



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد- الطارف  
Université Chadli Bendjedid – El Tarf

كلية العلوم و التكنولوجيا  
Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات

Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Spécialité**: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

### Thème

## Résolution numérique de l'équation de chaleur –application en finance-

Présenté par:

**Boutra Chahinez**

Devant le Jury :

<b>Dr. Boussaha Hanene</b>	<b>MCB</b>	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
<b>Dr. Zehani Nadjla</b>	<b>MCB</b>	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
<b>Dr. Mecheri Halima</b>	<b>MCB</b>	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

**Année Universitaire 2022-2023**

# *Remerciements*

*Je remercie avant tout le BON DIEU qui ma donné la force, le courage et la santé pour pouvoir mener à terme ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et présenter mon plus profond respect à mon encadrante, Madame ZEHANI NADJLA, Maître de Conférence classe B à l'Université Chadli Bendjedid El Tarf, qui grâce à ses orientations précieuses, ses encouragements valorisants, sa direction compétente de ce mémoire, son soutien dans les moments d'incertitudes et sa disponiblité inconditionnelle, j'ai pu réaliser ce travail et s'initier à la recherche.*

*Je souhaite exprimer toute ma gratitude et mes plus sincères remerciements à Madame Boussaha Hanene, Maître de Conférence classe B à l'Université Chadli Bendjedid El Tarf, qui m'a fait l'honneur d'être la présidente du jury de mémoire. Qu'elle trouve ici ma gratitude et ma reconnaissance pour l'intérêt qu'elle a manifesté pour ce travail.*

*Je remercie sincèrement et vivement Madame Mecheri Halima, Maître de Conférence classe B à l'Université Chadli Bendjedid El Tarf, d'avoir accepté d'examiner mon travail. Je suis profondément reconnaissante de sa participation à ce jury.*

*J'adresse également des remerciements à tous les enseignants de la faculté de l'université de CHADLI BENJDID. Ainsi que tous les membres du département de mathématiques pour toute l'aide qui m'été accordée.*

# *Dédicaces*

*C'est avec honneur et gratitude que je dédie cet humble travail, fruit de longues années d'études universitaires, aux personnes les plus chères au monde.*

*Au meilleur des Pères et à ma très chère Maman. Qu'il trouvent en moi la source de leur fierté et en qui je dois tout.*

*À mes frères ABD EL KADER, SAIF EDDINE et ZIN EDDINE et ma petite soeur RITEJ. A qui je souhaite un avenir radieux plein de réussite.*

*À mes grands parents et ceux qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail.*

*À ma famille présente et absente surtout ma grande famille à Blida.*

*À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé et à qui je souhaite plus de succès.*

*À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé et à qui je souhaite plus de succès.*

*À tous ceux que j'aime.*

# Table des matières

Résumé	5
Liste des figures	8
Introduction générale	9
<b>1 Introduction aux mathématiques financières et calcul stochastique</b>	<b>10</b>
1.1 Marché financier	10
1.2 Equilibre du marché	10
1.3 Produit dérivé	10
1.4 Actif sous-jacent	10
1.5 Option	11
1.6 Prix d'exercice (strike)	12
1.7 Date d'exercice	13
1.8 Prime d'option	13
1.9 Pay-off d'une option	13
1.10 L'évaluation financière	13
1.11 Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)	13
1.12 Autofinancement	13
1.12.1 L'autofinancement de maintien	14
1.12.2 L'autofinancement d'enrichissement	14
1.13 Marché complet et viable	14
1.14 Parité Put-Call	14
1.15 La volatilité	14
1.16 Processus stochastique	15
1.17 Filtration	15
1.18 Mouvement Brownien	15
1.19 Martingale	16
1.20 Intégrale stochastique pour toutes fonctions	16
1.21 Équations différentielles stochastiques	16
1.21.1 Existence et unicité de la solution	16
1.21.2 Solution fortes et faibles	17
1.21.2.1 Solution forte	17
1.21.2.2 Solution faible	17
1.22 Formule d'Itô	18

<b>2</b>	<b>Black-Scholes et EDP</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction . . . . .	19
2.2	L'évolution des cours . . . . .	19
2.3	Hypothèses du modèle . . . . .	20
2.4	EDP d'évaluation de Black- Scholes . . . . .	20
2.5	Equivalence entre l'équation de Black-Scholes et l'équation de la chaleur . . . . .	22
2.5.1	Les démarches de la conversion . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Résolution numérique de l'équation de la chaleur</b>	<b>27</b>
3.1	Généralités sur la méthode des différences finies . . . . .	27
3.1.1	Le développement de Taylor . . . . .	27
3.1.1.1	Le développement en série de Taylor . . . . .	27
3.1.1.2	Développement limité de Taylor (Formule de Taylor) . . . . .	28
3.1.2	La méthode de différences finies . . . . .	29
3.1.2.1	Expression des dérivées premières . . . . .	29
3.1.2.2	Expression des dérivées secondes . . . . .	30
3.1.3	Résolution des problèmes Paraboliques . . . . .	32
3.1.3.1	Formulation . . . . .	32
3.1.3.2	Le maillage . . . . .	32
3.1.3.3	La méthode explicite (Schéma FTCS) (de l'anglais : Forward Time Centered Space) . . . . .	33
3.1.3.4	La méthode implicite (Schéma BTCS) (de l'anglais : Backward Time Centered Space) . . . . .	34
3.2	Équation de la chaleur . . . . .	36
3.2.1	Résolution numérique de l'équation de la chaleur - cas général - . . . . .	36
3.2.1.1	Principe du maximum . . . . .	36
3.2.1.2	Discrétisation du problème . . . . .	36
3.2.1.3	Consistance du schéma . . . . .	37
3.2.1.4	Stabilité du schéma . . . . .	38
3.2.1.5	Convergence . . . . .	39
3.2.2	Résolution de l'équation de Black-Scholes par la résolution numérique de l'équation de la chaleur . . . . .	40
3.2.3	Schéma d'Euler implicite . . . . .	41
3.2.3.1	Conditions initiales et aux limites . . . . .	42
3.2.3.2	Erreur d'approximation . . . . .	42
3.2.3.3	Réécriture matricielle . . . . .	42
3.2.3.4	Méthode LU pour la résolution du système linéaire . . . . .	44
	<b>Conclusion</b>	<b>46</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>46</b>

# *Résumé*

Ce mémoire présente une application en finance d'un type particulier d'équations aux dérivées partielles utilisé généralement en physique théorique. Il s'agit de l'équation de la chaleur. Cette dernière est intéressante puisque l'on connaît sa solution explicite ce qui n'est pas toujours le cas pour un grand nombre d'équations aux dérivées partielles.

Le but principal de ce travail est de mettre en exergue le lien entre le modèle de Black-Scholes et l'équation de la chaleur puis de développer les méthodes numériques permettant de calculer les prix des options financières. Ce travail comprend d'abord une introduction aux mathématiques financières et calcul stochastique. Puis une présentation du modèle de Black-Scholes et les démarches mathématiques de conversion de l'EDP de Black-Scholes à l'équation de la chaleur. Enfin, nous nous intéressons à la résolution de l'équation de Black-Scholes par la résolution numérique de l'équation de la chaleur qui est en effet plus simple et il est possible de se ramener de l'une à l'autre par des changements de variable et une discrétisation du domaine d'étude choisi par la méthode des différences finies.

**Mots clés :**

Black-Scholes, Options, EDP d'évaluation, équation de la chaleur, discrétisation.

# *Abstract*

This thesis presents an application in finance of a particular type of partial differential equations generally used in theoretical physics. This is the heat equation. The latter is interesting since we know its explicit solution, which is not always the case for a large number of partial differential equations.

The main purpose of this work is to highlight the link between the Black-Scholes model and the heat equation and then to develop numerical methods for calculating the prices of financial options. This work first includes an introduction to financial mathematics and stochastic calculus. Then a presentation of the Black-Scholes model and the mathematical steps for converting the Black-Scholes PDE to the heat equation. Finally, we are interested in the resolution of the Black-Scholes equation by the numerical resolution of the heat equation which is indeed simpler and it is possible to reduce from one to the other by changes of variable and a discretization of the field of study chosen by the method of finite differences.

**Keywords :**

Black-Scholes, PDE, Options, Heat equation, discretization.

## ملخص

تقدم هذه الأطروحة تطبيقاً في تمويل نوع معين من المعادلات التفاضلية الجزئية المستخدمة عموماً في الفيزياء النظرية، هذه هي معادلة الحرارة. هذه الأخير مثير للاهتمام لأننا نعرف حل الصريح والذي لا ينطبق دائماً على عدد كبير من المعادلات التفاضلية الجزئية.

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو ابراز الرابط بين نموذج بلاك-شول ومعادلة الحرارة ثم تطوير طرق عددية لحساب أسعار الخيارات المالية. يتضمن هذا العمل أولاً مقدمة في الرياضيات المالية و حساب التفاضل و التكامل العشوائي ثم عرض تقديمي لنموذج بلاك-شول والخطوات الرياضياتية لتحويل معادلة تفاضلية ل بلاك-شول الى معادلة الحرارة التي هي بالفعل أبسط ويمكن تقليلها من واحدة الى أخرى عن طريق تغيير المتغير وتقدير مجال الدراسة المختار بطريقة الفروق.

الكلمات المفتاحية

بلاك-شول ، خيارات ، تقييم معادلات تفاضلية جزئية ، معادلة حرارية ، تقدير.

# Table des figures

3.1	Maillage de domaine régulier. . . . .	27
3.2	Discrétisation du domaine d'analyse de la frontière "f". . . . .	29
3.3	Le problème Parabolique et sa discrétisation. . . . .	33
3.4	Le problème Parabolique et sa discrétisation. . . . .	34
3.5	Schéma Numérique de la méthode explicite. . . . .	34
3.6	Schéma numérique de la méthode implicite 2. . . . .	35

# Introduction générale

Découvert en 1973, le modèle Black-Scholes est un modèle mathématique du marché et qui est souvent considéré comme une avancée fondamentale pour la finance moderne. Ce modèle permet d'évaluer les prix des actifs financiers et notamment des options. Dans ce modèle, le prix de l'action est un processus stochastique en temps continu et l'équation aux dérivées partielles est homogène du second ordre.

Les méthodes d'évaluation d'options sont diverses et font intervenir plusieurs disciplines mathématiques qui ne sont pas facile et des fois impossible. D'où l'intérêt de l'approximation numérique qui se présente comme un remède qui remplace très souvent la simulation expérimentale qui est plus coûteuse.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution d'un problème intervenant dans la finance, dit équation de Black-Scholes, par la résolution numérique de l'équation de la chaleur. En effet, il est possible de se ramener de l'une à l'autre par des changements de variable que l'on est capable de résoudre assez facilement de façon numérique.

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'application du cours de méthodes numériques en finance. Le premier chapitre est dédié aux rappels mathématiques et financiers et aux notions générales nécessaires pour la compréhension de l'étude. Le deuxième chapitre a pour objectif de nous familiariser davantage au modèle de Black-Scholes et au processus d'évaluation d'options à travers l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le prix d'une option européenne ainsi que de nous présenter la démarche mathématique de conversion de l'équation de ce modèle à l'équation de la chaleur. Ensuite, le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes. Nous nous intéressons à la résolution numérique de l'équation de la chaleur vu que sa solution est connue et qu'elle plus simple que l'équation de Black-Scholes. Pour ce faire, nous utiliserons la méthode des différences finies. Puis, nous montrons qu'il est possible de se ramener de l'une à l'autre par des changements de variable. Enfin, une conclusion est tirée à la fin sur l'étude.

# Chapitre 1

## Introduction aux mathématiques financières et calcul stochastique

### 1.1 Marché financier

Appelé aussi Bourse des valeurs, est le lieu où se rencontrent les agents à capacité de financement et les agents à besoin de financement. C'est un marché de capitaux à long terme sur lequel s'échangent des produits financiers telles que les valeurs mobilières, actions et obligations [5].

### 1.2 Equilibre du marché

Un marché est à l'équilibre concurrentiel si tous les acheteurs et vendeurs sont preneurs de prix, et si, au prix en vigueur sur le marché, la quantité offerte est égale à la quantité demandée [5].

### 1.3 Produit dérivé

Comme son nom l'indique, est un instrument financier dont le prix ou la valeur est calculé par rapport à la valeur d'autres actifs ou instruments présents sur le marché [24].

### 1.4 Actif sous-jacent

Un actif sous-jacent est un actif financier servant de référence à un produit dérivé. Il peut s'agir d'un instrument financier (devise, action, indice, obligation, contrat à terme, option, etc.) ou physique (matières premières agricoles ou minérales).

Il peut porter sur tout type d'actifs financiers, il sert au calcul de la valeur et du rendement du produit financier dérivé concerné et détermine principalement son prix. La variation du prix d'un actif sous-jacent entraîne immédiatement une fluctuation du prix du produit dérivé auquel il se rapporte [24].

## 1.5 Option

Une option est un produit dérivé qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent [25] (les sous-jacents des options peuvent être des actions, des matières premières, des devises, des indices tels que CAC40, DAX, S&P 500, Nikkei et des paniers etc...), à un prix  $K$  précisé à l'avance (prix d'exercice ou strike) et à une échéance convenue  $T$  (la date maximale à laquelle le droit peut être exercé est la date d'échéance). Il existe deux types d'options :

- Une option d'achat dite call : elle donne à son détenteur le droit d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée à un certain prix convenue.

- Une option de vente dite put : elle donne à son détenteur le droit de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée à un certain prix convenue.

Si l'exercice peut survenir à tout moment jusqu'à la date d'échéance, l'option est dite américaine. Par contre si l'option ne peut être exercé qu'à la date d'échéance elle est dite européenne.

Le détenteur peut décider d'exercer ou non l'option qu'il détient en fonction de l'évolution du prix de l'actif sous-jacent par rapport au prix d'exercice  $K$  de l'option. Il existe globalement quatre profils de gain en fonction des stratégies : l'achat d'un call, la vente d'un call, l'achat d'un put, la vente d'un put.

1. L'acheteur d'un call paie la prime  $C_0$  au vendeur : il anticipe ainsi une hausse de la valeur de l'actif sous-jacent. Si le prix de l'actif sous-jacent  $S_T$  est inférieur au prix d'exercice  $K$  de l'option, l'acheteur n'a pas intérêt à exercer son option ( il perd donc ici la valeur de la prime payée au vendeur). Dès que le prix de l'actif sous-jacent  $S_t$  dépasse le prix d'exercice de l'option  $K$ , l'acheteur a intérêt à exercer son option. Son profit sera positif lorsque le prix de l'actif sous-jacent dépassera le prix d'exercice de l'option plus le montant de la prime payée.

La perte de l'acheteur du call est limitée au montant de la prime versée cependant son gain est potentiellement illimité.

Le point mort de l'option est atteint dès que le gain généré par la levée de l'option est égal à la prime payée : le profit pour l'investisseur est ainsi nul.

À la date d'échéance  $T$ , la valeur du call  $C_t$  est donnée par la relation :

$$C_t = \max(S_t - K, 0)$$

2. Le vendeur d'un call : Le profil de gain du vendeur du call est symétrique à celui de l'acheteur. Le vendeur perçoit la prime  $C_0$  versée par l'acheteur. Il anticipe de ce fait une baisse de la valeur de l'actif sous-jacent. Si le prix de l'actif sous-jacent  $S_t$  est inférieur au prix d'exercice  $K$  de l'option, le vendeur n'a pas à livrer l'actif à l'acheteur. Mais dès que le prix de l'actif sous-jacent  $S_t$  dépasse le prix d'exercice de l'option  $K$ , l'acheteur

a intérêt à exercer son option. Le vendeur doit donc livrer la quantité de l'actif défini dans le contrat.

Le gain du vendeur d'un call est limité au montant de la prime obtenue cependant sa perte est potentiellement illimitée.

3. L'acheteur d'un put paie la prime  $P_0$  au vendeur : il anticipe ainsi une baisse de la valeur de l'actif sous-jacent. Si le prix de l'actif sous-jacent  $S_t$  est inférieur au prix d'exercice  $K$  de l'option, l'acheteur a intérêt à exercer son option : il achètera l'actif sur le marché à un prix inférieur au prix d'exercice de l'option, pour le revendre au vendeur de l'option. Dès que le prix de l'actif sous-jacent  $S_t$  dépasse le prix d'exercice de l'option  $K$ , l'acheteur n'a pas intérêt à exercer son option.

La perte de l'acheteur du put est limitée au montant de la prime versée ; son gain n'est cependant pas illimité, puisque le prix de l'actif ne peut être négatif.

À la date d'échéance  $T$ , la valeur du put  $P_t$  est donnée par la relation :

$$P_t = \max(K - S_t, 0)$$

4. À l'inverse, le vendeur du put anticipe une hausse de la valeur de l'actif sous-jacent. Il perçoit de ce fait la prime  $P_0$  : son profil de gain est symétrique à celui de l'acheteur du put. Si le prix de l'actif sous-jacent  $S_t$  est inférieur au prix d'exercice  $K$  de l'option, le vendeur doit payer la quotité de l'actif à l'acheteur, car celui-ci a intérêt à lever son option. Mais dès que le prix de l'actif sous-jacent  $S_t$  dépasse le prix d'exercice de l'option  $K$ , l'acheteur n'a plus intérêt à lever son option. Le gain du vendeur d'un put est limité au montant de la prime obtenue ; sa perte n'est cependant pas illimitée, puisque le prix de l'actif ne peut être négatif [9].

## 1.6 Prix d'exercice (strike)

Le prix d'exercice (ou strike) est le prix auquel un contrat peut être exercé et le prix auquel un actif sous-jacent peut être acheté ou vendu. Pour une option call, un actif sous-jacent peut être acheté dès lors qu'il atteint le prix d'exercice. Pour une option put, un actif sous-jacent peut être vendu dès lors qu'il atteint le prix d'exercice. Pour qu'une option puisse être exercée, elle doit atteindre son prix d'exercice avant sa date d'échéance. Plus l'actif dépasse son prix d'exercice, plus le gain généré sera important. Lorsque l'actif sous-jacent d'une option atteint son prix d'exercice, l'option est dite « à parité », « à la monnaie » (at the money). Lorsqu'il dépasse le prix d'exercice, elle est « dans la monnaie » (in the money). Le prix d'exercice comparé au cours actuel du marché est un facteur clé dans la détermination de la prime facturée pour une option [9].

## 1.7 Date d'exercice

C'est la date à laquelle l'option perd toute valeur et disparaît, elle correspond au dernier jour auquel l'option peut être exercée, plus la date d'exercice de l'option est lointaine plus le prix de l'option est élevé [9].

## 1.8 Prime d'option

Une prime d'option est le prix actuel du marché d'un contrat d'option. Il s'agit donc du revenu perçu par le vendeur (émetteur) d'un contrat d'option à une autre partie. Les primes des options dans le cours sont composées de deux facteurs : la valeur intrinsèque et la valeur extrinsèque. Les primes des options hors du cours consistent uniquement en valeur extrinsèque [9].

## 1.9 Pay-off d'une option

Le pay-off d'une option est son résultat à l'échéance. Le pay-off d'une option est équivalent à sa valeur intrinsèque ce qui signifie pour un call, que son pay-off est égal à la différence entre le prix du sous-jacent et le prix d'exercice et pour un put, au prix d'exercice diminué du prix du sous-jacent. Le pay-off d'une option implique aussi de déduire la prime payée pour acquérir l'option [9].

## 1.10 L'évaluation financière

L'évaluation financière est l'estimation de la valeur (c'est-à-dire du prix potentiel) des actifs et engagements financiers (actions, obligations, options, contrats d'épargne) [22].

## 1.11 Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)

Dans un marché parfait l'hypothèse d'Absence d'opportunité d'arbitrage incite qu'il n'est pas possible d'obtenir un gain strictement positif avec une probabilité strictement positive pour un investissement nul [18].

## 1.12 Autofinancement

L'autofinancement pour une entreprise consiste à recourir à sa propre trésorerie pour financer un investissement. L'entreprise utilise les profits dégagés au cours des années précédentes, et qui n'ont pas été distribués aux associés (ou prélevés par l'entrepreneur) [24]. Il existe différents types d'autofinancement :

### 1.12.1 L'autofinancement de maintien

Il s'agit d'un autofinancement visant à maintenir la capacité de production d'une entreprise.

### 1.12.2 L'autofinancement d'enrichissement

Il s'agit d'un autofinancement qui constitue une expansion des ressources de l'entreprise.

## 1.13 Marché complet et viable

Il existe deux hypothèses portant sur le marché qui sont très utilisées dans les différents modèles d'évaluation de produits dérivés à savoir marché complet et marché viable [2].

**Définition 1.** *On dit que le marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.*

**Définition 2.** *Marché est dit complet si tout produit dérivé est simulable c-à-d, s'il existe une stratégie autofinancée répliquant le pay-off en date d'échéance pour chacun des produits dérivés .*

## 1.14 Parité Put-Call

La parité Put-Call fait référence à une condition d'équilibre élémentaire entre le prix d'un call et le prix d'un put, tous deux de type européen [2], dotés d'une même échéance et d'un prix d'exercice égal :

$$C + Ke^{-rT} = P + S$$

Où

- $C$  : Prix du call
- $K$  : Prix d'exercice
- $r$  : Rendement de l'actif sans risque
- $T$  : Durée de vie de l'option
- $P$  : Prix du put
- $S$  : Prix de l'action

Si cette relation n'était pas respectée, cela créerait des opportunités d'arbitrage.

## 1.15 La volatilité

La volatilité en finance est l'ampleur des variations du cours d'un actif financier. Elle sert de paramètre de quantification du risque de rendement et de prix d'un actif financier. Lorsque la volatilité est élevée, la possibilité de gain est plus importante, mais le risque de perte l'est aussi. C'est par exemple le cas de l'action

d'une société plus endettée, ou disposant d'un potentiel de croissance plus fort et donc d'un cours plus élevé que la moyenne. Si la croissance des ventes est moins forte qu'espérée ou si l'entreprise peine à rembourser sa dette, la chute du cours sera très forte [17].

## 1.16 Processus stochastique

Un processus stochastique (ou processus aléatoire) représente une évolution, généralement dans le temps, d'une variable aléatoire.

On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace  $E$  muni d'une tribu  $w$ , une famille  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  de variables aléatoires sur un espace de probabilité  $(\Omega, F, P)$  à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, w)$  [20].

Notons qu'en fait un processus est une application :

$$\begin{cases} X : & \Omega \times T \rightarrow E \\ & (w, t) \mapsto X_t(w) \end{cases}$$

tel que

- à chaque instant  $t \in T$ , l'application  $(w, t) \rightarrow X_t(w)$  est une variable aléatoire.
- pour chaque élément  $w \in \Omega$ , l'application  $t \rightarrow X_t(w)$  est une fonction de  $T \rightarrow E$  qui s'appelle trajectoire associée à l'élément  $w$ .

## 1.17 Filtration

**Définition 3.** Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité. Une filtration sur cet espace est une famille croissante [15],  $(F_t)_{0 \leq t \leq \infty}$  de sous-tribus de  $F$ . On a alors, pour tous  $0 \leq s \leq t$  :

$$F_0 \subset F_s \subset F_t \subset F_\infty \subset F$$

## 1.18 Mouvement Brownien

En mathématiques financières, les processus d'évolution des prix sont mieux représentés par des mouvements Browniens (ou des processus plus compliqués encore). Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le mouvement brownien, il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et du taux d'intérêt [26].

**Définition 4.** On appelle Mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles,  $(X_t)_{t \geq 0}$  qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :

- Continuité :  $P$  p.s. la fonction  $s \rightarrow X_s(w)$  est une fonction continue.
- Indépendance des accroissements : si  $s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  est indépendant de la tribu  $F_s = \sigma(X_u, u \leq s)$ .
- Stationnarité des accroissements : si  $s \leq t$ , la loi de  $X_t - X_s$  est identique à celle de  $X_{t-s} - X_0$ .

## 1.19 Martingale

Soit  $(\Omega, F, \{F_t \geq 0\}, P)$  un espace probabilisé filltré [26].

**Définition 5.** On appelle une martingale tout processus stochastique  $(M_t)_{t \in T}$  vérifiant :

1.  $(M_t)_{t \geq 0}$  est  $F_t$ -mesurable, pour tout  $t$ ,
2.  $E(|M_t|) \leq \infty$ ,
3.  $E(M_s/F_t) = M_s$ , pour tout  $s \geq t$ ,
4. Si  $E(M_s/F_t) \leq M_t$ , on dit que  $M_t$  est une sur-martingale,
5.  $E(M_s/F_t) \geq M_t$ , on dit que  $M_t$  est une sous-martingale.

## 1.20 Intégrale stochastique pour toutes fonctions

L'intégrale stochastique de  $f \in L_w^2[\alpha, \beta]$  est définie comme la limite en probabilité de  $\int_{[\alpha, \beta]} f_n(t) dW(t)$  où  $f_n$  est une suite de fonctions étagées dans  $L_w^2[\alpha, \beta]$  [7], i.e .

$$\int_{[\alpha, \beta]} f_n(t) dW(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{x \rightarrow +\infty}^{n-1} f(t_k) (W(t_k) - w - W(t_k)), \quad P - p.s.$$

## 1.21 Équations différentielles stochastiques

Le but des équations différentielles stochastiques est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire [7].

**Définition 6.** On appelle équation différentielle stochastique toute équation définie sur  $\mathbb{R}^d$  de drift  $b$  et de diffusion  $\sigma$ , donnée par :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, & \forall t \in [0, T], \\ X_0 = \xi, \end{cases}$$

où  $T$  est un réel strictement positif  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\sigma : \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  sont deux fonctions boréliennes,  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{R}^d$  défini sur un espace filtré  $(\Omega, F, (F_{t \geq 0}), P)$  et  $\xi$  est une variable aléatoire quelconque indépendante du mouvement brownien, appartient  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.21.1 Existence et unicité de la solution

Pour l'existence et l'unicité de la solution, on a les résultats suivants :

**Théorème 7.** Supposons que

1.  $a(t, x)$  et  $b(t, x)$  sont mesurables dans  $[0, T] \times \mathbb{R}$ .
2.  $|a(t, x) - a(t, y)| \leq K_1 |x - y|$  et  $|b(t, x) - b(t, y)| \leq K_1 |x - y|$ .

3.  $|a(t, x)| \leq K_2(1 + |x|)$  et  $|b(t, x)| \leq K_2(1 + |x|)$ , ( $K_1$  et  $K_2$  des constantes quelconques).

Si  $\xi_0$  est un vecteur aléatoire en dimension  $n$  indépendant de  $\sigma(W(t), 0 \leq t \leq T)$  tel que  $E|\xi|^2 \leq \infty$  alors, il existe une solution unique dans  $M_w^2$ .

L'unicité est comprise au sens des trajectoires, i.e., si  $\xi_1(t)$  et  $\xi_2(t)$  sont deux solutions, alors :

$$P\{\xi_1(t) = \xi_2(t), t \in [0, T]\}$$

**Théorème 8.** Supposons que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. De plus, soient  $a$  et  $b$  deux fonctions continues dans  $[0, +\infty] \times \mathbb{R}^n$  alors, la solution de l'équation est un processus de diffusion de drift  $a(.,.)$  et de matrice de diffusion

$$\sigma(t, x) = b(t, x) b^t(t, x), \left( \sigma_{ij}(t, x) = \sum_{k=1}^n b_{ik}(t, x) b_{jk}(t, x) \right)$$

### 1.21.2 Solution fortes et faibles

Il existe deux types de solution d'une EDS, les solutions fortes et les solutions faibles.

On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + b(t, \xi(t)) d(t), & t \in [0, T] \\ \xi(0) = \xi_0, \end{cases}$$

telle que

1.  $\mathbf{P}[\xi(0) = \xi_0] = 1$ ,
2.  $\mathbf{P}\left[\int_0^t (|a(s, \xi(s))| + |b(s, \xi(s))|^2) ds < \infty\right] = 1$ ,
3.  $\varepsilon(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s, \xi(s)) dt + \int_0^t b(s, \xi(s)) dW(s)$ , P-p.s.,

#### 1.21.2.1 Solution forte

Commençons d'abord par définir les solutions fortes.

**Définition 9.** On dit que l'équation différentielle stochastique admet une solution forte, si pour tout espace probabilisé filtré  $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$  et pour tout mouvement brownien  $(W(t)_{t \geq 0})$ , il existe un processus continu  $\xi = (\xi(t)_{t \geq 0})$  tel que les propriétés 1, 2 et 3 soient vérifiées.

#### 1.21.2.2 Solution faible

Maintenant, on va définir les solutions faibles.

**Définition 10.** On dit que l'équation différentielle stochastique admet une solution faible (ou en loi), si on peut trouver un espace probabilisé filtré  $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ , un mouvement brownien  $(W(t)_{t \geq 0})$  et un processus continu  $\xi = (\xi(t)_{t \geq 0})$  tels que les propriétés 1, 2 et 3 soient vérifiées. Donc une solution faible est une collection d'objets  $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P, W(t)_{t \geq 0}, \xi(t)_{t \geq 0})$ .

## 1.22 Formule d'Itô

On appelle processus d'Itô à valeurs réelles tout processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad \text{pour } t \in [0; T] \quad \text{P-p.s}$$

avec  $X_0$  est  $F_0$ -mesurable  $(\mu_t)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq T}$  deux processus adaptés à  $F_t$ ; vérifiant les conditions d'intégrabilités [16] :

$$E \left[ \int_0^T |\mu_s| ds \right] < \infty \quad \text{et} \quad E \left[ \int_0^T |\sigma_s|^2 ds \right] < \infty$$

La notation infinitésimale de cette relation est :

$$\begin{cases} dX_t = \mu dt + \sigma dB_t \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  un  $(F_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  processus d'Itô et  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois continument dérivable en  $x$  et dérivable en  $t$ , alors pour  $t \in [0, T]$  la formule d'Itô s'écrit :

$$d(f(t, X_t)) = \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} d\langle X, X \rangle_t$$

# Chapitre 2

## Black-Scholes et EDP

### 2.1 Introduction

Le modèle de Fisher Black et Myron Scholes est un modèle d'évaluation d'option en temps continu. Publié en 1973, il constitue un prolongement des travaux réalisés par Paul Samuelson et Robert Merton. L'intuition fondamentale de Black et Scholes fut de mettre en rapport le prix implicite de l'option et la variation du prix de l'actif sous-jacent [14]. Leur découverte eut très rapidement une influence considérable et des résultats de leur modèle sont utilisés dans tous les compartiments des marchés financiers. Dès 1977, Oldrich Vasicek s'en inspira pour fonder la théorie moderne des taux d'intérêt et Merton et Scholes reçurent en 1997 le prix Nobel d'économie pour leur travaux quant à Fisher Black était malheureusement mort en 1995.

### 2.2 L'évolution des cours

Le modèle proposé par Black-Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action) de prix  $S_t$  à l'instant  $t$  et un actif sans risque de prix  $S_t^0$  à l'instant  $t$  [14]. On suppose l'évolution de  $S_t^0$  régie par l'équation différentielle (ordinaire) :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad (2.1)$$

où  $r$  est une constante positive (cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égale à  $r$  (noter qu'ici  $r$  est un taux d'intérêt instantané)).

On pose  $S_0^0 = 1$  de sorte que  $S_t^0 = e^{rt}$  pour  $t \geq 0$  et on suppose aussi que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t) \quad (2.2)$$

où,

$\mu$  est la dérive (tendance ou drift) supposée constante.

$\sigma$  est la volatilité de l'action supposée constante.

$B_t$  est un mouvement Brownien standard.

$T$  est la date d'échéance de l'option que l'on se propose de traiter.

L'équation (2.2) a pour solution explicite :

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right) \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.3)$$

où  $S_0$  est le cours observé à la date 0. Il en résulte en particulier que, dans le modèle, la loi de  $S_t$  est une loi log-normale (c'est-à-dire que son logarithme suit une loi normale).

Plus précisément, on voit que le processus  $S_t$  vérifie une équation du type (2.2) si et seulement si le processus  $(\log(S_t))$  est un mouvement Brownien (pas nécessairement standard). Cela signifie que le processus  $(S_t)$  vérifie les propriétés suivantes :

- Continuité des trajectoires.
- Indépendance des accroissements relatifs : si  $u \leq t$ ,  $(S_t/S_u)$  ou (ce qui revient au même) l'accroissement relatif  $(S_t - S_u)/S_u$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_u$ .
- Stationnarité des accroissements relatifs : si  $u \leq t$ , la loi de  $(S_t - S_u)/S_u$  est identique à celle de  $(S_t - u - S_0)/S_0$ .

Ces trois propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black-Scholes sur l'évolution du cours de l'action.

## 2.3 Hypothèses du modèle

Sur le marché, on suppose que [18] :

1. Le prix du sous-jacent est un mouvement brownien géométrique ;
2. La volatilité est connue à l'avance ;
3. Il est possible d'acheter et de vendre le sous-jacent à tout moment et sans frais ;
4. Les ventes à découvert sont autorisées ;
5. Il n'y a pas de dividende ;
6. Le taux d'intérêt est constant et connue à l'avance ;
7. L'exercice de l'option ne peut se faire qu'à la date d'échéance, pas avant (option européenne) ;

## 2.4 EDP d'évaluation de Black- Scholes

Soient l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  muni de la filtration naturelle  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  du Mouvement Brownien standard  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$  et le taux d'intérêt ( $r \neq cte$ ) n'est pas supposé fixe.

Soit  $v_t$  la valeur d'une option sur action ne versant pas de dividendes, qui est modélisée comme une fonction dépendant du temps  $t$  et du prix de l'action sous-jacente  $S_t$  [10, 27].

Le prix de l'action est modelisé par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (2.4)$$

Utilisant la formule d'Itô pour calculer la variation de la valeur de l'option  $dv$  suite à une variation du temps de longueur  $dt$  et d'une variation du prix de l'action  $dS$  sur cet intervalle de temps  $dt$  :

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\ &= \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial v}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial v}{\partial S_t} dB_t \end{aligned} \quad (2.5)$$

D'une part, soit un portefeuille  $P$  qui contient une quantité  $\lambda$  d'actions et d'un Call de maturite  $T$ , sa valeur est donnée par :

$$P_t = \lambda S_t - v_t, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.6)$$

Sa variation s'exprime donc :

$$dP_t = \left( \lambda \mu S_t - \frac{\partial v}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial v}{\partial S_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} \right) dt + \left( \sigma \lambda S_t - \sigma S_t \frac{\partial v}{\partial S_t} \right) dB_t \quad (2.7)$$

Pour que ce portefeuille soit sans risque, il faut que son terme aléatoire soit nul i.e ( $[.] dB = 0$ ) :

$$\left( \sigma \lambda S_t - \sigma S_t \frac{\partial v}{\partial S_t} \right) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\partial v}{\partial S_t} \quad (2.8)$$

D'autre part, un portefeuille sans risque sur un marché parfaitement arbitré procure un rendement égale au taux sans risque  $r$ . Sur une période de  $dt$ , la valeur de ce portefeuille est donnée par :

$$dP_t = P_t r dt \quad (2.9)$$

En utilisant l'équation (2.5), la variation du portefeuille devient :

$$dP_t = \left( \lambda \mu S_t - \frac{\partial v}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial v}{\partial S_t} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} \right) dt \quad (2.10)$$

Par identification (équation (2.9) et (2.10) ) et en utilisant le fait que  $\lambda = \frac{\partial v}{\partial S_t}$  et  $P_t = \lambda S_t - v_t$ , on obtient l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes :

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} + r S_t \frac{\partial v}{\partial S_t} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} \right) = r v \quad (2.11)$$

La résolution de cette équation nécessite une condition terminale. Cette condition est simplement le pay-off de l'option Call :

$$C_T = (S_T - K)^+$$

ou bien le pay-off de l'option Put :

$$P_T = (K - S_T)^+$$

## 2.5 Equivalence entre l'équation de Black-Scholes et l'équation de la chaleur

Dans cette section, on va développer les démarches nécessaires afin de montrer que l'équation de Black-Scholes est équivalente à l'équation de la chaleur avec un changement de variables.

En effet, d'après les sections précédentes l'EDP de Black-Scholes est du type [4] :

$$\frac{\partial v}{\partial S} = \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + r S_t \frac{\partial v}{\partial S} - r v \quad (2.12)$$

Notre objectif est d'obtenir une équation du type :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(S, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(S, t) \quad (2.13)$$

avec les conditions  $0 < s$  ,  $0 \leq t \leq T$  et une fonction de valeur terminale  $v(S, T) = \phi(S)$ .

Dans ce qui suit on va montrer que l'équation (2.12) est équivalente à l'équation de la chaleur. L'objectif est de montrer que l'équation de Black-Scholes peut être transformée en l'équation de la chaleur en faisant quelques transformations. Ce qui permet d'utiliser les propriétés et résultats classiques de cette dernière à fin d'obtenir une solution  $v$  en fonction de  $o(S)$ .

Pour commencer, on va placer l'équation de Black-Scholes dans la classe des équations aux dérivées partielles homogène de second ordre. Elle est de second ordre car la dérivée partielle la plus élevée est de second ordre et linéaire car les dérivées partielles  $v_s, v_{ss}, v_t$  sont multipliées par des fonctions à variables indépendantes ( $S$  et  $t$ ).

En général une EDP linéaire du second ordre pour une fonction  $u(x, t)$  prend la forme :

$$a u_{xx} + b u_{xt} + c u_{tt} + d u_x + e u_t + f u + g = 0 \quad (2.14)$$

Les coefficients  $a = a(x, t), \dots, g = g(x, t)$  sont des fonctions à variables indépendantes lorsque  $g = 0$  l'équation est dite homogène). Le problème est de trouver la où les fonctions  $u(x, t)$  qui résolvent (2.14), pour  $(x, t)$  dans une certaine région, généralement en association avec d'autres "conditions aux limites" c'est-à-dire propriétés ou valeurs de la fonction qui sont spécifiées sur la frontière de la région. Pour l'EDS (2.2) la région qui nous intéresse est la bande verticale :

$$0 \leq t \leq T \quad \text{et} \quad 0 < S$$

et la condition aux limites afin d'avoir  $v(S, T) = \phi(S)$  pour  $s > 0$ . Il n'y a pas de condition aux limites spécifiée pour  $S = 0$  (ou  $t = 0$ ).

En supposant que  $a, b$  et  $e$  ne sont pas tous nuls (sinon l'équation ne serait pas du second ordre), les équations de la forme (2.14) sont généralement classées dans l'un des trois types suivants : hyperbolique, parabolique, ou elliptique.

Les exemples les plus connus de chaque type sont les suivants :

- L'équation d'onde (hyperbolique) :  $u_{xx} - u_{tt} = 0$
- L'équation de la chaleur (parabolique) :  $u_{xx} - u_t = 0$
- L'équation de laplace (elliptique) :  $u_{xx} + u_{yy} = 0$

### 2.5.1 Les démarches de la conversion

On va suivre les démarches qui suivent en vue de convertir les solutions de l'équation de Black-Scholes (2.12) en solution de l'équation classique de la chaleur.

**Premièrement,**

Posant  $y = \log(S)$  et supposant que pour une fonction  $f(y, t)$ , on a :

$$v(s, t) = f(y, t) = f(\log(S), t) \quad (2.15)$$

Ainsi, les termes de l'EDP de Black-Scholes deviennent :

$$S \frac{\partial v}{\partial S}(S, t) = S \left[ \frac{\partial v}{\partial y}(y, t) \right] = S \cdot \frac{1}{S} \frac{\partial f}{\partial y}(\log(S), t) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, t) \quad (2.16)$$

et

$$S^2 v_{ss}(s, t) = S^2 \left[ -\frac{1}{S^2} f_y(\log(S); t) + \frac{1}{S^2} f_{yy}(\log(S), t) \right] = f_{yy}(y, t) - f_y(y, t) \quad (2.17)$$

et la dérivée temporelle reste inchangée :

$$v_t(S, t) = f_t(y, t) \quad (2.18)$$

En remplaçant ces substitutions dans (2.12), on trouve :

$$\frac{\sigma^2}{2} S_t^2 v_{ss} + r S_t v_s - r v + v_t = \frac{\sigma^2}{2} f_{yy} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) f_y + f_t - r f \quad (2.19)$$

où le côté gauche est évalué par rapport à  $(S, t)$  et le côté droit est évalué par rapport à  $(y, t)$ .

Donc en termes de la nouvelle variable  $y = \log(S)$ , on trouve que  $v(S, t) = f(y, t)$  résout l'équation de Black-Scholes, si et seulement si, on résout l'équation :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 f_{yy} + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) f_y + f_t - r f = 0 \quad (2.20)$$

Cela nous donne une équation à coefficients constants par opposition aux coefficients variables de l'équation (2.12). Ainsi que  $-\infty < S < +\infty$  correspondant à  $-\infty < y < +\infty$ .

### Deuxièmement,

On va apporter d'autres modifications aux variables pour transformer l'équation de Black-Scholes en l'équation de la chaleur.

L'étape suivante consiste à éliminer la dérivée du premier ordre ( $f_y$ ).  
Faisant le changement de variable suivant :

$$f(y, t) = e^{c_1 y} g(y, t). \quad (2.21)$$

Ceci implique :

$$f_t = e^{c_1 y} g_t \quad (2.22)$$

et

$$f_y = c_1 e^{c_1 y} g(y, t) + e^{c_1 y} g_y \quad (2.23)$$

et

$$f_{yy} = c_1^2 e^{c_1 y} g + c_1 e^{c_1 y} g_y + c_1 e^{c_1 y} g_y + e^{c_1 y} g_{yy} \quad (2.24)$$

En remplaçant  $f_t$ ,  $f_y$ , et  $f_{yy}$  dans l'équation (2.20), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2}{2} (c_1^2 e^{c_1 y} g + c_1 e^{c_1 y} g_y + c_1 e^{c_1 y} g_y + e^{c_1 y} g_{yy}) \\ & + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) [c_1 e^{c_1 y} g + e^{c_1 y} g_y] + e^{c_1 y} g_t(y, t) - r e^{c_1 y} g = 0 \\ \Leftrightarrow & e^{c_1 y} \left[ \frac{\sigma^2}{2} [c_1^2 g + c_1 g_y + c_1 g_y + g_{yy}] + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) (c_1 g + g_y) + g_t - r g \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & e^{c_1 y} \left[ \frac{\sigma^2}{2} g_{yy} + \left(\sigma^2 c_1 + r - \frac{\sigma^2}{2}\right) g_y + g_t + \left(\frac{\sigma^2}{2} c_1^2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) c_1 - r\right) g \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & e^{c_1 y} \left[ \frac{\sigma^2}{2} g_{yy} + \left(\sigma^2 c_1 + r - \frac{\sigma^2}{2}\right) g_y + g_t + (c_1 - 1) \left(r + c_1 \frac{\sigma^2}{2}\right) g \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

En posant  $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}$ , la dernière équation devienne :

$$\frac{\sigma^2}{2} g_{yy} + g_t + (c_1 - 1) \left(r + c_1 \frac{\sigma^2}{2}\right) g = 0 \quad (2.26)$$

### Troisièmement,

On élimine ensuite le terme  $g$  par un autre changement de variable :

$$g(y, t) = e^{c_2 t} h(y, t) \quad (2.27)$$

On obtient les dérivées suivantes,

$$g_t = c_2 e^{c_2 t} h + e^{c_2 t} h_t \quad (2.28)$$

et

$$g_y = e^{c_2 t} h_y \quad (2.29)$$

et

$$g_{yy} = e^{c_2 t} h_{yy} \quad (2.30)$$

En remplaçant  $g_t, g_y$  et  $g_{yy}$  dans l'équation (2.26), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} e^{c_2 t} h_{yy} + c_2 e^{c_2 t} h + e^{c_2 t} h_t + (c_1 - 1) \left( r - c_1 \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{c_2 t} h &= 0 \\ \Rightarrow e^{c_2 t} \left( \frac{\sigma^2}{2} h_{yy} + c_2 h + h_t + (c_1 - 1) \left( r - c_1 \frac{\sigma^2}{2} \right) h \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Posant  $c_2 = - (c_1 - 1) \left( r + c_1 \frac{\sigma^2}{2} \right)$ , cela rend l'équation (2.31) équivalente à :

$$\frac{\sigma^2}{2} h_{yy} + h_t = 0 \quad (2.32)$$

**Dernièrement,**

Maintenant , faisant le dernier changement de variables pour éliminer  $\frac{1}{2}\sigma^2$  et inverser le signe de la dérivée temporelle.

Soit  $x = \sqrt{2} \frac{y}{\sigma}$  et  $\tau = T - t$  , alors :

$$h(y, t) = e^{-c_2 T} u(x, \tau) = e^{-c_2 T} u\left(\sqrt{2} \frac{y}{\sigma}, T - t\right) \quad (2.33)$$

ce qui mène à :

$$h_t = -e^{-c_2 T} \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (2.34)$$

et

$$h_y = e^{-c_2 T} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.35)$$

et

$$h_{yy} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} e^{-c_2 T} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \right) u_{xx} \quad (2.36)$$

En remplaçant  $h_t, h_y$  et  $h_{yy}$  dans l'équation (2.32), on trouve :

$$u_{xx}(x, \tau) - u_\tau(x, \tau) = 0 \quad (2.37)$$

Cette dernière est équivalente à l'équation de la chaleur.

Maintenant mettant tout les changements de variables ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} v(s, t) &= f(y, t) \\ &= e^{c_1 y} g(y, t) \\ &= e^{c_1 y + c_2 t} h(y, t) \\ &= e^{c_1 y + c_2 t} e^{-c_2 T} u(x, \tau) \\ &= e^{\left( c_1 \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right) \cdot x - c_2 \tau} u(x, \tau) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nottant que le rôle de  $e^{-c_2 T}$  dans la dernière démarche est simplement d'obtenir tous les événements de la combinaison  $T - t = \tau$ . Ce  $\tau$  est la variable de temps qu'on utilisera pour l'équation de la chaleur. Il est différent du  $t$  dans l'équation de Black-Scholes .

Posant,  $\mu = c_1 \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$  et  $v = c_2$  après avoir simplifié les expressions pour  $\mu$  et  $v$  on a :

$$v(s, t) = e^{\mu x - vT} u(x, \tau) \quad (2.39)$$

avec  $S = e^{\frac{\sigma x}{2}}$ ,  $t = T - \tau$ ,  $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right)$  et  $v = r + \mu^2$ .

On indique que les variables  $v, S$  et  $t$  sont des variables financières et que les variables  $u, x$  et  $t$  correspondantes aux variables de l'équation de la chaleur telles que les fonctions sont définies par :  $v(S, t) : (0, \infty) \times (-\infty, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u(x, T) : (-\infty, \infty) \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dans l'étude de la résolution numérique de l'équation de la chaleur, on commence généralement pour des valeurs de  $u$  par  $r = 0$  prescrites par une fonction de valeur initiale.

$$u(x, 0) = \psi(x) \quad (2.40)$$

puis résoudre pour  $u$  à  $\tau$  une avance dans le temps . Cependant, pour l'équation de Black Scholes on commence avec des valeurs données à  $t = T$  par la fonction de valeur finale  $v(s, T) = \phi(S)$ , et résolvons pour  $v$  comme  $t$  recule dans le temps. Remarquant que  $\psi(x)$  et  $\phi(S)$  sont reliés par notre changement de variables :

$$\phi(S) = v(S, T) = e^{\mu x} u(x, 0) = e^{\mu x} \psi(x) \quad (2.41)$$

# Chapitre 3

## Résolution numérique de l'équation de la chaleur

### 3.1 Généralités sur la méthode des différences finies

Les méthodes analytiques sont utilisées pour avoir la solution analytique (exacte) tandis que les méthodes numériques sont utilisées pour le calcul d'approximations des solutions des problèmes mathématiques qui serait difficile, voire impossible d'obtenir par des moyens analytiques [7, 16]. Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution d'un problème tel que la méthode de différences finies.

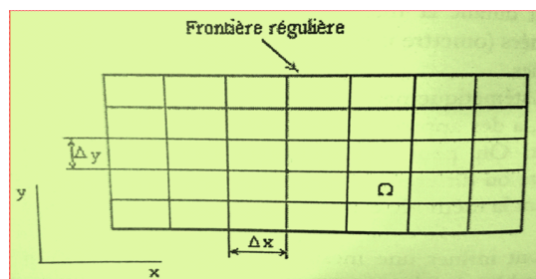


FIGURE 3.1 – Maillage de domaine régulier.

#### 3.1.1 Le développement de Taylor

##### 3.1.1.1 Le développement en série de Taylor

Soient  $f$  une fonction indéfiniment dérivable au voisinage d'un point  $x = x_0$  (c'est-à-dire dans un intervalle ouvert contenant le point  $x = x_0$ ,  $0 < |x - x_0| < R$ ).

On peut approcher la fonction  $f$  par une fonction polynomiale qui s'écrit

sous la forme de série convergente qu'on appelle série de Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!} f^{(1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (3.1)$$

Qui est équivalent à :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

### 3.1.1.2 Développement limité de Taylor (Formule de Taylor)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!} f^{(1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n \quad (3.2)$$

Où,  $R_n$  est appelé le reste ou l'erreur de troncature, est donné par la formule de Lagrange

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi); \quad x-x_0 \leq \xi \leq x+x_0 \quad (3.3)$$

Cette erreur est notée par :  $o(x-x_0)^{n+1}$ .

La formule de Taylor est utilisée pour approcher les fonctions par des fonctions polynomiales.

En posant,  $h = \Delta x = x - x_0$ , l'équation (3.2) devient :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h^1}{1!} f^{(1)}(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(h^{n+1}) \quad (3.4)$$

Pour la dérivée première, l'équation (3.4) s'écrit :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) \pm \text{erreur} \quad (3.5)$$

Le signe  $\pm$  est introduit pour tenir compte de l'allure (concave "erreur positive" ou convexe "erreur négative") de la courbe donnée par  $f(x)$ .

### 3.1.2 La méthode de différences finies

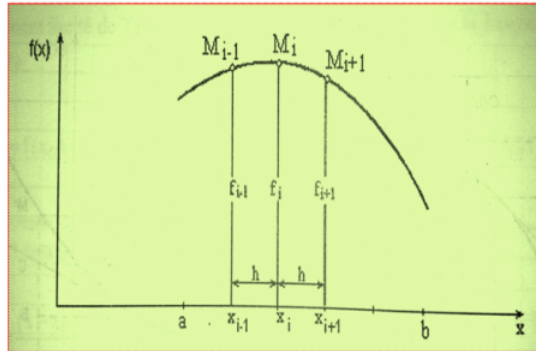


FIGURE 3.2 – Discretisation du domaine d'analyse de la frontière “f”.

Pour la discrétisation, on adopte les notations suivantes :  $x \leftrightarrow x_i$  (points pivots),  $x_i = x_1 + (i - 1)h$ ,  $f_i = f(x_i)$ ,  $f_{i+1} = f(x_{i+1}) = f(x_i + h)$ .

#### 3.1.2.1 Expression des dérivées premières

##### Différences finies décentrées à droite (progressives)

La formule de Taylor d'ordre 2 donne :

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(\xi); \quad x_i < \xi < x_{i+1} \quad (3.6)$$

donc

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + o(h) \quad (3.7)$$

avec  $o(h)$  l'erreur de troncature tel que :  $o(h) = -\frac{h^2}{2}f''(\xi)$ ;  $x_i < \xi < x_i + h$ .

La formule de la dérivée première s'écrit en notation indicielle :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + o(h) \quad (3.8)$$

##### Différences finies décentrées à gauche (régressives)

En changeant  $h$  en  $-h$  dans l'équation (3.6) on obtient :

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(\xi); \quad x_i - h < \xi < x_i \quad (3.9)$$

Donc

$$f'(x_i) = -\frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + o(h) \quad \text{tq } o(h) = \frac{h}{2}f''(\xi) \quad (3.10)$$

Ainsi, en notation indicielle :

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + o(h) \quad (3.11)$$

## Différences centrées

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \quad (3.12)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \quad (3.13)$$

En soustrayant les deux dernières équations, on obtient :

$$f(x_i + h) - f(x_i - h) = 2hf'(x_i) + \frac{2h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) \quad (3.14)$$

Ainsi,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + o(h^2) \quad (3.15)$$

où,  $o(h^2) = \frac{-h^2}{6}f^{(3)}(\xi)$  avec  $x_i - h < \xi < x_i + h$ .

Ainsi, en notation indicielle :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + o(h^2) \quad (3.16)$$

### 3.1.2.2 Expression des dérivées secondes

#### Différences finies décentrées à droite (progressives)

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi) \quad (3.17)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{4h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{8h^3}{3!}f^{(3)}(\xi) \quad (3.18)$$

Donc

$$f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) = -f(x_i) + \frac{2h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{6h^3}{3!}f^{(3)}(\xi) \quad (3.19)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_i + h) + f(x_i + 2h)}{h^2} + o(h) \quad (3.20)$$

Tel que :  $o(h) = -hf^{(3)}(\xi)$  avec  $x_i < \xi < x_i + 2h$ .

En notation indicielle, on a :

$$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2} + o(h) \text{ avec } o(h) = -hf^{(3)}(\xi) \quad (3.21)$$

### Différences finies décentrées à gauche (réggressives)

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi) \quad (3.22)$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{4h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{8h^3}{3!}f^{(3)}(\xi) \quad (3.23)$$

Donc

$$f(x_i - 2h) - 2f(x_i - h) = -f(x_i) + h^2f''(x_i) - h^3f^{(3)}(\xi) \quad (3.24)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_i - h) + f(x_i - 2h)}{h^2} + o(h) \quad (3.25)$$

Tel que :  $o(h) = hf^{(3)}(\xi)$  avec  $x_i - 2h < \xi < x_i$ .

En notation indicielle, on a :

$$f''_i = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + o(h) \text{ avec } o(h) = hf^{(3)}(\xi) \quad (3.26)$$

### Différences finies centrées

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \quad (3.27)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \quad (3.28)$$

Donc

$$f(x_i + h) + f(x_i - h) = 2f(x_i) + h^2f''(x_i) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(\xi) \quad (3.29)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} + o(h^2) \quad (3.30)$$

Tel que :  $o(h^2) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$  avec  $x_i - h < \xi < x_i + h$ .

En notation indicielle, on a :

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + o(h^2) \text{ où } o(h^2) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi) \quad (3.31)$$

Passant maintenant en dimension deux. On considère maintenant  $f(x, y)$  une fonction de deux variables de classe  $C^4$ . Le principe d'approximation des dérivées est exactement le même [13, 1]. Si  $h$  tend vers 0, on a :

Différence finie en avant (progressives) par rapport à la variable  $x$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} + o(h) \quad (3.32)$$

Différence finie en arrière (régressives) par rapport à la variable  $x$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x - h, y)}{h} + o(h) \quad (3.33)$$

Différences finies centrées pour par rapport à la variable  $x$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h} + o(h^2) \quad (3.34)$$

Différences finies centrées pour par rapport à la variable  $x$  :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{f(x + h, y) - 2f(x, y) + f(x - h, y)}{h^2} + O(h^2) \quad (3.35)$$

Il en est de même pour les dérivées par rapport à la variable  $y$  (avec le pas  $k$ ). Ces formules permettent de comprendre la discrétisation qui va s'effectuer sur les équations aux dérivées partielles [8, 11].

### 3.1.3 Résolution des problèmes Paraboliques

#### 3.1.3.1 Formulation

Pour un problème 1D, la formulation est donnée par l'équation Parabolique [6, 23] :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & y \in \Omega_{x,t}, \\ u(0, t) = y_G, & t > 0, \\ u(L, t) = y_D, & t > 0, \\ y(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (3.36)$$

$\Omega_{x,t} = \Omega_x \otimes \Omega_t$  domaine spatio-temporel tel que :  $\Omega_x = \{x, 0 < x < L\}$ ;  $\Omega_t = \{t, t > 0\}$ ,  $\alpha$  est le coefficient de diffusion (propagation de chaleur dans le matériau de milieu  $\Omega_x$ ).

Donc le problème est de déterminer  $y(x; t)$  en point  $x$  et à un instant donné  $t$  dans le domaine  $\Omega_{x,t}$ .

#### 3.1.3.2 Le maillage

Le maillage du domaine  $\Omega_{x,t}$  est construit à l'aide des relations connues  $m = \frac{L}{\Delta x} + 1$  et  $n = \frac{D}{\Delta t} + 1$ , avec  $D$  est la durée du phénomène physique[12, 14].

*Remarque 11.* Pour la résolution du problème parabolique, on peut citer principalement : la méthode explicite et la méthode implicite.

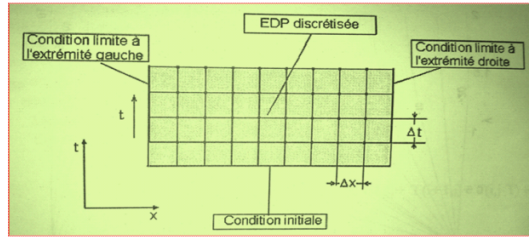


FIGURE 3.3 – Le problème Parabolique et sa discrétisation.

### 3.1.3.3 La méthode explicite (Schéma FTCS) (de l'anglais : Forward Time Centered Space)

La différence finie centrée n'est pas considérée ici car elle conduit à un schéma instable, donc on exprime la dérivée première temporelle à l'aide des différences finies progressives :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + o(\Delta t) \quad (3.37)$$

avec  $o(\Delta t) = -\frac{\Delta t}{2} y''(\xi)$  et  $t_j < \xi < t_j + \Delta t$

Et la dérivée seconde spatiale est une différence centrale :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta t)^2 \quad (3.38)$$

avec  $o(\Delta t)^2 = \frac{-1}{12} o(\Delta t)^2 y^{(4)}(\eta)$  et  $x_i - \Delta x < \eta < x_i + \Delta x$ .

Ainsi, l'équation (3.36) devient :

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + o((\Delta t) \cdot (\Delta x)^2)$$

En tranquilant l'erreur et on pose  $r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$ , l'équation (3.36) se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} &= \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \times \alpha \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \times (\Delta x)^2} \\ &= r \times \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{\Delta t} \end{aligned}$$

Ce qui mène à :

$$y_{i,j+1} = r y_{i-1,j} + (1 - 2r) y_{i,j} + r y_{i+1,j} \quad (3.39)$$

La solution recherchée  $y_{i,j+1}$  à l'étape de temps actuel  $(j+1)\Delta t$  est explicitement déterminée à partir des solutions  $y_{i-1,j}$ ,  $y_{i,j}$  et  $y_{i+1,j}$  connues à l'étape de temps précédent  $j\Delta t$ .

## Le Schéma Numérique

Le schéma numérique de l'équation explicite peut se mettre sous la forme moléculaire suivante [7, 3] :

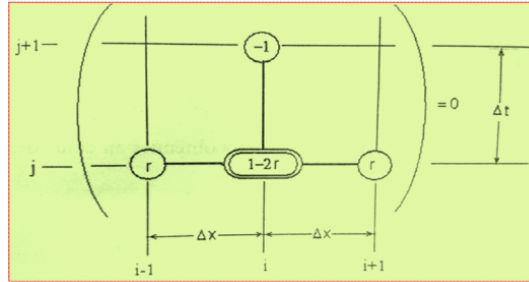


FIGURE 3.4 – Le problème Parabolique et sa discrétisation.

Comme la condition initiale est connue, on peut trouver  $y_{i,2}$  à l'instant  $\Delta t$ , puis avancer dans le temps pas par pas. Ce schéma ne nécessite pas d'inversion de matrice.

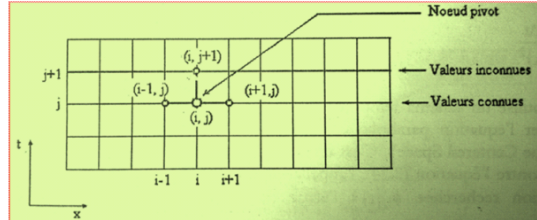


FIGURE 3.5 – Schéma Numérique de la méthode explicite.

### 3.1.3.4 La méthode implicite (Schéma BTCS) (de l'anglais : Backward Time Centered Space)

Le Schéma FTCS s'écrit :

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta t, (\Delta x)^2) \quad (3.40)$$

Pour formuler la méthode implicite, on évalue la dérivée seconde à l'étape  $(j + 1)$  donc :

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta t, (\Delta x)^2) \quad (3.41)$$

En tronquant l'erreur et on pose  $r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$  donc :

$$\begin{aligned} \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} &= \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \times \alpha \frac{y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \times (\Delta x)^2} \\ &= r \times \frac{y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{\Delta t} \end{aligned}$$

Donc

$$y_{i,j} = -ry_{i-1,j+1} + (1 + 2r)y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1} \quad (3.42)$$

L'équation (3.42) représente le schéma implicite en un point pivot  $(i; j)$ .

tel que : A l'étape  $(j + 1)$ ; les solutions  $y_{i,j+1}$  sont inconnues et à l'étape " $j$ ";  $y_{i,j}$  est connue.

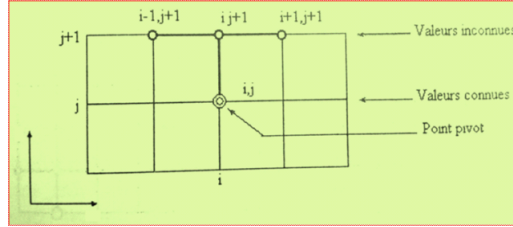


FIGURE 3.6 – Schéma numérique de la méthode implicite 2.

## 3.2 Équation de la chaleur

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite initialement en 1811 par Jean Baptiste Joseph Fourier. Cette équation permet d'avoir une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes à la fois physique et mathématiques, sur plus d'un siècle.

L'équation de la chaleur en une dimension est donnée par l'équation différentielle partielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & x \in ]0, 1[, t \in ]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in ]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \forall t \in ]0, T[ \end{cases} \quad (3.43)$$

où  $u$  est une fonction inconnue réelle de deux variables  $x$  et  $t$ .

Ici,  $u = u(x, t)$  est la température dans un conducteur d'une dimension. La valeur de  $u(x, t)$  dépend du temps  $t \geq 0$  et de la position  $x$  et en général, la valeur de  $u(x, t)$  en  $t = 0$  est donnée. :

### 3.2.1 Résolution numérique de l'équation de la chaleur - cas général -

**Théorème 12.** (*Existence et unicité*)

Si  $u_0 \in C^2(]0, 1[; \mathbb{R})$ , alors il existe une unique solution  $u \in C^2(]0, 1[ \times ]0, T[; \mathbb{R})$  qui vérifie (3.43).

Si  $u_0 \in C^\infty(]0, 1[; \mathbb{R})$ , ceci appelé effet "régularisant" de l'équation de la chaleur.

### 3.2.1.1 Principe du maximum

Sous les hypothèses du théorème précédent, soit  $u$  la solution du problème (3.43).

Si  $u_0(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ , alors  $u(x, t) \geq 0$  pour tout  $t \geq 0$  et  $x \in ]0, 1[$ .

### 3.2.1.2 Discrétisation du problème

La discrétisation consiste à donner un ensemble de points  $t_m$  pour  $m = 0, \dots, M$  de l'intervalle  $[0, T]$  et un ensemble de points  $x_n$  pour  $n = 0, \dots, N + 1$ . Pour simplifier, on considère un pas constant en temps et en espace.

Soient  $\Delta x = \frac{1}{N+1}$  le pas de discrétisation en espace et  $\Delta t = \frac{T}{M}$  le pas de discrétisation en temps.

On pose :  $t_m = m\Delta t$  pour  $m = 0, \dots, M$  et  $x_n = n\Delta x$  pour  $n = 0, \dots, N + 1$ . Les inconnues discrètes sont notées :  $u_n^m$  ;  $n = 1, \dots, N$  et  $m = 1, \dots, M$ .

L'approximation en temps par la méthode d'**Euler explicite** consiste à écrire la première équation de (3.43) en chaque point  $x_n$  et en temps  $t_m$ . Ainsi,

$u_t(x_n, t_m)$  est approché par le quotient différentiel

$$\frac{u(x_n, t_{m+1}) - u(x_n, t_m)}{\Delta t}, \quad (3.44)$$

et  $-u_{xx}(x_i, t_n)$

$$\frac{1}{\Delta x^2} (2u(x_n, t_m) - u(x_{n+1}, t_m) - u(x_{n-1}, t_m)). \quad (3.45)$$

On obtient le schéma suivant

$$\begin{cases} \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2} (2u_n^m - u_{n+1}^m - u_{n-1}^m) = 0, & n = 1, \dots, N; m = 0, \dots, M - 1, \\ u_n^0 = u_0(x_n), & n = 1, \dots, N, \\ u_0^m = u_{N+1}^m = 0, & m = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (3.46)$$

### 3.2.1.3 Consistance du schéma

Soit  $\bar{u}_n^m = u(x_n, t_m)$  la valeur de la solution exacte en  $x_n$  et  $t_m$ . l'erreur de consistance  $R_n^m$  en  $(x_n, t_m)$  peut s'écrire comme des erreurs de consistance en temps et en espace

$$R_n^m = \hat{R}_n^m + \tilde{R}_n^m, \quad (3.47)$$

avec  $\tilde{R}_n^m = \frac{\bar{u}_n^{m+1} - \bar{u}_n^m}{\Delta t} - u_t(x_n, t_m)$  et  $\hat{R}_n^m = \frac{2\bar{u}_n^m - \bar{u}_{n+1}^m - \bar{u}_{n-1}^m}{\Delta x^2} - u_{xx}(x_n, t_m)$ .

**Proposition 13.** *Le schéma (3.46) est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace, c'est-à-dire qu'il existe  $c \in \mathbb{R}_+$  ne dépendant que de  $u$  tel que*

$$|R_n^m| \leq c (\Delta t + \Delta x^2)$$

*Démonstration.* Grâce à la formule de Taylor pour les deux termes de l'équation, on obtient

$$\begin{aligned}
R_i^n &= \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} - u_t(x_n, t_m) + \frac{2u_n^m - u_{n+1}^m - u_{n-1}^m}{\Delta x^2} - u_{xx}(x_n, t_m) \\
&= \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} - \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} + o(\Delta t) \\
&\quad + \frac{2u_n^m - u_{n+1}^m - u_{n-1}^m}{\Delta x^2} - \frac{2u_n^m - u_{n+1}^m - u_{n-1}^m}{\Delta x^2} + o(\Delta t) \\
&= o(\Delta t) + o(\Delta t) \leq c(\Delta t + \Delta x^2) \xrightarrow{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0,0)} 0
\end{aligned}$$

le schéma est consistant .

### 3.2.1.4 Stabilité du schéma

D'après la proposition précédente la solution exacte vérifie :

$$\|u^m\|_{L^\infty([0,1] \times ]0,T])} \leq \|u_0\|_{L^\infty([0,1])}. \quad (3.48)$$

Si on choisi correctement le pas d'espace, on va voir qu'en avoir l'équivalent discret sur la solution.

**Définition 14.** On dit qu'un schéma est  $L^\infty$ -stable si la solution approchée est bornée dans  $L^\infty$  indépendamment du pas du maillage.

**Proposition 15.** Si la condition de stabilité  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$  est vérifiée alors, le schéma (3.46) est  $L^\infty$ -stable au sens où

$$\sup_{\substack{n=1,\dots,N \\ m=1,\dots,M}} |u_n^m| \leq \|u_0\|_{L^\infty([0,1])}.$$

*Démonstration.* On peut écrire le schéma (3.46) sous la forme

$$u_n^{m+1} = u_n^m - \lambda (2u_n^m - u_{n+1}^m - u_{n-1}^m).$$

Soit encore

$$u_n^{m+1} = (1 - 2\lambda) u_n^m + \lambda u_{n+1}^m + \lambda u_{n-1}^m. \quad (3.49)$$

Si  $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ , on a  $\lambda \geq 0$  et  $(1 - 2\lambda) \geq 0$ , le schéma (3.49) est donc une combinaison convexe de  $u_n^m$ ;  $u_{n+1}^m$  et  $u_{n-1}^m$ .

Soit  $M^m = \max_{n=1\dots N} u_n^m$  on a alors

$$u_n^{m+1} \leq (1 - 2\lambda) M^m + \lambda M^m + \lambda M^m.$$

et donc

$$u_n^{m+1} \leq M^m \quad \forall n, 1, \dots, N \implies \max_{n=1,\dots,N} u_n^m \leq \max_{n=1,\dots,N} u_n^{m+1}$$

On montre de la même manière que

$$\min_{n=1,\dots,N} u_n^{m+1} \leq \min_{n=1,\dots,N} u_n^m.$$

On en déduit par récurrence

$$\max_{n=1,\dots,N} u_n^{m+1} \leq \max_{n=1,\dots,N} u_n^0.$$

et

$$\min_{n=1,\dots,N} u_n^{m+1} \leq \min_{n=1,\dots,N} u_n^0.$$

Alors

$$\max_{n=1,\dots,N} |u_n^{m+1}| \leq \max_{n=1,\dots,N} |u_n^0|.$$

C'est-à-dire

$$\|u_n^{m+1}\|_\infty \leq \|u_n^0\|_\infty. \quad (3.50)$$

### 3.2.1.5 Convergence

**Définition 16.** Soit  $u$  la solution du problème (3.43) et  $(u_n^m)_{\substack{n=1,\dots,N \\ m=1,\dots,M}}$  la solution du schéma (3.46), on appelle erreur de discrétisation au points  $(x_n, t_m)$  la quantité

$$e_n^m = u(x_n, t_m) - u_n^m \quad (3.51)$$

(Solution exacte - solution approchée au point  $(x_i, t_n)$ ).

**Théorème 17.** Sous les hypothèses du théorème 12 (d'existence et unicité) et sous la condition de stabilité il existe  $c \in \mathbb{R}_+^*$  ne dépend que de  $u$  telque

$$\|e^{m+1}\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + Tc (\Delta t + \Delta x^2) \quad (3.52)$$

pour tout  $n = 1, \dots, N$ ,  $m = 1, \dots, M - 1$

Ainsi que si  $\|e^0\|_\infty = 0$ , Alors  $\max |e_n^{m+1}| = \|e_n^{m+1}\|_\infty \xrightarrow{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow (0,0)} 0$ , pour tout  $m = 1, \dots, M - 1$ .

Le schéma est converge

*Démonstration.* On note  $\tilde{u}_n^m = u(x_n, t_m)$  On a donc, par définition de l'erreur de consistance

$$\frac{\tilde{u}_n^{m+1} - \tilde{u}_n^m}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2} (2\tilde{u}_n^m - \tilde{u}_{n+1}^m - \tilde{u}_{n-1}^m) = R_n^m, \quad n = 1, \dots, N \text{ et } m = 1, \dots, M - 1 \quad (3.53)$$

D'autre part le schéma numérique s'écrit :

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2} (2u_n^m - u_{n+1}^m - u_{n-1}^m) = 0, \quad n = 1, \dots, N \text{ et } m = 1, \dots, M - 1 \quad (3.54)$$

Soustrayant (3.53) et (3.54) :

$$\begin{aligned} & \frac{(\tilde{u}_n^{m+1} - u_i^{n+1}) - (\tilde{u}_n^m - u_n^m)}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2} \left( 2(\tilde{u}_n^m - u_n^m) - (\tilde{u}_{n+1}^m - u_{n+1}^m) - (\tilde{u}_{n-1}^m - u_{n-1}^m) \right) = R_n^m \\ & \implies \frac{e_n^{m+1} - e_n^m}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2} (2e_n^m - e_{n+1}^m - e_{n-1}^m) = R_n^m. \end{aligned}$$

soit donc

$$e_n^{m+1} = (1 - 2\lambda) e_n^m + \lambda e_{n+1}^m + \lambda e_{n-1}^m + k R_n^m. \quad (3.55)$$

Or

$$\left| (1 - 2\lambda) e_n^m + \lambda e_{n+1}^m + \lambda e_{n-1}^m \right| \leq \max_{n=1, \dots, N} |e_n^m| = \|e^m\|_\infty,$$

donc, comme le schéma est consistant

$$\begin{aligned} |e_n^{m+1}| &= \left| (1 - 2\lambda) e_n^m + \lambda e_{n+1}^m + \lambda e_{n-1}^m + k R_n^m \right| \\ &\leq \max_{n=1, \dots, N} |e_n^m| + c \Delta t (\Delta t + \Delta x^2) \\ &\implies \|e^{m+1}\|_\infty \leq \|e^m\|_\infty + c \Delta t (\Delta t + \Delta x^2) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Par récurrence

$$\|e^{m+1}\|_\infty \leq \|e^m\|_\infty + c \Delta t (k + \Delta x^2), \quad (M \Delta t = T) \text{ et } (e^0 = 0) \quad (3.57)$$

### 3.2.2 Résolution de l'équation de Black-Scholes par la résolution numérique de l'équation de la chaleur

D'après la section précédente, on a pu établir le lien entre l'équation de Black-Scholes et l'équation de la chaleur. En effet, en partant de l'équation de Black-Scholes et en lui appliquant quelques transformations de variables on obtient une équation de la chaleur, que l'on est capable de résoudre assez facilement de façon numérique. Si on considère le cas d'une option d'achat Call du type européenne, on a les conditions suivantes :

La condition finale, à l'instant  $t = T$  correspondant à l'échéance de l'option, la valeur du call est donnée par la formule :

$$C(S, T) = \max(S - E, 0), \quad \forall S \quad (3.58)$$

En effet, si  $S$  est inférieur au prix d'exercice au terme de l'option, il est inintéressant d'exercer l'option (sous peine de perdre  $E - S$ ). Dans le cas contraire, le bénéfice du call est  $S - E$ .

Le domaine d'étude en "espace" (variable  $S$ ) est théoriquement  $[0, +\infty[$ , et il faut donc fixer les conditions aux limites sur la fonction  $C$ .

Si  $S = 0$ , alors le bénéfice à terme est forcément nul. Il n'y a donc aucun intérêt à exercer l'option d'achat dans ce cas, même s'il reste du temps avant son expiration. On a donc la condition suivante :

$$C(0, t) = 0, \quad \forall t$$

Si au contraire le prix de l'action augmente considérablement ( $S \rightarrow +\infty$ ), il est clair que l'option sera exercée et que le prix d'exercice de l'option sera négligeable. On a donc la condition suivante :

$$C(S, t) \sim S, \quad S \rightarrow +\infty \quad (3.59)$$

L'ensemble des équations ci-dessus peut être résolu afin de déterminer la valeur d'une option d'achat (call).

La résolution de l'équation de Black-Scholes par la résolution numérique de l'équation de la chaleur est en effet plus simple et il est possible de se ramener de l'une à l'autre par des changements de variable.

Ainsi, pour résoudre numériquement l'équation de la chaleur, il faut en premier lieu discrétiser le domaine d'étude choisi à savoir les variables de temps et d'espace. On suppose que l'intervalle de temps (respectivement en espace) est découpé suivant une grille avec un nombre fini de points et d'intervalles. On va calculer (et considérer) la solution uniquement en ces instants-là. La difficulté consiste alors à calculer les dérivées (ici, en temps) à partir de ces valeurs discrètes.

La discrétisation consiste à donner un ensemble de points  $t_m$  avec  $m = 0, \dots, M$  de l'intervalle de temps  $[0, \frac{\sigma^2 T}{2}]$  et un ensemble de points  $x_n$  avec  $n = 0, \dots, (N + 1)$  de l'intervalle d'espace  $[N^-, N^+]$ .

On considère le pas de discrétisation en temps (supposé constant) :

$$\Delta t = \frac{\frac{\Delta^2 T}{2}}{M} = \frac{\Delta^2 T}{2M}$$

et le pas de discrétisation en espace (supposé constant aussi) :

$$\Delta x = \frac{N^+ - N^-}{N}$$

On pose :

$$t_m = m\Delta t \quad \text{pour } m = \overline{0, M}$$

et

$$x_n = n\Delta x \quad \text{pour } n = \overline{0, N + 1}$$

Dans toute la suite, on notera  $u_n^m = u(x_n, t_m) = u(n\Delta x, m\Delta t)$ , la valeur de la solution ( $u$ ) au point de grille  $(n\Delta x, m\Delta t)$  (ou bien  $(x_n, t_m)$ ) avec  $n = \overline{N^-, N^+}$  et  $m = \overline{0, M}$ .

Si à l'instant  $t$  donné, on suppose qu'on connaît la solution  $u(x, t)$  et souhaite calculer la dérivée temporelle  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  ou les dérivées spatiales  $\frac{\partial u}{\partial S}(x, t)$ , et supposant que la solution soit connue aux instants  $(t - \Delta t)$  et  $(t + \Delta t)$ , alors il existe plusieurs schémas aux différences finies pour approcher la valeur de la dérivée temporelle ou spatiale. Edem, pour les dérivées spatiales les schémas peuvent être utilisés.

### 3.2.3 Schéma d'Euler implicite

Soit l'approximation par le **schéma d'Euler Implicite**. Ce dernier consiste à utiliser le schéma de différences finies, décentré à gauche, pour le calcul d'approximation de la dérivée partielle première en temps :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} \quad (3.60)$$

et le schéma de différences finies centrées pour le calcul de dérivée partielle seconde en espace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m}{\Delta x^2} \quad (3.61)$$

Ainsi le schéma d'Euler implicite s'écrit :

$$\frac{u_n^m - u_n^{m-1}}{\Delta t} \simeq \frac{u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m}{\Delta x^2} \quad (3.62)$$

De façon équivalente, en augmentant  $m$  de 1, on obtient

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} \simeq \frac{u_{n-1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n+1}^{m+1}}{\Delta x^2} \quad (3.63)$$

En notant  $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ , on peut réécrire (3.63) sous la forme :

$$-\alpha u_{n-1}^{m+1} + (1 + 2\alpha)u_n^{m+1} - \alpha u_{n+1}^{m+1} = u_n^m \quad (3.64)$$

En effet, le calcul de la solution à l'instant  $t_{m+1} = (m+1)\Delta t$  et à l'instant  $t_m = m\Delta t$  est implicite, puisque la partie droite de l'équation est également inconnue. On ne peut donc pas calculer explicitement et séparément  $u_n^{m+1}$ ,  $u_{n-1}^{m+1}$  ou  $u_{n+1}^{m+1}$  en fonction de  $u_n^m$ . On doit donc résoudre cette équation d'une manière globale, afin de calculer en même temps tous les  $u_n^{m+1}$ , pour tout  $n$ .

#### 3.2.3.1 Conditions initiales et aux limites

L'initialisation du schéma se fait à l'instant initial :

$$u(x_n, 0) = u_n^0 = u_0(n\Delta x), \text{ avec } n = \overline{N^-, N^+} \quad (3.65)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, en chaque pas de temps, on utilisera les conditions aux limites en  $(+\infty)$  et  $(-\infty)$  :

$$u_{N^-}^m = u_{-\infty}(N^- \Delta x, m\Delta t) \text{ et } u_{N^+}^m = u_{+\infty}(N^+ x, m\Delta t), \quad \forall 0 < m \leq M. \quad (3.66)$$

#### 3.2.3.2 Erreur d'approximation

L'erreur d'approximation du schéma numérique est en  $o(\Delta t + \Delta x^2)$ . Le schéma étant stable du moment que  $\Delta t \leq \frac{1}{2}\Delta x^2$ , il est inutile de raffiner excessivement, et on prendra  $\Delta t$  du même ordre que  $\Delta x^2$  (par exemple  $0,4\Delta x^2$ ). L'erreur est donc en  $o(\Delta x^2)$ . On choisit donc  $\Delta x$  en fonction de la précision souhaitée, et du temps de calcul dont on dispose, puis on fixe  $\Delta t$  de l'ordre de  $\Delta x^2$ .

### 3.2.3.3 Réécriture matricielle

On se fixe un  $m$ , on suppose que tous les  $u_n^m$  sont connus, et on souhaite calculer tous les  $u_n^{m+1}$ . On rappelle que  $u_{N^-}^{m+1}$  et  $u_{N^+}^{m+1}$  sont connus grâce aux conditions aux limites. On peut alors réécrire (3.64) de la manière suivante :

$$\text{Pour } n = N^- + 1, \quad \text{on a : } -\alpha u_{N^-}^{m+1} + (1 + 2\alpha)u_{N^-+1}^{m+1} - \alpha u_{N^-+2}^{m+1} = u_{N^-+1}^m.$$

$$\text{Pour } n = N^- + 2, \quad \text{on a : } -\alpha u_{N^-+1}^{m+1} + (1 + 2\alpha)u_{N^-+2}^{m+1} - \alpha u_{N^-+3}^{m+1} = u_{N^-+1}^m.$$

$$\text{Pour } n = N^- + 3, \quad \text{on a : } -\alpha u_{N^-+2}^{m+1} + (1 + 2\alpha)u_{N^-+3}^{m+1} - \alpha u_{N^-+4}^{m+1} = u_{N^-+1}^m.$$

⋮

$$\text{Pour } n = 0, \quad \text{on a : } -\alpha u_{-1}^{m+1} + (1 + 2\alpha)u_0^{m+1} - \alpha u_1^{m+1} = u_{N^-+1}^m.$$

⋮

$$\text{Pour } n = N^+ - 2, \quad \text{on a : } -\alpha u_{N^+-3}^{m+1} + (1 + 2\alpha)u_{N^+-2}^{m+1} - \alpha u_{N^+-1}^{m+1} = u_{N^+-2}^m.$$

$$\text{Pour } n = N^+ - 3, \quad \text{on a : } -\alpha u_{N^+-2}^{m+1} + (1 + 2\alpha)u_{N^+-1}^{m+1} - \alpha u_{N^+}^{m+1} = u_{N^+-1}^m.$$

Ainsi, l'écriture matricielle est sous la forme suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 + 2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1 + 2\alpha & -\alpha & & 0 \\ 0 & -\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & & & -\alpha & 1 + 2\alpha \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u_{N^-+1}^{m+1} \\ \vdots \\ u_0^{m+1} \\ \vdots \\ u_{N^+-1}^{m+1} \end{pmatrix}}_{U^{m+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_{N^-+1}^m \\ \vdots \\ u_0^m \\ \vdots \\ u_{N^+-1}^m \end{pmatrix}}_{b^m} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha u_{N^-}^{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha u_{N^+}^{m+1} \end{pmatrix}}_{b^m} \quad (3.67)$$

On voit apparaître la matrice tridiagonale, avec des  $1 + 2\alpha$  sur la diagonale, et des  $-\alpha$  sur et sous la diagonale, puis le vecteur d'inconnues constitué des  $u_n^{m+1}$ , et dans le second membre, la partie connue les  $u_n^m$  ainsi que les conditions aux limites  $u_{N^-}^{m+1}$  et  $u_{N^+}^{m+1}$ .

La résolution du schéma à chaque pas de temps revient donc à calculer la solution d'un système linéaire de la forme

$$AU^{m+1} = b^m, \quad (3.68)$$

où  $A$  est la matrice tridiagonale,  $U^{m+1}$  contient les inconnues  $u_n^{m+1}$ , et  $b^m$  est le second membre connu. On obtient alors la solution à l'instant  $t + \Delta t$  (les  $u_n^{m+1}$ ) en fonction de la solution à l'instant  $t$  (les  $u_n^m$ ).

L'inconvénient de la méthode d'Euler implicite par rapport à la méthode explicite est l'apparente difficulté supplémentaire pour la résolution de ces systèmes

linéaires afin de calculer la solution. Toutefois, *un avantage* certain de la méthode est qu'elle est intrinséquement stable. En effet, quelle que soit la valeur du paramètre  $\alpha > 0$ , la norme de la matrice  $A^{-1}$  est inférieure à 1, assurant la stabilité du schéma.

Une manière a priori simple de résoudre les systèmes linéaires (3.68) consiste à inverser la matrice  $A$ , en remarquant qu'elle est constante au fil des pas de temps. Mais l'inverse d'une matrice tridiagonale est pleine, ce qui représente un coût de stockage important, au delà du coût de calcul de la matrice inverse. En temps normal, l'inverse d'une matrice de taille  $N$  nécessite  $o(N^4)$  opérations. Le stockage de l'inverse de la matrice représente  $N^2$  éléments, à comparer avec seulement  $3N$  éléments dans la matrice  $A$ .

La résolution d'un système linéaire peut se faire avec la traditionnelle méthode du pivot de Gauss, qui consiste à itérer les opérations sur les lignes ou colonnes de la matrice pour rendre le système triangulaire. La résolution d'un système linéaire triangulaire est alors très rapide. La matrice étant ici tridiagonale, il est plus intéressant d'utiliser une décomposition  $LU$ .

### 3.2.3.4 Méthode LU pour la résolution du système linéaire

L'idée de la méthode  $LU$  consiste à décomposer la matrice  $A$  sous la forme d'un produit  $A = LU$ , où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure (Lower), et  $U$  une matrice triangulaire supérieure (Upper). Cette décomposition n'existe que sous conditions de rang et de non nullité des mineurs principaux de la matrice. Dans le cas de la matrice  $A$  présente, cette décomposition existe, et les matrices  $L$  et  $U$  n'ont que deux diagonales non nulles :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & l_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{N-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & -\alpha & & \vdots \\ \vdots & 0 & u_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & u_N \end{pmatrix}$$

où les coefficients se calculent par récurrence :

$$u_1 = (1 + 2\alpha), \quad u_n = (1 + 2\alpha) - \frac{\alpha^2}{u_{n-1}}, \quad l_n = \frac{-\alpha}{u_n}$$

Il faut donc  $o(N)$  opérations pour "calculer" les matrices  $L$  et  $U$ . La résolution du système (3.68) se fait alors en deux étapes :

$$Lz = b^m, \quad UU^{m+1} = z \tag{3.69}$$

Chacun de ces deux systèmes linéaires est triangulaire, avec seulement une sous- (ou sur-) diagonale non nulle. Le premier système se résout donc rapidement : la première ligne donne directement  $z_1 = b_1^m$ . Puis la deuxième ligne donne  $z_2$  en fonction de  $z_1$  et  $b_2$ . Et ainsi de suite. De même, on peut résoudre le deuxième

système linéaire, mais en partant de la dernière ligne, qui donne directement  $u_N^{m+1}$  en fonction de  $z_N$ .

Il faut donc  $o(N)$  opérations pour résoudre chacun de ces deux systèmes, et donc pour résoudre . C'est très clairement l'une des méthodes les plus efficaces pour résoudre un système linéaire tridiagonal, d'autant plus que la décomposition  $LU$  (ou le calcul des coefficients de ces matrices) est fait une fois pour toutes, la matrice étant indépendante du pas de temps considéré.

On voit donc qu'avec cette décomposition, le calcul de la solution à l'instant  $(m + 1)\Delta t$  en fonction de la solution à l'instant  $m\Delta t$  n'est pas particulièrement plus "long" que dans le cas de la méthode d'Euler explicite, avec la garantie de la stabilité du schéma en plus.

Toutefois, la précision de la méthode est toujours en  $o(\Delta t + \Delta x^2)$ , ce qui impose un pas de temps  $\Delta t$  très petit si on veut garantir une certaine précision à la solution calculée.

# Conclusion

L'étude de la compréhension de l'évaluation des prix des options constitue un enjeu toujours plus important sur les marchés financiers. De nos jours les mathématiques cherchent à développer de nouveaux modèles plus précis pour représenter les dynamiques aléatoires. La formule de Black-Scholes a permis de répondre à la question de l'évaluation du prix d'une option européenne. L'étude du modèle de Black-Scholes est au coeur de ce mémoire où nous avons présenté une solution numérique implicite grâce aux résultats d'un type spécifique d'équation aux dérivées partielles connu en physique sous le nom de l'équation de la chaleur. L'objet de ce travail était de présenter la démarche mathématique de discrétisation du modèle de Black-Scholes pour le pricing d'option par la méthode implicite d'EULER. L'étude a permis par ailleurs de renforcer d'avantage nos connaissances dans ce domaine.

# Bibliographie

- [1] Black.F, Scholes.M, "The pricing of Options and Liabilities" , Journal of Political Economy, 81 pp 635-654. 1973.
- [2] Bonneau.P, "Mathématiques financières", Bunod.1980.
- [3] Baddari K,Abbassov A . "Equations de la physique mathématique appliquée". OPU .2009.
- [4] Barrédy.C, Jean Étienne Palard, "Gestion Financier". Vuibert. Aout 2017.
- [5] Ciarlet P.G. "Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation", Masson .1982.
- [6] Ciarlet P.G. "Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation", Dunod, Paris .1998.
- [7] Chesney.M, Monique Jeanblack, Marc Yor, "Mathematical Methodes for Financial Markets", Springer. 2009.
- [8] Curtis F.G, Patrick O.W. "Applied Numerical Analysis". Third Edition, Addison-Wesley Publishing Company.
- [9] Dalbarade.J, "Mathématiques des marchés financiers", Eska. 2005.
- [10] Jacquinet.P, Sukhomlin.N, "Solution exact du problème inverse de la valorisation des options dans le cadre du modèle de Black et Sholes", Tampere University of technology. 2010.
- [11] Jonas-Koko. "Calcul scientifique avec Matlab", Ellipses.
- [12] Hull.J, "options futures, and other derivative securities", Prentice hull. 2006.
- [13] Garnier.J, Perrier.v,"Mathématique et Application", Springer. 2013.
- [14] Lemettre.J,"es bourses aux entreprises de marché" , L'Harmattan.2011.
- [15] Lamberton.D, Bernard Lapeyre, "Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance", Ellipses. 2012.
- [16] Lessard.C, "Processus stochastique cours et exercice corrigés", Ellipses. 2014.
- [17] Mandelbort.B, "Une approche fractale des marchés", Odile Jacob. 2005.
- [18] Mabele.D,Jean -Pul,K.Tsasa Vangu, Yves Togba Bobby,"Laboratoire d'analyse Recherche en Economie quantritative", Laréq. 2013.
- [19] Quillat.B,Bruno Solinik, "Marché financier : Gestion de portefeuille et des risques", Dunod.2014.
- [20] Quarteroni A, Sacco R, Saleri F. "Numerical mathematics". Springer, 2000.

- [21] Rappaz J, Picasso M. "Introduction à l'analyse numérique". Presses Polytechniques et Universitaires, Romandes, Lausanne, 1998.
- [22] Reinhard H. "Equations aux dérivées partielles". Dunod, paris, 2001.
- [23] Raviart P.A, Thomas J.M. "Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles".
- [24] Tahar A.M. "Méthodes numériques". OPU , 2007.
- [25] Taik A. "Cours : Equations aux Dérivées Partielles "Méthodes des Différences Finies". FST-Mohammedia, 2008.
- [26] Taik A. "Travaux Pratiques : Equations aux Dérivées Partielles Méthodes des Différences Finies". FST-Mohammedia, 2008.
- [27] Verraux.A, "Résolution de l'équation de Black-Scholes", Tampere University of Technology.2008.