
Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dr Hanène BOUSSAHA pour m'avoir proposé le sujet de ce travail et accepté la direction de mon mémoire. Pour l'honneur qu'elles m'ont fait en acceptant de rapporter sur ce manu script.

Je remercie également Dr Halima MECHRI pour sa participation au jury de ce mémoire, et Dr Allaoua MEHRI pour en avoir accepté la présidence.

Mes remerciements s'adressent également à mes parents, mes frères, mes soeurs pour l'appui moral qu'ils m'ont témoigné à qui je souhaite une vie pleine de bonheur, de santé et de prospérité.

Enfin, je remercier tout les collègues du département mathématiques .

Résumé

La méthode de décomposition de domaine qui est définie comme une méthode itérative, résout des sous problèmes différentielle d'une manière alternée sur des sous domaines avec des conditions aux limites de type Robin sur les interfaces. Il y a deux méthodes de décomposition avec et sans recouvrement.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de la convergence de ces deux idées de décomposition du point de vue théorique et numérique on donne une idée qui facilite l'application de la première méthode aux problèmes de discrétisation .

Mots-clés: conditions aux limites de type Robin, méthode de décomposition de domaine, recouvrement, les interfaces, discrétisation .

Abstract

The domain decomposition method which is considered as an iterative method to solve subdifferential problems in an alternating way uses Robin boundary conditions on the interfaces. There are two methods of decomposition : with or without overlap.

In this work, we are interested in the study of the convergence of these two ideas from a theoretical and numerical point of views and give an idea which facilitates the application of the first method in the discretization of differential problems .

Key words: Robin boundary value problems, the domain decomposition, overlap, interfaces, discretization .

Notations

Les principales notations introduites dans cette thèse sont rassemblées dans cette nomenclature.

EDP : Une équation aux dérivées partielles.

MAS : La méthode alternée de Schwarz.

MPS : La méthode parallèle de Schwarz.

MDDGR : La méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement.

MEF : La méthode des éléments finis.

Ω : Un ouvert borné dans \mathbb{R}^N .

$\partial\Omega$: La frontière de Ω .

Ω_i : Un sous-domaine de Ω ($i \in \mathbb{N}$).

$\partial\Omega_i$: La frontière de Ω_i ($i \in \mathbb{N}$).

Δu : Laplacien de $u = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

∇u : désigne le gradient de u i.e $\overrightarrow{\text{grad}} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: le produit scalaire dans l'espace euclidien \mathbb{R}^N .

n : vecteur normal extérieur unitaire.

$\frac{\partial u}{\partial n}$: la dérivée normale extérieure par rapport à u .

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ multi indice.

$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$, avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ dérivée partielle d'ordre α .

$C^k(\Omega)$: espace des fonctions k fois continues (les dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues).

$D(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et à support compact.

$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega), 1 \leq p < \infty\}$.

$W^{k,p}(\Omega)$ espace de Sobolev d'ordre k dans $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$.

λ : paramètre d'accélération.

τ_h : maillage de Ω .

t_k : élément du maillage.

h_k : diamètre de t_k i.e la distance maximum entre deux points de t_k .

h : pas du maillage maximum des diamètres $h_k, t_k \in \tau_h$.

H : le diamètre de chaque Ω_i .

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires et Notions de Bases	3
1.1 Espaces Fonctionnelles	3
1.2 Espaces de Sobolev	4
1.2.1 Espace de distribution	4
1.2.2 Trace dans un espace de Sobolev	6
1.2.3 Les espaces $H^s(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$, pour $s \in \mathbb{R}$	7
1.2.4 Classification des EDPs (E.D.P. linéaires du second ordre)	9
1.2.5 Position du problème et Formulation Variationnelle	9
1.3 Principe de la méthode des éléments finis (MEF)	10
1.3.1 Espace conforme et non conforme	11
2 Méthode de décomposition de domaine avec recouvrement (de Schwarz)	
et sans recouvrement (avec interface)	12
2.1 Méthode de décomposition de domaine avec recouvrement (de Schwarz) . .	13
2.1.1 Description de la méthode alternée de Schwarz (MAS) ou l'alternative de Schwarz	13
2.1.2 L'approche variationnelle de P.L. Lions [10] du MAS	15
2.2 Méthode de décomposition de domaine sans recouvrement (avec interface):	18
2.2.1 Présentation de la méthode	18

2.2.2	Analyse de la convergence de la méthode dans le cas continu	20
2.2.3	Amélioration de la convergence de la méthode de Lions (Deng [5])	25
2.2.4	La convergence de cette méthode dans le cas discret	29
3	Amélioration de la méthode de décomposition de domaine avec recouvrement (MDDAR)	35
3.1	Méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement (MDDGR) dans le cas continu	36
3.1.1	Description de la MDDGR	36
3.1.2	Etude de la convergence dans le cas continu	38
3.2	Méthode de décomposition de domaine avec recouvrement (MDDAR) dans le cas discret	45
3.2.1	Position du problème approché et formulation variationnelle	45
3.2.2	Etude de la convergence de la MDDAR (cas discret)	46
3.3	Application numérique	56
	Bibliographie	58

Introduction

Jusqu'à récemment, il était possible de se contenter de l'augmentation de la puissance des processeurs pour améliorer les performances des simulations numériques. Maintenant, avec les nouvelles architectures matérielles, le développeur doit utiliser des algorithmes parallèles. Les super-calculateurs offrent de très larges possibilités, mais pour pouvoir les utiliser on doit mettre au point des algorithmes parallèles adaptés à la mémoire distribuée. Dans l'optique de la réalisation de calculs de très grande taille en des temps les plus courts possibles.

Pour ces raisons, les numériciens sont invités aussi à développer des algorithmes (parallèles) s'adaptant à ce type de nouveaux calculateurs massivement parallèles. Les algorithmes doivent privilégier l'accès simultané à plusieurs processeurs et aussi à plus de ressources mémoires. La plupart des algorithmes de décomposition de domaine qui sont basés sur les méthodes de décomposition de domaines et compatibles avec ces architectures. Idéalement, les meilleures procédures de résolution des EDP à grande échelle par des techniques de parallélisations par décomposition de domaine.

D'autre part, les méthodes de décomposition de domaine sont basées sur le remplacement de la résolution d'une EDP posée sur un domaine Ω potentiellement gros et compliqué par une succession de résolutions de la même EDP sur des sous-domaines de Ω , notés Ω_i , supposément plus simples, plus petits, ...etc. Evidemment, ceci ne peut se faire tout à fait aisément et il s'agit de procéder à des résolutions itératives sur les sous-domaines, choisies de telle sorte que la solution exacte du problème complet soit obtenue la convergence.

Historiquement ces méthodes ont été introduites pour la première fois par Herman Amandus Schwarz [17] dans le but de prouver d'un point de vue théorique l'existence de solutions au problème de Dirichlet sur des domaines plus complexes que ceux pour lesquels un calcul explicite est possible (disque, carré, ...).

Aujourd'hui, ces méthodes de décomposition (avec ou sans recouvrement) sont plutôt utilisées à des fins numériques (ou bien sur le avant discrétisation, ou bien directement sur le problème discrétisé, problème continu voire même directement sur la matrice du problème) afin d'accélérer la résolution numérique des problèmes, ou même de permettre un calcul parallèle des solutions, on cite à titre exemple les travaux de **Deng Q**[5]-[6], **Qin et Al** [14], **Guo W. and Hou L.S** [9].

Le travail présenté dans ce mémoire ne se limite pas à un cadre purement théorique mais aussi à un cadre numérique vu que les simulations numériques sont devenues un puissant moyen d'investigation qui tend à prendre une place croissante à côté de l'approche expérimentale dans les sciences et les techniques. On va présenter, par suite, l'étude numérique pour calculer une approximation d'une solution de type elliptique en présentant les simulations correspondantes. Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'étude de quelques définitions, des propriétés, des différents espaces, et les théorèmes qui nous avons utilisés dans ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous utilisons la méthode alternée de Schwarz (MDDAR) dans [10] et la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement dans [11] sur un problème de Dirichlet pour résoudre l'équation de Laplace, en ajoutant des conditions de raccord du type Dirichlet et du type Robin avec l'étude de la convergence.

L'objectif du troisième chapitre, est d'obtenir un résultat théorique et une approximation numérique de la solution de problème posé avec l'utilisation de la méthode de décomposition de domaines avec recouvrement. On démontre la convergence à travers des estimations d'énergies et des inégalités de Sobolev dans le cas continu et on trouve que le taux de convergence dans l'ordre optimal $A = 1 - O\left(\frac{h^{\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H}\right)^2$ dans le cas discret. et On termine par des tests numériques.

Préliminaires et Notions de Bases

Nous exposons dans le premier chapitre quelques espaces fonctionnels utiles et des notations nécessaires. Pour plus de détails concernant ces espaces, voir Adams [1], Brézis [3]. Après, on donne une classification des EDPs et on passe à la formulation variationnelle d'un problème modèle. Ensuite nous rappelons des principes et généralités relatifs aux éléments finis.

1.1 Espaces Fonctionnelles

Les espaces $L^p(\Omega)$ jouent un rôle principal dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.1.1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N de frontière $\partial\Omega = \Gamma$, C^1 par morceaux,

$N \geq 1$, on note par $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, l'espace des fonctions mesurables v vérifiant

$$\int_{\Omega} |v(x)|^p dx < \infty, \quad 1 \leq p < \infty$$

et pour $p = \infty$,

$$\text{ess sup } \{|v(x)|, x \in \Omega\} < \infty.$$

Ces espaces sont munis de la norme usuelle suivante

$$\|v\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty,$$

et pour $p = \infty$

$$\|v\|_{p,\Omega} = \text{ess sup} \{|v(x)|, x \in \Omega\}.$$

L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables sur Ω à carré intégrable, tel que

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \text{tq} \left(\int_{\Omega} f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} uv dx.$$

1.2 Espaces de Sobolev

1.2.1 Espace de distribution

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , on désigne par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et à support compact. Si $\varphi \in D(\Omega)$ et $\alpha \in N^n, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$; alors :

$$D^{\alpha} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1, \dots, \partial x_n}; |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

On munit $D(\Omega)$ d'une pseudo-topologie (on définit toutes les suites converge dans $D(\Omega)$). Soit (φ_n) une suite de $D(\Omega)$, on dit que (φ_n) converge vers φ dans $D(\Omega)$ si :

- le support de (φ_n) reste compacte (dans k compacte de Ω), indépendamment en x .
- $\forall \alpha \in N^n, D^{\alpha}(\varphi_n)$ est uniformément continue sur k , convergent sur k .

On peut donc introduire $D'(\Omega)$ (l'espace des distribution sur Ω). C'est l'espace de tout les applications linéaires et continues définies de $D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, k un entier non-négatif et $1 \leq p \leq \infty$ est l'espace des fonctions $v \in L^p(\Omega)$ telle que toutes les dérivées au sens des distributions de v , d'ordre k , appartiennent à $L^p(\Omega)$*

Pour tout $p, 1 \leq p \leq \infty$, on a $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v(x)\|_{p,\Omega}^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et la semi-norme est définie par

$$|v|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v(x)\|_{p,\Omega}^p dx \right)$$

On note $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, l'espace de Sobolev défini par

$$H^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), D^\alpha v \in L^2(\Omega) \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq k\}$$

où D^α est pris au sens des distributions. $H^k(\Omega)$ muni de la norme suivant

$$\|v\|_{k,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

Corollaire 1.2.1 *Si Ω est borné, la semi norme*

$$|v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ (l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ à trace nulle sur $\partial\Omega$) équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$, $\|v\|_{1,\Omega}$.

Définition 1.2.2 On appelle espace de sobolev d'ordre 1 l'espace définies par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega); tq : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$$

ou Ω :est un ouvert bornée de \mathbb{R}^n ; et $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: est la dérivée au sens de distribution.

Espaces des fonctions carré intégrables . $H^1(\Omega)$ est munit du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{1, \Omega} = \int_{\Omega} \left(u \cdot v + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

$u, v \in H^1(\Omega)$ et de la norme suivante :

$$\|u\|_{1, \Omega} = \|u\|_{H^1(\Omega)} = \langle u, u \rangle_{1, \Omega}^{\frac{1}{2}} .$$

1.2.2 Trace dans un espace de Sobolev

Soit une fonction définie dans un ouvert borné Ω , on va définir sa valeur au bord de Ω . Pour les fonctions $u \in L^2(\Omega)$, cette notation n'a pas de sens. Mais, si u est plus régulière, donc on peut lancer rigoureusement le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 Si Ω est 1-régulier (ou Γ est C^1 par morceaux) l'application

$$\begin{aligned} \gamma_0 & : D(\bar{\Omega}) \rightarrow C^0(\Gamma) \\ v & \rightarrow \gamma_0 v = v|_{\Gamma} \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, il existe une constante C telle que: $\|\gamma_0 v\|_{0, \Gamma} \leq C \|v\|_{1, \Omega}$.

Application du théorème: Lorsque Ω est 1-régulier (où Γ est C^1 par morceaux), alors

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = v|_{\Gamma} = 0\},$$

noyau de $H^1(\Omega)$.

On a alors le resultat fondamental : '

Théorème 1.2.2 *Représentation de Riesz – Soit F une forme linéaire continue définie sur un espace de Hilbert V . Il existe un unique $u \in V$ tel que*

$$\langle u, v \rangle_V = F(v), \forall v \in V.$$

Définition 1.2.3 *Le sous espace $H_0^k(\Omega)$ de $H^k(\Omega)$ est défini par :*

$$H_0^k(\Omega) = \{v \in H^k(\Omega) : \Lambda \left(\frac{\partial^i v}{\partial n_i} \right) = 0 \forall i = \overline{0, k-1}\},$$

où Λ est l'opérateur trace et $\frac{\partial^i}{\partial n_i}$ est la dérivée d'ordre i dans la direction de la normale extérieure à Ω .

L'inégalité ci-dessous, dite inégalité de Poincaré, joue un rôle important dans l'étude des problèmes variationnels.

Théorème 1.2.3 (Inégalité de Poincaré) *Supposant que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$*

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) |v|_{1,\Omega}.$$

1.2.3 Les espaces $H^s(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$, pour $s \in \mathbb{R}$

Définition 1.2.4 *Pour $s > 0$ on définit*

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ x \in L^2(\mathbb{R}^N), (1 + |\zeta|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{x} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

$$\|v\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\zeta|^2)^s |\widehat{v}(\zeta)|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}},$$

pour $s < 0$ on pose :

$$H^s(\mathbb{R}^N) = (H^{-s}(\mathbb{R}^N))'.$$

Définition 1.2.5 On définit l'espace $H^s(\Omega)$ comme l'espace des restrictions à Ω des fonctions $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$.

$$\begin{aligned} H^s(\Gamma) & : \gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) & = \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)' \\ \gamma & : H^m(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ v & \rightarrow (\gamma_0 v, \gamma_1 v, \dots, \gamma_{m-1} v). \end{aligned}$$

En particulier $m = 2$

$$\begin{aligned} \gamma(H^2(\Omega)) & = H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \\ & = (\gamma_0 v, \gamma_1 v), \gamma_i v = \frac{\partial^i v}{\partial n_i}. \end{aligned}$$

Soit A une forme bilinéaire de $V \times V$ dans \mathbb{R} , où V est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et F une fonctionnelle linéaire continue de $V \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 1.2.4 (Lemme de Lax-Milgram) On suppose que la forme bilinéaire A est continue i.e $\exists \alpha > 0 : |A(u, v)| \leq \alpha \|u\|_V \|v\|_V, \forall u, v \in V$,

et coercive (V - elliptique), i.e

$$\exists \alpha > 0 : A(u, v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

Et F linéaire continue, alors le problème variationnel $A(u, v) = F(v), \forall v \in V$, admet une solution unique $u \in V$.

Proposition 1.2.1 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , alors $\forall (v_1, v_2) \in (H^1(\Omega))^2$, l'inégalité de Cauchy Schwarz vérifie

$$|(v_1, v_2)| \leq \|v_1\|_{0,\Omega} \|v_2\|_{0,\Omega}.$$

1.2.4 Classification des EDPs (E.D.P. linéaires du second ordre)

Définition 1.2.6 On appelle E.D.P. linéaire d'ordre inférieur ou égal à 2 dans un domaine $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et d'inconnue

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

une équation du type

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c_i(x)u(x) = f(x)$$

On peut difficilement étudier les équations aux dérivées partielles (E.D.P.) dans une totale généralité comme on peut le faire pour les équations différentielles ordinaires (E.D.O.) le domaine étant trop vaste. Heureusement, les E.D.P. les plus intéressantes proviennent de la modélisation d'un nombre restreint de phénomènes.

Le type des équations préciser d'après le déterminant Δ , donc si

$$\Delta > 0, \text{ Hyperbolique}$$

$$\Delta = 0, \text{ Parabolique}$$

$$\Delta < 0, \text{ Elliptique}$$

On peut dire que les problèmes elliptiques vont concerner les problèmes stationnaires tels que ceux de la mécanique l'électrostatique... On s'intéresse dans notre travail à étudier ce genre des équations.

1.2.5 Position du problème et Formulation Variationnelle

On considère le problème modèle suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega = \Gamma \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où Ω est un ouvert borné, régulier et connexe de \mathbb{R}^N . Notons par $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière du domaine Ω et f étant une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$.

La formulation variationnelle du problème (1.2.1) est donnée par:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ solution de} \\ a(u, v) = f(v)_\Omega, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \text{ et } f(v)_\Omega = \int_{\Omega} f v dx. \quad (1.2.3)$$

On vérifie facilement que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et que la forme linéaire $f(v)_\Omega$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$. Par suite, par application du théorème (1.2.4) (Lax – Milgram), on déduit que le problème (1.2.2) admet une solution unique u dans $H_0^1(\Omega)$ qui est la solution faible du problème (1.2.1).

1.3 Principe de la méthode des éléments finis (MEF)

La MEF se propose de discrétiser le problème considéré. La discrétisation intervient à plusieurs niveaux :

- **Discrétisation** : il est nécessaire de disposer d'une description du domaine Ω sur lequel on souhaite travailler. Cette description va se faire en l'approximant par un maillage, qui sera constitué d'éléments finis.

- **Interpolation** : il est ensuite nécessaire de disposer d'une manière de représenter la ou les fonctions inconnues. Ce que se propose de faire la MEF, c'est d'approcher ces fonctions par des fonctions plus simples (disons polynômiales de degré ≤ 3) définies sur chacun des éléments du maillage (la fonction est approchée par des bouts de fonctions qui, elles, ne sont définies chacune que sur un seul élément).

- **Approximation** : selon le type d'approximation, on remplace l'espace $H_0^1(\Omega)$ de dimension infinie, par des sous espaces V^h de dimension finie.

De manière classique, on notera τ_h le maillage de Ω considéré par exemple, si les éléments finis triangulaires sont utilisés dans \mathbb{R}^2 , alors le maillage construit à l'aide des triangles fermés $t_k \in \tau_h$. On note h_k le diamètre de l'élément t_k , i.e. le maximum des distances entre deux points de t_k .

On a donc évidemment $h_k \leq h, \forall t_k \in \tau_h$, puisque par définition $h = \max h_k$.

1.3.1 Espace conforme et non conforme

Type d'approximation	Espaces	problème approché
conforme	V^h inclus dans $H_0^1(\Omega)$	$u^h \in V^h \setminus a(u^h, v^h) = f(v^h)_\Omega$ $\forall v^h \in V^h$
non conforme	V^h n'est pas inclus dans $H_0^1(\Omega)$	$u^h \in V^h \setminus a_h(u^h, v^h) = f_h(v^h)_\Omega$ $\forall v^h \in V^h$

décomposition de**domaine avec****recouvrement (de****Schwarz) et sans****recouvrement (avec****interface)**

Ce chapitre porte sur les méthodes de décompositions de domaines avec et sans recouvrement. On va présenter la première méthode (avec recouvrement) qui a été proposée par Schwarz [17] pour démontrer l'unicité de la solution des problèmes elliptiques sur des domaines complexes et on donne l'étude analytique de cette dernière, en basant sur l'article de Lions [10] sur plusieurs sous domaines. Puis, on donne une amélioration de cette méthode qui a été introduite par Deng [5]-[6]. Après on fait la discrétisation par

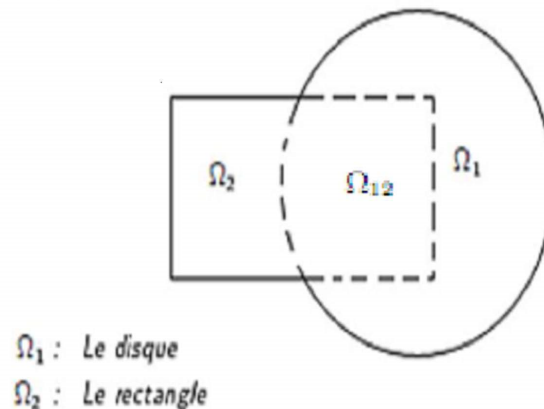
éléments finis et on trouve $(1 - Ch^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}})$, le taux de convergence qui a été obtenu par Qin et Al [14]-[15] avec l'utilisation d'une décomposition sans recouvrement.

2.1 Méthode de décomposition de domaine avec recouvrement (de Schwarz)

Le domaine global est divisé en sous domaines avec recouvrement et les problèmes sont résolus sur chaque sous-domaine. Le couplage entre les solutions des différents sous-domaines est assuré par la région commune dite "le recouvrement".

2.1.1 Description de la méthode alternée de Schwarz (MAS) ou l'alternative de Schwarz

Figure : Exemple de décomposition avec recouvrement



On considère cette méthode comme une méthode itérative. Nous utilisons pour résoudre des sous problèmes différentielles d'une manière alternée sur des sous domaines qui se recouvrent. Ces sous problèmes sont couplés par l'échange des valeurs des approximations sur les frontières artificielles.

Pour appliquer la méthode alternée de Schwarz : On considère le cas simple de décomposition de Ω en l'union de deux sous -domaines Ω_1 et Ω_2 (voir figure 1.3.1) telle que:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ et } \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$$

on voit que le domaine Ω est divisé en deux sous-domaines (Ω_1, Ω_2) , avec une partie commune appelée recouvrement qui est exprimée par

$$\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

On définit aussi les interfaces entre les sous-domaines par

$$\gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \Omega_j \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j$$

Théorème 2.1.1 *Le problème 1.2.2 est équivalent au problème suivant:*

$$\begin{cases} a(u_i, v) = f(v)_{\Omega_i}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_i) \quad (i = 1, 2) \\ u_i|_{\gamma_{ij}} = u_j|_{\gamma_{ij}} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2 \\ u_i|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} = 0, \quad \partial\Omega \cap \partial\Omega_i = \Gamma_i, \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Preuve. Soit $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$ et v son prolongement par 0 à Ω , on a:

$$a(u, v) = a(u_i, v_i) \text{ et } f(v)_\Omega = f(v_i)_{\Omega_i}$$

et comme

$$a(u, v) = f(v)_\Omega$$

alors

$$a(u_i, v_i) = f(v_i)_{\Omega_i}, \quad i = 1, 2.$$

Réciproquement, montrons que si u_1 et u_2 sont solutions du système (2.1.1), on a:

$$u = \begin{cases} u_1 \text{ sur } \Omega_1 \\ u_2 \text{ sur } \Omega_2 \end{cases}$$

est solution de (1.2.2).

En effet, soit $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe $(v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2)$ telle que $v = v_1 + v_2$

d'où

$$a(u, v) = a(u, v_1) + a(u, v_2) = a(u_1, v_1) + a(u_2, v_2) = f(v_1)_{\Omega_1} + f(v_2)_{\Omega_2}$$

Or

$$\begin{aligned} f(v_1)_{\Omega_1} + f(v_2)_{\Omega_2} &= \int_{\Omega_1} f v_1 dx + \int_{\Omega_2} f v_2 dx = \int_{\Omega} f v_1 dx + \int_{\Omega} f v_2 dx \\ &= \int_{\Omega} f(v_1 + v_2) dx = \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

donc, on a :

$$a(u, v) = f(v)_{\Omega}$$

■

2.1.2 L'approche variationnelle de P.L. Lions [10] du MAS

Etant donné une partition de Ω , par exemple de la forme donnée dans la figure (1.3.1). Soit u^0 une initialisation dans $H_0^1(\Omega)$, l'algorithme consiste à construire les deux sous-suites $(u^{2n+1})_{n \geq 0}, (u^{2n})_{n \geq 1}$ solutions respectives de la façon suivante :

Pour tout $n \geq 0$, effectuer de façon successive :

$$\begin{cases} -\Delta u^{2n+1} = f \text{ sur } \Omega_1 \\ u^{2n+1} = u^{2n} \text{ sur } \gamma_{12} \\ u^{2n+1} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u^{2n} = f \text{ sur } \Omega_2 \\ u^{2n} = u^{2n-1} \text{ sur } \gamma_{21} \\ u^{2n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

où $\Gamma_i = \Gamma \cap \partial\Omega_i, i = 1, 2$.

Commençons par quelques remarques.

- Si $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$, son prolongement par 0 à tout Ω que l'on note encore v_i vérifie $v_i \in H_0^1(\Omega)$. On identifie donc $H_0^1(\Omega_i)$ à un sous-espace fermé de $H_0^1(\Omega)$.

Les problèmes (2.1.2) et (??) ont les formulations variationnelles respectives suivantes:

$$\begin{aligned} u^{2n+1} &\in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) : a(u^{2n+1}, v_1) = f(v_1)_{\Omega_1} \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega_1); u^{2n+1} = u^{2n} \text{ sur } \gamma_{12} \\ u^{2n} &\in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_2) : a(u^{2n}, v_2) = f(v_2)_{\Omega_2} \quad \forall v_2 \in H_0^1(\Omega_2); u^{2n} = u^{2n-1} \text{ sur } \gamma_{21} \end{aligned}$$

où

$$H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i) = \{v \in H^1(\Omega_i) / v = 0 \text{ sur } \Gamma_i, 1 \leq i \leq m\} \quad (2.1.3)$$

Par construction des deux étapes (2.1.2) et (??), on peut conventionnellement prolonger u^{2n+1} et u^{2n} à tout Ω par les formules suivantes

$$\begin{aligned} u^{2n+1} &= \begin{cases} u^{2n+1} & \text{dans } \Omega_1 \\ u^{2n} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases} \\ u^{2n} &= \begin{cases} u^{2n} & \text{dans } \Omega_2 \\ u^{2n-1} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Par définition, ces prolongements sont bien dans $H^1(\Omega)$ qui sont équivalentes à:

$$a(u^{2n+1} - u, v_1) = 0 \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega_1); u^{2n+1} - u^{2n} \in H_0^1(\Omega_1). \quad (2.1.4)$$

$$a(u^{2n} - u, v_2) = 0 \quad \forall v_2 \in H_0^1(\Omega_2); u^{2n} - u^{2n-1} \in H_0^1(\Omega_2). \quad (2.1.5)$$

On définit $P_{H_0^1(\Omega_i)}$, $i = 1, 2$ l'opérateur de projection dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ sur le sous-espace fermé $H_0^1(\Omega_i)$ et $P_{(H_0^1(\Omega_i))^\perp}$ l'opérateur de projection sur l'orthogonal de ce sous-espace.

Proposition 2.1.1 *Les suites $(u^{2n+1})_{n \geq 0}$, $(u^{2n})_{n \geq 0}$ solutions du problème (2.1.2)- (??) vérifient*

$$u^{2n+1} - u^{2n} = P_{H_0^1(\Omega_1)}(u - u^{2n}) \quad \forall n \geq 0, \quad (2.1.6)$$

$$u^{2n} - u^{2n-1} = P_{H_0^1(\Omega_2)}(u - u^{2n-1}) \quad \forall n \geq 1. \quad (2.1.7)$$

Preuve. voire l'article de **lions P.L** [10] et [20] ■

Théorème 2.1.2 Si $H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega_1) + H_0^1(\Omega_2)$ ou $H_0^1(\Omega) = \overline{H_0^1(\Omega_1) + H_0^1(\Omega_2)}$ alors la suite (v_n) converge vers 0 et de plus il existe k appartenant à l'intervalle $[0, 1)$ telle que:

$$\begin{cases} \left\| P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} \right\| \leq k \\ |v_{n+1}| \leq k^n |v_0|, \forall n \geq 0 \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Preuve. voire l'article de **lions P.L** [10] et [20] ■

Lemme 2.1.1 Il existe une constante C positive telle que:

$$|v_n| \leq C \left\{ \left| P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2 + \left| P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} v \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.9)$$

Remarque 2.1.1 Notons finalement que la convergence de la **MAS** est géométrique et on peut l'appliquer à la résolution des problèmes avec des conditions aux limites de type Neumann, de Robin ou bien un mélange de conditions de Dirichlet, Neumann et Robin. Il est important de noter que l'étude de la convergence de la MAS dépend énormément de l'EDP à résoudre, plus particulièrement de l'opérateur et des conditions aux limites.

La difficulté rencontrée dans la **MAS**, est le fait qu'il peut avoir plus de deux sous-domaines qui s'intersectés. Pour éviter la difficulté et la lenteur de l'alternative dans ce cas et améliorer la convergence de la méthode de **P.L Lions** [11] on va proposer une nouvelle variante qui va accélérer la convergence et rendre cet algorithme parallèle.

2.2 Méthode de décomposition de domaine sans recouvrement (avec interface):

On introduire la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement qui consiste à décomposer le domaine initial en deux ou plusieurs sous domaines à intersection vide voir (Figure (2.1.1)). Puis on considère le cas continu issu du problème modèle (1.2.1), en se basant sur l'article de **P.L. Lions** [11] qu'il utilise la méthode parallèle de Schwarz (**MPS**). Ensuite on donne une amélioration de la méthode avec un opérateur général L . L'idée de cette section a été introduire par **Deng** [5]-[6]. On passe après à la discrétisation par éléments finis. La convergence dans le cas discret a été démontré par **Qin et al.** [14]-[15].

2.2.1 Présentation de la méthode

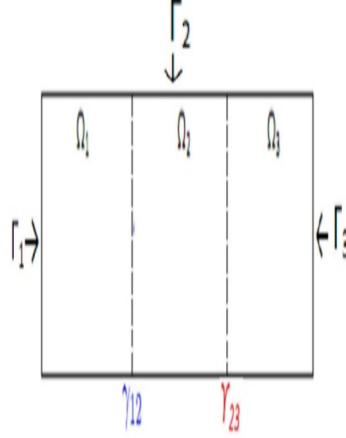
soit Ω un nombre fini m (≥ 2) décomposée de sous _domaines $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, on suppose que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m \cup \sum, \text{ tel que } \sum = \bigcup_{1 \leq i \neq j \leq m} \gamma_{ij}$$

où Ω_i sont des ensembles ouverts bornés disjoints dans \mathbb{R}^N , γ_{ij} est l'interface entre Ω_i et Ω_j i.e $\gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ (voir figure 2.1.1) et pour chaque Ω_i , on a:

$$\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j \cap \overline{\Omega}_k = \emptyset, \forall 1 \leq i \neq j \neq k \leq m$$

Décomposition sans recouvrement



Lions est venu proposer une version parallèle de l'algorithme, il utilise des conditions de type Robin sur les interfaces, qui pourrait être utilisée efficacement sur des machines à multiprocesseurs.

On considère le problème modèle (1.2.1) défini sur Ω . Soit $(u_i^0)_{1 \leq i \leq m}$ les données initiales dans $H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$. On construit une suite $(u_i^n)_{1 \leq i \leq m}$ solution $\forall n \geq 0$ du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_i^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_i, u_i^{n+1} \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i) \\ \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n+1} = \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_j^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i. \\ u_i^{n+1} = 0 \text{ sur } \Gamma_i \end{cases} \quad (2.2.1)$$

tel que $\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n+1}$ une condition de type Robin sur les interfaces communs γ_{ij} en tant qu'une condition de transmission, n_{ij} est la normale extérieur unitaire de $\partial\Omega_i$ sur γ_{ij} et $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0, 1 \leq i \neq j \leq m$.

Proposition 2.2.1 [11] *Si on a le problème (2.2.1) alors on peut déduire le problème suivant:*

$$\begin{cases} -\Delta (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) = 0 \text{ dans } \Omega_i, u_i^{n+1} - u_i^{n-1} \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i) \\ \frac{\partial (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})}{\partial n_{ij}} = \lambda_{ij} (2u_j^n - u_i^{n-1} - u_i^{n+1}) \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i. \\ u_i^{n+1} = 0 \text{ sur } \Gamma_i \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Preuve. voire l'article de lions P.L [12] et [20] ■

2.2.2 Analyse de la convergence de la méthode dans le cas continu

La convergence de cette méthode a été obtenue à travers l'utilisation des estimations "d'énergie" délicate et des inégalités de Sobolev. Le résultat principal de convergence est donné par le théorème suivant:

Théorème 2.2.1 [11] *Pour tous $1 \leq i \leq m$, u_i^n converge faiblement vers $u_{|\Omega_i}$ dans $H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ et en particulier $u_{i|\gamma_{ij}}^n$ converge faiblement vers $u_{|\gamma_{ij}}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_{ij})$ pour tout $j \neq i$ quand $n \rightarrow +\infty$. En outre*

$$\frac{1}{2} (u_i^{n+1} + u_i^n)$$

converge vers $u_{|\gamma_{ij}}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_{ij})$ quand $n \rightarrow +\infty$ pour tout $j \neq i$.

A ce stade, on a besoin d'introduire quelques notations:

$$I_1 = \{i \in \{1, \dots, m\} \setminus \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset\} \quad (2.2.3)$$

$$I_2 = \{i \in \{1, \dots, m\} \setminus \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \text{ est une intersection pour certain } j \in I_1\} \quad (2.2.4)$$

Preuve. La preuve est divisée en 03 étapes :

Etape 01:

On multiplie la première équation du problème (2.2.2) par $(u_i^{n+1} - u_i^{n-1})$

$$-\int_{\Omega_i} \Delta (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) dx = 0,$$

Puis, on intègre par partie sur Ω_i et on utilise l'équation deux dans (2.2.2) :

$$\int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) ds = 0$$

2.2. Méthode de décomposition de domaine sans recouvrement (avec interface):

$$\int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} (2u_j^n - u_i^{n-1} - u_i^{n+1}) (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) ds = 0$$

$$\int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} ((u_i^{n+1} - u_j^n) - (u_j^n - u_i^{n-1})) ((u_i^{n+1} - u_j^n) + (u_j^n - u_i^{n-1})) ds = 0$$

pour avoir

$$\int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n+1} - u_j^n|^2 ds$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} |u_j^n - u_i^{n-1}|^2 ds.$$

Pour $1 \leq i \leq m$, en sommant par rapport à n on obtient:

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx$$

$$= \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} (|u_j^n - u_i^{n-1}|^2 - |u_i^{n+1} - u_j^n|^2) ds$$

En sommant jusqu'à M entier positif

$$\sum_{n=1}^M \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx = \sum_{n=1}^M \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} (|u_j^n - u_i^{n-1}|^2 - |u_i^{n+1} - u_j^n|^2) ds$$

$$= \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \left(|u_j^1 - u_i^0|^2 - |u_i^{M+1} - u_j^M|^2 \right).$$

Donc la série est bornée i.e

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx \leq C. \quad (2.2.5)$$

Si $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, d'après (2.2.5) et l'inégalité de Poincaré, on déduit que :

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega_i} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2 dx \leq C, \quad (2.2.6)$$

i.e (2.2.6) est vraie pour $i \in I_1$:

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{i \in I_1} \int_{\Omega_i} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2 dx \leq C, \quad (2.2.7)$$

et d'après (2.2.2) – (2.2.5) et (2.2.7) pour $i \in I_2$ on a

$$\sum_{n \geq 2} \left(\left\| \frac{\partial}{\partial n_{ij}} (u_j^n - u_j^{n-2}) \right\|_{0, \gamma_{ij}}^2 + \lambda_{ij} \|u_j^n - u_j^{n-2}\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \right) \leq C, j \in I_1.$$

d'où

$$\sum_{n \geq 2} \left\| \frac{\partial}{\partial n_{ij}} (u_j^n - u_j^{n-2}) + \lambda_{ij} (u_j^n - u_j^{n-2}) \right\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \leq C, j \in I_1. \quad (2.2.8)$$

D'autre part, d'après l'équation deux dans (2.2.1) on a

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n+1} = \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_j^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (2.2.9)$$

$$\frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n-1} = \frac{\partial u_j^{n-2}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_j^{n-2} \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (2.2.10)$$

après, on fait une soustraction entre (2.2.9) et (2.2.10) et on applique la norme dans $L^2(\gamma_{ij})$, pour avoir

$$\sum_{n \geq 2} \left\| \frac{\partial}{\partial n_{ij}} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) + \lambda_{ij} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \right\|_{0, \gamma_{ij}}^2 = \sum_{n \geq 2} \left\| \frac{\partial}{\partial n_{ij}} (u_j^n - u_j^{n-2}) + \lambda_{ij} (u_j^n - u_j^{n-2}) \right\|_{0, \gamma_{ij}}^2$$

et d'après (2.2.8), on obtient

$$\sum_{n \geq 1} \left\| \frac{\partial}{\partial n_{ij}} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) + \lambda_{ij} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \right\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \leq C, i \in I_2. \quad (2.2.11)$$

Donc, on déduit que

$$\sum_{n \geq 1} \int_{\Omega_i} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2 dx \leq C, i \in I_2.$$

■

On voit également que (2.2.11) – (2.2.5), nous permettent d'énoncer le lemme a-après qui joue le rôle de l'inégalité de **Poincaré** lorsque $i \in I_2$:

Lemme 2.2.1 Soit ω un ouvert, lisse dans \mathbb{R}^N avec γ_0 un ouvert (relatif à $\partial\omega$) qui est un sous ensemble de $\partial\Omega$ et $\lambda > 0$. Alors, il existe une constante positive C tel que

$$\|u\|_{L^2(\omega)} \leq C \left\{ \|\nabla u\|_{L^2(\omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_0)} \right\} \quad (2.2.12)$$

pour tout u satisfaisant

$$-\Delta u = 0 \text{ dans } \omega.$$

Remarque 2.2.1 Pour plus de détails, voir la preuve de ce lemme dans l'article de P.L Lions [11].

Preuve. Maintenant, On applique ce lemme pour $i \in I_2$, on obtient

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2 dx \leq C. \quad (2.2.13)$$

Etape 02:

On multipli la première équation dans (2.2.2) par u_i^{n+1} , on utilise l'équation deux de (2.2.2) et on intègre par partie sur Ω_i pour tout i, n :

$$\int_{\Omega_i} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla u_i^{n+1} dx + \sum_{1 \leq j \neq i \leq m} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1} - 2u_j^n) u_i^{n+1} ds = 0 \quad (2.2.14)$$

On remarque alors qu'on peut écrire:

$$\frac{1}{2} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla u_i^{n+1} = \frac{1}{2} |\nabla u_i^{n+1}|^2 - \frac{1}{2} \nabla u_i^{n-1} \nabla u_i^{n+1} \quad (2.2.15)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1} + u_i^{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 + \frac{1}{2} (\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla u_i^{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u_i^{n-1}|^2 + \frac{1}{2} \nabla u_i^{n-1} \nabla u_i^{n+1} \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

En sommant (2.2.15) et (2.2.17)

$$\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla u_i^{n+1} = \frac{1}{2} |\nabla u_i^{n+1}|^2 + \frac{1}{2} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u_i^{n-1}|^2. \quad (2.2.18)$$

2.2. Méthode de décomposition de domaine sans recouvrement (avec interface):

On fait la même chose pour $(u_i^{n+1} - u_i^{n-1} - 2u_j^n) u_i^{n+1}$, on obtient

$$(u_i^{n+1} - u_i^{n-1} - 2u_j^n) u_i^{n+1} = \frac{1}{2} |u_i^{n+1}|^2 + \frac{1}{2} |u_i^{n-1}|^2 - |u_j^n|^2 + |u_i^{n+1} - u_i^n|^2 \quad (2.2.19)$$

$$- \frac{1}{2} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2.$$

On remplace (2.2.18) et (2.2.19) dans (2.2.14) et en raison de (2.2.13) que pour tout $1 \leq i \leq m$ et $n \geq 0$, on trouve:

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_i^{n+1}|^2 dx + \int_{\partial\Omega_i} |u_i^{n+1}|^2 ds \leq C \quad (2.2.20)$$

et

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n+1} - u_i^n|^2 ds \leq C. \quad (2.2.21)$$

Etape 03 :

On sait que pour une série bornée, la limite de son terme général tend vers 0. Donc, en raison de (2.2.5), (2.2.13), (2.2.21) que $u_i^{n+1} - u_i^{n-1} \rightarrow 0$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_{ij}) \subset L^2(\gamma_{ij})$, pour tout $1 \leq i \neq j \leq m$. L'inégalité (2.2.20) implique immédiatement que $(u_i^n)_n$ est bornée dans $H^1(\Omega_i)$ pour tout i , $1 \leq i \leq m$. En utilisant les propriétés des espaces de **Hilbert**, on peut extraire de toute suite bornée une sous suite $(u_i^{n_k})_{n_k}$ qui converge faiblement vers $u_i \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma_{ij}) \subset L^2(\gamma_{ij})$ et puisque la limite est unique, alors u_i^n aussi converge vers u_i . Ainsi, u_i satisfait 2.2.1, donc on a

$$u_i = u_j \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq i \neq j \leq m,$$

et

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_{ij}} = \frac{\partial u_j}{\partial n_{ij}} \text{ dans } L^2(\gamma_{ij}), \forall 1 \leq i \neq j \leq m,$$

de plus

$$u_i \equiv u|_{\Omega_i}, \forall 1 \leq i \neq j \leq m.$$

Pour le reste de la démonstration voir l'article de P.L Lions [9]. ■

2.2.3 Amélioration de la convergence de la méthode de Lions (Deng [5])

Deng [5] a continué la recherche dans cette direction, il remplace l'opérateur de laplace $-\Delta$ par un opérateur général L . et nous continuons notre recherche sur les propriétés de convergence du procédé itératif (2.2.1) pour la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement. i.e. on généralise le problème (1.2.1) comme suit :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2.22)$$

où $f \in L^2(\Omega)$, et

$$Lu = -\sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha_{kl}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) + \alpha_0(x) u. \quad (2.2.23)$$

$\alpha_0(x) \in L^\infty(\Omega)$ est non négatif, et $\alpha_{kl}(x)$ sont définis symétriques et uniformément positifs c-à-d, il existe une constante $\beta > 0$ telle que :

$$\sum_{k,l} \alpha_{kl}(x) \zeta_k \zeta_l \geq \beta |\zeta|^2, \forall \zeta \in \mathbb{R}^N \text{ sur } \Omega. \quad (2.2.24)$$

La formulation faible associée à (2.2.22) est

$$a(u, v) = f(v)_\Omega, \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.2.25)$$

où

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad (2.2.26)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{k,l} \alpha_{k,l}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_l} + \alpha_0(x) uv \right) dx,$$

$$f(v)_\Omega = \int_{\Omega} f v dx.$$

Maintenant, nous pouvons vérifier que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive et que la forme linéaire $f(v)_\Omega$ est continue et par suite, par application du théorème

(1.2.4) (Lax – Milgram), on déduit que le problème (2.2.25) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ qui est aussi solution du problème (2.2.22) au sens faible.

On utilise toujours la condition de type Robin aux limites et on définit alors le procédé itératif suivant basé sur la décomposition sans recouvrement de domaine comme suit (voir Deng [5]):

$$\begin{cases} Lu_i^n = f & \text{dans } \Omega_i, \\ \frac{\partial u_i^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^n = g_{ij}^n & \text{sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ u_i^n = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (2.2.27)$$

avec $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$ ($1 \leq i \neq j \leq m$) une donnée initiale, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$, la mesure de γ_{ij} est strictement positive, $n_{ij} = (n_{ij}^{(1)}, n_{ij}^{(2)}, \dots, n_{ij}^{(N)})$ est la normale extérieur unitaire de $\partial\Omega_i$ sur γ_{ij} et la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n_{ij}} \in L^2(\gamma_{ij})$ définit par

$$\frac{\partial u}{\partial n_{ij}} = \sum_{k,l} \left(\alpha_{k,l}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) n_{ij}^{(k)}, 1 \leq i \neq j \leq m \quad (2.2.28)$$

Pour améliorer cette méthode, **Deng** [5] a traité le problème de calcul de la dérivée normale à chaque itération dans la méthode proposée par **Lions** [11]. Il a introduit une technique de relaxation pour éviter de calculer les dérivées normales à chaque itération, comme suit :

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} u_j^n - g_{ij}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (2.2.29)$$

Cette nouvelle formulation du problème, nous permet davantage d'appliquer cette méthode aux problèmes de discrétisation.

La formulation faible associée au problème (2.2.27) est

$$a_i(u_i^n, v) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^n v ds = f(v)_{\Omega_i} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^n v ds, \forall v \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.2.30)$$

avec le renouvellement pour $n \geq 0$

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} u_j^n - g_{ij}^n \text{ dans } L^2(\gamma_{ij}) \quad 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (2.2.31)$$

Il découle de l'équation deux dans (2.2.27) et (2.2.29) que :

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n+1} = g_{ij}^{n+1} \quad (2.2.32)$$

$$\begin{aligned} &= 2\lambda_{ij} u_j^n - g_{ij}^n \\ &= 2\lambda_{ij} u_j^n - \left(\frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_j^n \right) \\ &= \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ji}} + \lambda_{ij} u_j^n \text{ sur } \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

La manipulation formelle ci-dessus (2.2.32) montre que le procédé itératif (2.2.27) et (2.2.29) est essentiellement équivalent à la méthode de Lions pour les problèmes continus.

Pour étudier la convergence de cette méthode on a besoin des notations suivantes :

$$u_i = u|_{\Omega_i}, u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.2.34)$$

$$u_i^n = u_i^n|_{\Omega_i}, u^n = (u_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.2.35)$$

$$e^n = u^n - u, e^n = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} = (u_i^n - u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.2.36)$$

$$\|g^n\|^2 = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |g_{ij}^n|^2 ds, g = (g_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq m}, \quad (2.2.37)$$

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^m \|v_i\|_{1,\Omega_i}^2, v = (v_i) \in \prod_{i=1}^m H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.2.38)$$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^m a_i(u, v), u = (u_i), v = (v_i) \in \prod_{i=1}^m H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i) \quad (2.2.39)$$

telle que e^n est l'erreur à l'étape n , satisfait le problème suivant:

$$\begin{cases} Le_i^n = 0, \text{ dans } \Omega_i \\ \frac{\partial e_i^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} e_i^n = g_{ij}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ e_i^n = 0 \text{ sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (2.2.40)$$

avec le renouvellement pour $n \geq 0$

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij}e_j^n - g_{ji}^n, \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i, \quad (2.2.41)$$

La formulation faible associée à (2.2.40) est

$$a_i(e_i^n, v) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} e_i^n v ds = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^n v ds, \forall v \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.2.42)$$

Pour $v_i = e_i^n \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ dans (2.2.42), on obtient

$$a_i(e_i^n, e_i^n) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^n - \lambda_{ij}e_i^n) e_i^n ds. \quad (2.2.43)$$

$$G_1 = \{\cup \Omega_k, \text{ tel que } M_k > 0\} \quad (2.2.44)$$

$$G_{r+1} = \{\cup \Omega_k, \text{ tel que } mes(\partial \Omega_k \cap \overline{G_r}) > 0, \partial \Omega_k \cap G_l = \emptyset \forall l \leq r\} \quad (2.2.45)$$

où $M_k = mes(\partial \Omega_k \cap \partial \Omega)$.

Lemme 2.2.2 Soient e^n, g_{ij}^n et g_{ij}^{n+1} définies comme dans (2.2.40) et (2.2.41) tel que:

$$g^k = (g_{ij}^k)_{1 \leq j \neq i \leq m}, k = n, n+1,$$

alors on a

$$|||g^{n+1}|||^2 = |||g^n|||^2 - 4a(e^n, e^n). \quad (2.2.46)$$

Preuve. Voir l'article de **Deng** [5] et [20]. ■

Ce lemme est la clé pour démontrer la convergence du théorème suivant

Théorème 2.2.2 Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ qui satisfait (2.2.26), une solution de (2.2.22) et soient $u_i^n \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) les solutions de (2.2.27) - (2.2.29). Alors pour tout $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$ on a :

$$\|u^n - u\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^m \|u_i^n - u_i\|_{1,\Omega_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2.2.47)$$

où u^n, u_i et $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ sont définies dans (2.2.35), (2.2.34) et (2.2.38) respectivement.

Preuve. Voir l'article de **Deng** [5] et [20]. ■

2.2.4 La convergence de cette méthode dans le cas discret

La recherche concernant le taux de convergence de cette méthode sur plusieurs sous domaines est très active. Le taux de convergence de la MDD de Schwarz avec un petit recouvrement a été obtenu par **Brenner** et **Dryja & al.** [2]-[7] de l'ordre de $1 - O(hH^{-1})$ pour la version additive et multiplicative. Le taux le plus petit a été obtenu par **Qin** et **al.** [15]-[14] en 2006-2008 de l'ordre de $1 - O\left(h^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}\right)$ où h est le pas du maillage et H est le diamètre des Ω_i .

Position du problème approché et discrétisation par éléments finis

On considère le cas particulier suivant ; Pour obtenir une approximation numérique de u :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha_0 u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

du problème (2.2.22) où α_0 est une constante positive et $f \in L^2(\Omega)$.

Les résultats de convergence de cette méthode ont été obtenus dans le cas discret en se basant sur les articles [14] et [15]. Donc, on a besoin d'introduire une triangulation τ_h de $\bar{\Omega}$, à l'aide de triangles fermés $t_k \in \tau_h$ de diamètre $diam(t_k) \leq h_k$.

On construit l'espace des éléments finis $V^h \subset H_0^1(\Omega)$ (V^h est conforme) de dimension finie N_h , dont $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$ est sa base. Les fonctions de V^h s'annulent à chaque nœud N_h sur la frontière Ω . V^h est un espace conforme, alors N_h contient tout les noeuds intérieurs des éléments finis.

Après, nous supposons que la décomposition de domaine n'a aucun "cross point" si V^h est un espace conforme (un **cross point** est un point qui appartient à trois sous domaines et plus).

Soit $V_i^h = V_{|\Omega_i}^h$. Définir $V_i^{0,h} \subseteq V_i^h$ dont les fonctions s'annulent à chaque degré liberté sur $\partial\Omega_i$. En plus, on définit $V_{ij}^{0,h} \subseteq V_{|\Omega_i \cup \Omega_j}^h$ dont les fonctions s'annulent à chaque degré liberté sur $\partial(\bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_j)$.

2.2. Méthode de décomposition de domaine sans recouvrement (avec interface):

Soient les espaces T_i et T_{ij} sont définie sur $\partial\Omega_i$ et γ_{ij} respectivement. On a V^h est un espace conforme, nous définissons $T_i = V_i^h|_{\partial\Omega_i}$. En outre, soit $T_{ij} = T_i|_{\gamma_{ij}}$. l'espace est conforme alors on utilise les normes de H^1 et L^2 .

On introduit r_i, r_{ij} deux opérateurs de restrictions définient sur $\partial\Omega_i$ et γ_{ij} respectivement (V^h est conforme):

$$\begin{cases} r_i : V_i^h \rightarrow T_i, & r_{ij} : V_i^h \rightarrow T_{ij}, \\ r_i v_i^h = v_i^h|_{\partial\Omega_i}, & r_{ij} v_i^h = v_i^h|_{\gamma_{ij}}. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} r_{ij} : V_i^h \rightarrow T_{ij}, \\ r_{ij} v_i^h = r_i v_i^h|_{\gamma_{ij}}, \end{cases}$$

Ainsi, on définit s_i, s_{ij} des opérateurs linéaire

$$s_i : T_i \rightarrow V_i^h$$

$$s_i w_i^h = \begin{cases} w_i^h, & \text{noeud sur } \partial\Omega_i \\ 0, & \text{autres noeuds} \end{cases},$$

$$s_{ij} : T_{ij} \rightarrow V_i^h$$

$$s_{ij} w_{ij}^h = \begin{cases} w_{ij}^h, & \text{noeud sur } \gamma_{ij} \\ 0, & \text{autres noeuds} \end{cases}.$$

Notons que $r_i v_i^h \neq v_i^h|_{\partial\Omega_i}$, $s_i w_i^h|_{\partial\Omega_i} \neq w_i^h$ en général. Cependant

$$v_i^h - s_i r_i v_i^h \in V_i^{0,h} \tag{2.2.48}$$

et

$$s_i r_i = Id_i, s_{ij} r_{ij} = Id_{ij} \tag{2.2.49}$$

sont des opérateurs d'identité sur T_i et T_{ij} respectivement. Par (2.2.49), nous savons que r_i et r_{ij} sont surjectifs. En outre, nous avons le lemme suivant. La preuve de ce lemme est dans [15].

2.2. Méthode de décomposition de domaine sans recouvrement (avec interface):

Lemme 2.2.3 $\forall w_{ij}^h \in T_{ij}, \exists v_{ij}^h \in V_{ij}^{0,h}$ tels que $r_{ij}v_{ij}^h = w_{ij}^h$, où la mesure de γ_{ij} , $i \neq j$ est strictement positive.

Donc on considère le problème approché suivant

$$\begin{cases} -\Delta u^h + \alpha_0 u^h = f & \text{dans } \Omega \\ u^h = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2.50)$$

La formulation variationnelle associée à (2.2.50) est

$$a(u^h, v^h) = f(v^h)_\Omega, \forall v^h \in V^h \quad (2.2.51)$$

où

$$\begin{aligned} a(u^h, v^h) &= \sum_{t_i \in \tau_h} \int_{t_i} \nabla u^h \nabla v^h + \alpha_0 \int_{\Omega} u^h v^h dx, \\ f(v^h)_\Omega &= \int_{\Omega} f v^h dx. \end{aligned}$$

On définit le procédé itératif suivant basé sur la décomposition sans recouvrement comme suit

$$\begin{cases} -\Delta u_i^{n,h} + \alpha_0 u_i^{n,h} = f & \text{dans } \Omega_i, 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial u_i^{n,h}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n,h} = g_{ij}^{n,h} & \text{sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ u_i^{n,h} = 0 & \text{sur } \Gamma \cap \partial\Omega_i = \Gamma_i, \end{cases} \quad (2.2.52)$$

où

$$g_{ij}^{n,h} = 2\lambda_{ij} u_j^{n,h} - g_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i,$$

est le renouvellement sur l'interface γ_{ij} pour $n \geq 0$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ (λ_{ij} est un paramètre d'accélération), $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$ ($1 \leq i \neq j \leq m$) une donnée initiale et la mesure de γ_{ij} est strictement positive.

La formulation variationnelle discrète associée à (2.2.52) est

$$\begin{cases} a(u_i^{n,h}, v^h) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^{n,h} v^h ds = \int_{\Omega_i} f v^h dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^{n,h} v^h ds, \\ g_{ij}^{n,h} = 2\lambda_{ij} u_j^{n,h} - g_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \end{cases} \quad (2.2.53)$$

où $u^{n,h}, v^h \in \prod_{1 \leq i \leq m} V_i^h$.

Le taux de convergence de l'approximation par éléments finis

Pour trouver un taux de convergence en fonction de H et h , on a besoin d'introduire une définition, un lemme et un théorème. :

Définition 2.2.1 Soit u^h la solution approchée par éléments finis sur Ω et $u^{n,h}$ est la solution approchée par éléments finis à la n -ième itération du procédé itératif. Si on a

$$\|u^{n,h} - u^h\| \leq CA^n \|u^{0,h} - u^h\| \quad (2.2.54)$$

où $\|\cdot\|$ est une norme, $A \in [0, 1)$ et C est une constante indépendante de n , alors (2.2.54) est la convergence géométrique et A est le taux de convergence.

Remarque 2.2.2 Il est optimal s'il est indépendant de h et H .

Lemme 2.2.4 Soient r_{ij} l'opérateur de trace et s_{ij} un opérateur linéaire de trace inverse alors on a les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|r_{ij} v_i^h\|_{0, \gamma_{ij}} &\leq C \|v_i^h\|_{0, \gamma_{ij}}, \forall v_i^h \in V_i^h \\ \|s_{ij} w_{ij}^h\|_{0, \Omega_i} &\leq Ch^{\frac{1}{2}} \|w_{ij}^h\|_{0, \gamma_{ij}}, \forall w_{ij}^h \in T_{ij} \\ |s_{ij} w_{ij}^h|_{1, \Omega_i} &\leq Ch^{-\frac{1}{2}} \|w_{ij}^h\|_{0, \gamma_{ij}}, \forall w_{ij}^h \in T_{ij} \end{aligned}$$

où C est une constante générique indépendante de h .

Preuve. Pour démontrer ces inégalités de trace, on utilise des calcul direct et des inégalités inverses, voir [15]. ■

Théorème 2.2.3 Si le diamètre de chaque $\Omega_i, 1 \leq i \leq m$ est $O(H)$, alors $\forall v_i^h \in V_i^h$ on a

$$\|v_i^h\|_{0,\partial\Omega_i}^2 \leq CH \|v_i^h\|_{1,\Omega_i}^2,$$

où C est une constante générique indépendante de Ω_i .

Le théorème suivant indique l'existence de $g_{ij}^h \in T_{ij}$.

Théorème 2.2.4 Si u^h est la solution approchée de (2.2.51) dans $\Omega, \lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ et $u_i^h = u_{|\Omega_i}^h$, alors $\exists g_{ij}^h \in T_{ij}$ telle que

$$a_i(u_i^h, v_i^h) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^h v_i^h ds = \int_{\Omega_i} f v_i^h dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^h v_i^h ds, \quad (2.2.55)$$

de la forme

$$g_{ij}^h = 2\lambda_{ij}u_j^h - g_{ji}^h, \quad (2.2.56)$$

où $v^h = (v_1^h, v_2^h, \dots, v_m^h) \in \prod_{i=1}^m V_i^h$.

Preuve. Pour démontrer l'existence de g_{ij}^h on utilise théorème représentation de Riesz et lemme (2.2.3). La preuve du théorème est détaillé dans [14]. ■

Maintenant, on définit les erreurs

$$e_i^{n,h} = u_i^{n,h} - u_i^h \in V_i^h \text{ et } E_{ij}^{n,h} = g_{ij}^{n,h} - g_{ij}^h \in T_{ij} \quad (2.2.57)$$

où

$$\|E^{n,h}\|^2 = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |E_{ij}^{n,h}|^2 ds. E = (E_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq m},$$

$e^{n,h}$ l'erreur à l'étape itérative n , satisfait

$$\begin{cases} -\Delta e_i^{n,h} + \alpha_0 e_i^{n,h} = 0 \text{ dans } \Omega_i, 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial e_i^{n,h}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} e_i^{n,h} = E_{ij}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ e_i^{n,h} = 0 \text{ sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (2.2.58)$$

$$E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij}e_j^{n,h} - E_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, \text{ pour } n \geq 0, \quad (2.2.59)$$

2.2. Méthode de décomposition de domaine sans recouvrement (avec interface):

avec $E_{ij}^{0,h} \in L^2(\gamma_{ij})$ ($1 \leq i \neq j \leq m$) une donnée initiale, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ et la mesure de γ_{ij} est strictement positive. La relation (2.2.59) est le renouvellement pour $n \geq 0$.

L'erreur satisfait le problème variationnel suivant

$$\begin{cases} a(e^{n,h}, v^h) + \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} e_i^{n,h} v^h ds = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} E_{ij}^{n,h} v^h ds, \\ E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} - E_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

où $e^{n,h}, v^h \in \prod_{1 \leq i \leq m} V_i^h$.

L'obtention du taux de convergence $A = 1 - Ch^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}$ est selon le théorème suivant

Théorème 2.2.5 *Si $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0, \forall i, j, i \neq j$, alors les résultats de convergence du problème variationnel sont*

$$a(e^{n,h}, e^{n,h}) \leq \frac{1}{4} |||E^{n,h}|||^2,$$

$$|||E^{n,h}|||^2 \leq \left[1 - \frac{C}{\max(\lambda^{-\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}}, \lambda^{-\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}\alpha_0^{\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}\alpha_0^{-\frac{1}{2}})^2} \right]^n |||E^{0,h}|||^2,$$

En particulier, si $\alpha_0 = 1$, nous choisissons

$$\lambda = O\left(h^{-\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}\right), \quad (2.2.60)$$

pour avoir

$$|||E^{n,h}|||^2 \leq \left[1 - C \min(h^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}, h^{\frac{1}{2}}H^{\frac{3}{2}}) \right]^n |||E^{0,h}|||^2.$$

Si $\alpha_0 \in [H^{-2}, h^{-2}]$, Choisir le même λ que dans (2.2.60), pour obtenir

$$|||E^{n,h}|||^2 \leq \left(1 - Ch^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}} \right)^n |||E^{0,h}|||^2,$$

où C est une constante générique indépendante de h et H .

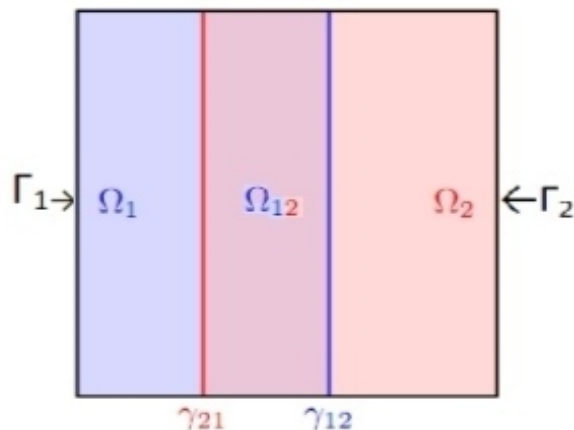
Preuve. La preuve du théorème est dans [14]. ■

Remarque 2.2.3 *En basant sur le même principe de démonstration pour prouver les résultats du chapitre trois.*

Amélioration de la méthode de décomposition de domaine avec recouvrement (MDDAR)

Nous avons divisé ce chapitre en deux parties. Dans la première partie, nous utilisons un paramètre de relaxation λ qui a été introduite par **Deng** [5] dans le chapitre 3 avec un changement au niveau de renouvellement pour faciliter le calcul de la dérivée normale à chaque itération dans l'algorithme qui a été compatible avec la décomposition avec recouvrement. Nous obtenons des résultats de convergence dans le cas continu à travers des estimations "d'énergies" et des inégalités de Sobolev. Ensuite, nous analysons le cas discret (discrétisation par éléments finis) sur deux domaines. Dans le but d'obtenir un taux de convergence $A = 1 - O\left(\frac{h^{\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H}\right)^2$ qui dépend de H et h où $\lambda = O(H^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}})$ est le paramètre d'accélération .

Figure ; Exemple de DD avec recouvrement en deux domaines



3.1 Méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement (MDDGR) dans le cas continu

3.1.1 Description de la MDDGR

On a Ω est un ouvert borné dans \mathbb{R}^N . Ω sont décomposée en un nombre fini $m = 2$ de sous domaines Ω_1, Ω_2 , on suppose que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

où Ω_i sont deux ensembles ouverts dans \mathbb{R}^N , γ_{ij} (γ_{ji}) est l'interface entre Ω_i et Ω_j (Ω_j et Ω_i) respectivement, et que $\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, tel que $\gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$ ($\gamma_{ji} = \Omega_i \cap \partial\Omega_j$).

On considère le problème modèle (2.2.22) défini sur Ω . On définit alors le procédé itératif suivant basé sur la décomposition avec recouvrement comme suit :

$$\begin{cases} Lu_i^n = f & \text{dans } \Omega_i, 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial u_i^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^n = g_{ij}^n & \text{sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ u_i^n = 0 & \text{sur } \Gamma \cap \partial\Omega_i = \Gamma_i, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij}u_j^n - g_{ji}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (3.1.2)$$

avec $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$ ($1 \leq i \neq j \leq m$) une donnée initiale, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ et la mesure de γ_{ij} est strictement positive. La relation (3.1.2) est le renouvellement pour l'étape $n = 0$. A partir de l'étape $n \geq 1$, on utilise le renouvellement suivant

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij}(u_j^n - u_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.1.3)$$

La formulation faible associée au problème (3.1.1) est

$$a_i(u_i^n, v) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^n v ds = f(v)_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^n v ds, \forall v \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (3.1.4)$$

Si on pose

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij}u_j^n - g_{ji}^n \text{ dans } L^2(\gamma_{ij}), \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i,$$

donc

$$\begin{aligned} g_{ij}^{n+1} &= 2\lambda_{ij}u_j^n - g_{ji}^n \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij}u_j^n - \left(\frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ji}} + \lambda_{ji}u_j^n \right) \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij}u_j^n - \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ji}} - \lambda_{ji}u_j^n \text{ sur } \gamma_{ij}. \end{aligned}$$

Si $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$, les interfaces sont parallèles i.e $\gamma_{ij} // \gamma_{ji}$ et $\frac{\partial}{\partial n_{ji}} = -\frac{\partial}{\partial n_{ij}}$ on a

$$g_{ij}^{n+1} = \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij}u_j^n \text{ sur } \gamma_{ij}.$$

Alors d'après ce qui précède, on peut prendre quand $n \geq 1$

$$\begin{aligned} g_{ij}^{n+1} &= 2\lambda_{ij}u_j^n - g_{ji}^n \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij}u_j^n - (2\lambda_{ij}u_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1}) \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij}(u_j^n - u_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}. \end{aligned}$$

Ce qui montre la relation entre la formulation avec des conditions de Robin avec la formulation avec relaxation.

3.1.2 Etude de la convergence dans le cas continu

pour n'importe quelle valeur initiale $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$. on veut démontrer la convergence dans la norme H^1 de la procédure itérative (3.1.2)-(3.1.3) et (3.1.4) .

L'erreur e^n est l'erreur à l'étape itérative n , satisfait

$$\begin{cases} Le_i^n = 0, \text{ dans } \Omega_i, 1 \leq i \leq m, \\ \frac{\partial e_i^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} e_i^n = g_{ij}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ e_i^n = 0 \text{ sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

pour $n = 0$, on utilise le renouvellement suivant sur l'interface γ_{ij}

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} e_j^n - g_{ji}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \quad (3.1.6)$$

et pour $n \geq 1$, on utilise le renouvellement :

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} (e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.1.7)$$

On a employé g_{ij}^n à la place de $g_{ij}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial n_i} + \lambda_{ji} u\right)$. L'expression d'équations (3.1.5) satisfait le même type d'équations que (3.1.1) mais avec $f = 0$. Pour n'importe quelle valeur initiale g_{ij}^0 , la formulation faible habituelle est

$$a_i(e_i^n, v) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} e_i^n v ds = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^n v ds, \forall v \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i). \quad (3.1.8)$$

Si on prend $v = e_i^n \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ dans (3.1.8), on obtient

$$a_i(e_i^n, e_i^n) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^n - \lambda_{ij} e_i^n) e_i^n ds. \quad (3.1.9)$$

Pour démontrer la convergence de ce procédé itératif, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.1 Soient e^n, g_{ij}^{n-1} et g_{ij}^{n+1} définient comme dans (3.1.5)-(3.1.8) tel que

$$g^k = (g_{ij}^k)_{1 \leq i \neq j \leq m}, k = n-1, n+1$$

alors on a

$$\| \|g^{n+1}\| \|^2 = \| \|g^{n-1}\| \|^2 - 4S_n. \quad (3.1.10)$$

où

$$S_n = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} [\lambda_{ij} (e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1}] (e_i^{n-1} - e_j^n) ds. \quad (3.1.11)$$

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.1.12)$$

Preuve. On a d'après (3.1.7), le renouvellement pour $n \geq 1$ est donné sous la forme

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} (e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i.$$

on applique la norme (2.2.37), on trouve

$$\begin{aligned} \| \|g^{n+1}\| \|^2 &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |g_{ij}^{n+1}|^2 ds = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |2\lambda_{ij}(e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1}|^2 ds \\ &= \| \|g^{n-1}\| \|^2 + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{\lambda_{ij}^2}{\lambda_{ij}} \| \|e_j^n - e_i^{n-1}\| \|^2_{0, \gamma_{ij}} + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}} \langle e_j^n - e_i^{n-1}, g_{ij}^{n-1} \rangle_{\gamma_{ij}} \\ &= \| \|g^{n-1}\| \|^2 + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (\lambda_{ij}(e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1}) (e_j^n - e_i^{n-1}) ds \\ &= \| \|g^{n-1}\| \|^2 - 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (\lambda_{ij}(e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1}) (e_i^{n-1} - e_j^n) ds \\ &= \| \|g^{n-1}\| \|^2 - 4S_n, \end{aligned}$$

On sommant par rapport à n on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M S_n &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M (\| \|g^{n-1}\| \|^2 - \| \|g^{n+1}\| \|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\| \|g^0\| \|^2 + \| \|g^1\| \|^2 - \| \|g^M\| \|^2 - \| \|g^{M+1}\| \|^2), \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{n=1}^M S_n$ est bornée alors la limite de son terme général

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.1.13)$$

■

Théorème 3.1.1 Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaisant (2.2.26) une solution de (2.2.22) et soient $u_i^n \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) les solutions de (3.1.1), (3.1.2) et (3.1.3). Alors pour tout $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$ on a

$$\|u^n - u\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^m \|u_i^n - u_i\|_{1,\Omega_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3.1.14)$$

où u^n, u_i et $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ sont définies dans (2.2.34), (2.2.35) et (2.2.38) respectivement.

Preuve. Notre but est de démontrer que

$$\|e^n\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^m \|e_i^n\|_{1,\Omega_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.1.15)$$

D'après (3.1.7), on a

$$\begin{aligned} g_{ij}^{n+1} &= 2\lambda_{ij} (e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij} . \\ -g_{ij}^{n+1} + 2\lambda_{ij} e_j^n &= 2\lambda_{ij} e_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij} . \end{aligned}$$

On applique la norme de $L^2(\gamma_{ij})$, on obtient

$$\begin{aligned} \|-g_{ij}^{n+1} + 2\lambda_{ij} e_j^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &= \|2\lambda_{ij} e_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &= 4\lambda_{ij}^2 \|e_i^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + \|g_{ij}^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4\lambda_{ij} \langle e_i^{n-1}, g_{ij}^{n-1} \rangle . \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$, on divise l'égalité par λ_{ij} et en sommant sur $j, 1 \leq j \leq m$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \|-g_{ij}^{n+1} + 2\lambda_{ij} e_j^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &= 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \|e_i^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \|g_{ij}^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &\quad - 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \langle e_i^{n-1}, g_{ij}^{n-1} \rangle , \end{aligned}$$

d'après (3.1.9), on obtient

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \|-g_{ij}^{n+1} + 2\lambda_{ij} e_j^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \|g_{ij}^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4a_i (e_i^{n-1}, e_i^{n-1}),$$

en sommant sur $i, 1 \leq i \leq m$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| -g_{ij}^{n+1} + 2\lambda_{ij}e_j^n \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| g_{ij}^{n-1} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4 \sum_{i=1}^m a_i (e_i^{n-1}, e_i^{n-1}),$$

i.e

$$\left\| g^{n-1} \right\|^2 - 4a (e^{n-1}, e^{n-1}) \geq 0,$$

d'où

$$a (e^{n-1}, e^{n-1}) \leq \frac{1}{4} \left\| g^{n-1} \right\|^2. \quad (3.1.16)$$

Ainsi, d'après le renouvellement (3.1.7), on a

$$\begin{aligned} g_{ij}^{n+1} &= 2\lambda_{ij} (e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij} e_j^n - (2\lambda_{ij} e_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1}) \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij} e_j^n - g_{ji}^n \text{ sur } \gamma_{ij}. \end{aligned}$$

i.e

$$\begin{aligned} g_{ji}^n &= 2\lambda_{ij} e_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij} \\ g_{ji}^n - \lambda_{ij} e_i^{n-1} &= \lambda_{ij} e_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1}. \end{aligned}$$

On multiplie l'égalité par e_i^{n-1} , on obtient

$$g_{ji}^n e_i^{n-1} - \lambda_{ij} (e_i^{n-1})^2 = \lambda_{ij} (e_i^{n-1})^2 - g_{ij}^{n-1} e_i^{n-1}.$$

On intègre l'égalité sur γ_{ij} et on somme sur $j, 1 \leq j \leq m, j \neq i$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ji}^n - \lambda_{ij} e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds &= - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^{n-1} - \lambda_{ij} e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds \\ &= -a (e_i^{n-1}, e_i^{n-1}) \leq 0, \end{aligned}$$

i.e

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ji}^n - \lambda_{ij} e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds \leq 0. \quad (3.1.17)$$

Puisque (3.1.17) est négative et $\gamma_{ij}/\gamma_{ji}, |\gamma_{ij}| = |\gamma_{ji}|$, alors le signe de l'intégrale reste toujours négative si on intègre (3.1.17) sur γ_{ji}

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ji}} (g_{ji}^n - \lambda_{ij} e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds \leq 0, \quad (3.1.18)$$

on somme (3.1.18) sur $i, 1 \leq i \leq m$

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ji}} (g_{ji}^n - \lambda_{ij} e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds \leq 0, \quad (3.1.19)$$

et on a aussi d'après le renouvellement

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} (e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i,$$

i.e

$$g_{ij}^{n+1} - 2\lambda_{ij} e_j^n = g_{ij}^{n-1} - 2\lambda_{ij} e_i^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}.$$

On applique la norme de $L^2(\gamma_{ij})$ aux deux côtés de l'égalité

$$\|g_{ij}^{n+1} - 2\lambda_{ij} e_j^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = \|g_{ij}^{n-1} - 2\lambda_{ij} e_i^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2,$$

$$\begin{aligned} \|g_{ij}^{n+1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + 4\lambda_{ij}^2 \|e_j^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4\lambda_{ij} \langle g_{ij}^{n+1}, e_j^n \rangle &= \|g_{ij}^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + 4\lambda_{ij}^2 \|e_i^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &\quad - 4\lambda_{ij} \langle g_{ij}^{n-1}, e_i^{n-1} \rangle. \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{ij} > 0$ on divise l'égalité par λ_{ij} et on somme sur $1 \leq i \neq j \leq m$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\|g^{n+1}\|\|^2 - 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^{n+1} - \lambda_{ij} e_j^n) e_j^n ds &= \|\|g^{n-1}\|\|^2 - 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^{n-1} - \lambda_{ij} e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds \\ \|\|g^{n+1}\|\|^2 - \|\|g^{n-1}\|\|^2 + 4a (e^{n-1}, e^{n-1}) &= 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^{n+1} - \lambda_{ij} e_j^n) e_j^n ds, \end{aligned}$$

d'après (3.1.19), on a

$$\begin{aligned} \|\|g^{n+1}\|\|^2 - \|\|g^{n-1}\|\|^2 + 4a (e^{n-1}, e^{n-1}) &\leq 0, \\ -4S_n + 4a (e^{n-1}, e^{n-1}) &\leq 0, \end{aligned}$$

i.e

$$4a(e^{n-1}, e^{n-1}) \leq 4S_n. \quad (3.1.20)$$

Donc d'après (3.1.20) et (3.1.13), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(e^n, e^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m a(e_i^n, e_i^n) = 0, \quad (3.1.21)$$

et d'après (3.1.20), on a

$$\begin{aligned} 4S_n &\geq 0, \\ \|\|g^{n+1}\|\|^2 &\leq \|\|g^{n-1}\|\|^2. \end{aligned}$$

i.e S_n est une suite décroissante positive.

On veut démontrer aussi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\|g^n\|\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \|g_{ij}^n\|_{0, \gamma_{ij}}^2 = 0, \quad (3.1.22)$$

On a d'après le lemme (3.1.1)

$$\|\|g^{n+1}\|\|^2 = \|\|g^{n-1}\|\|^2 - 4S_n.$$

Puisque $\|\|g^{n+1}\|\|^2 \leq \|\|g^{n-1}\|\|^2$, on divise l'égalité par $\|\|g^{n-1}\|\|^2$

$$\frac{\|\|g^{n+1}\|\|^2}{\|\|g^{n-1}\|\|^2} \leq 1 - \frac{4S_n}{\|\|g^{n-1}\|\|^2 + 1} \leq 1,$$

où

$$1 - \frac{4S_n}{\|\|g^{n-1}\|\|^2 + 1} = M_n.$$

Donc

$$\frac{\|\|g^{n+1}\|\|^2}{\|\|g^{n-1}\|\|^2} \leq M_n \leq 1.$$

On général on peut écrire

$$\|\|g^n\|\|^2 = \begin{cases} M_n \times M_{n-1} \times \dots \times M_1 \|\|g^0\|\|^2, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ M_n \times M_{n-1} \times \dots \times M_2 \|\|g^1\|\|^2, & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

telles que

$$M_1 = \frac{4S_1}{\|g^0\|^2 + 1} \text{ et } M_2 = \frac{4S_2}{\|g^1\|^2 + 1}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g^n\|^2 = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \times M_{n-1} \times \dots \times M_1 \|g^0\|^2 = 0, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \times M_{n-1} \times \dots \times M_2 \|g^1\|^2 = 0, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

i.e (3.1.22) est vérifiée.

Maintenant, $a(\cdot, \cdot)$ est coersive, $\exists \mu > 0$ telle que

$$\mu \|e_i^n\|_{1, \Omega_i}^2 \leq a(e_i^n, e_i^n)$$

alors, pour $\alpha_0(x) \geq C_0 > 0$ et d'après (2.2.24) – (3.1.21) on obtient (3.1.15).

En général, $\alpha_0(x) = 0$, d'après (2.2.24) – (3.1.21) on trouve

$$\|\nabla e_i^n\|_{0, \Omega_i}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.1.23)$$

Ainsi, pour tout $i, \Omega_i \subset G_1$

$$e_i^n = 0, \text{ sur } \Gamma_i \text{ (mes}(\Gamma_i) > 0),$$

et

$$\|e_i^n\|_{1, \Omega_i}^2 = \|\nabla e_i^n\|_{0, \Omega_i}^2 + \|e_i^n\|_{0, \Omega_i}^2,$$

d'après (3.1.23) et l'inégalité de Poincaré

$$\|e_i^n\|_{1, \Omega_i}^2 \leq C \|\nabla e_i^n\|_{0, \Omega_i}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall i, \Omega_i \subset G_1. \quad (3.1.24)$$

Donc, d'après (3.1.24) et théorème (1.2.1), on a

$$\|e_i^n\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.1.25)$$

Pour tout $i, \Omega_i \subset G_1$, d'après (3.1.9), (3.1.21), (3.1.24) et (3.1.25), on obtient

$$\|g_{ij}^n\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.1.26)$$

ou on peut déduire directement de (3.1.22) pour tout $i, \Omega_i \subset G_1$

$$\|g_{ij}^n\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.1.27)$$

■

D'après ce précède, on conclut par ce corollaire

Corollaire 3.1.1 *Sous les conditions du théorème(3.1.1), nous avons*

$$\left\| g_{ij}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ji} u \right) \right\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, 1 \leq j \neq i \leq m. \quad (3.1.28)$$

g_{ij}^n est défini dans (3.1.2) – (3.1.3).

3.2 Méthode de décomposition de domaine avec recouvrement (MDDAR) dans le cas discret

3.2.1 Position du problème approché et formulation vartionnelle

On remplace le problème (2.2.22) par un problème approché. Pour obtenir une approximation numérique de u . donc ,à l'aide de triangles fermés $t_k \in \tau_h$ de diamètre : $diam(t_k) \leq h_k$. on a besoin d'introduire une triangulation τ_h de $\bar{\Omega}$,

$$h = \max(h_k).$$

H : le diamètre de chaque Ω_i .

On construit l'espace des éléments finis $V^h \subset H_0^1(\Omega)$ de dimension finie N_h (nombre de noeuds internes ou degré de liberté), dont $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$ est sa base. Donc

$$V^h = \{v^h \in C^0(\bar{\Omega}), v|_{t_k}^h = P_l, l = \overline{1, 3}, \forall t_k \in \tau_h, v|_{\Gamma}^h = 0\}. \quad (3.2.1)$$

L'approximation u^h de u dans cette base s'écrit sous la forme suivante

$$u^h = \sum_{k=1}^{N_h} u_k^h \varphi_k$$

où, u_k^h sont les valeurs aux noeuds de la triangulation et $V_i^h = V_{|\Omega_i}^h$ tel que

$$V_i^h = \{v^h \in V^h(\Omega_i) \setminus v|_{\Gamma_i}^h = 0\}.$$

Soit u^h la solution du problème approché suivant

$$\begin{cases} Lu^h = f & \text{dans } \Omega \\ u^h = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.2.2)$$

tel que $f \in L^2(\Omega)$ et L est un opérateur défini par (2.2.23).

La formulation variationnelle associée à (3.2.2) est

$$a(u^h, v^h) = (f, v^h), \forall v^h \in V^h \quad (3.2.3)$$

où, on a

$$a_\Omega(u^h, v^h) = \int_\Omega \left(\sum_{k,l} \alpha_{k,l}(x) \frac{\partial u^h}{\partial x_k} \frac{\partial v^h}{\partial x_l} + \alpha_0(x) u^h v^h \right) dx,$$

$$(f, v^h)_\Omega = \int_\Omega f v^h dx.$$

On travaille dans un espace conforme $V_i^h \subset H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$, on lui associe la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega_i}$ et la semi norme $|\cdot|_{1,\Omega_i}$.

On note par $(u_i^h)_{1 \leq i \leq m}$ la solution de ce procédé dans Ω_i , $1 \leq i \leq m$, à la $n^{\text{ième}}$ itération, on définit le procédé itératif suivant :

$$\begin{cases} Lu_i^{n,h} = f \text{ dans } \Omega_i, 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial u_i^{n,h}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n,h} = g_{ij}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ u_i^{n,h} = 0 \text{ sur } \Gamma \cap \partial\Omega_i = \Gamma_i, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$$g_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} u_j^{n,h} - g_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (3.2.5)$$

avec $g_{ij}^{0,h} \in L^2(\gamma_{ij})$ ($1 \leq i \neq j \leq m$) une donnée initiale, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ et la mesure de γ_{ij} est strictement positive. La relation (3.2.5) est le renouvellement pour l'étape $n = 0$. A partir de l'étape $n \geq 1$, on utilise le renouvellement suivant :

$$g_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} (u_j^{n,h} - u_i^{n-1,h}) + g_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m. \quad (3.2.6)$$

Le problème variationnel de (3.2.4), $\forall v_i^h \in V_i^h$ est

$$g_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} u_j^{n,h} - g_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij} \text{ pour } n = 0, \quad (3.2.7)$$

$$g_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} (u_j^{n,h} - u_i^{n-1,h}) + g_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \text{ pour } n \geq 1. \quad (3.2.8)$$

3.2.2 Etude de la convergence de la MDDAR (cas discret)

On commence par le résultat préliminaire suivant

Théorème 3.2.1 Soit u^h la solution approchée de (3.2.3) dans Ω et $u_i^h = u|_{\Omega_i}$, alors $\exists g_{ij}^h \in T_{ij}$ telle que

$$a_i(u^h, v_i^h) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^h v_i^h ds = \int_{\Omega_i} f v_i^h dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^h v_i^h ds, \quad (3.2.9)$$

où $v^h = (v_1^h, v_2^h, \dots, v_m^h) \in \prod_{i=1}^m V_i^h$.

Preuve. On définit sur T_i la fonction

$$a_i(u^h, s_i r_i v_i^h) - \int_{\Omega_i} f s_i r_i v_i^h dx, \forall r_i v_i^h \in T_i$$

On applique le théorème de représentation de Riesz (1.2.2) i.e $\exists y_i \in T_i$ tel que

donc

$$a_i(u^h, s_i r_i v_i^h) - \int_{\Omega_i} f s_i r_i v_i^h dx = \langle y_i, r_i v_i^h \rangle.$$

Puisque u^h est la solution approchée de (3.2.3) par $v_i^h - s_i r_i v_i^h \in V_i^h, \forall v_i^h \in V_i^h a_i(u^h, v_i^h - s_i r_i v_i^h) - \int_{\Omega_i} f (v_i^h - s_i r_i v_i^h) dx = 0$.

$$a_i(u^h, v_i^h) - \int_{\Omega_i} f v_i^h dx = a_i(u^h, s_i r_i v_i^h) - \int_{\Omega_i} f s_i r_i v_i^h dx = \langle y_i, r_i v_i^h \rangle$$

Soit $y_{ij} = y_i|_{\gamma_{ij}} \in T_{ij}$

$$a_i(u^h, v_i^h) - \int_{\Omega_i} f v_i^h dx = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \langle y_{ij}, r_{ij} v_i^h \rangle|_{\gamma_{ij}}. \quad (3.2.10)$$

Soit y_{ij} écrite sous forme suivante

$$y_{ij} = g_{ij}^h - \lambda_{ij} u_i^h \text{ sur } \gamma_{ij}. \quad (3.2.11)$$

Maintenant ; voire la suite de preve dans [20] ■

Remarque 3.2.1 pour étudier la convergence dans le cas discret , il existe des notations sont les même que dans le cas continu avec le chengement de u par u^h et $H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ par V_i^h .

Nous devons maintenant, trouver le taux de convergence de ce procédé itératif discret en fonction de h et H .

Lemme 3.2.1 Soient $e_i^{n,h}$, $E_{ij}^{n-1,h}$, $E_{ij}^{n+1,h}$, $\|\cdot\|$ définient comme dans - (2.2.37)

$$E^{p,h} = \left(E_{ij}^{p,h} \right)_{1 \leq i \leq m}, p = n-1, n+1,$$

alors on a

$$\| \| E^{n+1,h} \| \| ^2 = \| \| E^{n-1,h} \| \| ^2 - 4S_{n,h}, \quad (3.2.12)$$

et

$$-4S_{n,h} \leq 0$$

où

$$S_{n,h} = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} \left(\lambda_{ij}(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \right) (e_i^{n-1,h} - e_j^{n,h}) ds. \quad (3.2.13)$$

Preuve. On a d'après le renouvellement pour $n \geq 1$ est donné sous la forme

$$E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} \left(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h} \right) + E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i.$$

On applique la norme (2.2.37), on trouve

$$\begin{aligned} \| \| E^{n+1,h} \| \| ^2 &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} \left| E_{ij}^{n+1,h} \right|^2 ds = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} \left| 2\lambda_{ij}(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \right|^2 ds \\ &= \| \| E^{n-1,h} \| \| ^2 + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{\lambda_{ij}^2}{\lambda_{ij}} \| \| (e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) \| \|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &\quad + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}} \left\langle e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}, E_{ij}^{n-1,h} \right\rangle_{|\gamma_{ij}} \\ &= \| \| E^{n-1,h} \| \| ^2 + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} \left(\lambda_{ij}(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \right) (e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) ds \\ &= \| \| E^{n-1,h} \| \| ^2 - 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} \left(\lambda_{ij}(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \right) (e_i^{n-1,h} - e_j^{n,h}) ds \\ &= \| \| E^{n-1,h} \| \| ^2 - 4S_{n,h}. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

En sommant sur $n, 1 \leq n \leq M$, on obtient

$$\begin{aligned} -4 \sum_{n=1}^M S_{n,h} &= \sum_{n=1}^M \left(\| \| E^{n+1,h} \| \|^2 - \| \| E^{n-1,h} \| \|^2 \right) \\ &= - \| \| E^{0,h} \| \|^2 - \| \| E^{1,h} \| \|^2 + \| \| E^{M,h} \| \|^2 + \| \| E^{M+1,h} \| \|^2, \end{aligned}$$

Puisque $-4 \sum_{n=1}^M S_{n,h}$ est bornée alors la limite de son terme général

$$-4S_{n,h} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (3.2.15)$$

i.e

$$|-4S_{n,h}| < 1. \quad (3.2.16)$$

D'autre part, d'après le renouvellement on a

$$\begin{aligned} E_{ij}^{n+1,h} &= 2\lambda_{ij} \left(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h} \right) + E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \\ &= 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} - \left(2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} - E_{ij}^{n-1,h} \right) \text{ sur } \gamma_{ij}, \\ &= 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} - E_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \end{aligned}$$

i.e

$$\begin{aligned} E_{ji}^{n,h} &= 2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} - E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h} &= \lambda_{ij} e_i^{n-1,h} - E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \end{aligned}$$

On multiplie l'égalité par $e_i^{n-1,h}$, on trouve

$$e_i^{n-1,h} E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} \left(e_i^{n-1,h} \right)^2 = \lambda_{ij} \left(e_i^{n-1,h} \right)^2 - e_i^{n-1,h} E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}.$$

On intègre sur γ_{ij} et on somme sur $j, 1 \leq j \leq m, i \neq j$ on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \int_{\gamma_{ij}} (E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h}) e_i^{n-1,h} ds &= - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \int_{\gamma_{ij}} (E_{ij}^{n-1,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h}) e_i^{n-1,h} ds, \\ &= -a \left(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

i.e

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \int_{\gamma_{ij}} (E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h}) e_i^{n-1,h} ds \leq 0. \quad (3.2.17)$$

Puisque (3.2.17) est négative et $\gamma_{ij}/|\gamma_{ji}| = |\gamma_{ji}|$, alors le signe de l'intégral reste toujours négative si on intègre (3.2.17) sur γ_{ji}

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \int_{\gamma_{ji}} (E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h}) e_i^{n-1,h} ds \leq 0. \quad (3.2.18)$$

On somme sur i , $1 \leq i \leq m$

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ji}} (E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h}) e_i^{n-1,h} ds \leq 0. \quad (3.2.19)$$

En plus, on a d'après le renouvellement (??)

$$E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} (e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \quad \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, \quad 1 \leq j \leq m, j \neq i,$$

i.e

$$E_{ij}^{n+1,h} - 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} = E_{ij}^{n-1,h} - 2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}.$$

On applique la norme de $L^2(\gamma_{ij})$

$$\begin{aligned} \left\| E_{ij}^{n+1,h} - 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &= \left\| E_{ij}^{n-1,h} - 2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2, \\ \left\| E_{ij}^{n+1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + 4\lambda_{ij}^2 \left\| e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4\lambda_{ij} \left\langle E_{ij}^{n+1,h}, e_j^{n,h} \right\rangle &= \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &+ 4\lambda_{ij}^2 \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4\lambda_{ij} \left\langle E_{ij}^{n-1,h}, e_i^{n-1,h} \right\rangle. \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{ij} > 0$ on divise l'égalité sur λ_{ij} et on somme sur $i, j, 1 \leq i \neq j \leq m$, on obtient

$$\left\| \| E^{n+1,h} \| \right\|^2 - \left\| \| E^{n-1,h} \| \right\|^2 + 4a (e^{n-1,h}, e^{n-1,h}) = 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (E_{ij}^{n+1,h} - \lambda_{ij} e_j^{n,h}) e_j^{n,h} ds,$$

d'après (3.2.19), on a

$$\begin{aligned} \left\| \| E^{n+1,h} \| \right\|^2 - \left\| \| E^{n-1,h} \| \right\|^2 + 4a (e^{n-1,h}, e^{n-1,h}) &\leq 0, \\ -4S_{n,h} + 4a (e^{n-1,h}, e^{n-1,h}) &\leq 0, \end{aligned}$$

i.e

$$4a(e^{n-1,h}, e^{n-1,h}) \leq 4S_{n,h}. \quad (3.2.20)$$

et d'après (3.2.16), on conclut

$$\begin{aligned} 1 &> 4S_{n,h} \geq 0, \\ \|||E^{n+1,h}\|||^2 &\leq \|||E^{n-1,h}\|||^2. \end{aligned}$$

i.e $S_{n,h}$ est une suite décroissante positive.

$$a_i(u_i^{n,h}, v_i^h) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^{n,h} v_i^h ds = \int_{\Omega_i} f v_i^h dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^{n,h} v_i^h ds, \quad (3.2.21)$$

■

L'erreur satisfait le problème variationnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} a(e^{n,h}, v^h) + \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} e_i^{n,h} v^h ds = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} E_{ij}^{n,h} v^h ds, \forall v^h \in V^h, \\ E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} - E_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, \\ E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} (e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m. \end{array} \right.$$

Théorème 3.2.2 Si $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0, \forall i, j, i \neq j$, alors les résultats de convergence du problème variationnel pour $0 < \alpha_0(x) \leq \alpha_{kl}(x) < \infty$ sont

$$a(e^{n,h}, e^{n,h}) \leq \frac{1}{4} \|||E^{n,h}\|||^2,$$

$$\|||E^{n,h}\|||^2 \leq \begin{cases} \left[1 - C(h^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}} + H^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}})^{-2}\right]^{\frac{n}{2}} \|||E^{0,h}\|||^2, & (n \text{ pair}). \\ \left[1 - C(h^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}} + H^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}})^{-2}\right]^{\frac{n+1}{2}} \|||E^{1,h}\|||^2, & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

où C est une constante générique indépendante de h et H .

Corollaire 3.2.1 Pour un choix de

$$\lambda = O(H^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}})$$

on a

$$\|||E^{n,h}\|||^2 \leq \begin{cases} \left(1 - C\left(\frac{h^{\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \|||E^{0,h}\|||^2, & (n \text{ pair}). \\ \left(1 - C\left(\frac{h^{\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H}\right)^2\right)^{\frac{n+1}{2}} \|||E^{1,h}\|||^2, & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

Preuve. On veut démontrer que

$$a(e^{n,h}, e^{n,h}) \leq \frac{1}{4} \| \| E^{n,h} \| \|^2.$$

D'après (??), on a

$$\begin{aligned} E_{ij}^{n+1,h} &= 2\lambda_{ij} (e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}. \\ -E_{ij}^{n+1,h} + 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} &= 2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} - E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}. \end{aligned}$$

On applique la norme $L^2(\gamma_{ij})$ aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned} \left\| -E_{ij}^{n+1,h} + 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &= \left\| 2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} - E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &= 4\lambda_{ij}^2 \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4\lambda_{ij} \left\langle e_i^{n-1,h}, E_{ij}^{n-1,h} \right\rangle. \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$, on divise l'égalité par λ_{ij} et on somme par rapport à j , $1 \leq j \leq m$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| -E_{ij}^{n+1,h} + 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &= 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &\quad - 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \left\langle e_i^{n-1,h}, E_{ij}^{n-1,h} \right\rangle, \end{aligned}$$

d'après (??), on obtient

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| -E_{ij}^{n+1,h} + 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4a_i(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h}),$$

en sommant sur i , $1 \leq i \leq m$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| -E_{ij}^{n+1,h} + 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4 \sum_{i=1}^m a_i(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h}),$$

i.e

$$\| \| E^{n-1,h} \| \|^2 - 4a(e^{n-1,h}, e^{n-1,h}) \geq 0,$$

d'où

$$a(e^{n-1,h}, e^{n-1,h}) \leq \frac{1}{4} \left\| \|E^{n-1,h}\| \right\|^2. \quad (3.2.22)$$

Maintenant, si on prend $v_i^h = s_{ij} E_{ij}^{n-1,h}$, on obtient

$$\left\| \|E_{ij}^{n-1,h}\| \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = a_i(e_i^{n-1,h}, s_{ij} E_{ij}^{n-1,h}) + \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} e_i^{n-1,h} E_{ij}^{n-1,h} ds,$$

on utilise l'inégalité de Cauchy Schwarz (1.2.1), on trouve

$$\begin{aligned} \left\| \|E_{ij}^{n-1,h}\| \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &\leq \max \alpha_{kl}(x) \left| e_i^{n-1,h} \right|_{1,\Omega_i} \left| s_{ij} E_{ij}^{n-1,h} \right|_{1,\Omega_i} \\ &+ \max \alpha_0(x) \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\Omega_i} \left\| s_{ij} E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\Omega_i} + \lambda_{ij} \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}, \end{aligned}$$

puis, on utilise le lemme (2.2.4) et le théorème de trace (2.2.3),

$$\begin{aligned} \left\| \|E_{ij}^{n-1,h}\| \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &\leq Ch^{-\frac{1}{2}} \max \alpha_{kl}(x) \left| e_i^{n-1,h} \right|_{1,\Omega_i} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}} \\ &+ Ch^{\frac{1}{2}} \max \alpha_0(x) \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\Omega_i} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}} + C\lambda_{ij} H^{\frac{1}{2}} \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{1,\Omega_i} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}, \end{aligned}$$

Puisque $\left\| \|e_i^{n-1,h}\| \right\|_{1,\Omega_i}^2 = \left| e_i^{n-1,h} \right|_{1,\Omega_i}^2 + \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\Omega_i}^2$, alors

$$\left\| \|E_{ij}^{n-1,h}\| \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \max \alpha_{kl}(x) + h^{\frac{1}{2}} \max \alpha_0(x) + \lambda_{ij} H^{\frac{1}{2}} \right] \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{1,\Omega_i} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}},$$

comme $a_i(\cdot, \cdot)$ est coersive i.e $\exists \beta$ tel que

$$a_i(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h}) \geq \beta \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{1,\Omega_i},$$

alors

$$\left\| \|E_{ij}^{n-1,h}\| \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \max \alpha_{kl}(x) + h^{\frac{1}{2}} \max \alpha_0(x) + \lambda_{ij} H^{\frac{1}{2}} \right] a_i^{\frac{1}{2}}(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h}) \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}},$$

et pour $\lambda_{ij} = \lambda$, on multiplie l'inégalité par $\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \left\| \|E_{ij}^{n-1,h}\| \right\|_{0,\gamma_{ij}} &\leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right] a_i^{\frac{1}{2}}(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h}), \\ \frac{1}{\lambda} \left\| \|E_{ij}^{n-1,h}\| \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &\leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2 a_i(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h}). \end{aligned}$$

En sommant sur $i, j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, j \neq i$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2 \sum_{i=1}^m a_i \left(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h} \right),$$

on trouve

$$\left\| \left\| E^{n-1,h} \right\| \right\|^2 \leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2 a \left(e^{n-1,h}, e^{n-1,h} \right),$$

i.e

$$-a \left(e^{n-1,h}, e^{n-1,h} \right) \leq -\frac{C}{\left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2} \left\| \left\| E^{n-1,h} \right\| \right\|^2 \quad (3.2.23)$$

et on a d'après (3.2.20)

$$-4S_{n,h} \leq -\frac{C}{\left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2} \left\| \left\| E^{n-1,h} \right\| \right\|^2$$

$$\begin{aligned} \left\| \left\| E^{n+1,h} \right\| \right\|^2 - \left\| \left\| E^{n-1,h} \right\| \right\|^2 &\leq -\frac{C}{\left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2} \left\| \left\| E^{n-1,h} \right\| \right\|^2 \\ \left\| \left\| E^{n+1,h} \right\| \right\|^2 &\leq \left(1 - \frac{C}{\left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2} \right) \left\| \left\| E^{n-1,h} \right\| \right\|^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\left\| \left\| E^{n+1,h} \right\| \right\|^2 \leq \left(1 - C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^{-2} \right) \left\| \left\| E^{n-1,h} \right\| \right\|^2$$

On général, on peut écrire pour $\lambda = O(H^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}})$, on obtient dans le cas où n est pair

$$\begin{aligned} \left\| \left\| E^{n,h} \right\| \right\|^2 &\leq \left(1 - C \left(h^{-\frac{1}{4}} H^{-\frac{1}{4}} + H^{-\frac{1}{4}} h^{\frac{3}{4}} + H^{\frac{3}{4}} h^{-\frac{1}{4}} \right)^{-2} \right)^{\frac{n}{2}} \left\| \left\| E^{0,h} \right\| \right\|^2, \\ &\leq \left(1 - C \left(\frac{1+h+H}{h^{\frac{1}{4}} H^{\frac{1}{4}}} \right)^{-2} \right)^{\frac{n}{2}} \left\| \left\| E^{0,h} \right\| \right\|^2, \\ &\leq \left(1 - C \left(\frac{h^{\frac{1}{4}} H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H} \right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} \left\| \left\| E^{0,h} \right\| \right\|^2. \end{aligned}$$

d'où

$$\| \| E^{n+1,h} \| \|^2 \leq \left(1 - C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^{-2} \right) \| \| E^{n-1,h} \| \|^2$$

On général, on peut écrire

$$\| \| E^{n,h} \| \|^2 \leq \begin{cases} \left(1 - C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^{-2} \right)^{\frac{n}{2}} \| \| E^{0,h} \| \|^2, & \text{si } n \text{ pair,} \\ \left(1 - C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^{-2} \right)^{\frac{n+1}{2}} \| \| E^{1,h} \| \|^2, & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

et de même façons pour n est impair et pour $\lambda = O(H^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}})$, on obtient dans le cas où n est pair

$$\begin{aligned} \| \| E^{n,h} \| \|^2 &\leq \left(1 - C \left(h^{-\frac{1}{4}} H^{-\frac{1}{4}} + H^{-\frac{1}{4}} h^{\frac{3}{4}} + H^{\frac{3}{4}} h^{-\frac{1}{4}} \right)^{-2} \right)^{\frac{n}{2}} \| \| E^{0,h} \| \|^2, \\ &\leq \left(1 - C \left(\frac{1+h+H}{h^{\frac{1}{4}} H^{\frac{1}{4}}} \right)^{-2} \right)^{\frac{n}{2}} \| \| E^{0,h} \| \|^2, \\ &\leq \left(1 - C \left(\frac{h^{\frac{1}{4}} H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H} \right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} \| \| E^{0,h} \| \|^2. \end{aligned}$$

et de même façons pour n est impair

$$\| \| E^{n,h} \| \|^2 \leq \left(1 - C \left(\frac{h^{\frac{1}{4}} H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H} \right)^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \| \| E^{1,h} \| \|^2.$$

■

3.3 Application numérique

Le but de cette section est de valider les résultats théoriques obtenus dans le chapitre 3.

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

On note par n le nombre d'itération, $Er_i = \left\| u - u_i^{h,n} \right\|_{1,\Omega_i}$, $i = 1, 2$, est l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée obtenue par **MDDAR** à l'itération n dans la norme H^1 .

On prend $\Omega = [0, 1.5] \times [0, 1]$. La solution exacte dans ce cas est $u(x, y) = xy(x - 1.5)(y - 1)e^{xy}$. On applique la **MDDAR** et on calcule en premier les solutions approchées $u_i^{h,n}$, sur Ω_i , $i = 1, 2$, pour un pas max h de discrétisation non uniforme sur Ω_i , $i = 1, 2$, un diamètre de sous domaines $H_1 = 0.2$ et un diamètre du recouvrement $H_2 = 0.6$. Le paramètre de relaxation $\lambda_i = H_i^{0.5}h^{-0.5}$, $i = 1, 2$.

Au premier tableau, on utilise le diamètre de sous domaines H_1 , pour calculer le paramètre de relaxation λ_1 .

n	2	3	6	7	9
H_1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
h_1	4.75(-2)	4.75(-2)	4.75(-2)	4.75(-2)	4.75(-2)
λ_1	2.0596	2.0596	2.0596	2.0596	2.0596
Er_1	7.75261(-2)	1.48443(-2)	1.1213(-2)	8.20699(-3)	5.81226(-3)
Er_2	9.59894(-2)	1.79862(-2)	1.27418(-2)	9.62239(-3)	7.55526(-3)

Au deuxième tableau, on utilise la taille du recouvrement H_1 , pour calculer le paramètre de relaxation λ_2 .

n	2	3	6	7	9
H_1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
h_2	3.7407(-2)	3.7407(-2)	3.7407(-2)	3.7407(-2)	3.7407(-2)
λ_2	2.37634	2.37634	2.37634	2.37634	2.37634
Er_1	8.17648(-2)	2.07927(-2)	9.92282(-3)	6.60166(-3)	3.83342(-3)
Er_2	9.44684(-2)	2.36815(-2)	1.04297(-2)	7.40861(3)	4.9535(-3)

Au troisième tableau, on utilise la taille du recouvrement H_2 , pour calculer le paramètre de relaxation λ_3 .

n	2	3	5	7	8
H_2	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
h_3	6.5625(-2)	6.5625(-2)	6.5625(-2)	6.5625(-2)	6.5625(-2)
λ_3	3.02372	3.02372	3.02372	3.02372	3.02372
Er_1	1.56598(-1)	1.65183(-2)	6.37535(-3)	5.06508(-3)	4.40408(-3)
Er_2	1.38434(-1)	1.83351(-2)	5.7091(-3)	5.41967(-3)	5.51754(-3)

Remarque 3.3.1 *Le pas h est le même dans les trois tableaux.*

Les itérations dans le premier et le deuxième tableau sont les mêmes, mais dans le troisième tableau, les itérations sont différents par rapport au premier avec une erreur mieux que dans le deuxième tableau.

Il apparaît préférable d'utiliser H_1 (le diamètre de domaine) au lieu de H_2 (le diamètre du recouvrement) dans le calcul du meilleur paramètre de relaxation.

Conclusion

Les méthodes numériques itératives constituent un outil de choix pour assurer la pertinence et l'efficacité de la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles notamment une EDP de ordre .

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur l'application des méthodes de décomposition de domaines pour construire des algorithmes itératives. En utilisant des conditions aux limites de type Robin sur les interfaces et un paramètre de relaxation pour accélérer la convergence et éviter le calcul de la dérivée normale dans chaque itération. Le taux de convergence obtenu dans ce mémoire est $A = 1 - O\left(\frac{h^{\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H}\right)^2$.

Bibliographie

- [1] **Adams R. A.**, Sobolev spaces, Pure and Applied Mathematics, vol. 65, Academic Press, New York, 1975.
- [2] **Brenner S. C.**, Lower bounds for two-level additive Schwarz preconditioners with small overlap, SIAM J. Sci. Comput., 21, pp. 1657-1669, 2000.
- [3] **Brézis H.**, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application, Masson, 1983.
- [4] **Chen W., Xu X. and Zhang S.**, On the optimal convergence of a Robin-Robin domain decomposition method. Journal of Computational Mathematics. Vol.32, No.4, 456–475, 2014.
- [5] **Deng Q.**, An analysis for a nonoverlapping domain decomposition iterative procedure, SIAM J. Sci. Comput., 18, 1517-1525, 1997.
- [6] **Deng Q.**, A nonoverlapping domain decomposition method for nonconforming finite element problems, Comm. Pure Appl. Anal., 2, 295 -306, 2003.
- [7] **Dryja M. and Widlund O. B.**, Domain decomposition algorithms with small overlap, SIAM J. Sci. Comput., 15, pp. 604-620, 1994.
- [8] **Engquist B. and Zhao H. K.**, Absorbing boundary conditions for Domain Decomposition. Appl. Num.Math., 1998.
- [9] **Guo W. and Hou L.S.**, Generalization and accelerations of Lions' nonoverlapping domain decomposition method for linear elliptic PDE, SIAM J. Numer. Anal., 41, 2056-2080, 2003.

- [10] **Lions P.L.**, On The Schwarz Alternating Method I, In Pro. First international Symposium on domain Decomposition method for Partial Differential Equations. SIAM, Philadelphia 1988.
- [11] **Lions P.L.**, On the Schwarz alternating method III: a variant for nonoverlapping subdomains, in third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, T. F. Chan, R. Glowinski, J. Perianx, and O. B. Widlund, eds., SIAM, Philadelphia, 202-223, 1990.
- [12] **Lui S.**, A Lions non-overlapping domain decomposition method for domains with an arbitrary interfaces, IMA J. Numer. Anal., 29, 332-349, 2009.
- [13] **Marini L.D. and Quarteroni A .**, Arelaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements. Num. Math., 55, 575-598, 1989.
- [14] **Qin L., Shi Z. and Xu X.**, On the convergence rate of a parallel nonoverlapping domain decomposition method, Sciences in China, Series A: Mathematics, 51, 1461-1478, 2008.
- [15] **Qin L. and Xu X.**, On a parallel Robin-type nonoverlapping domain decomposition method, SIAM J. Numer. Anal., 44, pp. 2539-2558, 2006.
- [16] **Quarteroni A. and Valli A.**, Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Clarendon Press, Oxford, 1999.
- [17] **Schwarz H. A.**, Uber einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich, 15, pp. 272-286, 1870.
- [18] **Smith B. F., Bjorstad P. E., and Gropp W.**, Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 1996.

- [19] **Toselli A. and Widlund O.**, Domain decomposition methods algorithms and theory, vol. 34 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [20] **Boussaha H.** Sur la convergence des méthodes de décomposition de domaines généralisées avec recouvrement. Thèse de doctorat, UBMA-2016.