



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

EXISTENCE ET UNICITÉ DE POINTS FIXES COMMUNS DANS
DES ESPACES b-MÉTRIQUES ET DE TYPE b-MÉTRIQUES

Présenté par :

DARI Aya

Devant le Jury :

Dr. ADJEMI Salim	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Président
Dr. BOUHADJERA Hakima	MCA	Univ Badji Mokhtar Annaba	Rapporteur
Dr. BOUNOUALA Amina	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2022-2023

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon adorable mère Mabrouka.

A mon cher père Farid.

A mes adorables soeurs Rania et Rahil.

A ma chère cousine Dalel.

A mon adorable tante Nassima.

A mes chères amies Souhaila, Ibtissem et Raounek.

A tous ceux et toutes celles qui ont contribué de près ou de loin à la création de ce mémoire, qu'ils m'excusent de ne pouvoir les citer nommément. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance distinguée.

Remerciements

Je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances à mon respectable encadreur la docteure Bouhadjera pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé, je lui témoigne aussi ma gratitude pour ses meilleurs conseils et ses encouragements tout au long de ma recherche.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à la cheffe du département la docteure Saïfia et au responsable de la spécialité Master : Analyse fonctionnelle et calcul stochastique le docteur Mehri pour leur soutien, leur disponibilité, leur assistance, leurs grands efforts, leurs orientations et leurs aides précieuses.

J'adresse mes vifs remerciements à Mr Adjemi pour le grand honneur qu'il me fait en président le jury de soutenance.

Je présente aussi mes sincères remerciements à Mme Bounouala d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Enfin, j'adresse mes grands remerciements à Mme Benseghir Rym, Mr Bourara Abdelfatah, Mme Boumaza Akila et Mr Aoun Farid.

Résumé

On s'intéresse à la théorie du point fixe car c'est une branche pleinement développée et est l'un des domaines de recherche les plus dynamiques des soixante dernières années, avec de nombreuses applications dans divers domaines de mathématiques pures et appliquées, ainsi que dans les sciences physiques, économiques et de la vie. Ce travail est constitué de trois parties et est concentré sur l'étude de l'existence et l'unicité de point fixe commun pour des applications qui ont des propriétés faibles. Dans le premier chapitre de ce travail, on a présenté les fameux théorèmes du point fixe à savoir le théorème de Banach, le théorème de Browder, celui de Caristi, le théorème de Brouwer, celui de Kakutani, de Schauder et de Krasnoselskii. Dans le deuxième chapitre, on a présenté un théorème de point fixe commun et unique pour deux applications occasionnellement faiblement biaisées de type (A) dans un espace b-métrique. Dans le troisième et dernier chapitre, on a démontré l'existence et l'unicité de points fixes communs pour deux applications occasionnellement faiblement biaisées de type (A) satisfaisant des conditions contractives dans un espace de type b-métrique.

Phrases et mots clés : Espace b-métrique, espace de type b-métrique, applications occasionnellement faiblement biaisées de type (A), théorème de point fixe commun et unique.

Abstract

We are interested in fixed point theory because it is a fully developed branch and is one of the most dynamic fields of research of the last sixty years, with numerous applications in various fields of pure and applied mathematics, as well as in the physical, economic and life sciences. This work consists of three parts and is focused on the study of the existence and uniqueness of common fixed point for mappings which have weak properties. In the first chapter of this work, we presented the famous theorems of the fixed point namely the theorem of Banach, the theorem of Browder, Caristi's theorem, the theorem of Brouwer, that of Kakutani, of Schauder and of Krasnoselskii. In the second chapter, we presented a unique common fixed point theorem for two occasionally weakly biased maps of type (A) in a b-metric space. In the third and last chapter, we proved the existence and uniqueness of common fixed points for two occasionally weakly biased maps of type (A) satisfying contractive conditions in a b-metric-like space.

Keywords and phrases : b-metric space, b-metric-like space, occasionally weakly biased mappings of type (A), unique common fixed point theorem.

ملخص

يهتم المرء بنظرية النقطة الثابتة لأنها فرع متطور جدا وهي واحدة من أكثر مجالات البحث ديناميكية في السنوات الستين الماضية، مع العديد من التطبيقات في مختلف مجالات الرياضيات البحتة والتطبيقية، وكذلك في المجال المادي والاقتصادي وعلوم الحياة. يتكون هذا العمل من ثلاثة أجزاء ويركز على دراسة وجود ووحدانية النقطة الثابتة المشتركة للتطبيقات ذات الخصائص الضعيفة. في الفصل الأول من هذا العمل، قدمنا النظريات الشهيرة للنقطة الثابتة وهي نظرية باناخ، نظرية براودر، نظرية كاريسكي، نظرية بروير، نظرية كاكوتاني، شوبر وكراسنوسيلسكي. في الفصل الثاني، قدمنا نظرية النقطة الثابتة المشتركة والفريدة لتطبيقات منحازين بضعف في بعض الأحيان من النوع (أ) في فضاء ب-متري. في الفصل الثالث والأخير، أثبتنا وجود وتفرد النقاط الثابتة المشتركة لتطبيقات منحازين بضعف في بعض الأحيان من النوع (أ) يلبين الشروط المقلصة في فضاء من النوع ب-متري.

الكلمات والعبارات المفتاحية: فضاء ب-متري، فضاء من النوع ب-متري، التطبيقات المنحازة أحياناً بشكل ضعيف من النوع (أ)، نظرية النقطة الثابتة المشتركة الفريدة.

Table des matières

Introduction	7
1 L’historique du Point Fixe	9
1.1 Introduction	9
1.2 Théorèmes du point fixe	10
1.3 Théorèmes de point fixe sur des espaces métriques	10
1.4 Théorèmes de point fixe en topologie	11
1.5 Point fixe métrique et topologique	12
1.6 Rappel	13
2 Théorèmes de point fixe commun dans un espace b-métrique	17
2.1 Introduction et préliminaires	17
2.2 Résultats pour deux applications	19
3 Théorèmes de point fixe commun dans un espace de type b-métrique	25
3.1 Introduction	25
3.2 Résultats principaux	26
Conclusion	37
Bibliographie	38

Introduction

Il est bien connu que le théorème de Banach est l'un des résultats les plus importants et les plus attrayants de l'analyse mathématique. Plusieurs mathématiciens essayent de le généraliser ; parfois en manipulant la condition contractive et d'autres fois par augmenter le nombre d'applications. En outre, toute la théorie du point fixe est un sujet important dans différents domaines tels que la géométrie, les équations différentielles, l'informatique, la physique, l'économie, l'ingénierie, etc. Une fois l'existence des solutions est garantie, la méthodologie numérique sera établie afin d'obtenir une solution approchée du problème du point fixe. Le point fixe des fonctions dépend fortement des espaces considérés qui sont définis à l'aide d'axiomes intuitifs. En particulier, des variantes généralisées des espaces métriques standards sont proposées, à titre d'exemple, les espaces métriques partiels, les espaces métriques disloqués, les espaces b-métriques, les espaces de type b-métriques, etc. Dans ce travail on va prouver l'existence et l'unicité de points fixes communs pour des applications occasionnellement faiblement biaisées de type (A) dans des espaces b-métriques et de type b-métriques ; ces résultats améliorent et étendent plusieurs résultats dans le domaine du point fixe.

Le présent mémoire contient trois principaux chapitres :

Le premier chapitre contient un court historique du point fixe. Plus précisément, on a énoncé les célèbres théorèmes du point fixe en commençant par le principe de contraction de Banach, qui donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tende vers un point fixe. Le théorème de Browder qui fait partie de la grande famille des théorèmes de point fixe, dans le cas particulier des espaces de Banach uniformément convexes et l'espace de Hilbert. Le théorème de Caristi qui étend le théorème du point fixe de Banach-Picard, en garantissant l'existence de points fixes pour une plus large classe d'applications d'un espace métrique complet dans lui-même. Le théorème de Brouwer qui fait partie de la grande famille des théorèmes de point fixe. Il est particulièrement célèbre parce qu'il est utilisé dans de nombreuses branches mathématiques. Le théorème de Kakutani est un théorème de point fixe qui généralise celui de Brouwer.

Il fournit une condition suffisante pour qu'une telle fonction, définie sur un compact convexe d'un espace euclidien, possède un point fixe. Il a de nombreuses applications en théorie des jeux et en économie. Le théorème de Schauder est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer à des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie. Il a été démontré d'abord dans le cas des espaces de Banach. Il intervient dans la démonstration de l'existence de solutions d'équations différentielles. Sans oublier le théorème de Krasnoselskii, ce dernier a combiné le théorème de Banach et celui de Schauder. Ce chapitre est terminé par un petit rappel concernant les différentes définitions des notions citées dans ces théorèmes.

Dans le deuxième chapitre, on a prouvé l'existence et l'unicité de points fixes communs pour deux applications occasionnellement faiblement biaisées de type (A) satisfaisant des conditions contractives dans un espace b-métrique. Ces résultats améliorent et étendent plusieurs résultats dont le théorème 2.1 et son corollaire d'Agrawal et al. [1].

Dans le troisième et dernier chapitre, on a encore utilisé notre nouvelle notion des applications occasionnellement faiblement biaisées de type (A) pour démontrer l'existence de points fixes communs et uniques pour deux applications qui satisfont deux conditions contractives dans un espace de type b-métrique. Ces deux résultats améliorent et étendent le théorème principal de Mirkov et al. [5].

A la fin, une conclusion est donnée ainsi que certaines références.

Chapitre 1

L'histoire du Point Fixe

Résumé

On commence ce chapitre dans lequel on ne considère que des applications univoques par un court historique du point fixe.

1.1 Introduction

En mathématiques, pour une application f d'un ensemble E dans lui-même, un élément x de E est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Exemples :

- la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur l'ensemble des réels non nuls admet deux points fixes -1 et 1 .
- la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'ensemble des réels admet deux points fixes 0 et 1 .

Graphiquement, les points fixes d'une fonction f d'une variable réelle, à valeurs réelles s'obtiennent en traçant la droite d'équation $y = x$; tous les points d'intersection de la courbe représentative de f avec cette droite sont alors les points fixes de f .

Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement de point fixe ; par exemple, la fonction $f(x) = x - 2$ n'en possède pas, car il n'existe aucun nombre réel x égal à $x - 2$.

Pour une fonction f définie sur E et à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$, un point fixe est un élément x de E tel que $x \in f(x)$.

1.2 Théorèmes du point fixe

En analyse mathématique, un théorème du point fixe donne des conditions suffisantes d'existence d'un point fixe pour une fonction ou une famille de fonctions. Certains de ces théorèmes fournissent un processus itératif permettant d'approcher un tel point fixe.

Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Il existe plusieurs théorèmes permettant de déterminer qu'une application satisfaisant à certains critères possède un point fixe. Les plus connus sont les suivants :

1.3 Théorèmes de point fixe sur des espaces métriques

Théorème 1.3.1. (*Théorème de Banach*) Soient E un espace métrique complet (non vide) et f une application k -contractante de E dans E (Une application f d'un espace métrique (E, d) dans lui-même est dite k -contractante si $0 \leq k < 1$ et si, pour tout couple de points x et y de E , $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$). Elle est dite contractante si elle est k -contractante pour une certaine constante k). Il existe un point fixe unique p de f (c'est-à-dire un p dans E tel que $f(p) = p$). De plus, toute suite d'éléments de E vérifiant la récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n);$$

vérifie la majoration

$$d(x_n, p) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_0, x_1);$$

donc converge vers p .

Ce théorème est souvent mentionné comme le théorème du point fixe de Banach qui l'a énoncé en 1920 dans le cadre de la résolution d'équations intégrales. Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tende vers un point fixe.

Le théorème du point fixe de Browder fait partie de la grande famille des théorèmes de point fixe, dans le cas particulier des espaces de Banach

uniformément convexes avec une hypothèse sur l'application moins forte que le théorème du point fixe de Banach ou avec une hypothèse sur la partie stable moins forte que le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 1.3.2. (*Théorème de Browder*) *Dans un espace de Hilbert, si K est un convexe fermé borné non vide, alors toute application non expansive de K dans lui-même admet un point fixe.*

Théorème 1.3.3. (*Théorème de Browder*) *Dans un espace de Banach uniformément convexe, si K est un convexe fermé borné non vide, alors toute application non expansive de K dans lui-même admet un point fixe.*

Le théorème du point fixe de Caristi étend le théorème du point fixe de Banach-Picard, en garantissant l'existence de points fixes pour une plus large classe d'applications d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 1.3.4. (*Théorème de Caristi*) *Soient (X, d) un espace métrique complet non vide et T une application de X dans X (non nécessairement continue). Pour que T admette un point fixe, il suffit qu'il existe une application semi-continue inférieurement $f : X \rightarrow [0, +\infty[$ telle que pour tout point x de X , $d(x, T(x)) \leq f(x) - f(T(x))$.*

1.4 Théorèmes de point fixe en topologie

Le théorème du point fixe de Brouwer fait partie de la grande famille des théorèmes de point fixe. Il est particulièrement célèbre parce qu'il est utilisé dans de nombreuses branches mathématiques.

Théorème 1.4.1. (*Théorème de Brouwer*)

- * *Dans le plan : Toute application f continue d'un disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe.*
- * *Dans un espace euclidien : Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.*
- * *Convexe compact : Toute application continue f d'un convexe compact non vide K d'un espace euclidien à valeurs dans K admet un point fixe.*

Le théorème du point fixe de Kakutani est un théorème de point fixe qui généralise celui de Brouwer. Il fournit une condition suffisante pour qu'une

telle fonction, définie sur un compact convexe d'un espace euclidien, possède un point fixe. Il a de nombreuses applications en théorie des jeux et en économie

Théorème 1.4.2. (*Théorème de Kakutani*) Soient S un compact convexe non vide d'un espace euclidien et φ une application de S dans l'ensemble 2^S des parties de S . Si le graphe de φ est fermé dans $S \times S$ et si, pour tout point x de S , $\varphi(x)$ est un convexe non vide, alors φ possède un point fixe.

Le théorème du point fixe de Schauder est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer à des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie. Il a été démontré d'abord dans le cas des espaces de Banach. Il intervient dans la démonstration de l'existence de solutions d'équations différentielles.

Théorème 1.4.3. (*Théorème de Schauder*) Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel topologique séparé et C un convexe fermé non vide de E . Si T est une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact, alors T a un point fixe.

1.5 Point fixe métrique et topologique

En 1955 Krasnoselskii a remarqué que dans un nombre considérable de problèmes, l'intégration d'un opérateur différentiel perturbé donne naissance à une somme de deux applications, une contraction et une application compacte. Donc, il a combiné le théorème de Banach et celui de Schauder.

Théorème 1.5.1. (*Théorème de Krasnoselskii*) Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé borné et convexe. U, C deux applications de D dans X telles que : U est une contraction (de constante k), C est compact et continue.

$$Ux + Cy \in D, \quad \forall x, y \in D.$$

Alors, il existe $x \in D$ tel que $Ux + Cx = x$.

1.6 Rappel

Dans cette section, on donne un petit rappel sur les notions qu'on a vu dans les différents théorèmes ci-dessus.

Définition 1.6.1. *Le couple (X, d) est dit un **espace métrique** si X un ensemble et $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$ une application vérifiant pour tout x, y et z de X*

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ et
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge. Une suite $\{x_n\} \subset X$ est dite de Cauchy si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \epsilon$, pour tout $n, m > N$.

Définition 1.6.2. *Un espace vectoriel $(X, +, \times)$ est un **espace normé** si pour tout $x, y \in X$ il existe un nombre réel non négatif $\|x\|$ dit la norme de x , satisfaisant*

1. $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.6.3. *Un **espace de Banach** est un espace normé complet pour la distance associée à sa norme.*

Définition 1.6.4. *Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

1. *Une application f de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{C}$ est dite **anti-linéaire** si : $\forall u \in \mathcal{X}$, $\forall v \in \mathcal{X}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,*

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

et

$$f(\lambda u) = \bar{\lambda} f(u).$$

2. *On dit qu'une application g de $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à (u, v) associe $g(u, v)$ est une forme **sesquilinéaire** sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ si pour tout $u \in \mathcal{X}$ et $v \in \mathcal{X}$ l'application $u \mapsto g(u, v)$ est linéaire et que l'application $v \mapsto g(u, v)$ est anti-linéaire.*

3. Une forme sesquilinéaire g est dite **hermitienne** si :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}, g(u, v) = \overline{g(v, u)}.$$

4. Une forme sesquilinéaire hermitienne g sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ est dite **positive** si :

$$\forall u \in \mathcal{X}, g(u, u) \geq 0.$$

Définition 1.6.5. Une forme sesquilinéaire hermitienne positive g sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ est dite définie si :

$$\forall u \in \mathcal{X}, g(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0.$$

On dit alors que g est un **produit scalaire** sur $\mathcal{X}$.

Définition 1.6.6. Si $(u, v)_X$ est un produit scalaire sur $\mathcal{X}$, alors l'application :

$$u \mapsto (u, u)_X^{\frac{1}{2}},$$

est une **norme**.

Définition 1.6.7. Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.

Définition 1.6.8. Soit $\mathcal{X}$ un ensemble non vide. Un point $p \in \mathcal{X}$ est appelé un **point fixe** d'une application $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ si

$$fp = p.$$

Définition 1.6.9. Soit $\mathcal{X}$ un ensemble non vide. Un point $p \in \mathcal{X}$ est appelé un **point de coïncidence** des applications $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ si

$$fp = gp.$$

Définition 1.6.10. Soit (X, d) un espace métrique complet et l'application $T : X \rightarrow X$. On dit que T est une **application lipschitzienne** s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de X , l'inégalité

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

- Si $k \leq 1$, T est appelé **non expansive**.
- Si $k < 1$, T est appelé **contraction**.

Définition 1.6.11. *Un espace uniformément convexe est un espace de Banach ; ou seulement, un espace vectoriel normé tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ pour lequel, pour tout couple (x, y) de vecteurs,*

$$(\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ et } \|x - y\| \geq \epsilon) \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Soit $\mathcal{X}$ un espace topologique, x_0 un point de $\mathcal{X}$ et f une fonction de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.6.12. *On dit que f est **semi-continue supérieurement** en x_0 si pour tout $t > f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que*

$$\forall x \in U, f(x) \leq t.$$

Si on est dans un espace métrique, la propriété suivante suffit

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0),$$

où $\limsup$ désigne la limite supérieure d'une fonction en un point.

La fonction f est appelée semi-continue supérieurement si elle est semi-continue supérieurement en tout point de son domaine.

Définition 1.6.13. *On dit que f est **semi-continue inférieurement** en x_0 si pour tout $t < f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que*

$$\forall x \in U, f(x) \geq t.$$

Si on est dans un espace métrique, la propriété suivante suffit

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0),$$

où $\liminf$ désigne la limite inférieure d'une fonction en un point.

La fonction f est appelée semi-continue inférieurement si elle est semi-continue inférieurement en tout point de son domaine.

Définition 1.6.14. Une *partie relativement compacte* d'un espace topologique X est un sous-ensemble Y de X inclus dans une partie compacte de X (pour la topologie induite).

Définition 1.6.15. Un *espace vectoriel topologique* est un espace vectoriel E sur un corps topologique K (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munis de leur topologie habituelle) muni d'une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire vérifiant les conditions suivantes :

- La somme de deux vecteurs est une application continue de $E \times E$ dans E ;
- le produit d'un scalaire par un vecteur est une application continue de $K \times E$ dans E .

Définition 1.6.16. Un ensemble C est dit **convexe** lorsque, pour tous x et y de C , le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans C , c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1] \quad tx + (1 - t)y \in C.$$

Définition 1.6.17. Un *espace séparé*, dit aussi *espace de Hausdorff*, est un espace topologique dans lequel deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints.

Définition 1.6.18. Une partie M d'un espace métrique (X, d) est dite **compacte** si toute suite $\{x_n\}$ de M admet une sous suite convergeant vers une limite appartenant à M .

Chapitre 2

Théorèmes de point fixe commun dans un espace b -métrique

Abstract

Dans ce chapitre, on a amélioré et étendu le théorème principal d'Agrawal et al. [1].

2.1 Introduction et préliminaires

L'idée de l'espace b -métrique a été initiée à partir du travail de Bakhtin en 1989, où il a généralisé la notion d'espace métrique. La théorie du point fixe dans l'espace b -métrique est un domaine très dynamique dans la recherche mathématique.

L'un des aspects importants à étudier concernant le théorème de point fixe commun dans l'espace b -métrique est d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes impliquant l'existence d'un point fixe commun.

Définition 2.1.1. *Soit $\mathcal{X}$ un ensemble non vide et un nombre réel donné $s \geq 1$. Une application $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée une b -métrique si les conditions suivantes sont vérifiées pour tous $x, y, z \in \mathcal{X}$:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ et
3. $d(x, y) \leq s[d(x, z) + d(z, y)]$.

Une paire $(\mathcal{X}, d)$ est appelée un espace b -métrique. On prend $s=b$

Remarque 2.1.1. *Il est clair que la définition de l'espace métrique est un cas particulier de l'espace b-métrique.*

Récemment en 2022, Bouhadjera [4] a introduit la notion suivante :

Définition 2.1.2. *Soit $\mathcal{X}$ un ensemble non vide. $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ deux applications. On dit que f et g sont occasionnellement faiblement f -biaisées (respectivement g -biaisées) de type $(\mathcal{A})$ si et seulement si, il existe un point $p \in \mathcal{X}$ tel que :*

$$\begin{aligned} d(ffp, gp) &\leq d(gfp, fp) \\ d(ggp, fp) &\leq d(fgp, gp), \end{aligned}$$

respectivement.

En [1], Agrawal et al. ont prouvé l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une seule application.

Théorème 2.1.3. *Soit $(\mathcal{X}, d)$ un espace b-métrique complet. Soit $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ une application telle que :*

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq a \max\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, y)\} \\ &\quad + b[d(x, Ty) + d(y, Tx)], \end{aligned}$$

où $a, b > 0$ tels que $a + 2bs \leq 1$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$ et $s \geq 1$, alors T a un point fixe unique.

Corollaire 2.1.4. *Soit $(\mathcal{X}, d)$ un espace b-métrique complet. Soit $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ une application telle que :*

$$d(Tx, Ty) \leq a[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + b[d(x, Ty) + d(y, Tx)],$$

où $a, b > 0$ tels que $2a + b(2s + 1) < 1$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$ et $s \geq 1$, alors T a un point fixe unique.

Dans ce chapitre, on va améliorer et étendre le théorème et son corollaire en utilisant deux applications et le concept des applications occasionnellement faiblement biaisées de type $(\mathcal{A})$.

2.2 Résultats pour deux applications

Théorème 2.2.1. *Soit $(\mathcal{X}, d)$ un espace b -métrique. Soient $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ deux applications occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$ et qui vérifient :*

$$d(fx, fy) \leq a \max\{d(gx, fx), d(gx, gy), d(gy, fy)\} + b[d(gx, fy) + d(gy, fx)]. \quad (2.1)$$

Pour tous $x, y \in \mathcal{X}$, où $a, b \geq 0$ avec $2(sa + b) < 1$. Alors f et g admettent un point fixe commun et unique.

Démonstration. Comme f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$, il existe $p \in \mathcal{X}$ tel que $fp = gp$ et

$$d(ggp, fp) \leq d(fgp, gp).$$

L'existence : Tout d'abord, on va prouver que $ffp = fp$. On suppose que $ffp \neq fp$. On pose $x = fp$ et $y = p$ dans (2.1), on trouve

$$\begin{aligned} d(ffp, fp) &\leq a \max\{d(gfp, ffp), d(gfp, gp), d(gp, fp)\} \\ &\quad + b[d(gfp, fp) + d(gp, ffp)] \\ &= a \max\{d(gfp, ffp), 0, d(gfp, fp)\} \\ &\quad + b[d(gfp, fp) + d(fp, ffp)] \\ &= a \max\{d(ggp, ffp), 0, d(ggp, fp)\} \\ &\quad + b[d(ggp, fp) + d(ffp, fp)]. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses et la définition de l'espace b -métrique, on aura

$$\begin{aligned} d(ffp, fp) &\leq a \max\{0, d(fgp, gp), s[d(ggp, fp) + d(fp, ffp)]\} \\ &\quad + b[d(fgp, gp) + d(ffp, fp)] \\ &\leq a \max\{0, d(fgp, gp), s[d(fgp, gp) + d(fp, ffp)]\} \\ &\quad + b[d(fgp, gp) + d(ffp, fp)] \\ &= a \max\{0, d(ffp, fp), 2sd(ffp, fp)\} + 2bd(ffp, fp) \\ &= 2sad(ffp, fp) + 2bd(ffp, fp) \\ &= 2(sa + b)d(ffp, fp) \\ &< d(ffp, fp), \end{aligned}$$

une contradiction car $2(sa + b) < 1$, donc $ffp = fp$; c'est-à-dire fp est un point fixe de f .

Maintenant, on va prouver que $gfp = fp$. On a démontré que $d(ffp, fp) = 0$ et comme les deux applications sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$, on aura

$$d(ggp, fp) \leq d(fgp, gp) = d(ffp, fp) = 0,$$

ce qui implique que $ggp = gfp = fp$. Donc $fp = gp$ est un point fixe commun de f et g .

L'unicité : On pose $fp = gp = w$ et on suppose qu'il existe un autre point fixe commun w' . Alors, en utilisant la condition (2.1), on aura

$$\begin{aligned} d(fw, fw') &\leq a \max\{d(gw, fw), d(gw, gw'), d(gw', fw')\} \\ &\quad + b[d(gw, fw') + d(gw', fw)]; \end{aligned}$$

i.e.,

$$d(w, w') \leq ad(w, w') + 2bd(w, w') = [a + 2b]d(w, w') < d(w, w'),$$

une contradiction car $a + 2b < 1$, donc $w' = w$. $\square$

Maintenant, on va présenter un exemple qui supporte notre théorème.

Exemple 2.2.2. Soit $\mathcal{X} =]-10, 10[$ muni de la b -métrique $d(x, y) = |x - y|^2$, où $s = 2$. On prend $a = b = \frac{1}{7}$, alors $2(sa + b) = 2(2a + b) = 2(\frac{3}{7}) = \frac{6}{7} < 1$, on définit

$$fx = \begin{cases} \frac{1-x}{11} & \text{si } x \in]-10, 0[\\ 0 & \text{si } x \in [0, 10[\end{cases} \quad gx = \begin{cases} \frac{10-x}{2} & \text{si } x \in]-10, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, 10[\end{cases}$$

Tout d'abord, il est clair que les applications f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$. On a

1. pour $x, y \in]-10, 0[$, $fx = \frac{1-x}{11}$, $gy = \frac{10-y}{2}$ et

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &= \left| \frac{1-x}{11} - \frac{1-y}{11} \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{7} \max \left\{ \left| \frac{10-x}{2} - \frac{1-x}{11} \right|^2, \left| \frac{10-x}{2} - \frac{10-y}{2} \right|^2, \right. \\ &\quad \left. \left| \frac{10-y}{2} - \frac{1-y}{11} \right|^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{7} \left[\left| \frac{10-x}{2} - \frac{1-y}{11} \right|^2 + \left| \frac{10-y}{2} - \frac{1-x}{11} \right|^2 \right] \\ &= a \max\{d(gx, fx), d(gx, gy), d(gy, fy)\} \\ &\quad + b[d(gx, fy) + d(gy, fx)], \end{aligned}$$

2. pour $x, y \in [0, 10[, fx = 0, gy = y$ et

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &= 0 \\ &\leq \frac{1}{7} \max\{|x|^2, |x-y|^2, |y|^2\} + \frac{1}{7}[|x|^2 + |y|^2] \\ &= a \max\{d(gx, fx), d(gx, gy), d(gy, fy)\} \\ &\quad + b[d(gx, fy) + d(gy, fx)], \end{aligned}$$

3. pour $x \in]-10, 0[, y \in [0, 10[, f = \frac{1-x}{11}, gy = y$ et

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &= \left| \frac{1-x}{11} - \frac{1-y}{11} \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{7} \max \left\{ \left| x - \frac{1-x}{11} \right|^2, |x-y|^2, \left| y - \frac{1-y}{11} \right|^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{7} \left[\left| x - \frac{1-y}{11} \right|^2 + \left| y - \frac{1-x}{11} \right|^2 \right] \\ &= a \max\{d(gx, fx), d(gx, gy), d(gy, fy)\} \\ &\quad + b[d(gx, fy) + d(gy, fx)], \end{aligned}$$

4. pour $x \in [0, 10[, y \in]-10, 0[, fx = 0, gy = \frac{10-y}{2}$ et

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &= 0 \\ &\leq \frac{1}{7} \max \left\{ \left| \frac{10-x}{2} \right|^2, \left| \frac{10-x}{2} - \frac{10-y}{2} \right|^2, \right. \\ &\quad \left. \left| \frac{10-y}{2} \right|^2 \right\} + \frac{1}{7} \left[\left| \frac{10-x}{2} \right|^2 + \left| \frac{10-y}{2} \right|^2 \right] \\ &= a \max\{d(gx, fx), d(gx, gy), d(gy, fy)\} \\ &\quad + b[d(gx, fy) + d(gy, fx)], \end{aligned}$$

alors, toutes les hypothèses du théorème sont satisfaites et 0 est l'unique point fixe commun de f et g .

Corollaire 2.2.3. Soit $(\mathcal{X}, d)$ un espace b -métrique. Soient $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ deux applications occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$ telles que :

$$d(fx, fy) \leq a[d(gx, fx) + d(gy, fy)] + b[d(gx, fy) + d(gy, fx)]. \quad (2.2)$$

Où $a, b > 0$ tels que $2as + b < 1, \forall x, y \in \mathcal{X}$ et $s \geq 1$. Alors les deux applications possèdent un point fixe commun et unique.

Démonstration. Comme dans le théorème précédent, on va prouver l'existence et l'unicité du point fixe commun.

L'existence : On va montrer que fp est un point fixe pour les applications f et g . On confirme que $ffp = fp$. On suppose le contraire c-à-d $ffp \neq fp$. On pose $x = fp$ et $y = p$ dans (2.2), on obtient

$$d(ffp, fp) \leq a[d(gfp, ffp) + d(gp, fp)] + b[d(gfp, fp) + d(gp, fp)].$$

On remplace gp par fp , on trouve

$$\begin{aligned} d(ffp, fp) &\leq a[d(gfp, ffp) + d(fp, fp)] + b[d(gfp, fp) + d(fp, fp)] \\ &= a[d(ggp, ffp)] + b[d(ggp, fp)]. \end{aligned}$$

Comme f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$, on aura

$$\begin{aligned} d(ffp, fp) &\leq ad(ggp, ffp) + bd(fgp, gp) \\ &= ad(ggp, ffp) + bd(ffp, fp). \end{aligned}$$

En appliquant la troisième condition de l'espace b -métrique et la relation entre les deux applications, on aura

$$\begin{aligned} d(ffp, fp) &\leq as[d(ggp, fp) + d(fp, ffp)] + bd(ffp, fp) \\ &\leq as[d(fgp, gp) + d(ffp, fp)] + bd(ffp, fp) \\ &= as[d(ffp, fp) + d(ffp, fp)] + bd(ffp, fp) \\ &= (2as + b)d(ffp, fp) \\ &< d(ffp, fp), \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction, donc $ffp = fp$; c-à-d fp est un point fixe de f .

Pour g : En utilisant la relation entre f et g , on obtient

$$d(ggp, fp) \leq d(fgp, gp) = d(ffp, fp) = 0;$$

ce qui implique que $ggp = gfp = fp$. Donc fp est aussi un point fixe pour g .

L'unicité : On va prouver que le point fixe commun de f et g est unique. On pose $fp = gp = w$ et on suppose qu'il existe un autre point fixe commun w' . Par (2.2), on trouve

$$d(fw, fw') \leq a[d(gw, fw) + d(gw', fw')] + b[d(gw, fw') + d(gw', fw')];$$

i.e.,

$$d(w, w') \leq bd(w, w') < d(w, w'),$$

c'est une contradiction car $b < 1$, alors il existe un unique point fixe commun. $\square$

On va illustrer ce corollaire par un exemple.

Exemple 2.2.4. Soit $\mathcal{X} =]0, 5[$ muni de la b -métrique $d(x, y) = |x - y|^2$, où $s = 2$. On met $a = \frac{1}{5}$ et $b = \frac{1}{6}$, alors $2sa + b = 2(2)(\frac{1}{5}) + \frac{1}{6} = \frac{29}{30} < 1$, on définit

$$fx = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, 5[\end{cases}, \quad gx = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in]0, 1[\\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, 5[\end{cases}.$$

Il est évident que les applications f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$. On a

1. pour $x, y \in]0, 1[$, $fx = fy = \frac{3}{4}$, $gx = gy = 3$ et

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &= 0 \\ &\leq \frac{1}{5} \left[\left| 3 - \frac{3}{4} \right|^2 + \left| 3 - \frac{3}{4} \right|^2 \right] + \frac{1}{6} \left[\left| 3 - \frac{3}{4} \right|^2 + \left| 3 - \frac{3}{4} \right|^2 \right] \\ &= \frac{297}{80} \\ &= a[d(gx, fx) + d(gy, fy)] + b[d(gx, fy) + d(gy, fx)], \end{aligned}$$

2. pour $x, y \in [1, 5[$, $fx = fy = 1$, $gx = \frac{1}{x^2}$, $gy = \frac{1}{y^2}$ et

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &= 0 \\ &\leq \frac{1}{5} \left[\left| \frac{1}{x^2} - 1 \right|^2 + \left| \frac{1}{y^2} - 1 \right|^2 \right] + \frac{1}{6} \left[\left| \frac{1}{x^2} - 1 \right|^2 + \left| \frac{1}{y^2} - 1 \right|^2 \right] \\ &= \frac{11}{30} \left[\left| \frac{1}{x^2} - 1 \right|^2 + \left| \frac{1}{y^2} - 1 \right|^2 \right] \\ &= a[d(gx, fx) + d(gy, fy)] + b[d(gx, fy) + d(gy, fx)], \end{aligned}$$

3. pour $x \in]0, 1[, y \in [1, 5[, fx = \frac{3}{4}, gx = 3, fy = 1, gy = \frac{1}{y^2}$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= \left| \frac{3}{4} - 1 \right|^2 = \frac{1}{16} \\
&\leq \frac{1}{5} \left[\left| 3 - \frac{3}{4} \right|^2 + \left| \frac{1}{y^2} - 1 \right|^2 \right] + \frac{1}{6} \left[|3 - 1|^2 + \left| \frac{1}{y^2} - 1 \right|^2 \right] \\
&= \frac{403}{240} + \frac{11}{30} \left| \frac{1}{y^2} - 1 \right|^2 \\
&= a[d(gx, fx) + d(gy, fy)] + b[d(gx, fy) + d(gy, fy)],
\end{aligned}$$

4. pour $x \in [1, 5[, y \in]0, 1[, fx = 1, gx = \frac{1}{x^2}, fy = \frac{3}{4}, gy = 3$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= \left| 1 - \frac{3}{4} \right|^2 = \frac{1}{16} \\
&\leq \frac{1}{5} \left[\left| \frac{1}{x^2} - 1 \right|^2 + \left| 3 - \frac{3}{4} \right|^2 \right] + \frac{1}{6} \left[\left| \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \right|^2 + \left| 3 - \frac{3}{4} \right|^2 \right] \\
&= \frac{1}{5} \left| \frac{1}{x^2} - 1 \right|^2 + \frac{1}{6} \left| \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \right|^2 + \frac{297}{160} \\
&= a[d(gx, fx) + d(gy, fy)] + b[d(gx, fy) + d(gy, fy)],
\end{aligned}$$

donc toutes les conditions du corollaire sont vérifiées et 1 est le seul point fixe commun des applications f et g .

Chapitre 3

Théorèmes de point fixe commun dans un espace de type b -métrique

Abstract

Le but de ce chapitre est de présenter une étude qui améliore et généralise les résultats obtenus par Mirkov et al. dans [6], où on va utiliser la nouvelle définition de Bouhadjera [4].

3.1 Introduction

Il existe de nombreuses généralisations du concept d'espaces métriques dans la littérature. Le concept d'espace de type b -métrique a été introduit par Alghamdi et al. dans [2]. Ces espaces ont une structure plus générale que les espaces métriques traditionnels, permettant une plus large gamme d'applications mathématiques.

Dans cette partie, on va explorer un théorème du point fixe commun et unique dans les espaces de type b -métriques.

On va commencer par la définition d'un espace de type b -métrique et en quoi il diffère d'un espace métrique traditionnel. À partir de là, on va approfondir les spécificités du théorème du point fixe et ses implications.

Définition 3.1.1. *Soit $\mathcal{X}$ un ensemble non vide et un nombre réel donné $s \geq 1$. Une application $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée une distance de type b -métrique si les conditions suivantes sont vérifiées pour tous $x, y, z \in \mathcal{X}$:*

1. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ et
3. $d(x, y) \leq s[d(x, z) + d(z, y)]$.

Une paire $(\mathcal{X}, d)$ est appelée un espace de type b -métrique. On prend $s=b$

Dans leur travail [6], Mirkov et al. ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 3.1.2. *Soit $(\mathcal{X}, d)$ un espace de type b -métrique complet avec $s \geq 1$ et $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ une application telle que :*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y),$$

pour tous $x, y \in \mathcal{X}$, où $k \in [0, 1[$, alors T possède un unique point fixe.

Dans ce qui suit, on va présenter un résultat plus général que le théorème ci-dessus.

3.2 Résultats principaux

Théorème 3.2.1. *Soit $(\mathcal{X}, d)$ un espace de type b -métrique. Soient $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ deux applications occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$ telles que :*

$$d(fx, fy) \leq k \max\{d(gx, fx), d(gx, gy), d(gy, fy), d(gx, fy), d(gy, fx)\}. \quad (3.1)$$

Pour tous $x, y \in \mathcal{X}$, où $sk < \frac{1}{2}$ avec $s \geq 1$. Alors f et g admettent un point fixe commun et unique.

Démonstration. Comme dans le chapitre précédent, puisque f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$, il existe un point p dans $\mathcal{X}$ tel que $fp = gp$ et $d(ggp, fp) \leq d(fgp, gp)$.

L'existence : On va montrer d'abord que fp est un point fixe pour f . On pose $x = fp$ et $y = p$ dans l'inégalité (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} d(ffp, fp) &\leq k \max\{d(gfp, ffp), d(gfp, gp), d(gp, fp), d(gfp, fp), \\ &\quad d(gp, ffp)\} \\ &= k \max\{d(gfp, ffp), d(gfp, fp), d(fp, fp), d(fp, ffp)\} \\ &= k \max\{d(ggp, ffp), d(ggp, fp), d(fp, fp), d(ffp, fp)\}, \end{aligned}$$

comme les applications f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$, on trouve

$$\begin{aligned} d(ffp, fp) &\leq k \max\{d(ggp, ffp), d(fgp, gp), d(fp, fp), d(ffp, fp)\} \\ &= k \max\{d(ggp, ffp), d(ffp, fp), d(fp, fp)\}, \end{aligned}$$

en appliquant la troisième condition des espaces de type b -métriques, on aura

$$\begin{aligned} d(ffp, fp) &\leq k \max\{s[d(ggp, fp) + d(ffp, fp)], d(ffp, fp), \\ &\quad s[d(fp, ffp) + d(ffp, fp)]\} \\ &\leq k \max\{s[d(fgp, gp) + d(ffp, fp)], d(ffp, fp), 2sd(ffp, fp)\} \\ &= k \max\{2sd(ffp, fp), d(ffp, fp)\} \\ &= 2skd(ffp, fp) \\ &< d(ffp, fp), \end{aligned}$$

donc on obtient une contradiction car $2sk < 1$, par conséquent, $ffp = fp$ c-à-d fp est un point fixe de f .

Maintenant, on va montrer que fp est aussi un point fixe de g . Puisque f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$, on a

$$d(ggp, fp) \leq d(fgp, gp);$$

comme $gp = fp$ et $d(ffp, fp) = 0$ d'après le premier raisonnement, on aura

$$d(ggp, fp) \leq d(ffp, fp) = 0;$$

ce qui implique que $d(ggp, fp) = 0$; i.e. $ggp = gfp = fp$. Donc fp est aussi un point fixe pour g .

A la fin, il reste de montrer que $fp = z$ est le point fixe unique des applications f et g .

L'unicité : On suppose que z' est un autre point fixe commun de f et g . En utilisant la condition (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} d(fz, fz') &\leq k \max\{d(gz, fz), d(gz, gz'), d(gz', fz'), d(gz, fz'), d(gz', fz)\} \\ d(z, z') &\leq k \max\{d(z, z), d(z, z'), d(z', z'), d(z, z'), d(z', z)\} \\ &= k \max\{d(z, z), d(z, z'), d(z', z')\} \\ &\leq k \max\{s[d(z, z') + d(z', z)], d(z, z'), s[d(z', z) + d(z, z')]\} \\ &= k \max\{2sd(z, z'), d(z, z')\} \\ &= 2skd(z, z') \\ &< d(z, z'), \end{aligned}$$

cette contradiction implique que $z' = z = fp = gp$. D'où l'unicité du point fixe commun. $\square$

L'exemple suivant illustre le théorème précédent :

Exemple 3.2.2. Soit $\mathcal{X} = [0, 2[$ muni de la distance de type b -métrique $d(x, y) = (x + y)^2$, où $s = 2$. On applique ce théorème pour $k = \frac{1}{5}$, alors $sk = (2)(\frac{1}{5}) = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, on définit

$$fx = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{10x} & \text{si } x \in [1, 2[\end{cases}, \quad gx = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{3}{2} & \text{si } x \in [1, 2[\end{cases}.$$

La condition pour les applications f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$ est vérifiée. On a

1. pour $x, y \in [0, 1[$, $fx = fy = 0$, $gx = 2x$, $gy = 2y$ et

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &= 0 \\ &\leq \frac{1}{5} \max \left\{ \left(2x \right)^2, \left(2x + 2y \right)^2, \left(2y \right)^2, \left(2x \right)^2, \left(2y \right)^2 \right\} \\ &= k \max \{ d(gx, fx), d(gx, gy), d(gy, fy), d(gx, fy), \\ &\quad d(gy, fx) \}, \end{aligned}$$

2. pour $x, y \in [1, 2[$, $fx = \frac{1}{10x}$, $fy = \frac{1}{10y}$, $gx = gy = \frac{3}{2}$ et

$$\begin{aligned} d(fx, fy) &= \left(\frac{1}{10x} + \frac{1}{10y} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{5} \max \left\{ \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{10x} \right)^2, 9, \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{10y} \right)^2, \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{10y} \right)^2, \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{10x} \right)^2 \right\} \\ &= k \max \{ d(gx, fx), d(gx, gy), d(gy, fy), d(gx, fy), \\ &\quad d(gy, fx) \}, \end{aligned}$$

3. pour $x \in [0, 1[$, $y \in [1, 2[$, $fx = 0$, $fy = \frac{1}{10y}$, $gx = 2x$, $gy = \frac{3}{2}$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= \left(\frac{1}{10y} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{5} \max \left\{ \left(2x \right)^2, \left(2x + \frac{3}{2} \right)^2, \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{10y} \right)^2, \right. \\
&\quad \left. \left(2x + \frac{1}{10y} \right)^2, \frac{9}{4} \right\} \\
&= k \max \{ d(gx, fx), d(gx, gy), d(gy, fy), d(gx, fy), \\
&\quad d(gy, fx) \},
\end{aligned}$$

4. pour $x \in [1, 2[$, $y \in [0, 1[$, $fx = \frac{1}{10x}$, $fy = 0$, $gx = \frac{3}{2}$, $gy = 2y$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= \left(\frac{1}{10x} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{5} \max \left\{ \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{10x} \right)^2, \left(\frac{3}{2} + 2y \right)^2, \left(2y \right)^2, \frac{9}{4}, \right. \\
&\quad \left. \left(2y + \frac{1}{10x} \right)^2 \right\} \\
&= k \max \{ d(gx, fx), d(gx, gy), d(gy, fy), d(gx, fy), \\
&\quad d(gy, fx) \},
\end{aligned}$$

alors, les axiomes du théorème sont satisfaites et les deux applications admettent 0 comme le seul point fixe commun.

Le deuxième résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 3.2.3. Soit $(\mathcal{X}, d)$ un espace de type b -métrique.

Soient $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ deux applications occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$ satisfaisant :

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &\leq k[d(gx, fx) + d(gx, gy) + d(gy, fy) + d(gx, fy) \\
&\quad + d(gy, fx)].
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour $x, y \in \mathcal{X}$, $s \geq 1$ et $k < \frac{1}{4s+3}$. Alors f et g admettent un point fixe commun et unique.

Démonstration. L'existence : De manière similaire que dans le dernier théorème, on va prouver que fp est un point fixe de f . On suppose que $ffp \neq fp$, en utilisant l'inegalité (3.2), on aura

$$\begin{aligned}
d(ffp, fp) &\leq k[d(gfp, ffp) + d(gfp, gp) + d(gp, fp) + d(gfp, fp) \\
&\quad + d(gp, ffp)] \\
&= k[d(ggp, ffp) + d(ggp, fp) + d(fp, fp) + d(ggp, fp) \\
&\quad + d(fp, ffp)] \\
&= k[d(ggp, ffp) + 2d(ggp, fp) + d(fp, fp) + d(ffp, fp)].
\end{aligned}$$

Comme les applications f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$, on trouve

$$\begin{aligned}
d(ffp, fp) &\leq k[d(ggp, ffp) + 2d(fgp, gp) + d(fp, fp) + d(ffp, fp)] \\
&= k[d(ggp, ffp) + 2d(ffp, fp) + d(fp, fp) + d(ffp, fp)] \\
&= k[d(ggp, ffp) + 3d(ffp, fp) + d(fp, fp)].
\end{aligned}$$

En utilisant la dernière condition de l'espace de type b -métrique et la relation entre les deux applications, on aura

$$\begin{aligned}
d(ffp, fp) &\leq k[s[d(ggp, fp) + d(fp, ffp)] + 3d(ffp, fp) + d(fp, fp)] \\
&\leq k[s[d(fgp, fp) + d(fp, ffp)] + 3d(ffp, fp) + d(fp, fp)] \\
&= k[s[d(ffp, fp) + d(fp, ffp)] + 3d(ffp, fp) + d(fp, fp)] \\
&= k[2sd(ffp, fp) + 3d(ffp, fp) + d(fp, fp)] \\
&= k[(2s + 3)d(ffp, fp) + d(fp, fp)].
\end{aligned}$$

En appliquant encore la troisième condition de l'espace de type b -métrique, on obtient

$$\begin{aligned}
d(ffp, fp) &\leq k[(2s + 3)d(ffp, fp) + s[d(fp, ffp) + d(ffp, fp)]] \\
&= k[(2s + 3)d(ffp, fp) + 2sd(ffp, fp)] \\
&= k(4s + 3)d(ffp, fp) \\
&< d(ffp, fp);
\end{aligned}$$

c'est une contradiction car $k < \frac{1}{4s + 3}$, donc $ffp = fp$; c'est-à-dire fp est un point fixe de f .

On passe maintenant à la démonstration de $gfp = fp$. Comme les deux applications sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$,

on trouve

$$d(ggp, fp) \leq d(fgp, gp),$$

comme $gp = fp$ et $d(ffp, fp) = 0$ d'après le premier raisonnement, on trouve

$$d(ggp, fp) \leq d(ffp, fp) = 0,$$

cela implique que $d(ggp, fp) = 0$; i.e. $ggp = gfp = fp$. Donc fp est aussi un point fixe pour g .

L'unicité : On pose $fp = gp = m$ et on suppose que m' est un autre point fixe commun de f et g . On remplace x par m et y par m' dans (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} d(fm, fm') &\leq k[d(gm, fm) + d(gm, gm') + d(gm', fm') + d(gm, fm') \\ &\quad + d(gm', fm)] \\ d(m, m') &\leq k[d(m, m) + d(m, m') + d(m', m') + d(m, m') + d(m', m)] \\ &= k[d(m, m) + 3d(m, m') + d(m', m')] \\ &= k[d(m, m) + 3d(m', m) + d(m', m')] \\ &\leq k[s[d(m, m') + d(m', m)] + s[d(m', m) + d(m, m')] \\ &\quad + 3d(m', m)] \\ &= k[2sd(m, m') + 2sd(m', m) + 3d(m', m)] \\ &= (4s + 3)k d(m', m) \\ &< d(m', m); \end{aligned}$$

c'est une contradiction. D'après les résultats précédents, on conclut que f et g ont un unique point fixe commun m dans $\mathcal{X}$. $\square$

Exemple 3.2.4. Soit $\mathcal{X} =]-5, 5[$ muni de la distance de type b -métrique $d(x, y) = (|x| + |y|)^2$, où $s = 2$. On choisit $k = \frac{1}{12}$, alors $k = \frac{1}{12} < \frac{1}{4(2)+3} = \frac{1}{11} < 1$, on définit

$$fx = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } x \in]-5, 0[\\ \frac{x}{10} & \text{si } x \in [0, 5[\end{cases} \quad gx = \begin{cases} 4 & \text{si } x \in]-5, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, 5[\end{cases}$$

Il est clair que les applications f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$. On a

1. pour $x, y \in]-5, 0[, fx = fy = \frac{1}{10}, gx = gy = 4$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= \frac{1}{25} \\
&\leq \frac{1}{12} \left[4 \left(4 + \frac{1}{10} \right)^2 + 64 \right] \\
&= \frac{3281}{300} \\
&= k[d(gx, fx) + d(gx, gy) + d(gy, fy) + d(gx, fy) \\
&\quad + d(gy, fx)],
\end{aligned}$$

2. pour $x, y \in [0, 5[, fx = \frac{x}{10}, fy = \frac{y}{10}, gx = x, gy = y$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= \left(\frac{x}{10} + \frac{y}{10} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{12} \left[\left(x + \frac{x}{10} \right)^2 + \left(x + y \right)^2 + \left(y + \frac{y}{10} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(x + \frac{y}{10} \right)^2 + \left(y + \frac{x}{10} \right)^2 \right] \\
&= k[d(gx, fx) + d(gx, gy) + d(gy, fy) + d(gx, fy) \\
&\quad + d(gy, fx)],
\end{aligned}$$

3. pour $x \in]-5, 0[, y \in [0, 5[, fx = \frac{1}{10}, fy = \frac{y}{10}, gx = 4, gy = y$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= \left(\frac{1}{10} + \frac{y}{10} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{12} \left[\left(4 + \frac{1}{10} \right)^2 + \left(4 + y \right)^2 + \left(y + \frac{y}{10} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(4 + \frac{y}{10} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{10} \right)^2 \right] \\
&= k[d(gx, fx) + d(gx, gy) + d(gy, fy) + d(gx, fy) \\
&\quad + d(gy, fx)],
\end{aligned}$$

4. pour $x \in [0, 5[, y \in] - 5, 0[, fx = \frac{x}{10}, fy = \frac{1}{10}, gx = x, gy = 4$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{10} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{12} \left[\left(x + \frac{x}{10} \right)^2 + \left(x + 4 \right)^2 + \left(4 + \frac{1}{10} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(x + \frac{1}{10} \right)^2 + \left(4 + \frac{x}{10} \right)^2 \right] \\
&= k[d(gx, fx) + d(gx, gy) + d(gy, fy) + d(gx, fy) \\
&\quad + d(gy, fx)],
\end{aligned}$$

alors, toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées et les deux applications possèdent 0 comme le seul point fixe commun.

On termine cette partie par un dernier résultat :

Théorème 3.2.5. Soit $(\mathcal{X}, d)$ un espace de type b -métrique et $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ deux applications occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$ telles que :

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &\leq a_1 d(gx, fx) + a_2 d(gx, gy) + a_3 d(gy, fy) \\
&\quad + a_4 d(gx, fy) + a_5 d(gy, fx).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Où $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ tels que $2s(a_1 + a_3) + a_2 + a_4 + a_5 < 1, \forall x, y \in \mathcal{X}$ et $s \geq 1$. Alors f et g admettent un unique point fixe commun.

Démonstration. L'existence : On suppose que $d(ffp, fp)$ est strictement positive, en utilisant l'inégalité (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}
d(ffp, fp) &\leq a_1 d(gfp, ffp) + a_2 d(gfp, gp) + a_3 d(gp, fp) + a_4 d(gfp, fp) \\
&\quad + a_5 d(gp, ffp) \\
&= a_1 d(ggp, ffp) + a_2 d(ggp, fp) + a_3 d(fp, fp) + a_4 d(ggp, fp) \\
&\quad + a_5 d(fp, ffp) \\
&= a_1 d(ggp, ffp) + (a_2 + a_4) d(ggp, fp) + a_3 d(fp, fp) \\
&\quad + a_5 d(fp, ffp),
\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de g -biaisées de type $(\mathcal{A})$, la deuxième et la troisième condition de la définition (3.1.1), on trouve

$$\begin{aligned}
d(fgp, fp) &\leq a_1d(ggp, ffp) + (a_2 + a_4)d(fgp, gp) + a_3d(fp, fp) \\
&\quad + a_5d(ffp, fp) \\
&= a_1d(ggp, ffp) + (a_2 + a_4)d(ffp, fp) + a_3d(fp, fp) \\
&\quad + a_5d(ffp, fp) \\
&= a_1d(ggp, ffp) + (a_2 + a_4 + a_5)d(ffp, fp) + a_3d(fp, fp) \\
&\leq a_1s[d(ggp, fp) + d(fp, ffp)] + (a_2 + a_4 + a_5)d(ffp, fp) \\
&\quad + a_3s[d(fp, ffp) + d(ffp, fp)] \\
&\leq a_1s[d(fgp, gp) + d(fp, ffp)] + (a_2 + a_4 + a_5)d(ffp, fp) \\
&\quad + a_3s[d(fp, ffp) + d(ffp, fp)] \\
&= a_1s[d(ffp, fp) + d(ffp, fp)] + (a_2 + a_4 + a_5)d(ffp, fp) \\
&\quad + a_3s[d(ffp, fp) + d(ffp, fp)] \\
&= [2s(a_1 + a_3) + a_2 + a_4 + a_5]d(ffp, fp) \\
&< d(ffp, fp),
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction car $2s(a_1 + a_3) + a_2 + a_4 + a_5 < 1$, donc $d(ffp, fp) = 0$ ce qui implique que $ffp = fp$; c-à-d, fp est un point fixe de f .

Ensuite, on va démontrer que fp est aussi un point fixe de g . Puisque f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$, on a

$$d(ggp, fp) \leq d(fgp, gp),$$

en utilisant les résultats $gp = fp$, $d(ffp, fp) = 0$ et la première condition de la définition de l'espace de type b -métrique, on aura

$$d(ggp, fp) \leq d(ffp, fp) = 0,$$

on obtient $d(ggp, fp) = 0$ ce qui implique que $ggp = gfp = fp$; i.e., fp est aussi un point fixe pour g .

L'unicité : On pose $fp = gp = h$, par la même méthode de l'unicité du point fixe du théorème précédent, on suppose qu'il existe un autre point fixe disant h' , en utilisant l'inégalité (3.3) on obtient

$$\begin{aligned}
d(fh, fh') &\leq a_1d(gh, fh) + a_2d(gh, gh') + a_3d(gh', fh') + a_4d(gh, fh') \\
&\quad + a_5d(gh', fh) \\
d(h, h') &\leq a_1d(h, h) + a_2d(h, h') + a_3d(h', h') + a_4d(h, h') + a_5d(h', h) \\
&= a_1d(h, h) + (a_2 + a_4)d(h, h') + a_3d(h', h') + a_5d(h', h),
\end{aligned}$$

en appliquant les axiomes de la définition de l'espace de type b -métrique, on trouve

$$\begin{aligned}
d(h, h') &\leq a_1 d(h, h) + (a_2 + a_4 + a_5) d(h, h') + a_3 d(h', h') \\
&\leq a_1 s [d(h, h') + d(h', h)] + (a_2 + a_4 + a_5) d(h, h') \\
&\quad + a_3 s [d(h', h) + d(h, h')] \\
&= 2a_1 s d(h', h) + (a_2 + a_4 + a_5) d(h, h') + 2sa_3 d(h', h) \\
&= [2s(a_1 + a_3) + (a_2 + a_4 + a_5)] d(h', h) \\
&< d(h', h);
\end{aligned}$$

une contradiction, d'où l'unicité. $\square$

Exemple 3.2.6. Soit $\mathcal{X} =]-25, 25[$ muni de la distance de type b -métrique $d(x, y) = (|x| + |y|)^2$, où $s = 2$. On choisit $a_2 = \frac{9}{10}$ et $a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = \frac{1}{101}$, on définit

$$fx = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-25, 0] \\ \frac{x+1}{25} & \text{si } x \in]0, 25[\end{cases} \quad gx = \begin{cases} -x & \text{si } x \in]-25, 0] \\ 24 & \text{si } x \in]0, 25[\end{cases}$$

Il est clair que les applications f et g sont occasionnellement faiblement g -biaisées de type $(\mathcal{A})$. On a

1. pour $x, y \in]-25, 0]$, $fx = fy = 0$, $gx = -x$, $gy = -y$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= 0 \\
&\leq \frac{2}{101} (-x)^2 + \frac{9}{10} (-x - y)^2 + \frac{2}{101} (-y)^2 \\
&= a_1 d(gx, fx) + a_2 d(gx, gy) + a_3 d(gy, fy) \\
&\quad + a_4 d(gx, fy) + a_5 d(gy, fx),
\end{aligned}$$

2. pour $x, y \in]0, 25[$, $fx = \frac{x+1}{25}$, $fy = \frac{y+1}{25}$, $gx = gy = 24$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= \left(\frac{x+1}{25} + \frac{y+1}{25} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{101} \left(24 + \frac{x+1}{25} \right)^2 + \frac{9}{10} (48)^2 + \frac{1}{101} \left(24 + \frac{y+1}{25} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{101} \left(24 + \frac{y+1}{25} \right)^2 + \frac{1}{101} \left(24 + \frac{x+1}{25} \right)^2 \\
&= a_1 d(gx, fx) + a_2 d(gx, gy) + a_3 d(gy, fy) \\
&\quad + a_4 d(gx, fy) + a_5 d(gy, fx),
\end{aligned}$$

3. pour $x \in]-25, 0]$, $y \in]0, 25[$, $fx = 0$, $fy = \frac{y+1}{25}$, $gx = -x$, $gy = 24$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= \left(\frac{y+1}{25} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{101}(-x)^2 + \frac{9}{10}(-x+24)^2 + \frac{1}{101} \left(24 + \frac{y+1}{25} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{101} \left(-x + \frac{y+1}{25} \right)^2 + \frac{1}{101} (24)^2 \\
&= a_1 d(gx, fx) + a_2 d(gx, gy) + a_3 d(gy, fy) \\
&\quad + a_4 d(gx, fy) + a_5 d(gy, fx),
\end{aligned}$$

4. pour $x \in]0, 25[$, $y \in]-25, 0]$, $fx = \frac{x+1}{25}$, $fy = 0$, $gx = 24$, $gy = -y$ et

$$\begin{aligned}
d(fx, fy) &= \left(\frac{x+1}{25} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{101} \left(24 + \frac{x+1}{25} \right)^2 + \frac{9}{10} (24-y)^2 + \frac{1}{101} (-y)^2 \\
&\quad + \frac{1}{101} (24)^2 + \frac{1}{101} \left(-y + \frac{x+1}{25} \right)^2 \\
&= a_1 d(gx, fx) + a_2 d(gx, gy) + a_3 d(gy, fy) \\
&\quad + a_4 d(gx, fy) + a_5 d(gy, fx),
\end{aligned}$$

donc, toutes les hypothèses du théorème sont satisfaites et 0 est le seul point fixe commun des deux applications.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a pu améliorer les théorèmes principaux d'Agrawal et al. [1] et Mirkov et al. [6] par la suppression de la complétude de l'espace, l'augmentation du nombre des applications ; autrement dit, on a utilisé deux applications au lieu d'une seule application, la condition de l'inégalité ; on a étendu les inégalités données dans les deux articles cités et en utilisant notre nouveau concept des applications occasionnellement faiblement biaisée de type (A) qui est une notion plus générale que les anciens concepts de la compatibilité entre les applications. On renforce notre conclusion par les citations de Browder et Hazewinkel (l'éditeur de la préface du livre d'Istratescu [5]) respectivement :

La théorie des points fixes est l'une des outils les plus puissants des mathématiques modernes.

Le point fixe et les théorèmes du point fixe ont toujours été un outil théorique majeur aussi éloigné que les équations différentielles, la topologie, l'économie, la théorie des jeux, la dynamique, le contrôle optimal et l'analyse fonctionnelle. De plus, plus ou moins récemment, l'utilité du concept pour les applications s'est énormément accrue par le développement de techniques précises et efficaces de calcul des méthodes de point fixe, une arme majeure dans l'arsenal du mathématicien appliqué.

Et on termine par cette jolie citation d'Archimède :

Donnez-moi un point fixe et un levier et je soulèverai la Terre.

Bibliographie

- [1] S. Agrawal, K. Qureshi and J. Nema, *A fixed point theorem for b-metric space*, Int. J. Pure Appl. Math. Sci., 9(1) (2016), 45–50.
- [2] M.A. Alghamdi, N. Hussain and P. Salimi, *Fixed point and coupled fixed point theorems on b-metric-like spaces*, J. Inequal. Appl., 402 (2013), 1–25.
- [3] I.A. Bakhtin, *The contraction mapping principle in almost metric spaces*, Funct. Anal., 30, Unianowsk, Gos. Ped. Inst., (1989), 26–37.
- [4] H. Bouhadjera, *Fixed points for occasionally weakly biased mappings of type (A)*, Mathematica Moravica, 26(1) (2022), 113–122.
- [5] V.I. Istratescu, *Fixed point theory*, An introduction, D. Reidel Publ. Comp. (1981).
- [6] N. Mirkov, Z.D. Mitrović, M. Younis and S. Radenović, *On Palais method in b-metric like spaces*, Math. Anal. Contemp. Appl., 3(3) (2021), 33–38.
- [7] *Liste de théorèmes du point fixe*, Wikipédia L'encyclopédie libre.