الـجمهـورية الـجزائريــة الديمـقراطـية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعـلـيـم العالي والــبحـث الـعلـمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامـعـة الـشادلي بن جديد- الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Résultat d'existence pour un système différentiel fractionnaire avec des conditions aux limites dans un espace de Banach dérivé

Présenté par:

Boudebza Fadi El Islam

Devant le Jury :

Dr. Bouaziz Asma	**MCA**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. Saifia Ouarda	**MCA**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Chidouh Amar	**MCA**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinateur

Année Universitaire 2023-2024

Dédicaces

Ce travail est dédié à :

Mes parents.
Mes frères et sœurs.
Ma famille et mes amis.

Remerciements

On aimerait en premier lieu remercier **ALLAH** qui nous a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.
Ce travail est réalisé sous la direction de **Dr.Saifia Ouarda** qui a su nous proposer une voie de recherche très intéressante.
Son expérience, sa grande disponibilité, son appui constant, sa passion, ses qualités scientifiques et humaines ont très largement contribué à un environnement de travail très agréable.
Qu'elle reçoit de notre profonde et sincère reconnaissance, on vous remercie du fond du cœur.
On tient à remercier **Dr.Bouaziz Asma** pour l'honneur de nous accorder en présidant le jury.
On remercie vivement **Dr.Chidouh Amar** d'avoir accepter d'examiner notre travail.
Nos sincères remerciements à nos parents, et à nos familles et nos amis.
Enfin, nous remercions tous les enseignants du département de mathématiques.

نتيجة وجود الحلول لنظام تفاضلي كسري بشروط حدودية في فضاء بناخ مشتق

ملخص

تظهر المعادلات التفاضلية الكسرية بشكل تلقائي في مختلف الميادين العلمية مثل الفيزياء، الهندسة، الطب، الكيمياء، نظرية التحكم، وغيرها. إن فعالية هذه المعادلات في نمذجة العديد من الظواهر قد حفزت العديد من الباحثين لدراسة جوانبها الكمية والنوعية.

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة نتائج وجود الحلول لنضام تفاضلي كسري في فضاء بناخ وذلك باستخدام تقنيات النقطة الصامدة. سنتطرق في البداية الى دراسة نتيجة وجود حلول النظام التفاضلي الكسري في فضاء بناخ للمشتقات الكسرية باستخدام نظرية النقطة الثابتة لشودر، بعد ذلك سنعالج مسالة وجود الحل وتفرده باستخدام مبدأ الانكماش لبناخ. نختم هذه المذكرة بتقديم أمثلة توضح النتائج التي تم الحصول عليها.

Résultat d'existence pour un système différentiel fractionnaire avec des conditions aux limites dans un espace de Banach dérivé

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires ($EDFs$) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médecine, la chimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

L'objectif de ce mémoire est l'étude des résultats d'existence des solutions d'un système différentiel fractionnaire dans un espace de Banach. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les techniques du point fixe. Nous étudions d'abord le résultat d'existence pour le système différentiel fractionnaire dans un espace de Banach dérivé en employant le théorème du point fixe de Schauder. Ensuite, nous nous intéressons à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du système en moyennant le principe de contraction de Banach. Finalement, nous fournissons des exemples illustrant nos résultats.

Existence result for a fractional differential system with boundary conditions in the derivative Banach space

Abstract

The fractional differential equations ($FDEs$) appear naturally in different scientific fields like physics, engineering, medicine, chemistry, theory of control, etc. The effectiveness of these equations in modeling several real-world phenomena has motivated many researchers to study their quantitative and qualitative aspects.

The objective of this dissertation is the study of the existence results of solutions of a fractional differential system in a Banach space. The obtained results in this work are based on fixed point techniques. First, we investigate the existence result for the fractional differential system in a derivative Banach space by employing Schauder fixed point theorem. Next, we establish the existence and the uniqueness of the solution by using Banach contraction mapping principle. Finally, we provide examples to illustrate our results.

Table des matières

Introduction

La théorie du calcul fractionnaire est un sujet presque aussi vieux que le calcul différentiel et remonte à la fin du 17 ème siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont dévloppé les fondements du calcul différentiel et intégral.

L'histoire a débuté le 30 septembre 1695 quand Leibniz dans une lettre adressée à l'Hôpital voulut engager une réflexion sur une théorie possible de la dérivation non entière d'une fonction. l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? , Leibniz répond que cela même a un paradoxe dont on tirera un jour des conséquences utiles. Cette lettre de l'Hôpital est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire (Voir [5][11][17][20]).

De nombreux mathématiciens ont joué un rôle important dans le calcul fractionnaire, jusqu'au milieu du 20 ème siècle à savoir : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823 - 1826), J. Liouville (1832 - 1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865 - 1867), A.K. Grunwald (1867 - 1872), A.V.Letnikov (1868 - 1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J.Hadamard (1892), O. Heaviside (1892 - 1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E.Littlewood (1917 - 1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T.Davis (1924 - 1936), A. Zygmund (1935 - 1945) E.R. Love (1938 - 1996), A. Erdélyi (1939 - 1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Le calcul fractionnaire a un champ d'application très vaste (Voir[6][8][9][12][15]), qui apparait dans les divers domaines de recherche, par exemple : traitement du signal et d'image, théorie de contrôle des systèmes dynamiques, circulation des fluides, viscoélasticité, rhéologie, mécanique, chimie, physique, biologie ...etc.

Bien que certaines questions mathématiques demeurent encore irrésolues, de nombreux défis on été surmontés avec succès. La plupart des problèmes mathématiques clés documentés dans ce domaine ont été résolus à un point où de nombreux outils mathématiques sont les mêmes pour les deux calculs régulier et fractionnaire. On peut s'appuyer sur plusieurs travaux fondamentaux (Voir[4][6][8][12][19][21][18]), qui offrent une compréhension approfondie des équations et des systèmes d'ordres fractionnaires.

Les théorèmes du point fixe sont des outils très utiles dans la résolution des équations différentielles pour montrer l'existence et l'unicité de la solution aux divers types d'équations.

Ce mémoire consiste à étudier les résultats d'existence des solutions pour un système fractionnaire dans un espace de Banach dérivé. Notre approche est basée sur les théories du point fixe (théorème de Banach, et théorème de Schauder).

Notre travail est divisé en trois chapitres :

Dans le premier Chapitre, On présente des définitions des espaces fonctionnels et des fonctions spéciales "fonction Gamma et Béta d'Euler ".

Dans le deuxième Chapitre, On présente quelques résultats de base du calcul fractionnaire utiles dans la suite du travail.

Le troisième Chapitre comprend deux parties :

Dans la première partie, on présente un résultat sur l'existence d'au moins d'une solution pour un système différentielle fractionnaire avec la dérivée de Caputo. La démonstration de ce résultat sera basée sur le théorème du point fixe de Schauder.

La deuxième partie est consacrée à l'existence et l'unicité de la solution du problème considéré. En utilisant dans notre approche la théorie du point fixe de Banach.

A la fin de notre étude, on va donner des exemples pour illustrer les résultats trouvés.

Notations

— $\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels.

— $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

— $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

— $C([a;b];\mathbb{R})$: l'espace des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.

— $L^p([a,b])$: espace des fonctions p-intégrables sur $[a,b]$.

— $L^\infty([a,b])$: espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur $[a,b]$.

— $AC([a,b])$: espace des fonctions absolûment continues sur $[a,b]$.

— $AC^n([a,b])$: espace des fonctions $u : [a;b] \to \mathbb{R}$ telle que $u^{(n-1)} \in AC([a,b])$ et $u^{(k)} \in C([a,b])\,, k = 1, 2....., n-1$.

— $\Gamma(.)$: la fonction Gamma.

— $\beta(.,.)$: la fonction Bêta.

— I_a^α : intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

— D_a^α : dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

— ${}^cD_a^\alpha$: dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

— $E_0^{\gamma,p}$: espace de Banach dérivé.

— $D(\Omega)$: ensemble des fonctions test.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace normé

Définition 1.1.1. *(**Norme**)*
Soit E un espace vectoriel. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ habituellement notée $\| \, . \, \|$ vérifiant pour tous x,y dans E et tout α dans $\mathbb{K}$:

— $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
— $\| \alpha \, x \| = |\alpha| \, \| x \|$ *(homogénéité).*
— $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *(inégalité triangulaire).*

Un espace vectoriel E muni d'une norme $\| \, . \, \|$, noté $(E, \| \, . \, \|)$ sera appelé un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2. *(**Suite de Cauchy**)*
Soient E un espace vectoriel normé muni de la norme $\| \, . \, \|$ et $(x_n)_{n \geq 0} \subset E$, une suite de E. On dit que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy si :
$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n, m \geq n_0 \Rightarrow \| x_n - x_m \| \leq \epsilon$.

Définition 1.1.3. *(**Espace Vectoriel Normé Complet**)*
On dit que l'espace vectoriel normé E est complet pour la norme $\| \, . \, \|$ si toute suite de Cauchy est convergente (pour cette norme).
Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.

Définition 1.1.4. *(**Application Lipschitzienne**)*
Soit E un espace vectoriel normé, de norme $\| \ . \ \|$. Une application f de E dans E est dite Lipschitzienne de constante $K > 0$ si elle vérifie :

$$\forall u, v \in E, \| f(u) - f(v) \| \leq K \| u - v \| .$$

L'application Lipschitzienne f est dite contractante si $K \in]0; 1]$.

Définition 1.1.5. *(**Opérateur linéaire**)*
Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.
Un opérateur A défini de E dans F est dit linéaire, s'il satisfait à :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}; \forall x, y \in E : A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) .$$

Exemple 1.1.1. *l'opérateur A défini comme suit :*

$$\begin{aligned} A : (C[a,b], \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f \mapsto A(f) &= \int_0^1 f(x)\, dx \end{aligned}$$

est linéaire.

Définition 1.1.6. *(**Opérateur compact**)*
Soit $D \subset E$. Un opérateur $F : D \to E$ est dit compact si pour tout ensemble borné $S \subset D$, $F(S)$ est relativement compact. de plus, F est complètement continu s'il est continu et compact.

1.1.2 Espace des fonctions continues $(C([a; b]; \mathbb{R}))$

Définition 1.1.7. *(**Application continue**)*
Soit E un espace vectoriel normé, de norme $\| \ . \ \|$. Une application f de E dans E est dite continue au point a si elle vérifie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \rho > 0, \forall x \in E : \| x - a \| < \rho \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \epsilon.$$

Théorème 1.1.1. *(**Caractérisation séquentielle de la continuité**)*
f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (x_n) qui converge vers a, alors $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

1.1.3 Espace L^p

Soit $[a, b]\,(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.8. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On note par $L^p\,[a, b]$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions de puissance p-intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$:*

$$L^p\left([a, b]\right) = \{f : [a, b] \to \mathbb{C}; f mesurable, et \parallel f \parallel_{L^p} < \infty\}$$

avec

$$\parallel f \parallel_{L^p([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^p\,[a, b]$ muni de la norme $\parallel . \parallel_{L^p}$ est un espace de Banach.

Si $p = 2$, alors $L^2\left([a, b]\right)$ est l'espace des classes d'équivalence de fonctions mesurables de carré intégrable sur $[a, b]$.

Le produit scalaire sur $L^2\left([a, b]\right)$ est défini pour toutes $f, g \in L^2\left([a, b]\right)$ par

$$(f, g)_{L^p([a,b])} = \int_a^b f(x)\,.\overline{g(x)}dx.$$

L'espace $L^2\left([a, b]\right)$ muni de la norme

$$\parallel f \parallel_{L^2([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert.

Lemme 1.1.1. *[3] (**Compacité dans L^p**)*
Soit F un ensemble borné dans $L^p\left([0, 1]\right)$ avec $1 < p < \infty$, supposons :
$\lim\limits_{h \to 0} \parallel \tau_h f - f \parallel_p = 0$ *uniformément sur F*
alors, F est relativement compact dans $L^p\left([0, 1]\right)$.

1.1.4 Espace L^{∞}

L'espace des fonctions essentiellement bornées noté L^{∞}, muni de la norme :

$$\| f \|_{L^{\infty}([a,b])} = \underset{x\in[a,b]}{supess} |u(x)|$$

$$où \qquad \underset{x\in[a,b]}{supess}|u(x)| = \inf\{M : |u(x)| \leq M, \qquad p.p \qquad dans\,[a,b]\}.$$

1.1.5 Espace des fonctions absolument continues (AC)

Soit $[a,b]\,(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.9. *On note par $AC([a,b]))$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables i.e :*

$$f \in AC([a,b])) \Leftrightarrow \exists \phi \in L^1([a,b]) \;\; tellque \;\; f = c + \int_a^b \phi(t)\,dt.$$

Ainsi, toute fonction f absolûment continue possède une dérivée sommable $f' = \phi$, presque partout sur $[a,b]$, et donc $c = f(a)$.

Définition 1.1.10. *On note par $AC^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$ l'espace des fonctions f définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui ont des dérivées continues sur $[a,b]$ jusqu'à l'ordre $n-1$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC([a,b]))$ i.e.*

$$f \in AC^n([a,b]) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}, \;\; f^{(k)} \in C([a,b]), \;\; k = 0....,n-1, \;\; f^{(n-1)} \in AC([a,b])\}$$

Remarque : *On a $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$*

Une caratérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1.2. *Une fonction $f \in AC^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si elle est représentée sous la forme*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Définition 1.1.11. *Un sous-ensemble X d'un espace vectoriel E est dit convexe si et seulement si :*

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda) x + \lambda y \in X.$$

Autrement dit, un ensemble est convexe s'il contient tout segment passant par deux de ses points.

1.2 Fonctions Spéciales

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

On peut définir par l'intégration par partie la fonction factorielle comme suivant :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

La fonction Gamma l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire qui permet de prolonger la fonction factorielle aux valeurs non entières, la fonction gamma est appelée aussi fonction factorielle généralisée.

Définition 1.2.1. *[14][17] La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad Re(z) > 0. \tag{1.2}$$

Propriétés de la fonction Gamma

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), Re(z) > 0.$

2. $\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)....(z+n-1)\Gamma(z).$

3. $\Gamma(n) = (n-1)!, n \geq 1.$

Preuve

1.
$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} z.t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\Gamma(z+n) &= (z+n-1)\,\Gamma(z+n-1) \\ &= (z+n-1)(z+n-2)\,\Gamma(z+n-2) \\ &= (z+n-1)(z+n-2)\,..........z\Gamma(z) \\ &= z(z+1)(z+2)\,..........\,(z+n-1)\,\Gamma(z).\end{aligned}$$

3. On a :
$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\,....\,(z+n-1)\,\Gamma(z).$$
Posons : $z = 1$

alors :
$$\Gamma(1+n) = 1\,(2)\,(3)\,....\,(n)\,\Gamma(1) = n!.$$

Donc :
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$

1. $\Gamma(1) = 1.$
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$
3. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$

Preuve :

1. $\Gamma\left(1\right)=\int_0^{+\infty}t^{1-1}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=1.$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$

   Posons :
   $$y=\sqrt{t}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\Rightarrow dt=2\sqrt{t}.dy$$
   Donc :
   $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

3. On a :
   $$\Gamma\left(z+n\right)=z\left(z+1\right)\left(z+2\right)....\left(z+n-1\right)\Gamma\left(z\right).$$
   Posons : $z=\frac{1}{2}$.

   Alors :
   $$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)....\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)....\left(\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1\times3\times5\times......(2n-1)\times2\times4\times6.....\times2n}{2\times2\times2.................\times2\times2\times4\times6.....\times2n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{2n!}{2^n\times2^n\times n!}\sqrt{\pi}\\&=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

1.2.2 Fonction Béta d'Euler

L'autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler.

Définition 1.2.2. *[14][17] La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante :*

$$\beta(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt, \qquad (z>0,w>0). \tag{1.3}$$

Remarque 1.2.1. *On a :*

1. *la relation entre la fonction Gamma et Bêta est donnée par :*

$$\beta(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.4}$$

2. *la fonction Bêta est symétrique i.e :*

$$\beta(z,w)=\beta(w,z).$$

1.3 Quelques théorèmes du point fixe

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.
Dans cette section nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la définition d'un point fixe.

Définition 1.3.1. *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de f tout point $u\in E$ tel que $f(u)=u$.*

Le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes du point fixe. Ce théorème prouvé en 1922 par Stefan Banach est basé essentiellement sur les notions d'application Lipschitzienne et d'application contractante.

Théorème 1.3.1. *[10] (**Banach 1922**)*
Soit E un espace métrique complet et soit $f:E\to E$ une application contractante, alors f possède un point fixe unique.

Le deuxième théorème du point fixe qu'on va énnoncer est celui de Schauder.

Théorème 1.3.2. *[10] (**Schauder 1930**)*
Soit C une partie convexe, bornée et fermée d'un espace de Banach E et soit $f : C \to C$ un opérateur continu et compact . Alors f possède au moins un point fixe.

Chapitre 2

Quelques opérateurs fractionnaires et outils de base

Dans ce chapitre, nous présentons différentes approches de généralisation de la notion de différentiation et intégration.

2.1 Intégrale répétée n-fois

Définition 2.1.1. *[14]*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale répétée n-fois de f est définie comme suit :

$$\begin{aligned} I^n f(x) &= \int_a^x \int_a^{x_1} \int_a^{x_2} ...... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n dx_{n-1} .... dx_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)\, ds. \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Preuve :

Pour $n = 2$ on a :

$$I^2 f(x) = \int_a^x \int_a^t f(s)\, dsdt = \int_a^x 1 \int_a^t f(s)\, dsdt.$$

$$\begin{aligned}
I^2 f(x) &= \left[t \int_a^t f(s)\, ds \right]_a^x - \int_a^x t.f(t)\, dt \\
&= x \int_a^x f(s)\, ds - \int_a^x t.f(t)\, dt \\
&= x \int_a^x f(s)\, ds - \int_a^x s.f(s)\, ds \\
&= \int_a^x (x-s) f(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Pour $n = 3$ on a :

$$\begin{aligned}
I^3 f(x) &= \int_a^x \int_a^t \int_a^z f(s)\, dsdzdt \\
&= \int_a^x \left(\int_a^t \int_a^z f(s)\, dsdz \right) dt \\
&= \int_a^x \int_a^t (t-s) f(s)\, dsdt \\
&= \int_a^x t \int_a^t f(s)\, dsdt - \int_a^x \int_a^t s.f(s)\, dsdt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} \int_a^t f(s)\, ds \right]_a^x - \int_a^x \frac{t^2}{2}.f(t)\, dt - \int_a^x (x-s)\, s.f(s)\, ds \\
&= \frac{x^2}{2} \int_a^x f(s)\, ds - \int_a^x \frac{s^2}{2}.f(s)\, ds + \int_a^x \left(s^2 - x.s\right).f(s)\, ds \\
&= \frac{1}{2} \int_a^x \left(x^2 + s^2 - 2.x.s\right) f(s)\, ds \\
&= \frac{1}{2} \int_a^x (x-s)^2 f(s)\, ds.
\end{aligned}$$

En générale pour $n \in \mathbb{N}$

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)\, ds.$$

On peut montrer cette égalité par récurrence :

Pour $n = 1$

$$If(x) = \frac{1}{0!}\int_a^x (x-s)^0 f(s)\,ds = \int_a^x f(s)\,ds.$$

Posons :

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)\,ds,$$

et montrons que :

$$I^{n+1} f(x) = \frac{1}{(n)!}\int_a^x (x-s)^{n} f(s)\,ds.$$

$$\begin{aligned}
I^{n+1} f(x) &= I^n\left(If(x)\right)\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1} If(s)\,ds\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1} \int_a^s f(t)\,dtds\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\left[\frac{-(x-s)^n}{n}\int_a^s f(t)\,dt\right]_{s=a}^{s=x} + \int_a^x \frac{(x-s)^n}{n} f(s)\,ds\right)\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \frac{(x-s)^n}{n} f(s)\,ds\\
&= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-s)^n f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1. *[17][14]*

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction f continue d'ordre $\alpha > 0$, notée $I_a^\alpha f(t)$ est définie par

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds. \tag{2.1}$$

Théorème 2.2.1. *L'opérateur intégrale I_a^α est linéaire.*

Preuve : D'après la linéarité de l'intégrale.

Proposition 2.2.1. *Soit f une fonction continue, alors on a :*

- $\lim_{\alpha\to 0^+} \left(I_a^\alpha f\right)(x) = f(x)$.
- $I_a^\alpha \left(I_a^\beta\right) = I_a^{\alpha+\beta}; \alpha,\ \beta > 0$.
- $\frac{d}{dx} I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-1} f(x), \alpha > 0$.

Exemple 2.2.1. *1.* $f(x) = (x-a)^\gamma$.

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\gamma\, dt. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable :

$$t = a + (x-a)\tau,$$

- *si* $t = a \Rightarrow \tau = 0$
- *si* $t = x \Rightarrow \tau = 1$
- $dt = (x-a)\, d\tau$.

Alors on a :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{\alpha-1} (x-a)^\gamma \tau^\gamma (x-a)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} (x-a)^{\gamma+1} \tau^\gamma d\tau \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\gamma d\tau \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\gamma} \beta(\alpha, \gamma+1)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\gamma} \Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\gamma} \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}.
\end{aligned}$$

2. $f(x) = c$.

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} c.dt \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha} \right]_a^x \\
&= \frac{c(x-a)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{c(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.3.1. *[14][17]*
Soit $n-1 < \alpha < n$, la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f est définie par la relation suivante :

$$\left(D_a^\alpha\right) f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\left(I^{n-\alpha} f\right)(x)\right]. \tag{2.2}$$

Propriétés :

— Linéarité : $D_a^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D_a^\alpha f(t) + \mu D_a^\alpha g(t)$.

— En général on a :

$$D_a^\alpha \left(D_a^\beta f(t)\right) \neq D_a^\beta \left(D_a^\alpha f(t)\right) \neq D_a^{\beta+\alpha} f(t).$$

— $D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = D_a^\alpha (D_a^{-\alpha} f(t)) = f(t)$.

Exemple 2.3.1.

1. $f(x) = (x-a)^\beta$.

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-\alpha} f\right)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{(x-a)^{n-\alpha+\beta}\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}, \end{aligned}$$

car

$$\frac{d}{dx} x^m = m.x^{m-1}.$$

$$\frac{d^2}{dx^2} x^m = m(m-1).x^{m-2}.$$

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!}.x^{m-n}.$$

Donc

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.x^{\beta-\alpha}.$$

2. $f(x) = c$.

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \left(I^{n-\alpha} f\right)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \left(\frac{c.(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\right) \\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} (x-a)^{n-\alpha} \\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.1. *La dérivée fractionnaire d'une constante au sens de Riemann n'est jamais nulle.*

Lemme 2.3.1. *[14]*
Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n$, alors la dérivée fractionnaire $D_a^{\alpha} f$ existe presque partout sur $[a, b]$.

2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.4.1. *[14] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on appelle dérivée de f au sens de Caputo la fonction définie par :*

$$\left({}^{c}D_a^{\alpha} f\right)(x) = \left(I_a^{n-\alpha} f^{(n)}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt. \tag{2.3}$$

Proposition 2.4.1.

— ${}^{c}D_a^{\alpha}\left(I_a^{\alpha}f\right)=f.$

— $I_a^{\alpha}\left({}^{c}D_a^{\alpha}f\right)(x)=f(x)+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-a)^j}{j!}f^{(j)}(a).$

— *Linéarité :* ${}^{c}D_{a^+}^{\alpha}\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)=\lambda{}^{c}D_{a^+}^{\alpha}f(x)+\mu{}^{c}D_{a^+}^{\alpha}g(x).$

Exemple 2.4.1. *1.* $f(x)=(x-a)^{\beta}$.

$$\begin{aligned}
{}^{c}D_a^{\alpha}f(x) &= I_a^{n-\alpha}f^{(n)}(x)\\
&= I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x-a)^{\beta}\right]\\
&= I_a^{n-\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n}\right]\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}I_a^{n-\alpha}(x-a)^{\beta-\alpha}\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\frac{\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

2. $f(x)=c.$

$${}^{c}D_a^{\alpha}f(x)=I_a^{n-\alpha}f^{(n)}(x)=I_a^{n-\alpha}(0)=0\ .$$

Remarque 2.4.1. *La dérivée fractionnaire d'une constante au sens de Caputo est toujours nulle.*

Lemme 2.4.1. *[14]*
Soit $\alpha > 0$. Si $f \in AC^n$, alors la dérivée fractionnaire ${}^cD_a^\alpha f$ existe presque partout sur $[a,b]$.

2.5 Espace de Banach dérivé $E_0^{\gamma,p}$

Définition 2.5.1. *(Voir : [13] [16])*
Soient $1 < p < \infty$ et $0 < \gamma \leq 1$. On appelle espace de Banach dérivé fractionnaire, et on note $E_0^{\gamma,p}$ l'adhérence de $D([0,1])$ dans L^p par la norme suivante :

$$\| u \|_{E_0^{\gamma,p}} = \left(\| u \|_p^p + \|^c D_0^\gamma u \|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} . \tag{2.4}$$

Remarque 2.5.1.

$$E_0^{\gamma,p} = \{u(t) \in L^p\left([0,1], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), ({}^cD_a^\gamma u)(t) \in L^p\left([0,1], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), u(0) = u(1) = 0\}.$$

Lemme 2.5.1. *[13][16]*

L'espace $E_0^{\gamma,p}$ est un espace de Banach, séparable, et réflexif.

Preuve

On sait que $\left(L^p[0,1], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ est un espace de Banach réflexif et séparable.

Alors, le produit cartésienne :

$$\left(L_2^p[0,1], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \left(L^p[0,1], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \times \left(L^p[0,1], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tag{2.5}$$

est aussi un espace de Banach réflexif et séparable par la norme :

$$\| v \|_{L_2^p} = \left(\sum_{i=1}^{2} \| v_i \|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.6}$$

où $(v_1, v_2) \in \left(L_2^p [0,1], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$.

Considérons l'espace $\Omega = \{(u,^c D_0^\gamma u) \, \forall u \in E_0^{\gamma,p}\}$ qui est un sous-ensemble fermé de $\left(L_2^p [0,1], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. En effet :

$$(u_n,^c D_0^\gamma u_n) \longrightarrow (u,v), \qquad\qquad \forall n \to +\infty.$$

Soit

$$\begin{aligned} T : & E_0^{\gamma,p} \longrightarrow L^p \\ & u \ \longrightarrow^c D_0^\gamma u. \end{aligned}$$

T est continue, en effet :

$$\| Tu \|_{L^p} = \|^c D_0^\gamma u \|_{L^p} \leq (\|^c D_0^\gamma u \|_{L^p}^p + \| u \|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} = \| u \|_{E_0^{\gamma,p}} .$$

T est linéaire et continue alors $(u,v) = (u,^c D^\gamma u)$.

Donc, Ω est aussi un espace de Banach réflexif et séparable par la norme (2.6).

Soit l'opérateur :

$$\begin{aligned} A : & E_0^{\gamma,p} \longrightarrow \Omega \\ & u \ \longrightarrow (u,^c D_0^\gamma u). \end{aligned}$$

Il est évident que :

$$\| u \|_{\gamma,p} = \| Au \|_{L_2^p} .$$

Alors A est un isomorphisme isométrique et les deux espaces $E_0^{\gamma,p}$ et Ω sont isomorphes, isométriques, donc $E_0^{\gamma,p}$ est un espace de Banach réflexif et séparable.

Lemme 2.5.2. *[13]*
Soient $0 < \gamma \leq 1$ et $1 \leq p < \infty$. Pour toute $f \in L^p([0,1])$, nous avons :

$$\| D_0^{-\gamma} f \|_p \leq \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \| f \|_p .$$

Proposition 2.5.1. *[13][16]*

Pour tout $u \in E_0^{\gamma,p}$ *tel que* $\Omega = [0,1]$ *On a :*

$$\| u \|_p \leq \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \|^c D_0^\gamma u \|_p \,. \tag{2.7}$$

Preuve

Pour $0 < \gamma \leq 1$,

on a : $D_0^{-\gamma}.{}^c D_0^\gamma u(t) = u(t) - u(0) = u(t)$.

En utilisant le lemme 2.5.2, nous obtenons :

$$\|u\|_p = \| D_0^{-\gamma}.{}^c D_0^\gamma u(t) \|_p \leq \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \|^c D_0^\gamma u \|_p \,.$$

$$\| u \|_p \leq \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \|^c D_0^\gamma u \|_p \,.$$

Lemme 2.5.3. *La norme* $\|^c D_0^\gamma u \|_p$ *est équivalente à celle de* $E_0^{\gamma,p}$.

Preuve

On a :

$$\| u \|_{E_0^{\gamma,p}} = \left(\| u \|_p^p + \|^c D_0^\gamma u \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \| u \|_{E_0^{\gamma,p}}^p = \| u \|_p^p + \|^c D_0^\gamma u \|_p^p \,,$$

ce qui implique que

$$\|^c D_0^\gamma u \|_p \leq \| u \|_{E_0^{\gamma,p}} \,. \tag{2.8}$$

D'autre part, on a :

$$\| u \|_p \leq \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \|^c D_0 u^\gamma \|_p \,,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\| u \|_p^p + \|^c D_0^\gamma u \|_p^p &\leq \left(\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \right)^p \|^c D_0^\gamma u \|_p^p + \|^c D_0^\gamma u \|_p^p \\
\| u \|_p^p + \|^c D_0^\gamma u \|_p^p &\leq \left(\left(\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \right)^p + 1 \right) \|^c D_0^\gamma u \|_p^p \\
\| u \|_{E_0^{\gamma,p}} &\leq \left(\left(\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \right)^p + 1 \right)^{\frac{1}{p}} \|^c D_0^\gamma u \|_p .
\end{aligned}$$

Donc

$$\| u \|_{E_0^{\gamma,p}} \leq C. \|^c D_0^\gamma u \|_p . \tag{2.9}$$

D'après (2.8) et (2.9), on trouve :

$$\|^c D_0^\gamma u \|_p \leq \| u \|_{E_0^{\gamma,p}} \leq C. \|^c D_0^\gamma u \|_p . \tag{2.10}$$

Dans la suite, on note X l'espace produit $E_0^{\gamma,p} \times E_0^{\gamma,q}$ muni de la norme :

$$\| (x,y) \|_X = max \left(\| x \|_{E_0^{\gamma,p}}, \| y \|_{E_0^{\gamma,q}} \right) . \tag{2.11}$$

Chapitre 3

Résultat d'existence pour un système fractionnaire dans un espace de Banach dérivé

3.1 Position du problème :

On considère le système différentiel fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0}^{\alpha}x\left(t\right)=f\left(t,y\left(t\right),{}^{c}D_{0}^{\gamma}y\left(t\right)\right); \\ {}^{c}D_{0}^{\beta}y\left(t\right)=g\left(t,x\left(t\right),{}^{c}D_{0}^{\gamma}x\left(t\right)\right); \\ x\left(0\right)=x\left(1\right)=0; \\ y\left(0\right)=y\left(1\right)=0; \\ x''\left(0\right)=y''\left(0\right)=0; \end{cases} \tag{3.1}$$

où $2<\alpha,\beta\leq 3$; $0<\gamma\leq 1$; $f,g:[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ sont des fonctions continues et ${}^{c}D_{0}^{\alpha}$ est la dérivée de Caputo.

Préliminaire :

Lemme 3.1.1. *Soient* $\alpha\in\mathbb{R}$ *et* $t\in[0,1]$.

$I_{0}^{\alpha c}D_{0}^{\alpha}x\left(t\right)=x\left(t\right)+c_{0}+c_{1}t+..........+c_{n-1}t^{n-1}.$

où $c_{0},c_{1}.....,c_{n-1}\in\mathbb{R}$,

Lemme 3.1.2. *Le problème des équations différentielles fractionnaires :*

$$\begin{cases} {}^{c}D_0^{\alpha}x(t) = f\left(t, y(t), {}^{c}D_0^{\gamma}y(t)\right); \\ x(0) = x(1) = 0; \\ x''(0) = 0; \end{cases} \tag{3.2}$$

est équivalent à l'équation intégrale :

$$x(t) = \int_0^1 G_1(t,s) f\left(s, y(s), {}^{c}D_0^{\gamma}y(s)\right) ds$$

avec

$$G_1(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - t(1-s)^{\alpha-1} & 0 < s \leq t \\ -t(1-s)^{\alpha-1} & t < s \leq 1 \end{cases}$$

De même,le problème des équations différentielles fractionnaires :

$$\begin{cases} {}^{c}D_0^{\beta}y(t) = g\left(t, x(t), {}^{c}D_0^{\gamma}x(t)\right); \\ y(0) = y(1) = 0; \\ y''(0) = 0; \end{cases} \tag{3.3}$$

est équivalent à l'équation intégrale :

$$y(t) = \int_0^1 G_2(t,s) g\left(s, x(s), {}^{c}D_0^{\gamma}x(s)\right) ds$$

avec

$$G_2(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \begin{cases} (t-s)^{\beta-1} - t(1-s)^{\beta-1} & 0 < s \leq t \\ -t(1-s)^{\beta-1} & t < s \leq 1 \end{cases}$$

Preuve :

On a : ${}^{c}D_0^{\alpha}x(t) = f\left(t, y(t), {}^{c}D_0^{\gamma}y(t)\right)$,

donc, d'après le lemme 3.1.1 :

$$\begin{aligned} x(t) &= I_0^{\alpha} f\left(t, y(t), {}^{c}D_0^{\gamma}y(t)\right) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, y(s), {}^{c}D_0^{\gamma}y(s)\right) ds + c_0 + c_1 t + c_2 t^2. \end{aligned}$$

D'après les conditions :

$$\begin{aligned}
x(0) =& c_0 = 0\\
x(1) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds + c_1 + c_2\\
x''(t) =& I_0^{\alpha-2} f\left(t, y(t), {}^c D_0^\gamma y(t)\right) + 2c_2\\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-3} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds + 2c_2\\
x''(0) =& 2c_2 = 0\\
x(1) =& \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds + c_1 = 0,
\end{aligned}$$

donc :

$$c_1 = -\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
x(t) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds -\\
& \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds -\\
& \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$x(t) = \int_0^1 G_1(t,s) f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds;$$

avec

$$G_1(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - t(1-s)^{\alpha-1} & 0 < s \leq t\\ -t(1-s)^{\alpha-1} & t < s \leq 1. \end{cases}$$

De même, on trouve :

$$y(t) = \int_0^1 G_2(t,s)\, g\left(s, x(s), {}^c D_0^{\gamma} x(s)\right) ds,$$

avec

$$G_2(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \begin{cases} (t-s)^{\beta-1} - t(1-s)^{\beta-1} & 0 < s \leq t \\ -t(1-s)^{\beta-1} & t < s \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 3.1.3. *Supposons que $f, g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues ; alors $(x, y) \in X$ est solution de le système 3.1 si et seulement si (x, y) est un point fixe de l'opérateur défini par :*

$$\begin{gathered} T : X \to X \\ (x(t), y(t)) \to (T_1(x(t), y(t)), T_2(x(t), y(t))), \end{gathered}$$

où

$$T_1(x(t), y(t)) = \int_0^1 G_1(t,s)\, f\left(s, y(s), {}^c D_0^{\gamma} y(s)\right) ds,$$
$$T_2(x(t), y(t)) = \int_0^1 G_2(t,s)\, g\left(s, y(s), {}^c D_0^{\gamma} y(s)\right) ds.$$

Preuve :

. La condition est nécessaire :

D'aprés le lemme 3.1.2, $(x(t), y(t))$ est une solution du système 3.1 alors $(x(t), y(t))$ est un point fixe de l'opérateur T.

. La condition est suffisante :

On a

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds \\
&- \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds \\
x(t) &= (I^\alpha f)\left(t, y(t), {}^c D_0^\gamma y(t)\right) - t\,(I^\alpha f)\left(1, y(1), {}^c D_0^\gamma y(1)\right).
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
{}^c D_0^\alpha x(t) &= {}^c D_0^\alpha \left[(I^\alpha f)\left(t, y(t), {}^c D_0^\gamma y(t)\right) - t\,(I^\alpha f)\left(1, y(1), {}^c D_0^\gamma y(1)\right)\right] \\
&= f\left(t, y(t), {}^c D_0^\gamma y(t)\right).
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
x(0) =& 0 \\
x(1) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds = 0 \\
x''(t) =& \frac{d^2}{dt^2} \left(I^\alpha f\left(t, y(t), {}^c D_0^\gamma y(t)\right) - t.I^\alpha f\left(1, y(1), {}^c D_0^\gamma y(1)\right)\right) \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-3} f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) ds \\
x''(0) =& 0.
\end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\begin{cases}
{}^c D_0^\alpha x(t) = f\left(t, y(t), {}^c D_0^\gamma y(t)\right); \\
x(0) = x(1) = 0; \\
x''(0) = 0.
\end{cases}$$

De même pour $y(t)$.

Lemme 3.1.4. *(Voir [2])*

1. $|G_1(t,s)| \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}$.
2. $|G_2(t,s)| \leq \frac{2}{\Gamma(\beta)}$.
3. $|\frac{d^\gamma G_1}{dt}(t,s)| \leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} = l_1$.
4. $|\frac{d^\gamma G_2}{dt}(t,s)| \leq \frac{\beta}{\Gamma(\beta-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} = l_2$.

Preuve :

1. On a :
$$G_1(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - t(1-s)^{\alpha-1} & 0 < s \leq t \\ -t(1-s)^{\alpha-1} & t < s \leq 1, \end{cases}$$
donc :

Si $0 < s \leq t$
$$\begin{aligned} |G_1(t,s)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\left|(t-s)^{\alpha-1}\right| + \left|t(1-s)^{\alpha-1}\right| \right) \\ &\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Si $t \leq s \leq 1$
$$\begin{aligned} |G_1(t,s)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\left|t(1-s)^{\alpha-1}\right| \right) \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\ &\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

2. Tout abord, pour $0 \leq s \leq \tau \leq t$, on a :

$$^{c}D_{0}^{\gamma}\left(t-s\right)^{\alpha-1} \leq^{c} D_{0}^{\gamma}t^{\alpha-1}.$$

En effet

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma\left(1-\gamma\right)}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{-\gamma}.\left(\alpha-1\right).\left(\tau-s\right)^{\alpha-2}d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(1-\gamma\right)}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{-\gamma}.\left(\alpha-1\right).\left(\tau\right)^{\alpha-2}d\tau.
\end{aligned}$$

Alors :

Si $0 < s \leq t$

$$\begin{aligned}
\left|^{c}D_{0}^{\gamma}G_{1}\left(t,s\right)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\left|^{c}D_{0}^{\gamma}\left(t-s\right)^{\alpha-1}\right| + \left|\left(1-s\right)^{\alpha-1}\,{}^{c}D_{0}^{\gamma}t\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\left|^{c}D_{0}^{\gamma}t^{\alpha-1}\right| + \left|\left(1-s\right)^{\alpha-1}\,{}^{c}D_{0}^{\gamma}t\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\left|\frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha-\gamma\right)}t^{\alpha-1-\gamma}\right| + \left|\left(1-s\right)^{\alpha-1}\frac{\Gamma\left(2\right)}{\Gamma\left(2-\gamma\right)}t^{1-\gamma}\right|\right) \\
&\leq \frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha-\gamma\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(2-\gamma\right)}.
\end{aligned}$$

Si $t < s \leq 1$

$$\begin{aligned}
\left|^{c}D_{0}^{\gamma}G_{1}\left(t,s\right)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\left|\left(1-s\right)^{\alpha-1}\,{}^{c}D_{0}^{\gamma}t\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\left|\left(1-s\right)^{\alpha-1}\frac{\Gamma\left(2\right)}{\Gamma\left(2-\gamma\right)}t^{1-\gamma}\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma\left(2-\gamma\right)} \\
&\leq \frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha-\gamma\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(2-\gamma\right)}.
\end{aligned}$$

3.2 Existence de solution via le théorème de Schauder

Théorème 3.2.1. *On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(H)$_1$: $|f(t,x,y)| \leq w_1(t) + c_1(|x|+|y|)$;

(H)$_2$: $|g(t,x,y)| \leq w_2(t) + c_2(|x|+|y|)$;

(H)$_3$:$K = \max(k_1,k_2) \leq 1$; *tq :* $k_1 = l_1.c_1\left(\dfrac{1}{\Gamma(1+\gamma)}+1\right)$; $k_2 = l_2.c_2\left(\dfrac{1}{\Gamma(1+\gamma)}+1\right)$;

où : $w_1(t), w_2(t) \in L^1[0,1]$ *et* c_1, c_2 *sont des constantes.*
Alors : le système 3.1 admet au moins une solution dans $[0,1]$.

Preuve :

Nous allons montrer que le système 3.1 possède au moins une solution en utilisant le théorème 1.3.2. Ceci, nécessite plusieurs étapes

Étape 1

Tout d'abord, on définit B_R comme suit :

$$B_R = \{(x,y) \in X :\| (x,y) \|\leq R\}, \tag{3.4}$$

où :

$$R \geq \frac{l_1 \| w_1 \|_1 + l_2 \| w_2 \|_1}{1-K}.$$

Il est évident que B_R est convexe, bornée et fermée. Maintenant nous montrons que : $T(B_R) \subset B_R$:

Soit $(x,y) \in B_R$

$$\| T_1(x,y) \|_{E_0^{\gamma,p}} = \|^c D_0^\gamma T_1(x,y) \|_{L^p} .$$

On a

$$\begin{aligned}
\left|{}^c D_0^\gamma T_1(x,y)\right| &= \left| \int_0^1 {}^c D_0^\gamma G_1(t,s) f\left(s, y(s), {}^c D_0^\gamma y(s)\right) \right| ds \\
&\leq l_1 \left(\int_0^1 |w_1(s)|\, ds + \int_0^1 c_1 |y(s)|\, ds + \int_0^1 c_1 \left|{}^c D_0^\gamma |y(s)|\right| ds \right) \\
&\leq l_1 \| w_1 \|_1 + l_1.c_1 \left(\| y \|_{L^q} + \|^c D_0^\gamma y \|_{L^q} \right) \\
&\leq l_1 \| w_1 \|_1 + l_1.c_1 \left(\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \|^c D_0^\gamma y \|_{L^q} + \|^c D_0^\gamma y \|_{L^q} \right)
\end{aligned}$$

$$\|^c D_0^\gamma T_1(x,y) \|_{L^p} \leq l_1 \| w_1 \|_1 + l_1.c_1 \left(\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} + 1 \right) \| y \|_{E^{\gamma,q}} \leq l_1 \| w_1 \|_1 + k_1 \| y \|_{E^{\gamma,q}} .$$

De la même manière nous montrons que :

$$\|^c D_0^\gamma T_2(x,y) \|_{L^q} \leq l_2 \| w_2 \|_1 + k_2 \| x \|_{E^{\gamma,p}} .$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|^c D_0^\gamma T_1(x,y) \|_{L^p} \leq l_1 \| w_1 \|_1 + l_2 \| w_2 \|_1 + \max(k_1,k_2) \max\left(\| x \|_{E^{\gamma,p}}, \| y \|_{E^{\gamma,q}}\right) \\
&\|^c D_0^\gamma T_2(x,y) \|_{L^q} \leq l_1 \| w_1 \|_1 + l_2 \| w_2 \|_2 + \max(k_1,k_2) \max\left(\| x \|_{E^{\gamma,p}}, \| y \|_{E^{\gamma,q}}\right).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\| T(x,y) \|_X \leq l_1 \| w_1 \|_1 + l_2 \| w_2 \|_2 + K.R \leq R.$$

D'où :

$$T(B_R) \subset B_R .$$

Étape 2

Établissons maintenant que T est continu, on a :

Soit (x_n, y_n) une suite de B_R telle que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ lorsque $n \to \infty$ dans X i.e : $x_n \to x$ dans $E_0^{\gamma,p}$;et $y_n \to y$ dans $E_0^{\gamma,q}$

Soit $y_n \to y$ dans $E_0^{\gamma,q}$, alors :

$$\begin{cases} y_n \to y & dans L^q \\ {}^cD^\gamma y_n \to^c D^\gamma y & dans L^q. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} y_n \to y & p.p \\ {}^cD^\gamma y_n \to^c D^\gamma y & p.p\ . \end{cases}$$

Donc :

$f\left(s, y_n\left(s\right), {}^c D^\gamma y_n\left(s\right)\right) \to f\left(s, y\left(s\right), {}^c D^\gamma y\left(s\right)\right)$ p.p comme f est continue.

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left|f\left(t, y_n\left(t\right), {}^c D^\gamma y_n\left(t\right)\right)\right| &\leq w_1\left(t\right) + c_1\left(\left|y_n\left(t\right)\right| + \left|{}^cD^\gamma y_n\left(t\right)\right|\right) \\ &\leq w_1\left(t\right) + h_1 + h_2. : w_1 \in L^1 h_1, h_2 \in L^q \\ &\leq w_1\left(t\right) + h_1 + h_2. : w_1, h_1, h_2 \in L^1 \ \ comme : L^q \subset L^1. \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée :

$f\left(s, y_n\left(s\right), {}^c D^\gamma y_n\left(s\right)\right) \to f\left(s, y\left(s\right), {}^c D^\gamma y\left(s\right)\right)$ dans L^1.

De même, Soit $x_n \to x$ dans $E_0^{\gamma,p}$.

alors :

$$g\left(s, x_n\left(s\right), {}^c D^\gamma x_n\left(s\right)\right) \to g\left(s, x\left(s\right), {}^c D^\gamma x\left(s\right)\right) \text{ dans } L^1 .$$

Alors, pour $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\| T\left(x_n, y_n\right) - T\left(x, y\right) \|_X &= \| \left(T_1\left(x_n, y_n\right), T_2\left(x_n, y_n\right)\right) - \left(T_1\left(x, y\right), T_2\left(x, y\right)\right) \|_X \\
&= \| \left(T_1\left(x_n, y_n\right) - T_1\left(x, y\right)\right); \left(T_2\left(x_n, y_n\right) - T_2\left(x, y\right)\right) \|_X \\
&= \max\left(\| T_1\left(x_n, y_n\right) - T_1\left(x, y\right) \|_{E_0^{\gamma,p}}; \| T_2\left(x_n, y_n\right) - T_2\left(x, y\right) \|_{E_0^{\gamma,p}}\right) .
\end{aligned}$$

Puisque

$$\| T_1\left(x_n, y_n\right) - T_1\left(x, y\right) \|_{E_0^{\gamma,p}} = \| {}^c D_0^\gamma \left(T_1\left(x_n, y_n\right) - T_1\left(x, y\right)\right) \|_{L^p} .$$

On a

$$\begin{aligned}
&\left|{}^c D_0^\gamma \left(T_1\left(x_n, y_n\right) - T_1\left(x, y\right)\right)\right| \\
&= \left|\int_0^1 {}^c D_0^\gamma G_1\left(t, s\right)\left(f\left(s, y_n\left(s\right), {}^c D_0^\gamma y_n\left(s\right)\right) - f\left(s, y\left(s\right), {}^c D_0^\gamma y\left(s\right)\right)\right) ds\right| \\
&= l_1 \int_0^1 \left|f\left(s, y_n\left(s\right), {}^c D_0^\gamma y_n\left(s\right)\right) - f\left(s, y\left(s\right), {}^c D_0^\gamma y\left(s\right)\right)\right| ds.
\end{aligned}$$

On aboutit

$\| T_1\left(x_n, y_n\right) - T_1\left(x, y\right) \|_{E_0^{\gamma,p}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

De même

$\| T_2\left(x_n, y_n\right) - T_2\left(x, y\right) \|_{E_0^{\gamma,p}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Par conséquent l'opérateur T est continu.

Étape 3

Il nous reste à montrer que T est compact pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Schauder.

Pour établir la compacité de l'opérateur T. Il suffit de montrer que $T\left(B_R\right)$ est relativement compact c'est-à-dire : $T_1\left(B_R\right)$ et $T_2\left(B_R\right)$ sont relativement compacts.

On sait que

$$\begin{aligned}
&\| T_1\left(x\left(t+h\right), y\left(t+h\right)\right) - T_1\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right) \|_{E_0^{\gamma,p}} = \\
&\|^c D_0^\gamma \left(T_1\left(x\left(t+h\right), y\left(t+h\right)\right) - T_1\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)\right) \|_{L^p} .
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\left|{}^c D_0^\gamma \left(T_1\left(x\left(t+h\right), y\left(t+h\right)\right) - T_1\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)\right)\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|{}^c D_0^\gamma \left(G_1\left(t+h, s\right) - G_1\left(t, s\right)\right)\right| \left|f\left(s, y\left(s\right), {}^c D_0^\gamma y\left(s\right)\right)\right| ds \\
&\leq \sup_{t,s} \left|{}^c D_0^\gamma \left(G_1\left(t+h, s\right) - G_1\left(t, s\right)\right)\right| \int_0^1 \left|f\left(s, y\left(s\right), {}^c D_0^\gamma y\left(s\right)\right)\right| ds.
\end{aligned}$$

Cela revient à dire

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \left|{}^c D_0^\gamma \left(T_1\left(x\left(t+h\right), y\left(t+h\right)\right) - T_1\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)\right)\right| \\
&\leq \lim_{h\to 0} \sup_{t,s} \left|{}^c D_0^\gamma \left(G_1\left(t+h, s\right) - G_1\left(t, s\right)\right)\right| \left[\| w_1 \|_1 + c\left(\| y \|_P + \|^c D_0^\gamma y \|_p\right)\right].
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|^c D_0^\gamma \left(T_1\left(x\left(t+h\right), y\left(t+h\right)\right) - T_1\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)\right) \|_{L^p} \longrightarrow 0.$$

D'aprés lemme 1.1.1, $\overline{T_1\left(B_R\right)}$ est compact.

De la même manière, on peut montrer que $\overline{T_2\left(B_R\right)}$ est compact.

Nous concluons d'après ce qui précède qu'en vertu du théorème du point fixe de Schauder l'opérateur T possède au moins un point fixe. Le système 3.1 admet au mois une solution dans $[0,1]$.

3.3 Existence et unicité de solution via la contraction de Banach

Théorème 3.3.1. *On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(H')$_1$: $\left|f\left(t,x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-f\left(t,x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\right|\leq c_1\left(\left|x_1\left(t\right)-x_2\left(t\right)\right|+\left|y_1\left(t\right)-y_2\left(t\right)\right|\right);$

(H')$_2$: $\left|g\left(t,x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-g\left(t,x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\right|\leq c_2\left(\left|x_1\left(t\right)-x_2\left(t\right)\right|+\left|y_1\left(t\right)-y_2\left(t\right)\right|\right);$

(H')$_3$: $K=\max\left(k_1,k_2\right)\leq 1;\ \ tq: k_1=l_1.c_1\left(\dfrac{1}{\Gamma\left(1+\gamma\right)}+1\right);\ k_2=l_2.c_2\left(\dfrac{1}{\Gamma\left(1+\gamma\right)}+1\right);$

Où : c_1,c_2 *sont des constantes assez petites.*

Alors : le système 3.1 admet une solution unique dans $[0,1]$.

Preuve

Nous allons montrer que le système possède une solution unique en utilisant le théorème 1.3.1.

On montre que l'opérateur T est contractante i.e :

$$\begin{aligned}&\forall\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right),\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\in X,\ \exists K\leq 1:\\&\|T\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-T\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\|_X\leq K\|\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\|_X.\end{aligned}$$

i.e :

$$
\begin{aligned}
&\|T\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-T\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\|_X\\
=&\|\left(T_1\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right),T_2\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-\left(T_1\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\right),T_2\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\right)\|_X\\
=&\max\left(\|T_1\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-T_1\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\|_{E_0^{\gamma,p}},\|T_2\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-T_2\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\|_{E_0^{\gamma,p}}\right)\\
\leq&K\|\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\|_X
\end{aligned}
$$

— Premièrement, On a :

$$\|T_1\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-T_1\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\|_{E_0^{\gamma,p}}\leq k_1\|y_1-y_2\|_{E_0^{\gamma,q}}.$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
&\|T_1\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-T_1\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\|_{E_0^{\gamma,p}}\\
&=\|{}^cD_0^\gamma\left(T_1\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-T_1\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\right)\|_{L^p},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&|{}^cD_0^\gamma\left(T_1\left(x_1\left(t\right),y_1\left(t\right)\right)-T_1\left(x_2\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)\right)|\\
&=\left|\int_0^1{}^cD_0^\gamma G_1\left(t,s\right)\left(f\left(s,y_1\left(s\right),{}^cD_0^\gamma y_1\left(s\right)\right)-f\left(s,y_2\left(s\right),{}^cD_0^\gamma y_2\left(s\right)\right)\right)ds\right|\\
&\leq l_1\int_0^1\left|f\left(s,y_1\left(s\right),{}^cD_0^\gamma y_1\left(s\right)\right)-f\left(s,y_2\left(s\right),{}^cD_0^\gamma y_2\left(s\right)\right)\right|ds\\
&\leq c_1l_1\int_0^1|y_1-y_2|+|{}^cD_0^\gamma y_1-{}^cD_0^\gamma y_2|\,ds\\
&\leq c_1l_1\left(\|y_1-y_2\|_{L^q}+\|{}^cD_0^\gamma y_1-{}^cD_0^\gamma y_2\|_{L^q}\right)\\
&\leq c_1l_1\left(\frac{1}{\Gamma\left(1+\gamma\right)}+1\right)\|{}^cD_0^\gamma y_1-{}^cD_0^\gamma y_2\|_{L^q}\\
&\leq k_1\|y_1-y_2\|_{E_0^{\gamma,q}}.
\end{aligned}
$$

Cela revient à dire

$$\left(\int_0^1 \left|{}^c D_0^\gamma \left(T_1\left(x_1\left(t\right), y_1\left(t\right)\right) - T_1\left(x_2\left(t\right), y_2\left(t\right)\right)\right)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq k_1 \|y_1 - y_2\|_{E_0^{\gamma,q}}.$$

Donc :

$$\|T_1\left(x_1\left(t\right), y_1\left(t\right)\right) - T_1\left(x_2\left(t\right), y_2\left(t\right)\right)\|_{E_0^{\gamma,p}} \leq k_1 \|y_1 - y_2\|_{E_0^{\gamma,q}}.$$

— Deuxièmement, de la même manière on peut montrer que :

$$\|T_2\left(x_1\left(t\right), y_1\left(t\right)\right) - T_2\left(x_2\left(t\right), y_2\left(t\right)\right)\|_{E_0^{\gamma,p}} \leq k_1 \|x_1 - x_2\|_{E_0^{\gamma,q}}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\|T\left(x_1\left(t\right), y_1\left(t\right)\right) - T\left(x_2\left(t\right), y_2\left(t\right)\right)\|_X \\
&\leq \max\left(k_1, k_2\right) \max\left(\|x_1 - x_2\|_{E_0^{\gamma,q}}, \|y_1 - y_2\|_{E_0^{\gamma,q}}\right) \\
&\leq K\| \left(x_1 - x_2\right), \left(y_1 - y_2\right) \|_X \\
&\leq K\| \left(x_1, y_1\right) - \left(x_2, y_2\right) \|_X.
\end{aligned}$$

Puisque $K < 1$, l'opérateur T est une contraction ; Ainsi, selon le principe de contraction de Banach, le système 3.1 a une solution unique dans $[0, 1]$.

3.4 Exemples illustratifs

Exemple 3.4.1. ***(Via Schauder)***

On considère le système différentiel fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_0^{2.5}x\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{t^2+728}}\sin\left(y\left(t\right)+^c D_0^{0.5}y\left(t\right)\right); \\ {}^cD_0^{2.7}y\left(t\right)=\sin\left(t\right)+\frac{\exp^{-t}}{10^5+\exp^t}\left(x\left(t\right)+^c D_0^{0.5}x\left(t\right)\right); \\ x\left(0\right)=x\left(1\right)=0; \\ y\left(0\right)=y\left(1\right)=0; \\ x''\left(0\right)=y''\left(0\right)=0; \end{cases} \tag{3.5}$$

avec

$$\begin{aligned} f\left(t,x,y\right)&=\frac{1}{\sqrt{t^2+728}}\sin\left(x+y\right); \\ g\left(t,x,y\right)&=\sin\left(t\right)+\frac{\exp^{-t}}{10^5+\exp^t}\left(x+y\right); \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\alpha=2.5;\ \beta=2.7;\ c_1=\frac{1}{\sqrt{728}};\ c_2=10^{-5};\ \gamma=0.5;\ w_1=0;\ \parallel w_1\parallel_1=0; \\ &w_2=\sin t;\ \parallel w_2\parallel_1=1-\cos 1=0.4597\ . \end{aligned}$$

En utilisant toutes les données fournis de notre problème 3.5, on obtient

$$\begin{aligned} \left|f\left(t,x,y\right)\right|&\leq\frac{1}{\sqrt{728}}\left(|x|+|y|\right) \\ \left|g\left(t,x,y\right)\right|&\leq\sin t+10^{-5}\left(|x|+|y|\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t\in[0,1]$, les hypothèses $(H)_1$ et $(H)_2$ sont satisfaites.

avec

$$l_1 = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} = \frac{\Gamma(2.5)}{\Gamma(2)} + \frac{1}{\Gamma(1.5)} = 2.4577$$
$$l_2 = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} = \frac{\Gamma(2.7)}{\Gamma(2.2)} + \frac{1}{\Gamma(1.5)} = 2.5303$$

$$k_1 = l_1.c_1 \left(\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} + 1 \right) = 0.1939$$
$$k_2 = l_2.c_2 \left(\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} + 1 \right) = 5.3854 \times 10^{-5}$$
$$K = \max(k_1, k_2) = k_1 = 0.1939.$$

Donc, l'hypothèse $(H)_3$ *est satisfaite.*

Remarque : *Nous pouvons utiliser le logiciel ' MATLAB ' pour faire le calcul. Par exemple, on calcule* (l_1) *comme suit :*

$$>> gamma\,(2.5)\,/gamma\,(2) + 1/gamma\,(1.5).$$

On a

$$\frac{l_1 \parallel w_1 \parallel_1 + l_2 \parallel w_2 \parallel_1}{1-K} = \frac{2.5303 \times 0.4597}{1-0.1939} = 1.4430\ .$$

Si on prend $R = 2$*, on a*

$$R \geq \frac{l_1 \parallel w_1 \parallel_1 + l_2 \parallel w_2 \parallel_1}{1-K}\ .$$

Alors, d'après le théorème 1.3.2, Nous concluons que l'opérateur $T : B_2 \to B_2$ *est complètement continu, donc le système 3.5 admet au moins une solution dans* $[0,1]$.

Exemple 3.4.2. ***(Via Banach)***

On considère le système différentiel fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_0^{2.5}x(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+728}} \arctan\left(y(t) + {}^c D_0^{0.5} y(t)\right); \\ {}^cD_0^{2.7}y(t) = \frac{\exp^{-t}}{10^5+\exp^t} \left(x(t) + {}^c D_0^{0.5} x(t)\right); \\ x(0) = x(1) = 0; \\ y(0) = y(1) = 0; \\ x''(0) = y''(0) = 0; \end{cases} \tag{3.6}$$

avec

$$f(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{t^2+728}} \arctan(x+y);$$
$$g(t,x,y) = \frac{\exp^{-t}}{10^5+\exp^t}(x+y);$$

et

$$\alpha = 2.5;\ \beta = 2.7;\ c_1 = \frac{1}{\sqrt{728}};\ c_2 = 10^{-5};\ \gamma = 0.5\ .$$

En utilisant toutes les données fournis de notre problème 3.6, on obtient

$$|f(t,x_1(t),y_1(t)) - f(t,x_2(t),y_2(t))| \le \tfrac{1}{\sqrt{728}}\left(|x_1(t)-x_2(t)| + |y_1(t)-y_2(t)|\right).$$

$$|g(t,x_1(t),y_1(t)) - g(t,x_2(t),y_2(t))| \le 10^{-5}\left(|x_1(t)-x_2(t)| + |y_1(t)-y_2(t)|\right).$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0,1]$, les hypothèses $(H')_1$ et $(H')_2$ sont satisfaites.

avec

$$l_1 = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} = \frac{\Gamma(2.5)}{\Gamma(2)} + \frac{1}{\Gamma(1.5)} = 2.4577\ .$$

$$l_2 = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} = \frac{\Gamma(2.7)}{\Gamma(2.2)} + \frac{1}{\Gamma(1.5)} = 2.5303$$

$$\begin{aligned} k_1 &= l_1.c_1 \left(\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} + 1 \right) = 0.1939 \\ k_2 &= l_2.c_2 \left(\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} + 1 \right) = 5.3854 \times 10^{-5} \\ K &= \max(k_1, k_2) = k_1 = 0.1939 < 1 \ . \end{aligned}$$

Donc : l'hypothèse (H')$_3$ est satisfaite.

Alors, d'après le théorème 1.3.1, nous concluons que l'opérateur T est une contraction, donc le système 3.6 admet une solution unique dans $[0, 1]$.

Conclusion

L'apport de notre travail consiste principalement en un point qui est le suivant :

L'étude d'un système des équations différentielles fractionnaires avec des conditions aux limites dans un espace de Banach dérivé. Nous avons pu donner une représentation intégrale de notre problème qui nous a permis de transformer celui-ci en un problème du point fixe. Les théorèmes du point fixe de Schauder et Banach furent la clé de l'analyse de notre problème.
Les exemples numériques confirment les résultats obtenus.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, (1975).

[2] D. Boucenna, A. Chidouh, and D.F.M. Torres, Existence results for a multipoint fractional boundary value problem in the fractional derivative Banach space, Axioms 11 (2022), no. 6, 295.

[3] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Universitext, Springer : NewYork, NY, USA (2011).

[4] L. Debnath, Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 54, (2003) 3413-3442.

[5] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis. Springer-Verlag, New York, (1985).

[6] K. Diethelm, and A.D. Freed, On the Solution of Nonlinear Fractional-Order Differential Equations Used in the Modelling of Viscoplasticity. In : F. Keil, W. Mackens , H. Voss, and J. Werther, Eds., Scientific Computing in Chemical Engineering II : Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties, Springer, Berlin, (1999) 217-224.

[7] G.J. Fix, J.P. Roop, Least squares finite-element solution of a fractional order two-point boundary value problem, Comput.Math. Appl. 48 (2004) 1017–1033.

[8] L. Gaul, L. Klein, P and S. Kempfle , Damping description involving fractional operators, Mech.Systems Signal Processing .5, (1991), 81-88.

[9] W.G. Glockle, T.F. and Nonnenmacher, A Fractional Calculus Approach to Self-Similar Protein Dynamics. Biophysical Journal, 68, (1995) 46-53.

[10] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory. Springer, New York (2003) .

[11] D. Guo and V. Lakshmikantham, Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, New York, (1988).

[12] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific Publishing Company, Singapore, (2000) 87-130.

[13] F. Jiao and Y. Zhou, Existence of solutions for a class of fractional boundary value problems via critical point theory, Comput. Math. Appl. 62 , (2011) 1181–1199.

[14] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Vol 204. Elsevier Science B.V, Amsterdam , (2006).

[15] F. Mainardi, "Fractional Calculus : Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics," In : A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds., Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer, New York, (1997) pp. 291-348.

[16] N. Nyamoradi and Rodriguez-López, Rozana, On boundary value problems for impulsive fractional differential equations, Appl. Math. Comput. 271 , (2015) 874–892.

[17] I. Podlubny, Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Vol. 198, Academic Press, Mathematics in Science and Engineering, 366 (1998).

[18] Y. Rossikhin, M.V.Shitikova, Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids, Appl. Mech. Rev.50 (1) (1997) 15–67.

[19] J. Sabatier, O.P. Agrawal, and J.A.T. Machado, Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering.

Springer, Dordrecht, (2007).

[20] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev , Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon, (1993).

[21] C.C. Tseng, Design of fractional order digital FIR differentiators, IEEE Signal Processing Letters,vol 8, (2001) 77-79.