



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف  
Université Chadli Bendjedid – El Tarf  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
قسم الرياضيات  
Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Spécialité:** Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

### Thème

**Existence de valeurs propres pour un problème  
fractionnaire**

**Présenté par:**

**Gherib Aicha**

**Devant le Jury :**

<b>Dr. Saifia Warda.</b>	<b>MCA</b>	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Président
<b>Mr. Bourara Abdelfettah</b>	<b>MAA</b>	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
<b>Dr. Zahra Youbi</b>	<b>MCB</b>	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examineur

**Année Universitaire 2021-2022**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaire</b>	<b>10</b>
1.1	L'espace $L^p$	11
1.2	Espace de sobolev classique $W^{m,p}$ , $m \in \mathbb{N}$	12
1.3	Les injections dans l'espace de Sobolev	13
1.3.1	Inégalité de poincaré	14
1.3.2	Différentiabilité	15
1.3.3	Point critique	15
<b>2</b>	<b>Espace de sobolev fractionnaire <math>W^{s,p}(\Omega)</math></b>	<b>17</b>
2.1	Espace de sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ pour $s > 1$	20
2.2	Prolongement d'une fonction de $W^{s,p}$	21
2.3	Injection de sobolev	22
2.4	Espace de sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s \in \mathbb{R}$	22
2.5	Opérateur Laplacien Fractionnaire	23
<b>3</b>	<b>Problème de valeur propre pour le Laplacien Fractoinnaire</b>	<b>26</b>
3.1	Existence de la première valeur propre	27
3.2	Propriété de la première fonction propre	34
3.2.1	valeur propre principale	34

**Table des matières**

---

**3.2.2** Simplicité . . . . . 35

**3.3** Existence d'une suite de valeurs propres . . . . . 36

**Bibliographie** . . . . . 46

## Remerciements

Je tiens d'abord à remercier ALLAH AZA WAJAL le tout puissant et miséricordieux, il ma donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

Un grand merci à mon encadreur **M.Bourara Abdelfatah** pour son encadrement, sa patience et ses remarques.

Mes remerciements vont également à tous les membres du jury : **Dr.youbi Zahra** et **Dr.saifia warda** pour l'intérêt qu'ils ont à ma recherche et de l'enrichir par leurs critiques et remarques.

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

Ames chers parents pour leur soutien à l'obtention d'un master en Mathématiques .

Ames chères soeurs Hala et Zayneb.

Et a toute ma famille.

A mon binôme Khalida pour me soutenir en toutes circonstances.

A tous mes camarades avec lesquels j'ai partagé cette année.

A tous les enseignants et les travailleurs de département Mathématiques.

## Notations

$\Omega$  : ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ .

$\overline{\Omega}$  : L'adhérence de  $\Omega$ .

$\mathbb{R}^N$  : Espace euclidien de dimension  $N$ ,  $N \geq 2$ .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  : Produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ .

$\partial\Omega$  : Frontière de  $\Omega$ .

$dx$  : mesure de Lebesgue de dimension  $N$ .

$\nabla u$  : Gradient de  $u$ .  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ .

$\Delta u$  : Laplacien de  $u$ .  $\Delta u = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \right)$

$C_0^\infty(\Omega)$  : Espaces des fonctions de classe  $C^\infty(\Omega)$  à support compact inclus dans  $\Omega$ .

$C^{k,\alpha}$  : Espace des fonctions Holériennes de classe  $k$  dans  $\Omega$ .

$C^{0,\alpha}$  : Espace des fonctions Holériennes sur  $\Omega$ .

$L^p(\Omega)$  : L'espace des fonctions  $p$ -intégrables.

$W^{1,p}(\Omega)$  : Espace de Sobolev standard sur  $\Omega$  d'exposant  $p$ .

$W_0^{1,p}(\Omega)$  : Adhérence de  $D(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$  pour la norme  $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ , i.e  $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$ .

$W^{-1,p'}(\Omega)$  : Dual topologique de  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

$\rightarrow$  : convergence forte.

$\rightharpoonup$  : convergence faible.

$p.p$  : Presque partout.

$X \hookrightarrow Y$  : L'injection continue de  $X$  dans  $Y$ .

$X \hookrightarrow_c Y$  : L'injection compacte de  $X$  dans  $Y$ .

$df(a)$  : La différentielle de  $f$  au point  $u$ .

$W^{s,p}(\Omega)$  : Espace de Sobolev fractionnaire pour  $s$  dans  $(0, 1)$ .

$W_0^{s,p}(\Omega)$  : la fermeture de  $C_0^\infty(\Omega)$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$ .

$\Delta^s u$  : Laplacien fractionnaire de  $u$ .

$(\Delta)_p^s u$  :  $p$ -Laplacien fractionnaire de  $u$ .

---

## Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un problème aux valeurs propres faisant intervenir le laplacien fractionnaire de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $s \in (0, 1)$ .

Le but principal de ce travail est d'étudier l'existence de la première valeur propre et d'examiner ses différentes propriétés, ainsi que l'existence d'une suite de valeurs propres qui tend vers l'infini.

**Mots clés :**

Laplacien Fractionnaire, Valeur propre, Principale, Point critique, Opérateur compact.

---

## Abstract

In this thesis, we are interested in the study of an eigenvalue problem involving the fractional Laplacian of the form :

$$\begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

where  $\Omega$  is a bounded open set of  $\mathbb{R}^n$  and  $s \in (0, 1)$ .

The main objective of this work is to study the existence of the first eigenvalue and to examine its different properties, as well as the existence of a sequence of eigenvalues which tends to infinity.

Key words :

Fractional Laplacian, Eigenvalue, Principal, Critical point, Compact operator.

## ملخص

في هذه الأطروحة ، نحن مهتمون بدراسة مشكلة القيمة الذاتية التي تنطوي على كسور لابلاسيان من النموذج:

$$\begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

حيث  $\Omega$  هو ميدان مفتوح و محدود من  $\mathbb{R}^n$  و  $s \in (0, 1)$ . ندرس الوجود والخصائص المختلفة للقيمة الذاتية الأولى بالإضافة إلى وجود سلسلة من القيم الذاتية التي تميل إلى اللانهاية. الكلمات الدالة:

كسور لابلاسيان ، قيمة ذاتية ، رئيسي ، نقطة حرجة ، مؤثر متراص.

---

# Introduction

L'étude des équations fractionnaires a connu un avancement notable ces dernières années grâce à la contribution de plusieurs mathématicien. L'un des résultats clé dans l'analyse du laplacien fractionnaire est sans doute le résultat de Caffarelli-Silvestre [5]. les auteurs ont prouvé une "correspondance" entre l'opérateur non local  $(-\Delta^s)$  défini dans  $\mathbb{R}^N$ , et un opérateur local divergentiel défini dans  $\mathbb{R}^{N+1}$ . Cette correspondance a permis de prouver plusieurs résultats de régularité et de définir des extensions "naturelles" des notions jusqu'à la limite au cas du laplacien comme la notion de périmètre, courbure moyenne, ..., au cas local [4].

les opérateurs non locaux tels que le laplacien fractionnaire  $(-\Delta)^s$  apparaissent naturellement dans la mécanique des continus, les phénomènes de transition de phase, la dynamique de la population et la théorie des jeux voir par exemple Caffarelli [6]. Plus précisément on considère un opérateur pseudo différentiel de la forme :

$$(-\Delta)^s u(x) = 2 C(N, s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

où  $s \in (0, 1)$  et  $C(N, s)$  la constante de normalisation.

L'opérateur peut être aussi défini en utilisant la Transformée de Fourier

$$(-\Delta)^s u = F^{-1} (|\zeta|^{2s} Fu)$$

où  $Fu$  désigne la Transformée de Fourier.

Dans ce travail nous étudions le problème de valeurs propres de l'opérateur laplacien fractionnaire

$$\begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Notre objectif dans ce travail est consacré à l'étude de l'existence de la première valeur propre ainsi que la fonctions propre associée.

---

Ce travail est réparti principalement en trois chapitres :

Dans le chapitre préliminaire, on rappelle les différentes définitions et résultats qui seront utilisés dans ce qui suit.

Au deuxième chapitre nous donnons un rappel sur les espaces fractionnaires qui sont le cadre fonctionnel des équations liés au laplacien fractionnaire, ensuite nous introduisons la définition du laplacien fractionnaire et quelques de ses propriétés.

Et enfin dans la troisième chapitre nous étudions l'existence et les différentes propriétés de la première valeur propre de notre problème.

# Chapitre 1

## Préliminaire

Ce chapitre a pour objet la présentation des notions et quelques outils nécessaires pour comprendre la suite de ce travail comme ( les espaces de sobolev classique, Inégalité poincaré, Point critique,...etc).

Dans toute la suite  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$ .

## 1.1 L'espace $L^p$

**Définition 1.1.** Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ , on pose :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ } f \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

C'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}^N$ , on le muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Pour  $p = +\infty$ , on pose :

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N ; f \text{ est mesurable et } \exists C > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

C'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}^N$ , on le muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \{ C > 0 \text{ tq } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , on pose :

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N ; f \text{ est mesurable / } f \cdot \chi_k \in L^p(\Omega), \forall k \text{ compact } \subset \Omega \}.$$

**Théorème 1.1.** [9]

$L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ .

$L^p(\Omega)$  est un espace séparable pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .

$L^p(\Omega)$  est un espace réflexif pour tout  $1 < p < +\infty$ .

$L^p(\Omega)$  est un espace uniformément convexe pour tout  $1 < p < +\infty$

### Inégalité de Hölder

**Théorème 1.2.** [7] Soit  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$  avec  $1 \leq p < \infty$  alors  $f \cdot g \in L^1(\Omega)$  et on a :

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

## 1.2 Espace de sobolev classique $W^{m,p}$ , $m \in \mathbb{N}$

Soient  $m \geq 2$  un entier et soit  $p$  un réel avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . On définit par récurrence

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

Il revient au même d'introduire

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega), \quad \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

On note  $D^\alpha u = g_\alpha$ .

L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.

On note  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ ;  $H^m(\Omega)$  muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

est un espace de Hilbert.

**Théorème 1.3.** [9]

$W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ .

$W^{m,p}(\Omega)$  est un espace séparable pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .

$W^{m,p}(\Omega)$  est un espace réflexif pour tout  $1 < p < +\infty$ .

$W^{m,p}(\Omega)$  est un espace uniformément convexe pour tout  $1 < p < +\infty$

**L'espace de sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$**

**Définition 1.2.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , on définit l'espace de sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \quad \exists g \in L^p(\Omega) \text{ telle que } \int_\Omega u \nabla \varphi = - \int_\Omega g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p$$

L'espace de sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega)$

**Définition 1.3.** Etant donné  $1 \leq p < \infty$ , on désigne par  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la fermeture de  $D(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , c'est à dire

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}.$$

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est muni de la norme induite par  $W^{1,p}(\Omega)$ , l'espace  $H_0^1(\Omega)$  est muni du produit scalaire induit par  $H^1(\Omega)$ .

**Théorème 1.4.** [2] Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , alors  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  si et seulement si  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

### 1.3 Les injections dans l'espace de Sobolev

**Injection continue**

**Théorème 1.5.** [3] Soit  $I = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$ , il existe une constante  $C$  (dépend seulement de  $I$ ); telle que :

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \leq p < +\infty.$$

Autrement dit  $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$  avec injection continue.

**Injection compacte**

**Définition 1.4.** L'injection compacte de  $X$  dans  $Y$  signifie que la boule unité de  $X$  est relativement compacte dans  $Y$ . c'est-à-dire  $\overline{B_X(0,1)}$  est compacte dans  $Y$ .

**Théorème 1.6.** [3] (*Injection compacte*) : Supposons que  $I$  est un intervalle ouvert borné, on a :

$L$ 'injection  $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$  est compacte pour  $p > 1$ .

$L$ 'injection  $W^{1,q}(I) \subset L^q(I)$  est compacte pour  $1 \leq q < +\infty$ .

### 1.3.1 Inégalité de Poincaré

**Proposition 1.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné, alors il existe  $C > 0$  telle que :

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

**Théorème 1.7.** Autrement dit, sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la quantité  $\|\nabla u\|_{L^p}$  est une norme équivalente à la norme usuelle de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Théorème 1.8.** [3] (*théorème de convergence dominée dans  $L^p(\Omega)$* )

Soit  $(E, A, \mu)$  un espace mesuré et  $1 \leq p < +\infty$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $L^p(\Omega)$  telle que :

1.  $f_n \rightarrow f$  p.p.
2.  $\exists g \in L^p$  telle que  $|f_n| \leq g$  p.p. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p(\Omega)$  c'est-à-dire  $\int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$  quant  $n \rightarrow +\infty$ .

**Théorème 1.9.** [3] (*théorème de représentation de Riesz*) :

Soit  $1 < p < +\infty$  et soit  $\varphi \in (L^p)'$ , Alors il existe  $u \in L^p$  unique tel que :

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u f; \quad \forall f \in L^p.$$

De plus on a :

$$\|u\|_{L^p} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

**Lemme 1.1.** [4]  $E$  un espace de Banach uniformément convexe, alors toute suite  $(u_n)$  de  $E$  telle que  $u_n$  converge faiblement vers  $u$  dans  $E$  alors

$$\|u\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_E \tag{1.1}$$

### 1.3.2 Différentiabilité

**Définition 1.5.** Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans  $\mathbb{R}^d$ , et soit  $a$  un point de  $U$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire  $L$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} o(\|h\|) = 0$$

L'application  $L$ , si elle existe est unique et s'appelle différentielle de  $f$  en  $a$ , ou application linéaire tangente de  $f$  en  $a$ . On la note  $df_a$ .

### 1.3.3 Point critique

**Définition 1.6.** Soit  $\Omega$  un ouvert d'un espace de Banach  $E$ . Supposons que  $I \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

On dit que  $u \in \Omega$  est un point critique de  $I$ , si

$$I'(u) = 0$$

Si  $u$  n'est pas un point critique, alors on dit que  $u$  est un point régulier de  $I$ .

Si  $c \in \mathbb{R}$ , alors on dit que  $c$  est une valeur critique de  $I$ , s'il existe  $u \in \Omega$  tel que :

$$I(u) = c \text{ et } I'(u) = 0$$

Si  $c$  n'est pas valeur critique, alors on dit que  $c$  est une valeur régulière de  $I$

**Définition 1.7.** Une suite minimisante d'une fonctionnelle  $J : X \rightarrow ]-\infty, +\infty[$  est une suite  $(x_n)$ , telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) \rightarrow \inf_X J$$

### La convergence faible et forte

**Définition 1.8.** Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  et soit  $E'$  son dual topologique. On dit que  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$  dans  $E$ , s'il existe un élément  $x \in E$  tel que :

$$\forall f \in E', \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x) \text{ ou } (\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle) .$$

on notera  $x_n \rightharpoonup x$  dans  $E$ , c'est à dire la convergence faible dans  $E$ .

De même pour la convergence forte, on notera  $x_n \rightarrow x$  dans  $E$  (la convergence en norme).

### Fonction Holdérienne

**Définition 1.9.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , et  $0 \leq \alpha \leq 1$ . On dit qu'une fonction  $u$  est holdérienne d'exposant  $\alpha$  au voisinage de  $x_0 \in \Omega$  si

$$\exists \delta, M > 0 \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \delta); |u(x) - u(x_0)| \leq M |x - x_0|^\alpha$$

On désigne par  $C^{k,\alpha}(\Omega)$  les fonctions de classe  $C^k(\Omega)$  telles que les dérivées d'ordre  $k$  sont holdériennes d'exposant  $\alpha$  au voisinage de tout point  $x_0 \in \Omega$ .

Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est bornée et continue, on écrit :

$$\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|$$

La semi-norme d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est :

$$|f|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sup_{\substack{x,y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

.

La norme d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est :  $\|f\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C(\bar{\Omega})} + |f|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$

# Chapitre 2

## Espace de sobolev fractionnaire

$$W^{s,p}(\Omega)$$

Nous allons subdiviser ce chapitre en deux parties : dans la première partie on commence par présenter les espaces de sobolev fractionnaires  $W^{s,p}(\Omega)$  et leurs propriétés pour  $0 < s < 1$  et  $s > 1$ , ensuite nous donnons une définition alternative de l'espace  $H^s$  via la transformée de Fourier pour  $s$  est un réel. Dans la deuxième partie nous introduisons la définition du laplacien fractionnaire et quelques de ses propriétés.

**Définition 2.1.** Soit  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in [1, +\infty[$ . On définit l'espace fractionnaire de sobolev  $W^{s,p}(\Omega)$  par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{N+sp}} dx dy < \infty \right\}$$

muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + [u]_{s,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

où le terme  $[u]_{s,p}$  est la semi norme de Gagliardo définit par :

$$[u]_{s,p} = \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach.

**Exemple 2.1.**  $x \rightarrow |x|^\alpha \in W^{s,p}(\Omega)$  où  $\Omega = ]0, 1[$  avec  $sp < 1$  en effet :

On pose  $I = |x|^\alpha$  avec  $\alpha = 1$ ,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|x - y|^p}{|x - y|^{sp+1}} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 |x - y|^{p-sp-1} dx dy \\ &= \int_0^1 \left[ \int_0^y (y - x)^{p-sp-1} dx + \int_y^1 (x - y)^{p-sp-1} dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[ -\frac{1}{p-sp} (y - x)^{p-sp} \right]_0^y + \left[ \frac{1}{p-sp} (x - y)^{p-sp} \right]_y^1 dy \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{p-sp} y^{p-sp} + \frac{1}{p-sp} (1 - y)^{p-sp} \right] dy \\ &= \left( \frac{1}{p-sp} \right) \left( \frac{1}{p-sp+1} \right) [y^{p-sp+1}]_0^1 + \left( \frac{1}{p-sp} \right) \left( \frac{1}{p-sp+1} \right) [(1 - y)^{p-sp+1}]_0^1 \\ &= \frac{1}{(p-sp)(p-sp+1)} + \frac{1}{(p-sp)(p-sp+1)} \\ &= \frac{2}{(p-sp)(p-sp+1)} < \infty. \end{aligned}$$

Quelques propriétés de  $W^{s,p}(\Omega)$  pour  $0 < s < 1$  :

**Proposition 2.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , et soient  $p \in [1, +\infty[$  et  $0 < s \leq s' < 1$ .

Alors :

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

est continue. C'est à dire, il existe une constante  $C_1(N, s, p) \geq 1$ . Tel que :

$$\|u\|_{W^{s,p}} \leq C_1(N, s, p) \|u\|_{W^{s',p}}, \forall u \in W^{s',p}(\Omega).$$

En particulier :  $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$ .

premièrement nous avons :

*Démonstration.*

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap [|x-y| \geq 1]} \frac{|u(x)|}{|x-y|^{N+sp}} dx dy \leq \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega \cap [|z| \geq 1]} \frac{1}{|z|^{N+sp}} dz \right) |u(x)|^p dx$$

où  $\frac{1}{|z|^{N+sp}}$  est intégrable puisque  $N + sp > N$ . Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap [|x-y| \geq 1]} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dx dy &\leq 2^{p-1} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap [|x-y| \geq 1]} \frac{|u(x)|^p - |u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dx dy. \\ &\leq 2^p C(N, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \end{aligned} \quad (2.1)$$

D'autre part :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap [|x-y| \leq 1]} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dx dy \leq \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap [|x-y| \leq 1]} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+s'p}} dx dy \quad (2.2)$$

car  $N + sp < N + s'p$  et  $|x - y| < 1$ , alors (2.1) et (2.2) impliquent

Alors :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dx dy \leq 2^p C(N, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+s'p}} dx dy$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{s,p}^p &\leq 2^p C(N, s, p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+s'p}} dx dy \\ &\leq C(N, s, p) \|u\|_{s',p}^p \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Proposition 2.2.** Soient  $p \in [1, +\infty[$  et  $s \in ]0, 1[$ , Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^{0,1}$ , de frontière borné. Alors :

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

est continue. C'est à dire, il existe une constante  $C_2(N, s, p) \geq 1$ . Tel que :

$$\|u\|_{W^{s,p}} \leq C_2(N, s, p) \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

En particulier  $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$ .

**Proposition 2.3.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $p \in [1, +\infty[$  et  $s \in ]0, 1[$ , nous avons alors :

- 1)  $W^{s,p}(\Omega)$  est un espace séparable, et de Banach pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .
- 2)  $W^{s,p}(\Omega)$  est un espace réflexif pour tout  $1 < p < +\infty$ .
- 3)  $W^{s,p}(\Omega)$  est un espace uniformément convexe pour tout  $1 < p < +\infty$ .

## 2.1 Espace de sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ pour $s > 1$

**Définition 2.2.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ , avec  $s > 1$  et  $p \in [1, +\infty[$ . L'espace  $W^{s,p}(\Omega)$  est définie par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{[s],p}(\Omega) \mid D^\alpha u \in W^{s-[\alpha],p}, \forall \alpha, |\alpha| = s \right\} \quad (2.3)$$

ou  $[s]$  désigne la partie entière de  $s$ .

C'est un espace vectoriel, on le muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left( \|u\|_{W^{[s],p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=[s]} \|D^\alpha u\|_{W^{s-[\alpha],p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si  $s = [s]$  alors l'espace  $W^{s,p}(\Omega)$  est coincide avec l'espace de sobolev classique.

$(W^{s,p}(\Omega), \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)})$  est un espace de Banach.

**Quelques propriétés de  $W^{s,p}(\Omega)$  pour  $s > 1$  :**

**Proposition 2.4.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^{0,1}$ , et soit  $p \in [1, \infty[$  et  $s', s > 1$ .*

*Alors si  $s' > s$  :*

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

**Théorème 2.1.** [1]

*Pour  $s > 1$ , l'espace  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ .*

*Pour  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $s > 1$ , on pose :  $w^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$ .*

*Nous avons d'après le théorème  $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ .*

*Toutes les résultats précédent sont valable dans l'espace  $W^{s,p}(\Omega)$  avec  $s > 0$ .*

## 2.2 Prolongement d'une fonction de $W^{s,p}$ :

Comme il est bien connu lorsque  $s$  est un entier (c-à-d le cas ou  $W^{s,p}$  est l'espace de sobolev classique), sous certains hypothèses de régularité sur le domaine  $\Omega$ , toute fonction dans  $W^{s,p}(\Omega)$  peut être prolonger à une fonction de  $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ . Les résultats du prolongement sont assez important dans les applications, et sont nécessaires pour améliorer certains théorèmes d'intégrations dans le cas classique ainsi dans le cas fractionnaire.

**Lemme 2.1.** [9] *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , et  $u \in W^{s,p}(\Omega)$  avec  $0 < s < 1$  et  $p \in [1, +\infty[$ , s'il existe un compact  $k \subset \Omega$  telle que  $u \equiv 0$  dans  $\Omega \setminus k$ , alors :*

*le prolongement  $\tilde{u}$  défini par :*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & , x \in \Omega \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

*appartient à  $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  et  $\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$  où  $C$  est une constante positive dépend de  $N, s, p, K$  et  $\Omega$ .*

## 2.3 Injection de sobolev

**Théorème 2.2.** [3] (*injection continue pour  $\Omega = \mathbb{R}^N$* )

Soit  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $s \in ]0, 1[$ . Alors

Si  $sp < N$ ,  $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $q < Np/(N - sp)$ .

Si  $sp = N$ ,  $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $q < \infty$ .

Si  $sp > N$ ,  $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$  est plus précisément

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{0,s-N/p}(\mathbb{R}^N).$$

On introduit une définition équivalente de l'espace de sobolev fractionnaire via la transformée de Fourier.

## 2.4 Espace de sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s \in \mathbb{R}$

### L'espace de schwartz

**Définition 2.3.** On note  $S$  l'espace des fonctions à décroissance rapide i.e l'ensemble des fonctions  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , tq  $f$  et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. Cette dernière propriété signifie que  $\beta$  et  $\alpha$  étant des multi-indices d'ordre  $n$  :

$$\forall (\beta, \alpha), \lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta |\partial^\alpha f(x)| = 0.$$

### Transformation de Fourier

**Définition 2.4.** la transformée de Fourier  $F$  de  $f$  que l'on note  $\hat{f}$  ou  $F(f)$  est la fonction sur  $\mathbb{R}^n$  définie par :

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^n, \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \quad \hat{f} = F(f)(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\zeta x} f(x) dx.$$

Espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$

**Définition 2.5.** Soit un réel, pour  $s > 0$ . On pose :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|^2)^s |F(u)(\zeta)|^2 d\zeta < \infty \right\}.$$

$H^s(\mathbb{R}^n)$  est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H^s} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|^2)^s |F(u)(\zeta)|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

pour  $u$  et  $v$  dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , on pose :

$$(u, v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|^2)^s \hat{u}(\zeta) \overline{\hat{v}(\zeta)} d\zeta, \quad u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$$

**Proposition 2.5.** pour  $s < 0$ , on pose

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\zeta|^2)^s |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta < \infty \right\}$$

## 2.5 Opérateur Laplacien Fractionnaire

**Définition 2.6.** Soient  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in ]1, +\infty[$  alors on définit le  $p$ -laplacien fractionnaire par :

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2P.V \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

avec

$$P.V \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy$$

**Remarque 2.1.** Si  $p \neq 2$ ,  $(-\Delta)_p^s$  est non linéaire.

Cet opérateur est appelé non local, en ce sens que la valeur de  $p$ -laplacien fractionnaire  $u(x)$  à tout point  $x \in \Omega$  dépend non seulement des valeurs de  $x$  sur l'ensemble, mais en fait sur tout  $\mathbb{R}^N$ .

Cette définition est une généralisation de l'opérateur laplacien fractionnaire lorsque  $p = 2$ , est définie par

$$(-\Delta)^s u(x) = 2 C(N, s) P.V \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy$$

avec une normalisation d'un constant  $C = C(N, s)$ .

la proposition suivante donne la relation entre  $(-\Delta)_p^s$  et  $(-\Delta)^s$ .

**Proposition 2.6.**  $(-\Delta)_p^s \rightarrow (-\Delta)^s$  quant  $s \rightarrow 1^-$ . Où la convergence est dans l'espace dual de  $W_0^{s,p}(\Omega)$ .

**Proposition 2.7.** Soit  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in ]1, +\infty[$ , Alors :

$$(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))'$$

est bien définie, et de plus :

1)  $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  nous avons :

$$\langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} dx dy$$

2)  $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle \leq \|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1} \|v\|_{W_0^{s,p}}$$

et par suite :  $\|(-\Delta)_p^s u\|_{W_0^{-s,p'}} \leq \|u\|_{W_0^{s,p}}^{p-1}$ .

**Définition 2.7.** Soit  $s \in ]0, 1[$ , alors on définit le Laplacien fractionnaire via la transformée de Fourier par :

$$(-\Delta)^s u(x) = F^{-1} (|\zeta|^{2s} \mathcal{F}u(\zeta)) (x), \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

où  $F^{-1}$  est transformée de Fourier inverse, alors

$$F^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\Omega} e^{ix \cdot \zeta} \varphi(\zeta) d\zeta$$

**Proposition 2.8.** *Soit  $s \in ]0, 1[$ . Alors :*

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2}C(N, s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy, \forall x \in \mathbb{R}^N$$

et  $C(N, s)$  est le constante de normalisation (positive) suivant :

$$C(N, s) = \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta \right)^{-1} \quad (2.4)$$

**Proposition 2.9.** *Soient  $s \in ]0, 1[$  et  $C(N, s)$  est la constante définie en (2.4) puis, pour toute  $\zeta \in \mathbb{R}^N$ , l'égalité*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(\zeta \cdot y)}{|y|^{N+2s}} dy = C(N, s)^{-1} |\zeta|^{2s}$$

**Corollaire 2.1.** *Soient  $s \in ]0, 1[$  et  $C(N, s)$  est la constante définie en (2.4) puis, pour toute  $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ , l'égalité :*

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^N)}^2 = 2C(N, s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\zeta|^{2s} |\mathcal{F}u(\zeta)|^2 d\zeta.$$

De plus  $H^s(\mathbb{R}^N) = \widehat{H^s(\mathbb{R}^N)}$

## Chapitre 3

# Problème de valeur propre pour le Laplacien Fractoinnaire

Dans ce chapitre nous étudions le problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $s \in (0, 1)$ ,  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

Où nous montrons l'existence d'une suite de valeurs propres tendant vers l'infini telle que la première valeur propre qui est la plus petite représente le minimum du quotient de Rayleigh :

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^s(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

et que la fonction propre associée est de signe constant.

**Définition 3.1.** On dit que  $u$  est une solution faible de (3.1) si  $u \in H_0^s(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy = \lambda \int_{\Omega} u(x)v(x) dx; \quad \forall v \in H_0^s(\Omega) \quad (3.2)$$

**Définition 3.2.** Soit  $s \in (0, 1)$ , On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de l'opérateur laplacien fractionnaire, s'il existe une solution faible  $u \in H_0^s(\Omega)$ ,  $u \neq 0$  du problème (3.2). La solution faible  $u$  s'appelle fonction propre associée à  $\lambda$ .

**Remarque 3.1.** Remarquons que si on remplace  $v$  par  $u \in H_0^s(\Omega)$  dans (3.2) on obtient  $\lambda$  comme le quotient suivant :

$$\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx}$$

Ce quotient est appelé le quotient de Rayleigh.

### 3.1 Existence de la première valeur propre

**Définition 3.3.** La première valeur propre de l'opérateur Laplacien fractionnaire notée par  $\lambda_1$  est définie par :

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^s(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} = \inf_{u \in H_0^s(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

Le résultat d'existence de la première valeur propre est donné par le théorème suivant.

**Théorème 3.1.** [4] Soit  $s \in (0, 1)$ ,  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , alors le problème admet une fonction propre associée à la première valeur propre  $\lambda_1 > 0$  qui caractérisée comme suite :

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \quad (3.3)$$

### Chapitre 3. Problème de valeur propre pour le Laplacien Fractonnaire

---

pour montrer ce théorème on utilise la méthode de minimisation d'une fonctionnelle. On définit la fonctionnelle suivante :

$$J : H_0^s(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx}$$

D'où  $\lambda_1$  représente le minimum de  $J$ .

**Théorème 3.2.** [4] Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n \geq 2$  alors la fonction  $J : H_0^s(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$  est différentiable sur  $H_0^s(\Omega)$

*Démonstration.* Soit  $u \in H_0^s(\Omega)$  nous avons :  $u \in L^2(\Omega)$ , alors :

$$\|u\|_{H_0^s(\Omega)} < +\infty \text{ et } \|u\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$$

alors  $J(u)$  est bien définie.

On montre que  $J : u \in H_0^s(\Omega) / \{0\}$  est différentiable en  $u \in H_0^s(\Omega) / \{0\}$  c-à-d

$$J(u+v) = J(u) + L_u.v + o(v); \forall v \in H_0^s(\Omega)$$

où  $L : H_0^s(\Omega) / \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application linéaire continue.

En effet,  $\forall u \in H_0^s(\Omega)$  on pose :

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy, K(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx$$

1. Pour  $I(u)$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 I(u+v) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{((u+v)(x) - (u+v)(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{((u(x) - u(y)) + (v(x) - v(y)))^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2 + 2(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) + (v(x) - v(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dx dy \\
 &= I(u) + 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{((u(x) - u(y))(v(x) - v(y)))}{|x-y|^{N+2s}} dx dy + \|v\|_{H_0^s}^2 \\
 &= I(u) + L_u.v + o(v)
 \end{aligned}$$

telle que

$$L_u.v = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{((u(x) - u(y))(v(x) - v(y)))}{|x-y|^{N+2s}} dx dy$$

et

$$o(v) = \|v\|_{H_0^s}^2$$

donc  $I(u)$  est différentiable et

$$\langle I'(u), v \rangle = L_u.v = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{((u(x) - u(y)) + (v(x) - v(y)))}{|x-y|^{N+2s}} dx dy$$

2. Pour  $K(u)$

nous avons

$$\begin{aligned}
 K(u+v) &= \int_{\Omega} |u+v|^2 dx = K(u) + 2\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &= K(u) + L_u.v + o(v)
 \end{aligned}$$

telle que

$$L_u.v = 2\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

et

$$o(v) = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

car  $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{H_0^s}$ , donc  $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|v\|_{H_0^s}^2 = o(v)$   
 donc  $K(u)$  est différentiable et

$$\langle K'(u), v \rangle = L_u \cdot v = 2 \int_{\Omega} uv dx$$

3. Pour  $J(u)$ ,

on a  $J(u) = \frac{I(u)}{K(u)}$ ,

d'autre part on a

$$K(u+v) = K(u) \left( 1 + \frac{2}{K(u)} \langle u, v \rangle + o(v) \right)$$

on pose

$$X = \frac{2}{K(u)} \langle u, v \rangle + o(v)$$

donc

$$K(u+v) = K(u) (1 + X)$$

avec  $X \rightarrow 0$  quant  $v \rightarrow 0$  donc  $o(X) = o(v)$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{K(u+v)} &= \frac{1}{K(u)(1+X)} = \frac{1}{K(u)} (1 - X + o(X)) \\ &= \frac{1}{K(u)} - \frac{2}{K(u)^2} \langle u, v \rangle + o(v) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J(u+v) &= (I(u) + 2\langle u, v \rangle_{H_0^s(\Omega)} + o(v)) \times \left( \frac{1}{K(u)} - \frac{2}{K(u)^2} \langle u, v \rangle + o(v) \right) \\ &= \frac{I(u)}{K(u)} + \frac{2}{K(u)} \langle u, v \rangle_{H_0^s(\Omega)} - 2 \frac{I(u)}{K(u)^2} \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + o(v) \end{aligned}$$

donc  $J(u)$  est différentiable en  $u$  et

$$L_u \cdot v = \frac{2}{K(u)} \left( \langle u, v \rangle_{H_0^s(\Omega)} - \frac{I(u)}{K(u)} \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \right)$$

□

**Remarque 3.2.** *Tout point critique de  $J$  est une solution faible de (3.1), i.e tout point critique  $u$  de  $J$  nous avons*

$$\langle J'(u), v \rangle = 0, \forall v \in H_0^s(\Omega)$$

et par suite :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{((u(x) - u(y))(v(x) - v(y)))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy = \lambda \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

### Preuve du théorème (3.1)

D'abord on montre que

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy$$

On a

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^s(\Omega) / \{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^s}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{H_0^s}^2 \quad (3.4)$$

car  $\{u \in H_0^s(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\} \subset \{u \in H_0^s(\Omega) / \{0\}\}$ .

Pour  $u \in H_0^s(\Omega)$ ,

on pose

$$v = \frac{u}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \in H_0^s(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$$

alors

$$u(x) - u(y) = \|u\|_{L^2(\Omega)} (v(x) - v(y))$$

donc

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 (v(x) - v(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy .$$

d'où

$$\frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} = \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^p \geq \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2$$

Ce qui implique

$$\inf_{u \in H_0^s(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \geq \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \quad (3.5)$$

de (3.4) et (3.5) on obtient :

$$\inf_{u \in H_0^s(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} = \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2$$

Pour montrer le théorème on utilise la méthode directe de minimisation.

pour  $u \in H_0^s(\Omega)$ ,

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^s(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

D'après l'inégalité de Poincaré

$$\exists C > 0 : \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u\|_{H_0^s}^2$$

Par conséquent  $\lambda_1 \geq \frac{1}{C} > 0$ .

Soit  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite minimisante, telle que

$\forall n > 0, \exists u_n : \lambda_1 < \frac{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} < \lambda_1 + \frac{1}{n}$ . Alors

$$\frac{\|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} \rightarrow \lambda_1.$$

C'est-à-dire

$$\|u_n(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 \text{ et } \|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \rightarrow \lambda_1$$

alors  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H_0^s(\Omega)$ , donc il existe un sous suite  $H_0^s(\Omega)$  et  $u \in H_0^s(\Omega)$  telle que :

$$u_n \rightarrow u \text{ faiblement dans } H_0^s(\Omega).$$

Par le lemme (1.1), On obtient

$$\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \lambda_1$$

alors  $\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \lambda_1$ .

D'où

$$\|u\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \inf_{v \in H_0^s(\Omega) / \{0\}} \|v\|_{H_0^s(\Omega)}^2$$

donc  $u$  est un point minimum.

Posons

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy$$

$$K(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx,$$

et nous définissons le quotient  $J : H_0^s(\Omega) / \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  par

$$J(u) = \frac{I(u)}{K(u)}$$

alors

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^s(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} J(u)$$

Ainsi  $\exists u \in H_0^s(\Omega) / \{0\}$  et  $J(u) = \lambda_1$ . Et on a la fonction  $J$  est différentiable d'après le théorème (3.2), et on a

$$\langle J'(u), v \rangle = \frac{2}{K(u)} \left( \langle I'(u), v \rangle - \frac{I(u)}{K(u)} \langle K'(u), v \rangle \right)$$

Comme  $u$  est un point minimum de  $J$  donc  $J'(u) = 0$ , et par conséquent

$$\langle I'(u), v \rangle = \frac{I(u)}{K(u)} \langle K'(u), v \rangle = \lambda_1 \langle K'(u), v \rangle.$$

Alors  $u$  est une solution faible de (3.2).

## 3.2 Propriété de la première fonction propre

### 3.2.1 valeur propre principale

**Proposition 3.1.** [2] *Soit  $s \in ]0, 1[$  et  $n > 2s$ , alors il existe une fonction non négative  $e_1 \in H_0^s(\Omega)$ . Qui est une fonction propre associée à  $\lambda_1$ , est le minimum dans (3.3).*

*C'est-à-dire  $\|e_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$  et*

$$\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_1(x) - e_1(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \quad (3.6)$$

*Démonstration.* il suffit de montrer que  $e_1$  est de signe constant

D'abord, on montre que

Si  $e$  est une fonction propre associée à  $\lambda_1$ , alors  $e$  et  $|e|$  est le minimum dans (3.3); c'est -à-dire  $e \geq 0$  ou  $e \leq 0$ .

D'après les formules (3.2) et (3.6), on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_1(x) - e_1(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy = \lambda_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_1(x) - e_1(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy$$

et d'après l'inégalité triangulaire,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$||e(x)| - |e(y)|| \leq |e(x) - e(y)|$$

mais, si  $x \in \{e > 0\}$  et  $y \in \{e < 0\}$ , on a

$$\begin{aligned} ||e(x)| - |e(y)|| &= |e(x) - e(y)| = \max\{e(x) + e(y), e(x) - e(y)\} \\ &< e(x) - e(y) = |e(x) - e(y)| \end{aligned}$$

alors nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|e(x)| - |e(y)|)^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_1(x) - e_1(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|e(x)| - |e(y)|)^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy < \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_1(x) - e_1(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy$$

$$\text{si } |\{e > 0\}| \neq 0 \text{ et } |\{e < 0\}| \neq 0$$

comme  $e$  est le minimum alors :  $\lambda_1 = \|e\|_{H_0^s(\Omega)} \leq \|e\|_{H_0^s(\Omega)}$  ce qui implique

$$\| |e| \|_{H_0^s(\Omega)} = \|e\|_{H_0^s(\Omega)} = \|e_1\|_{H_0^s(\Omega)} \text{ si } |\{e > 0\}| = 0 \text{ ou } |\{e < 0\}| = 0$$

Alors  $e_1$  est de signe constant. □

### 3.2.2 Simplicité

Nous montrons dans cette section que la fonction propre associée à la première valeur propre est unique à une constante multiplicative près.

**Théorème 3.3.** [2] *La première valeur propre  $\lambda_1$  est simple, c'est-à-dire si  $u \in H_0^s(\Omega)$  est une solution faible de (3.1) alors  $u = Ce_1$ , avec  $C \in \mathbb{R}$  ;*

*Démonstration.* On suppose que  $f_1 \in H_0^s(\Omega)$  non nul, une autre fonction propre associée à  $\lambda_1$ , avec  $f_1 \neq e_1$ , alors nous avons  $f_1 \geq 0$  ou  $f_1 \leq 0$ . Considérons le cas

$$f_1 \geq 0.$$

On pose

$$\tilde{f}_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|_{L^2(\Omega)}} \text{ et } g_1 = e_1 - \tilde{f}_1.$$

On montre que

$$g_1 = 0.$$

On raisonne par l'absurde, en supposant que

$$g_1 \neq 0.$$

On a  $g_1 = e_1 - \tilde{f}_1$ , alors  $g_1$  est une fonction propre associée à  $\lambda_1$ , alors nous avons  $g_1 \geq 0$  ou  $g_1 \leq 0$ .

Ce que implique  $e_1 \geq \tilde{f}_1$  ou  $e_1 \leq \tilde{f}_1$ , et on suppose que  $e_1$  non négative, donc

$$e_1^2 \geq \tilde{f}_1^2 \text{ ou } e_1^2 \leq \tilde{f}_1^2 \quad .$$

D'autre part, on a

$$\int_{\Omega} (e_1^2(x) - \tilde{f}_1^2(x)) dx = \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\tilde{f}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 - 1 = 0.$$

Alors  $e_1^2 - \tilde{f}_1^2 = 0$  donc  $e_1 = \tilde{f}_1$ ,

d'où  $g_1 = 0$  c'est une contradiction.

Donc, on obtient  $f_1$  est proportionnelle à  $e_1$ . □

### 3.3 Existence d'une suite de valeurs propres

Dans cette section montrons qu'ils existe une suite de valeurs propres positive qui tend vers l'infini pour l'opérateur Laplacien fractionnaire .

**Lemme 3.1. (orthogonalité)** [2] Soient  $\lambda, \tilde{\lambda}$  deux valeurs propres différentes du problème (3.2), avec des fonctions propres  $e$  et  $\tilde{e} \in H_0^s(\Omega)$ , respectivement, alors

$$\langle e, \tilde{e} \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 = \int_{\Omega} e(x) \tilde{e}(x) dx$$

*Démonstration.* Pour  $e \neq 0$  et  $\tilde{e} \neq 0$ .

Posons  $f = \frac{e}{\|e\|_{L^2(\Omega)}}$ ,  $\tilde{f} = \frac{\tilde{e}}{\|\tilde{e}\|_{L^2(\Omega)}}$  qui sont des fonctions propres aussi, dans (3.2) on remplace  $u$  par  $f$  et on remplace  $v$  par  $\tilde{f}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} f(x) \tilde{f}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(f(x) - f(y))(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \\ &= \tilde{\lambda} \int_{\Omega} f(x) \tilde{f}(x) dx \end{aligned}$$

alors les valeurs propres

$$(\lambda - \tilde{\lambda}) \int_{\Omega} f(x) \tilde{f}(x) dx = 0.$$

Avec  $\lambda \neq \tilde{\lambda}$  donc

$$\int_{\Omega} f(x) \tilde{f}(x) dx = 0$$

d'où

$$\langle f, \tilde{f} \rangle_{H_0^s(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(f(x) - f(y))(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy = 0.$$

□

**Théorème 3.4.** [2] *L'ensemble des valeurs propres du problème (3.1) forment une suite croissante  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  avec :*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots$$

et

$$\lambda_k \rightarrow +\infty \text{ quant } k \rightarrow +\infty$$

de plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les valeurs propres sont caractérisées comme suit

$$\lambda_{k+1} = \min_{\substack{u \in P_{k+1} \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \quad (3.7)$$

où

$$P_{k+1} = \left\{ u \in H_0^s(\Omega) \text{ tq } \langle u, e_j \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 \forall j = 1, \dots, k \right\} ;$$

*Démonstration.* On définit  $\lambda_{k+1}$  comme dans (3.7) existe, de plus,  $p_{k+1} \subseteq p_k \subseteq H_0^s$ , On a

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots$$

On montre que,

$$\lambda_1 \neq \lambda_2.$$

On pose  $e_2 \in p_2$  aussi une fonction propre associée à  $\lambda_1$  donc, d'après le théorème de simplicité  $e_2 = c e_1$ , avec  $c \in \mathbb{R}$ , et  $c \neq 0$ , et  $e_2 \neq 0$ , puisque  $e_2 \in p_2$  alors

$$0 = \langle e_2, e_1 \rangle_{H_0^s(\Omega)} = c \|e\|_{H_0^s(\Omega)}^2$$

Ce que implique  $e \equiv 0$ . C'est une contradiction

Donc

$$\lambda_1 \neq \lambda_2.$$

- Pour tout  $\varphi \in p_{k+1}$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy = \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi(x) dx$$

On montre que  $e_{k+1}$  est une fonction propre associée à  $\lambda_{k+1}$ , pour tout  $\varphi \in H_0^s(\Omega)$ .

C'est-à-dire on montre que la formulation faible est valable pour tout  $\varphi \in H_0^s(\Omega)$  non seulement dans  $p_{k+1}$ .

On procède par récurrence

C'est-à-dire on suppose qu'elle est vrai pour  $1, \dots, k$  et on la démontre pour  $k + 1$

On utilise la décomposition en somme directe.

$$H_0^s = \text{span} \{e_1, \dots, e_k\} \oplus \{\text{span} \{e_1, \dots, e_k\}\}^\perp = \text{span} \{e_1, \dots, e_k\} \oplus p_{k+1}$$

Donc, pour tout  $\varphi \in H_0^s(\Omega)$ , nous écrivons  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , avec  $\varphi_2 \in p_{k+1}$  et

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^k c_i e_i$$

Pour  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ . Alors la formulation faible avec  $\varphi$  une fonction test, nous avons,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi(x) dx \\ = & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\varphi_1(x) - \varphi_1(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi_1(x) dx \\ = & \sum_{i=1}^k c_i \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy - \lambda_i \int_{\Omega} e_{k+1}(x) e_i(x) dx \right] \end{aligned}$$

d'autre part, pour  $i = 1, \dots, k$  nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy = \lambda_i \int_{\Omega} e_{k+1}(x) e_i(x) dx$$

d'après le lemme (3.1) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy = 0 = \lambda_i \int_{\Omega} e_{k+1}(x) e_i(x) dx$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi(x) dx = 0.$$

Alors  $e_{k+1}$  est une fonction propre associée à  $\lambda_{k+1}$ .

Pour  $h, k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq h$ , alors

$$\langle e_k, e_h \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 = \int_{\Omega} e_k(x) e_h(x) dx,$$

On montre que

$$\lambda_{k+1} \rightarrow +\infty \text{ quant } k \rightarrow +\infty.$$

On suppose que  $\lambda_k \rightarrow c$ , tq  $c \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lambda_k$  est borné dans  $\mathbb{R}$ , puisque  $\|e_k\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \lambda_k$ , alors d'après le théorème d'injection compacte il existe une sous suite  $e_{k_j}$ , tq :

$$e_{k_j} \rightarrow e \text{ dans } L^2(\Omega)$$

comme  $k_j \rightarrow +\infty$ , et  $e \in L^2(\Omega)$ . En particulier,

$$e_{k_j} \text{ est une suite de cauchy dans } L^2(\Omega).$$

d'autre part on a  $e_{k_j}$  et  $e_{k_i}$  sont orthogonal Dans  $L^2(\Omega)$ , alors

$$\|e_{k_j} - e_{k_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|e_{k_j}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_{k_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2$$

C'est une contradiction.

Maintenant, nous montrons que la suite des valeurs propres construite en (3.7) c-à-d toute valeur propre du problème (3.2) s'écrit sous la forme (3.7).

On raisonne par l'absurde, supposons qu'il existe une valeur propre  $\lambda$  telle que :

$$\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

soit  $e \in H_0^s(\Omega)$  est une fonction propre associée à  $\lambda$ , alors  $\|e\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

Donc on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e(x) - e(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy = \lambda.$$

Comme est le minimum, on a  $\lambda = \|e\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \geq \|e_1\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \lambda_1$

on a  $\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  et  $\lambda_k \rightarrow +\infty$ , implique qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  telle que

$$\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}.$$

Alors

$$e \in p_{k+1}.$$

Si  $e \in p_{k+1}$ , on déduire que  $\lambda = \|e\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \geq \lambda_{k+1}$ .

Alors contradiction, donc  $e \in p_{k+1}$ . Ce que implique il existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  telle que  $\langle e, e_i \rangle_{H_0^s(\Omega)} \neq 0$ . C'est une contradiction, et donc la preuve de  $\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est faux, alors toutes les valeurs propres appartiennent à la suite  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

**Remarque 3.3.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une fonction  $e_{k+1} \in p_{k+1}$ , qui est une fonction propre associée à  $\lambda_{k+1}$ , réalise le minimum en (3.7), c'est-à-dire  $\|e_{k+1}\|_{L^2(\Omega)} = 1$  et

$$\lambda_{k+1} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy$$

**Théorème 3.5.** [4] La suite  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de fonction propre correspondant à  $\{\lambda_k\}$  est une base orthonormale de  $L^2(\Omega)$  est une base orthogonale de  $H_0^s(\Omega)$ .

*Démonstration.* D'abord on montre que  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $H_0^s(\Omega)$ .

On montre que

$$\text{Si } v \in H_0^s(\Omega) \text{ telle que } \langle v, e_k \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Alors } v \equiv 0$$

On raisonne par l'absurde, on suppose qu'il existe  $v \in H_0^s(\Omega)$  non trivial satisfait :

$$\langle v, e_k \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

alors, on peut supposer  $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$  et on a  $\lambda_{k+1} \rightarrow +\infty$  et  $k \rightarrow +\infty$  donc il existe  $k \in \mathbb{N}$  telle que

$$\|v\|_{H_0^s(\Omega)}^2 < \lambda_{k+1} = \min_{\substack{u \in p_{k+1} \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy$$

donc  $v \in p_{k+1}$  et il existe  $j \in \mathbb{N}$  telle que  $\langle v, e_j \rangle_{H_0^s(\Omega)} \neq 0$  ce qui contradiction, alors  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $H_0^s(\Omega)$ .  $\square$

**Théorème 3.6.** [4] *Chaque valeur propre  $\lambda_k$  a une multiplicité finie, plus précisément, si  $\lambda_k$  est telle que :*

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \dots = \lambda_{k+h} < \lambda_{k+h+1}$$

pour  $h \in \mathbb{N}_0$ , alors l'ensemble de toutes les fonctions propres correspondant à  $\lambda_k$  correspond

à

$$\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\}.$$

*Démonstration.* Soit  $h \in \mathbb{N}_0$  telle que  $\lambda_{k-1} < \lambda_k = \dots = \lambda_{k+h} < \lambda_{k+h+1}$  est vrai.

On a : chaque élément de  $\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\}$  est une fonction propre de problème (3.2)

correspondant à  $\lambda_k = \dots = \lambda_{k+h}$ .

Donc montrer que toute fonction propre  $\psi \neq 0$  correspondant à  $\lambda_k$  appartient à  $\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\}$ .

On écrire

$$H_0^s = \text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\} \oplus (\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\})^\perp.$$

Et donc  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , avec

$$\psi_1 \in \text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\} \text{ et } \psi_2 \in (\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\})^\perp.$$

En particulier

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0.$$

Puisque  $\psi$  est une fonction propre correspondant à  $\lambda_k$ , alors  $\psi$  vérifie la formulation faible et on pose la fonction test  $\psi$ , on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\psi(x) - \psi(y))^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \\ &= \|\psi\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \|\psi_1\|_{H_0^s(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

donc

$$\lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\psi_1\|_{H_0^s(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{H_0^s(\Omega)}^2. \quad (3.8)$$

De plus on a  $e_k, \dots, e_{k+h}$  sont fonctions propres correspondant à  $\lambda_k = \dots = \lambda_{k+h}$ , et donc

$\psi_1$  est aussi une fonction propre correspondant à  $\lambda_k$ . Alors  $\psi_1$  vérifie la formulation faible et on pose la fonction teste  $\psi_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_k \int_{\Omega} \psi_1(x) \psi_2(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\psi_1(x) - \psi_1(y))(\psi_2(x) - \psi_2(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \\ &= \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0 \end{aligned}$$

alors

$$\int_{\Omega} \psi_1(x) \psi_2(y) dx = 0$$

donc

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\psi_1 + \psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.9)$$

On écrit

$$\psi_1 = \sum_{i=k}^{k+h} c_i e_i$$

avec  $c_i \in \mathbb{R}$ . D'après l'orthogonalité de  $H_0^s(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ , on obtient

$$\|\psi_1\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 \|e_i\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 \lambda_i = \lambda_k \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 = \lambda_k \|\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.10)$$

On a  $\psi$  est une fonction propre correspondant à  $\lambda_k$ , et  $\psi_1$  est aussi une fonction propre correspondant à  $\lambda_k$ , alors on déduit que  $\psi_2$  est aussi une fonction propre correspondant à  $\lambda_k$  alors d'après le lemme (3.1), on obtient

$$\langle \psi_2, e_1 \rangle_{H_0^s(\Omega)} = \dots = \langle \psi_2, e_{k-1} \rangle_{H_0^s(\Omega)} = 0.$$

Donc

$$\psi_2 \in (\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\})^\perp = p_{k+h+1}.$$

On montre que

$$\psi_2 \equiv 0$$

On suppose que,  $\psi_2 \neq 0$ . Alors

$$\begin{aligned} \lambda_k < \lambda_{k+h+1} &= \min_{u \in p_{k+h+1}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} \\ &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\psi_2(x)-\psi_2(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |\psi_2(x)|^2 dx} \\ &= \frac{\|\psi_2\|_{H_0^s(\Omega)}^2}{\|\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Alors (3.8),(3.9),(3.10) et (3.11), on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\psi_1\|_{H_0^s(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{H_0^s(\Omega)}^2 \\ &> \lambda_k \|\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_k \|\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

C'est une contradiction, alors  $\psi_2 \equiv 0$ . D'où

$$\psi = \psi_1 \in \text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\}.$$

□

## Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié un problème typique aux valeurs propres faisant intervenir l'opérateur laplacien fractionnaire dans un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous avons montré l'existence de la première valeur propre via la théorie des points critiques et nous avons montré qu'elle est simple et principale .

Notre problème peut être généralisé : en remplaçant l'opérateur  $-\Delta^s u$  par le p-laplacien fractionnaire  $(-\Delta)_p^s$  tel que :

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

# Bibliographie

- [1] **ALIOUANE AMINE**, Mémoire de Master(2018/2019), "Laplacien Fractionnaire", Université de Saida - Dr Moulay Tahar, Spécialité : Analyse Mathématique.
- [2] **AMMARI IMANE**, Mémoire de Master (2019/2020), "Etude d'un problème p-laplacien fractionnaire avec un terme non linéaire singulier". Université Mohamed Boudiaf de M'sila, Option : EDPs et applications.
- [3] **AMMI AMIRA**, Mémoire de Fin d'étude(2020/2021), "Spectre du laplacien dans  $L^2(\Omega)$ , où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ". Uninersité Chadli Bendjdud-El Tarf, Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Calcul Stochastique.
- [4] **BELHOUT KHADRA**, Mémoire de Master (2018/2019), "problème de valeurs propres pour le laplacien fractionnaire". Université Mohamed Boudiaf de M'sila, Opion : EDP et application.
- [5] **Caffarelli, L., & Silvestre, L.** (2007). An extension problem related to the fractional Laplacian. *Communications in partial differential equations*, 32(8), 1245-1260.
- [6] **Caffarelli, L.** (2012). Non-local diffusions, drifts and games. In *Nonlinear partial differential equations* (pp. 37-52). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [7] **MR BENTIFOUR RACHID**, Doctorat En Sciences(soutenue le 15/3/2017), "Problèmes elliptiques et paraboliques fractionnaire avec données géné-

## Bibliographie

---

- rales".Université ABDOU-BEKR BELKAID - TLEMCEM, Spécialité : Mathématiques et applications.
- [8] **Hain BREZIS. ANALYSE FONCTIONNELLE**, "théorie et application". "Université Pierre et Marie Curie et Ecole Polytechnique".
- [9] **MIRA SOUMIA**, Mémoire de Fin D'étude (2018/2019), "Sur un espace fractionnaire de sobolev avec exposant variable et applications"
- [10] **OUALI. S. IDIR. L**, Mémoire de Fin d'étude (2012), "Espace de sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  et  $W^{s,p}(\Omega)$ ".Université Adderrahmane Mira de Béjaia, Option : Analyse et probabilités.
- [11] **SRATI MOHAMMED**, Mémoire de Fin d'étude ( soutenue le 22/6/2017), "P-laplacien fractionnaire  $(-\Delta)_p^s$ ". Université de Sidi Mohamed Ben Abdellah, FSDM, Spécialité : EDP et l'analyse Numériques.