milgram, théorème de point fixe de Schauder, Degré topologique de Leray-Schauder, problèmes aux limites, Homotopie.

Abstract

In this work, we present two results of existence of non trivial solutions the first for an elliptic boundary value problem with zero Dirichlet boundary conditions, in a bounded domain of \mathbb{R}^N .

Where we are presented two demonstrations, the first is based on the Lax-Milgram's theorem and the second on the Schauder's fixed point theorem, and by using some tools of functional analysis.

The second problem will be treated with the topological degree of Leray-Schauder and a judicious choice of homotopy.

Key words : Lax-Milgram's theorem, Schauder's fixed point theorem, Topological Degree, Boundary value Problems, Homotopy.

ملخص

في هذا العمل، نقدم نتيجتان لوجود حلول غير بديهية، الأولى لمشكل حدود بيضوية بشروط صفرية على الحدود، في مجال محدود

من R^N

اين نقدم برهانين الاول يعتمد على نظرية لاكس ميليجرام والآخر على نظرية النقطة الثابتة لشودر وباستعمال بعض الادوات من التحليل الدالي.

و المشكل الثاني سندرسه باستعمال الدرجة الطوبولوجية للوري شودر و اختيار حكيم للهوموتوبي.

كلمات مفتاحية : نظرية لاكس ميليجرام، نظرية النقطة الثابتة لشودر، الدرجة الطوبولوجية، مشاكل الحدود، هوموتوبي.

Introduction

Les équations différentielles aux dérivées partielles sont d'une importance cruciale dans la modélisation et la description des phénomènes naturels en Physique, Chimie, Biologie....

Plusieurs phénomènes physiques : dynamique de fluide, mécaniques de continuum, simulation d'avion, graphiques des calculatrices et prédiction de temps sont modélisés par divers équations aux dérivées partielles. La compréhension des propriétés des solutions de ces équations permet un meilleur développement de ces Sciences.

Dans ce travail, nous abordons la question de l'existence de solutions pour deux problèmes, le premier est une équation elliptique soumise à des conditions aux bord de Dirichlet homogène en utilisant en premier lieu le théorème de Lax-Milgram et en deuxième lieu le théorème du point fixe de Schauder. Le second est un système elliptique semi linéaire en utilisant le degré topologiques de Leray-Schauder.

Le théorème de Lax-Milgram des noms de Peter Lax et Arthur Milgram est un théorème de mathématiques s'appliquant à certains problèmes aux dérivées partielles exprimés sous une formulation variationnelle (appelées également formulation faible). Il est notamment l'un des fondements de la méthode des éléments finis.

La notion de degré a été introduite par Kronecker pour les applications C^1 de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N en 1869. Poincaré, Bôhler et Hadamard l'ont ensuite développé au début des années 1900 puis étendu au cas des fonctions continues. L.E. Brouwer le

généralisa pour les applications continues entre variétés compactes de même dimension finie et donna quelques applications topologiques. D'ailleurs, l'emploi dans les démonstrations d'arguments de type topologique revient à Poincaré (en 1883, 1884).

Pour les applications différentiables. Les théories analytiques du degré de Brouwer pour les applications C ont été développées par Nagumo et Heinz. Cependant, les théorèmes du point fixe restèrent longtemps plus célèbres que le degré lui-même si bien que l'on trouve de nos jours une démonstration directe pour ces théorèmes et une autre utilisant la théorie du degré.

Le travail de cette mémoire est structuré comme suit :

Chapitre 1 :

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiels des notions de base nécessaires à l'accomplissement de cette mémoire. Le chapitre est organisé comme suit :

En premier lieu, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces de Hilbert puis nous énoncerons le théorème de Lax-Milgram, les espaces L^p et les espaces de Sobolev.

Ensuite, nous donnons des notations expressions qui seront utilisées dans le corps de ce mémoire ainsi que les notions d'une EDP, intégrations par partie et formule de Green...

Et on terminera par l'étude du degré topologique en dimension finie et infinie ainsi que le théorème du point fixe de Schauder.

Chapitre 2 :

Ce chapitre est consacré à l'existence de solutions non triviales d'un problème elliptique en utilisant la méthode variationnelle ainsi que la méthode topologique et en utilisant l'analyse fonctionnelle.

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre, nous intéressons à l'étude d'un système elliptique semi linéaire où la démonstration est basée sur le degré topologiques de Leray-Schauder.

A la fin nous donnons quelques sources que nous avons utilisées pour rédiger ce travail.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous traitons deux parties dans la première nous rappelons divers résultats généraux qui pour la plupart sont accompagnés de références. Dans la deuxième partie nous parlerons de la méthode du degré topologique.

1 **Rappels**

Nous rappelons ici les notions essentielles sur les espaces fonctionnels et tout particulièrement, les espaces de Hilbert, les espaces L^p et les espaces de Sobolev et nous donnons, par la même occasion, quelques définitions et résultats qui seront utiles pour la suite.

1.1 Les espaces de Hilbert et Théorème de Lax-Milgram

Espaces de Hilbert

Définition 1.1 *Espaces vectoriels*

Soit $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Un espace vectoriel sur \mathbb{k} est un ensemble non vide V dont les éléments sont appelés des vecteurs muni d'une opération binaire appelée addition $+ : V + V \rightarrow V$ et d'une multiplication scalaire $\cdot : K.V \rightarrow V$ tel que $(V, +)$ est un groupe commutatif, i.e.,

$$(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in V,$$

$$\exists 0 \in V : x + 0 = x, \forall x \in V,$$

$$\forall x \in V, \exists (-x) \in V : x + (-x) = 0,$$

$$x + y = y + x, \forall x, y \in V;$$

La multiplication scalaire satisfaisant :

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x,$$

$$1 \cdot x = x, \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in K.$$

En pratique, on enlève le symbole \cdot pour la multiplication scalaire puisqu'il n'y a aucun risque de confusion.

Définition 1.2 *(Sous-espaces vectoriels)*

Nous dirons qu'un sous-ensemble M de V est un sous-espace vectoriel de V s'il est stable pour les opérations de V , autrement dit si

$$x + y \in M,$$

1. Rappels

$$\alpha x \in M, \forall x, y \in M, \alpha \in K.$$

Définition 1.3 (Normes)

Une norme sur un espace vectoriel V est une application $N : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions suivantes :

$$N(\alpha x) = |\alpha|N(x),$$

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y),$$

$$N(x) = 0 \leftrightarrow x = 0, \forall x, y \in V, \alpha \in K.$$

Notation : L'application $N(\cdot)$ est usuellement notée $\|\cdot\|$.

Définition 1.4 (Espaces vectoriels normés)

Si V est un espace vectoriel et $N(\cdot)$ une norme sur V , alors (V, N) est un espace vectoriel normé.

Définition 1.5 (Convergence)

Si (V, N) est un espace vectoriel normé, alors on dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de V converge vers $x \in V$ (en abrégé $x_n \rightarrow x$) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(x_n - x) = 0$.

Définition 1.6 (Suite de Cauchy et Espaces complets)

Soit (V, N) un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de V est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ telque } N(x_p - x_q) < \varepsilon, \forall p, q \geq N.$$

Définition 1.7 On dit que (V, N) est complet si toute suite de Cauchy de V est convergente.

Définition 1.8 (Produit scalaire – Espace préhilbertien)

Un produit scalaire sur un espace vectoriel V est une application $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow K$ satisfaisant :

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \forall x, y, z \in V,$$

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \forall x, y \in V, \alpha \in K,$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \forall x, y \in V,$$

$$(x, x) > 0, \forall x \in V : x \neq 0.$$

Le couple $(V, (\cdot, \cdot))$ est appelé espace préhilbertien.

Définition 1.9 (*Espace de Hilbert*)

Si $(V, (\cdot, \cdot))$ est un espace préhilbertien, alors (\cdot, \cdot) induit une norme $N(\cdot)$ sur V définie par :

$$N(x) = \sqrt{(x, x)}, \forall x \in V.$$

Définition 1.10 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien $(V, (\cdot, \cdot))$ complet pour la norme induite par le produit scalaire (\cdot, \cdot) .*

Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.11 *Soit $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire a est continue sur V s'il existe une constante C telle que*

$$\forall x, y \in V, |a(x, y)| \leq C \|x\|_V \|y\|_V$$

Définition 1.12 *a est coercive (ou V -elliptique) s'il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que :*

$$\forall x \in V, a(x, x) \geq \alpha \|x\|_V^2$$

Théorème 1.1 (*Lax-Milgram*) *Soit L une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert H et a une forme bilinéaire continue et coercive, alors il existe une et une seule fonction $u \in H$ telle que :*

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in H.$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui

1. Rappels

minimise la fonctionnelle $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \text{ pour tout } v \in H,$$

C.à.d

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \text{ et } J(u) < J(v) \text{ si } u \neq v.$$

1.2 Les espaces L^p

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue. On désigne par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f|^p < \infty \right\}.$$

et on définit la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et il existe } c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \min \{M \geq 0 : |f| \leq M \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

On désigne par $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω et on écrit

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{u : u \in L^1(K) \text{ pour tout compacte } K \text{ de } \Omega\}.$$

Remarque 1.1 (i) $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$

(ii) L'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.

1.3 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels (c'est-à-dire constitués de fonctions) dont les puissances et les dérivées (au sens de la transposition, ou au sens faible, que nous allons préciser) sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont des espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets). Le fait qu'ils soient complets est très important pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.13 Soit Ω ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$. On définit les espaces de Sobolev suivants :

1. $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D_i u \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } i = 1, \dots, N\}$.

Dans cette définition, lorsqu'on dit $D_i u \in L^2(\Omega)$, on sous-entend "il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que $\langle D_i f, \varphi \rangle_{D^*(\Omega), C_c^\infty(\Omega)} = - \int_{\Omega} g \varphi dx$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$."

2. Pour $m \in \mathbb{N}$,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ t.q. } |\alpha| \leq m\}.$$

3. Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ t.q. } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ t.q. } |\alpha| \leq m\}.$$

Noter que pour $m = 0$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Proposition 1.1 (Structure d'espace vectoriel) Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorsqu'on les munit du produit scalaire

$$(u/v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u / D^\alpha v)_{L^2},$$

où $(./.)_{L^2}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ i.e. $(u/v)_{L^2} = \int_{\Omega} uv dx$.

Noter que $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Une norme naturelle sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & \text{si } p = +\infty; \end{cases}$$

où $\|\cdot\|_{L^p}$ désigne la norme dans $L^p(\Omega)$.

Muni de cette norme $W^{m,p}(\Omega)$ est un **espace de Banach** (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet).

On peut montrer que la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}, & 1 \leq p < +\infty; \\ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = +\infty; \end{cases}$$

est une norme équivalente à la précédente. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ a donc les mêmes propriétés quelle que soit la norme utilisée.

Ces normes sont notées indifféremment $\|\cdot\|_{m,p}$ ou $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$.

Théorème 1.2 (CNS sur la dimension) *Un espace de Banach E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.*

Définition 1.14 (Convergence faible et faible *) *Soit E un espace de Banach*

1. **Convergence faible** Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $u \in E$. On dit que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans E lorsque $n \rightarrow \infty$

si $T(u_n) \rightarrow T(u)$ pour tout $T \in E'$.

2. **Convergence faible *** Soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ et $u \in E'$. On dit que $T_n \rightharpoonup T$ dans E' faible * si $T_n(x) \rightarrow T(x)$ pour tout $x \in E$.

Définition 1.15 (Espace $H_0^1(\Omega)$) *Soit un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$)*

1. On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ce qu'on note aussi : $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.

1. Rappels

2. Pour $m > 0$ et $1 \leq p < +\infty$, on définit le sous espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Comme cela a été dit précédemment, si $\Omega = \mathbb{R}^N$ alors que l'inclusion est stricte si Ω est un ouvert borné.

1.4 Résultats supplémentaires

EDP et EDP elliptiques

Les équations aux dérivées partielles (noté EDP) est une relation en une fonction de plusieurs variables (réelles) u et ses dérivées partielles et une fonction donnée f :

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = f$$

dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

dans \mathbb{R}^n , n entier ≥ 1 soit

$$L(D)u := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq l}} a_\alpha D^\alpha u = f$$

Une EDP linéaire à coefficients constants (i.e. les a_α sont des constantes réelles) d'ordre l . On lui associe le polynôme en la variable $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ suivant

$$P(\xi) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq l}} a_\alpha \xi^\alpha$$

Où l'on pose $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, lorsque $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

On dira que l'EDP $L(D)u$ est elliptique si

$$P(\xi) \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0.$$

Inégalité de Minkowski

Soient $f, g \in L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$ alors :

$$f + g \in L^p(\Omega) \text{ et } \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Inégalité de Poincaré

On suppose que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , alors il existe une constante $C_{\Omega,P}$ telle que :

$$\|u\|_{L^P(\Omega)} \leq C_{\Omega,P} \|\nabla u\|_{L^P(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,P}(\Omega)$$

Inégalité de Hölder

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ alors $f, g \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Inégalité de Cauchy Schwarz

Dans un espace préhilbertien H , on a

$$\forall x, y \in H \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

On posant

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|y\| = (y, y)^{\frac{1}{2}}.$$

Formule d'intégration par partie

la formule d'intégration par partie est définie par la proposition suivante :

Proposition 1.2 (Formule d'intégration par partie) Soient $u(x), v(x)$ deux fonctions de $H^1(\Omega)$ et $\partial\Omega \in C^1$, alors pour tout $1 \leq i \leq N$ a lieu la formule d'intégration par partie

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u(s)v(s)n_i ds.$$

Formule de Green

Si Ω est un ouvert borné à bord lipschitzien, alors pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} dx = \int_{\Gamma} \gamma_0 u \gamma_0 v \nu_i d\sigma, \forall i = 1, \dots, n$$

Théorème de Rellich

Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1 , alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$.

Remarque 1.2 *Si l'on remplace $H^1(\Omega)$ par $H_0^1(\Omega)$, alors non seulement le théorème de Rellich reste vraie, mais en plus il n'est pas nécessaire de supposer que l'ouvert Ω soit régulier.*

Théorème du graphe fermé

Soient E, F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire de E dans F . On suppose que le graphe de T , $G(T)$ est fermé dans $E \times F$. Alors T est continue.

Définition 1.16 *Une application continue $f : \Omega \rightarrow Y$ est dite compacte si $f(\Omega)$ est compacte. Elle est dite complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte.*

2 Degré topologique

Nous abordons la théorie du degré topologique en exposant quelques propriétés et résultats la concernant. Nous parlons du degré topologique de Brouwer (dimension finie) et de celui de Leray-Schauder (dimension infinie).

2.1 Degré de Brouwer

Nous donnons ici une formulation du degré topologique de Brouwer et de ses propriétés principales.

Supposons que :

- (a) Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , avec le bord $\partial\Omega$.
- (b) f une application continue définie de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R}^N .
- (c) p est un point dans \mathbb{R}^N tel que $p \notin f(\partial\Omega)$.

Pour toute triplet (f, Ω, p) satisfaisant (a) – (c), on peut associer un unique entier $\deg(f, \Omega, p)$, appelé le degré de f (par rapport à Ω et p), avec les propriétés suivantes :

(P.1) **Normalisation**: Si $I_{\mathbb{R}^N}$ l'application identité dans \mathbb{R}^N , alors

$$\deg(I_{\mathbb{R}^N}, \Omega, p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in \Omega, \\ 0 & \text{si } p \notin \Omega. \end{cases}$$

(P.2) **Additivité** : Si Ω_1, Ω_2 deux ouverts disjoints inclus dans Ω tel que $p \notin (\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors

$$\deg(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p).$$

(p.3) **Invariance par homotopie** : Soit $h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$, et pour tout $t \in [0, 1]$, $p_t \notin h(t, \partial\Omega)$ alors

$$\deg(h(0, \cdot), \Omega, p(0)) = \deg(h(1, \cdot), \Omega, p(1)).$$

Le degré de Brouwer possède plusieurs propriétés dont la principale est la suivante :

La propriété de solution : Si

$$\deg(f, \Omega, p) \neq 0,$$

alors il existe $z \in \Omega$ tel que

$$f(z) = p.$$

On donne dans ce qui suit le résultat principal du degré de Brouwer.

Théorème du point fixe de Brouwer, 1912 :

Soit C un compact, convexe et non vide de \mathbb{R}^N et $k : C \rightarrow C$ une application continue. Alors C admet au moins un point fixe dans C .

2.2 Le degré topologique de Leray-Schauder

Si E est un espace de Banach et $A = \{(Id - f, \Omega, y)\}$, Ω ouvert borné de E ; $f : \bar{\Omega} \rightarrow E$ compacte, $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$.

Alors, il existe une unique application $d : A \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant :

- 1) Si $y \in \Omega$ alors $d(Id, \Omega, y) = 1$.
- 2) Si $(Id - f, \Omega, y) \in A$ et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints de E tels que $y \notin (Id - f)(\Omega) \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ alors

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y)$$

- 3) Si $h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow E$ est continue et $y : [0, 1] \rightarrow E$ vérifiant $\forall t \in [0, 1], y(t) \notin (Id - h(t, \cdot))$, alors $d(Id - h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ est indépendant de t .

d est appelé degré topologique de Leray Schauder.

Remarque 2.1 *Les propriétés essentielles du degré en dimension finie restent valables en dimension infinie et se démontrent par approximation.*

Théorème de Schauder, 1930

Théorème 2.1 *Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach X et $K : C \rightarrow C$ une application compacte. Alors K admet au moins un point fixe.*

Preuve. étape 1 : On suppose que $C = B(0, 1)$ la boule unité.

S'il existe $x_0 \in \partial C$ tel que $k(x_0) = x_0$ il n'y a rien à démontrer.

Sinon $\forall t \in [0, 1]$ le degré $\deg(k_t, C, 0)$ ou $k_t = I - tk$ est bien défini.

En effet, s'il existe $x \in \partial C$, $tk = x$ alors

$$R = \|x\| = t \|k(x)\| \leq Rt$$

car $k(C) \subset C$ et donc $t = 1$.

Ce qui conduit à une contradiction avec

$$\|x\| = R = \|k(x)\|.$$

Le degré est donc bien défini et vaut, par homotopie

$$\deg(k, C, 0) = 1$$

d'où le résultat.

étape 2 : C est un convexe, fermé, borné, non vide.

On considère une rétraction continue

$$R : X \rightarrow C$$

et B une boule contenant C .

Soit la diagramme

$$B \xrightarrow{R} C \xrightarrow{K} B$$

L'application $(K \circ R)$ est compacte car K est compacte et R est bornée.

D'après la première étape, l'application $(K \circ R)$ admet un point fixe

$$x_0 \in B, x_0 = (K \circ R)(x_0)$$

Or

$$R(x_0) \in C$$

et, par hypothèse, $k(C) \subset C$ alors $K(R(x_0)) \subset C$ donc $x_0 \in C$. ■

CHAPITRE 2

Application

Dans ce chapitre nous étudions une équation elliptique où la mise en évidence de la solution est basée en premier lieu sur la méthode variationnelle représentée par le théorème de Lax-Milgram et en deuxième lieu sur la méthode topologique où on fait appel à la technique du point fixe de Schauder.

1 Position du problème

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le problème

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où L est l'opérateur elliptique générale du second ordre défini sur Ω ouvert borné de \mathbb{R}^n par

$$\begin{aligned} Lu &= -\nabla a(x) \cdot \nabla u + b(x) \cdot \nabla u + c(x) \cdot u \\ &= -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x). \end{aligned}$$

Avec les coefficients

$$a_{ij}(x) = a(x) > 0, \quad a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad b \in W^{1,\infty}(\Omega)$$

et

$$c \in L^\infty(\Omega), \quad c > 0.$$

$a(x)$ est supposée en plus vérifiée la condition de coercivité, i.e

$$\begin{cases} \exists \tilde{c} > 0, \text{ tel que } \forall \xi \in \mathbb{R}^n, P.P \text{ sur } \Omega \\ \langle a\xi, \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \tilde{c} \|\xi\|^2. \end{cases}$$

2 Résolution par la méthode variationnelle

2.1 Théorème d'existence

Théorème 2.1 (Lax-Milgram) : Soit L une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert H et a une forme bilinéaire continue et coercive, alors il existe une et une seule fonction $u \in H$ telle que

$$B(u, v) = L(v); \quad \forall v \in V.$$

Preuve. On a

$$Lu + \lambda u = f \iff -\nabla a(x) \cdot \nabla u + b(x) \cdot \nabla u + c(x) \cdot u + \lambda u = f$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, multiplions l'équation par v et intégrons sur Ω , on obtient

$$-\int_{\Omega} \nabla a(x) \cdot \nabla u \cdot v dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla u \cdot v dx + \int_{\Omega} c \cdot u \cdot v dx + \int_{\Omega} \lambda u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad (2.1)$$

et on a

$$-\int_{\Omega} (\nabla a \cdot \nabla u)(v) dx = \int_{\Omega} a \cdot \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot v \partial \gamma$$

d'après la 2^{ème} formule de green, on a

$$-\int_{\Omega} (\nabla a \cdot \nabla u)(v) dx = \int_{\Omega} a \cdot \nabla u \cdot \nabla v dx$$

donc

$$(2.1) \Leftrightarrow \int_{\Omega} a(x) \cdot \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b(x) \cdot \nabla u \cdot v dx + \int_{\Omega} c(x) \cdot u \cdot v dx + \int_{\Omega} \lambda \cdot u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

finalement, on pose

$$B(u, v) = \int_{\Omega} a. \nabla u. \nabla v dx + \int_{\Omega} b. \nabla u. v dx + \int_{\Omega} c. u. v dx + \lambda \int_{\Omega} u. v dx$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f. v dx$$

le problème variationnelle revient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V, \text{ tq} \\ B(u, v) = L(v); \forall v \in V \end{array} \right.$$

1) Bilinearité de $B(u, v)$ On va montrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v) \\ \text{et} \\ B(\alpha u, v) = \alpha. B(u, v) \end{array} \right.$$

On pose

$$\begin{aligned} B(u_1 + u_2, v) &= \int_{\Omega} a. \nabla(u_1 + u_2). \nabla v dx + \int_{\Omega} b. \nabla(u_1 + u_2). v dx + \int_{\Omega} c. (u_1 + u_2). v dx \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} (u_1 + u_2). v dx \\ &= \int_{\Omega} a. \nabla u_1. \nabla v dx + \int_{\Omega} b. \nabla u_1. v dx + \int_{\Omega} c. u_1. v dx + \lambda \int_{\Omega} u_1. v dx + \\ &\quad \int_{\Omega} a. \nabla u_2. \nabla v dx + \int_{\Omega} c. u_2. v dx + \int_{\Omega} b. \nabla u_2. \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} u_2. v dx \end{aligned}$$

finalement, on arrive à

$$B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v) \dots (1)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 B(\alpha u, v) &= \int_{\Omega} a. \nabla(\alpha u). \nabla v dx + \int_{\Omega} b. \nabla(\alpha u) . v dx + \int_{\Omega} c. (\alpha u) . v dx + \lambda \int_{\Omega} (\alpha u) . v dx \\
 &= \alpha \int_{\Omega} a. \nabla(u). \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} b. \nabla(u) . v dx + \alpha \int_{\Omega} c. (u) . v dx + \lambda \alpha \int_{\Omega} (u) . v dx \\
 &= \alpha B(u, v) \dots (2)
 \end{aligned}$$

d'après (1) et (2), $B(u, v)$ est une forme bilinéaire.

2) Continuité de $B(u, v)$

On a

$$\begin{aligned}
 |B(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} (-\operatorname{div}(a. \nabla u) + b. \nabla u + c. u + \lambda u) v dx \right| \\
 &\leq \left(\left| \int_{\Omega} a. \nabla u. dx \right| + \left| \int_{\Omega} b. \nabla u. dx \right| + \left| \int_{\Omega} c. u. dx \right| + \left| \lambda \int_{\Omega} u. dx \right| \right) \left(\left| \int_{\Omega} v. dx \right| \right) \\
 &\leq \left(\|a\|_{L^\infty} \left(\int_{\Omega} |\nabla u| dx \right) + \|b\|_{W^{1,\infty}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u| dx \right) \right) \left(\int_{\Omega} |v| dx \right) + (\|c\|_{L^\infty} + \lambda) \left(\int_{\Omega} |u| dx \right) \cdot \left(\int_{\Omega} |v| dx \right)
 \end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{c} = \|a\|_{L^\infty}$$

$$\beta = \|b\|_{W^{1,\infty}}$$

$$\gamma = \|c\|_{L^\infty}$$

On arrive donc à

$$\begin{aligned}
 &\leq (\tilde{c} + \beta) \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|v\|_{H_0^1} + \gamma' \|u\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1} \\
 &\leq (\tilde{c} + \beta + \gamma') \cdot (\|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \cdot \|v\|_{H_0^1} \\
 &\leq (\tilde{c} + \beta + \gamma') \cdot \|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1}.
 \end{aligned}$$

Alors $B(u, v)$ est continue.

3) Coercivité de $B(u, v)$

Si λ est assez grand, on calcule

$$B(u, u) = \int_{\Omega} a. \nabla u. \nabla u dx + \int_{\Omega} b. \nabla u. u dx + \int_{\Omega} c. u. u dx + \lambda \int_{\Omega} u. u dx.$$

Alors

$$B(u, u) \geq \tilde{c} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \beta \int_{\Omega} |\nabla u. u| dx - \gamma \int_{\Omega} |u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx$$

donc

$$B(u, u) \geq \tilde{c} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \beta \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|u\|_{L^2} - \gamma \|u\|_{L^2}^2 + \lambda \|u\|_{L^2}^2$$

on suppose que

$$\bar{\lambda} \leq \max\left(\tilde{c} + 2.\gamma, \frac{\beta^2}{\tilde{c}}\right).$$

On a

$$\lambda > \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \geq \max\left(\tilde{c} + 2.\gamma, \frac{\beta^2}{\tilde{c}}\right)$$

alors

$$\begin{aligned} B(u, u) &\geq \frac{\tilde{c}}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{\tilde{c}}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Donc $B(u, v)$ est coercive.

4) Continuité de $L(v)$

On a

$$\|L(v)\| \leq \alpha. \|v\|_{L^2} \leq \alpha \|v\|_{H_0^1}$$

tel que

$$\|f\|_{L^2} = \alpha$$

2. Résolution par la méthode variationnelle

Donc pour un tel λ , B étant continue et coercive dans $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, L étant continue sur $H_0^1(\Omega)$, en appliquant le théorème de Lax-Milgram, il existe donc un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible de notre problème. ■

3 Résolution par la méthode topologique

Le résultat principal d'existence est donné par le théorème suivant

3.1 Théorème d'existence

Sous les hypothèses précédents, on a le résultat suivant :

Théorème 3.1 *il existe λ^* tel que pour tout $\lambda > \lambda^*$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$, le problème (1) admet une solution unique ; cette solution $u \in H_0^1(\Omega)$ dépend continument de f , de plus si $f \in L^2(\Omega)$ donc $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_\lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}$.*

Remarque 3.1 λ^* sera défini dans la démonstration.

On va appliquer le théorème de Schauder pour démontrer ce résultat.

Preuve. Soit T l'application définie sur l'espace $L^2(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} T : L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ v &\mapsto T(v) = u \end{aligned}$$

Où u est la solution de

$$Au + \lambda u = \tilde{f} = f - b \cdot \nabla v - c \cdot v$$

avec

$$A = -\nabla \cdot a \nabla$$

On va démontrer premièrement que

$$T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

est complètement continue.

3. Résolution par la méthode topologique

En effet, considérons la suite d'applications suivante

$$\begin{array}{ccccccc} L^2(\Omega) & \xrightarrow{T_0} & H^{-1}(\Omega) & \xrightarrow{T_1} & H_0^1(\Omega) & \xrightarrow{i} & L^2(\Omega) \\ v & \rightarrow & \tilde{f} = f - b \cdot \nabla v - c \cdot v & \rightarrow & u & \rightarrow & u \end{array}$$

Il est bien évident que

$$T = i \circ T_1 \circ T_0$$

Donc d'après le théorème de Rellich on trouve que T est complètement continue.

Désignons par μ_0 la racine positive de l'équation quadratique

$$\mu_0^2 - \frac{\beta}{2\sqrt{\tilde{c}}}\mu_0 - \gamma = 0$$

ou

$$\gamma = \|c\|_{L^\infty(\Omega)}; \quad \beta = \|b\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$$

Posons

$$\lambda^* = \mu_0^2$$

donc pour $\lambda > \lambda^*$ ou a

$$\sqrt{\lambda} > \sqrt{\lambda^*} = \mu_0$$

Donc

$$\sqrt{\lambda} > \frac{\beta}{2\sqrt{\tilde{c}}} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}}$$

Définissons le rayons R de S comme

$$R = \frac{\alpha}{2\sqrt{\tilde{c}} \left(\sqrt{\lambda} - \frac{\beta}{2\sqrt{\tilde{c}}} - \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda}} \right)} \quad \text{et} \quad S = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq R \right\}$$

T applique la boule fermé $\overline{B(0; R)} \subset V$ de centre l'origine et de rayon R dans lui même. L'existence d'une solution est alors obtenue grâce au théorème du point fixe de Schauder. ■

CHAPITRE 3

Résultats d'existence pour une classe de systèmes elliptiques semi-linéaires

Cette partie est consacrée à la mise en évidence de l'existence de solutions pour le système elliptique du type

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f(\nabla v), & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v + \beta v = g(\nabla u), & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$.

On assume que $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions lipschitziennes satisfaisant la condition ci dessous

$$\begin{cases} |f(s)| \leq c_1 |s| + f(0), \\ |g(t)| \leq c_2 |t| + g(0). \end{cases} \quad (3.2)$$

Où c_1, c_2 deux constantes réelles positives.

Associons au système elliptique (3.1) le système linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = h_1(x), & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta v + \beta v = h_2(x), & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

Où h_1 et h_2 sont dans $L^2(\Omega)$.

La théorie variationnelle et le théorème de Lax-Milgram assurent l'existence et l'unicité d'une solution (u, v) dans $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, i.e

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + \alpha u \varphi) dx = \int_{\Omega} h_1(x) \varphi dx, \\ \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla \psi + \beta v \psi) dx = \int_{\Omega} h_2(x) \psi dx, \quad \forall (\varphi, \psi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned} T : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) &\rightarrow H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \\ (h_1, h_2) &\mapsto T(h_1, h_2) = (u, v) \end{aligned}$$

où (u, v) est la solution du système (3.1), on a le résultat suivant

Proposition 0.1 *T est un opérateur continue, i.e*

$$\exists C > 0 / \forall h = (h_1, h_2) \in V, \|T(h)\|_U \leq C \|h\|_V$$

Preuve.

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\Omega} h_1(x) |u| dx, \\ \|v\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq \int_{\Omega} h_2(x) |v| dx, \end{cases}$$

alors, on a

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2 \leq \|h_1\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|h_1\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1} \\ \|v\|_{H_0^1}^2 \leq \|h_2\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|h_2\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1}, \end{cases}$$

depuis

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2 \leq \|h_1\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \|v\|_{H_0^1}^2 \leq \|h_2\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{cases}$$

donc

$$\|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2 \leq \|h_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h_2\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Finalement

$$\|(u, v)\|_U = \|T(h)\|_U \leq \|h\|_V.$$

■

L'opérateur suivant est bien définie

$$F : U \rightarrow V$$

$$(u, v) \mapsto F(u, v) = (f(\nabla v), g(\nabla u)).$$

Sachant que F est lipschitzienne et continue, il existe alors une constante $c > 0$

telle que pour chaque $(\varphi, \psi) \in U$, on a

$$\|F(\varphi) - F(\psi)\|_V \leq c \|\varphi - \psi\|_U. \quad (3.5)$$

Lemme 0.1 *Si (3.5) est satisfaite, alors F est compacte.*

1. Estimation à priori de la solution

Preuve. Soit $M \subset U$ un sous ensemble borné de U et $\{(w_{1,n}, w_{2,n})\}_{n=1}^{+\infty} \subset F(M)$ une suite arbitraire.

il faut montrer que $\{(w_{1,n}, w_{2,n})\}_{n=1}^{+\infty}$ admet une sous suite convergente dans U . Soit $\{(u_n, v_n)\}_{n=1}^{+\infty} \subset M$ tel que

$$F(u_n, v_n) = (f(\nabla v_n), g(\nabla u_n)) = (w_{1,n}, w_{2,n}),$$

la réflexivité de l'espace U implique que $(u_n, v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (u, v)$ dans U au moins pour une sous suite.

Il suit d'après le théorème de Rellich que $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ dans V .

F étant continue de U dans V . Alors

$$F(u_n, v_n) = (w_{1,n}, w_{2,n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(u, v) = (u, v) \text{ dans } V,$$

F est ainsi un opérateur compacte. ■

1 Estimation à priori de la solution

Soit K l'opérateur suivant ainsi défini

$$\begin{aligned} K &: U \rightarrow U \\ K &: U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{T} U \end{aligned}$$

$$K = T \circ F$$

il est clair que K est un opérateur compact et continu.

Définissons l'homotopie suivante

$$\begin{aligned} H &: [0, 1] \times U \rightarrow U. \\ (t, u, v) &\mapsto H(t, u, v) = (u, v) - tK(u, v) \end{aligned}$$

H est une homotopie compacte et la résolution du système (3.1) est équivalente à la

résolution du problème suivant

$$(u, v) \in U, \quad (u, v) - K(u, v) = 0. \quad (3.6)$$

Lemme 1.1 *Il exist $R > 0$ tel que*

$$\begin{cases} \forall t \in [0, 1], \forall (u, v) \in U \\ H(t, u, v) = 0 \Rightarrow \|(u, v)\|_U < R. \end{cases}$$

Preuve. Soit $t \in [0, 1]$, $(u, v) \in U$

$$H(t, u, v) = 0,$$

donc

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \nabla w_1 + \alpha \int_{\Omega} u w_1 = t \int_{\Omega} f(\nabla v) w_1, & w_1 \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla v \nabla w_2 + \beta \int_{\Omega} v w_2 = t \int_{\Omega} g(\nabla u) w_2, & w_2 \in H_0^1(\Omega), \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit $w_1 = u$, $w_2 = v$ et utilisant le fait que

$$\begin{cases} |f(\nabla v)| \leq c_1 |\nabla v| + f(0), \\ |g(\nabla u)| \leq c_2 |\nabla u| + g(0). \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha \int_{\Omega} |u|^2 \leq \int_{\Omega} c_1 |\nabla v| u + \int_{\Omega} f(0) u \\ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \beta \int_{\Omega} |v|^2 \leq \int_{\Omega} c_2 |\nabla u| v + \int_{\Omega} g(0) v, \end{cases} \quad \text{pour } (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

1. Estimation à priori de la solution

alors

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha \int_{\Omega} |u|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \frac{(c_1)^2}{2} \int_{\Omega} |u|^2 + f(0) \int_{\Omega} |u| \\ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \beta \int_{\Omega} |v|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{(c_2)^2}{2} \int_{\Omega} |v|^2 + g(0) \int_{\Omega} |v| \end{cases}, \quad (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Cheq

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \left(\alpha - \frac{(c_1)^2}{2}\right) \int_{\Omega} |u|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + f(0) \sqrt{\Omega} \left(\int_{\Omega} |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \left(\beta - \frac{(c_2)^2}{2}\right) \int_{\Omega} |v|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + g(0) \sqrt{\Omega} \left(\int_{\Omega} |v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}, \quad (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

donc

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2 + \left(\alpha - \frac{(c_1)^2}{2}\right) \|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|v\|_{H_0^1}^2 + f(0) \sqrt{\Omega} \|u\|_{L^2} \\ \|v\|_{H_0^1}^2 + \left(\beta - \frac{(c_2)^2}{2}\right) \|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 + g(0) \sqrt{\Omega} \|v\|_{L^2} \end{cases}, \quad (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Utilisant le fait que

$$\begin{cases} \alpha^1 = \left(\alpha - \frac{(c_1)^2}{2}\right) > 0 \\ \beta^1 = \left(\beta - \frac{(c_2)^2}{2}\right) > 0 \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{cases} \|u\|_{H_0^1}^2 + \alpha^1 \|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|v\|_{H_0^1}^2 + f(0) \sqrt{\Omega} \|u\|_{L^2} \\ \|v\|_{H_0^1}^2 + \beta^1 \|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 + g(0) \sqrt{\Omega} \|v\|_{L^2} \end{cases}, \quad (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

1+2 donne

$$\frac{1}{2} \left(\|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2 \right) + a \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \right) \leq b\sqrt{\Omega} \left(\|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \right),$$

où

$$\begin{cases} a = \min(\alpha^1, \beta^1) \\ b = \max(f(0), g(0)), \end{cases}$$

on a donc

$$\frac{1}{2} \|(u, v)\|_U^2 + a \|(u, v)\|_V^2 \leq 2B \|(u, v)\|_V.$$

On obtient

$$\|(u, v)\|_U \leq \frac{2\sqrt{2}B}{\sqrt{a}} = R.$$

■

Théorème 1.1 *L'existence d'au moins une solution de (3.1) faut suit que*

$$\deg(H(1, \cdot, \cdot), B(0, R), 0) \neq 0.$$

On utilisons la propriété de l'invariance par homotopie du degré.

Preuve. Soit

$$B(0, R) = \{(u, v) \in U, \|(u, v)\|_U < R\},$$

Par invariance du degré topologique on a

$$t \in [0, 1], \quad \deg(H(t, \cdot, \cdot), B(0, R), 0),$$

est constante.

En particulier $t = 0$. D'après la propriété de l'invariance par homotopie, on trouve

$$\deg(H(0, \cdot, \cdot), B(0, R), 0) = \deg(H(1, \cdot, \cdot), B(0, R), 0) = 1.$$

■

Conclusion

La méthode du degré topologique est un puissant outil permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles non linéaires qu'on ne peut pas résoudre par les méthodes variationnelles basées sur le théorème de Lax-Milgram. Beaucoup de conséquences du degré étaient souvent vues comme des applications des théorèmes du point fixe.

Liste des symboles

$\frac{\partial}{\partial x}$ Dérivée partielle.

$\frac{\partial}{\partial n}$ Dérivée normale extérieure d'un champ scalaire.

$\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ l'opérateur de Laplace dans \mathbb{R}^N .

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right)$ est le vecteur gradient sur \mathbb{R}^N .

$x \cdot y$ est le produit scalaire euclidien usuel de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^N$, $|\cdot|$ est la norme euclidienne associée.

$p.p$ Presque partout.

Ω un ouvert de \mathbb{R}^N .

\mathbb{N} L'ensemble des entiers positifs, $N = 0, 1, 2, \dots$.

\mathbb{R}^N Espace réelle de dimension N .

$[a, b]$ Un intervalle fermé dans X ; $[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$.

$B(o, r)$ Boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$.

$\bar{\Omega}$ L'adhérence de Ω .

$C(\Omega)$ L'espace des fonctions continues.

$C^m(\Omega)$ l'espace des fonctions m fois continument différentiables sur Ω .

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$.

D^α Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'entiers positifs ou nuls on désigne par

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Où $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ est la longueur du multi-indice α .

$D(\Omega)$ L'espace des fonctions C^∞ sur Ω à support compact inclus dans Ω .

$L^2(\Omega)$ L'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω .

$H^m(\Omega)$ Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose : $H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\}$

$H^m(\Omega)$ est appelé espace de Sobolev d'ordre m sur Ω .

H_0^m Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Attouch, G. Buttazzo and G. Michaille, Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces, SIAM, USA, (2005).
- [2] R.P.Agarwal, M.Meehan and O.O'Regan, Fixed point theory and applications, Cambridge University, Press, (2001) ;
- [3] N. Boccara, Analyse Fonctionnelle, Edition Markiting, Paris, (1984).
- [4] H. Bressis, Analyse Fonctionnelle Théorie Et Applications, Masson, Paris, (1983).
- [5] S.Djebaili, Le degré topologique, Théorie et applications, Kouba, Alger, (2006) .
- [6] Droniou, Degré topologique et applications, Montpellier 2, France (2006) .
- [7] W. Gharbi, B. Khodja et H. Lakehal, Existence result of solutions for a class of semi linear elliptic systems. Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems. Vol. 4, Issue. 4, (2012). Online ISSN : 1943-023X.
- [8] B.Khodja et S. Khodja, Application de la méthode topologique à un problème elliptique non linéaire, Annaba (2001) .
- [9] B. Morgan, Mathématiques Pour La Mécaniques, Cachan, (2009).
- [10] S. Nicaise, Analyse Numérique et Equations Aux Dérivées Partielles, Dunod, Paris, (2000).