



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف

Université Chadli Bendjedid – El Tarf

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات..

Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématique et informatique

Filière : Mathématique

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique.

### Thème

**Etude de quelques opérateurs différentiels fractionnaires**

Présenté par:

Brichni Chaima

Devant le Jury :

Dr. Warda Saifia	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. Amar Chidouh	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Mr. Salim Adjmi	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examineur

Année Universitaire 2020-2021

# DEDICACES

*Je dédie ce mémoire d'études :*

---

À la personne de ma très chère mère **ADJMI LYNDA** mon indéfectible soutien depuis mes premiers pas dans la scolarité et qui n'a cessé de me prodiguer l'affection et l'attention indispensables à la continuation et la persévérance.

À la personne de mon père **BRICHNI BOUMENDJEL** qui a fait ses meilleurs efforts pour l'aboutissement de ce travail.

À la personne du monsieur **BENSEGHIR MOUNDER** qui a m'a assisté et encouragé à la manière d'un frère aîné,

À la personne de mon frère **AHMED IMAM ALLAH** qui a été mon confident et le plus proche durant toute la durée du mémoire,

À la personne de mon frère **MOHAMED KOTB** ainsi que son épouse **HARFOUCHE AICHA** qui m'ont orienté et bien conseillé,

À la personne de ma grand-mère maternelle **SAMER MALIKA** et ses deux frères **SEBTI** et **NACER** et ma tante aussi maternelle **ADJMI FOUZIA** ainsi toute ma famille pour leur gentillesse et leurs encouragements,

À la personne de **Mme OUARDA BENZARA** pharmacienne de notre ville pour sa gentillesse et ses encouragements ainsi que ses sœurs,

À la personne du **Dr. MANSOURI** et **Dr. DIEB** pour leurs gentillesse et encouragements,

À la personne de **Mme BOUCETTA FATMA** pour sa gentillesse et ses encouragements.

# REMERCIEMENTS

*Je tiens à remercier avant tout Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour réaliser ce travail.*

---

Mes remerciements les plus vifs vont tout particulièrement :

À **Monsieur BENSEGHIR MOUNDER** dont l'assistance a été majeure dans l'épreuve du baccalauréat et dont l'avis a été déterminant dans le choix de la filière,

À mon encadreur **Monsieur CHIDOUH AMAR** sans lequel je n'aurais pas accompli ce mémoire, par ses conseils et orientations,

À **Madame SAIFIA** la cheffe de département et membre du jury qui a également rendu toutes les étapes du mémoire faciles par sa coopération fructueuse,

À **Monsieur ADJMI** membre du jury qui a également participé fructueusement à l'aboutissement de ce mémoire,

Les trois enseignants ci-dessus cités ayant été des modèles de bonne guidance et d'orientation.

À tous les enseignants, je cite : **Mme YOUBI – Mme MECHERI – Mme BOUAZIZ – Mme BOUSAHA – Mme BENSEGHIR – Mr HADJAMA – Mr BOURARA – Mr MEHRI.**

À tous les enseignants du département de mathématiques.

Je remercie également tout le personnel du département pour la disponibilité et les encouragements.

Enfin je remercie mes amies de la classe.

## ملخص

---

من الملاحظ في هذه السنوات الأخيرة أن مجال حساب التفاضل والتكامل الجزئي اجتاح و بقوة مجال البحث في الرياضيات من قبل العديد من الباحثين، نظرًا لفعاليته في وصف و نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية مثل الريولوجيا، اللزوجة المرنة، والكيمياء الكهربائية... الخ.

في هاته المدكرة ، نعطي مقدمة عن حساب التفاضل والتكامل الكسري ثم ندرس مشكلة استرخاء تحكمها المعادلات التفاضلية للكسور المرتبطة بالشروط الابتدائية. يعتمد تحليلنا للنتائج على نظرية النقطة الصامدة، وخاصة طريقة التحت و الفوق حلول.

# Abstract

It is noticeable in these recent years that the field of fractional calculus has been sweeping for research by many of mathematicians, due to its effectiveness in describing many physical phenomena such as in rheology, viscoelasticity, electrochemistry, ... etc.

In this note, we give an introduction about fractional calculus then study a relaxation problem governed by differential equations of fractional order joined initial conditions. The analysis is based on the fixed point theory, and specially the method of the lower and upper solutions.

# Résumé

Il est remarquables dans ces dernières années que le domaine du calcul fractionnaire a fait l'objet de beaucoup de recherches par de nombreux mathématiciens, en raison de son efficacité à décrire des phénomènes physiques tels que la rhéologie, la viscoélasticité, l'électrochimie, ... etc.

Dans ce memoire, nous donnons une introduction au calcul fractionnaire puis étudions un problème de relaxation régi par des équations différentielles d'ordre fractionnaire jointes aux conditions initiales. Notre analyse est basée sur la théorie du point fixe, et spécialement la méthode des sous et sur solutions.

# Table des matières

<b>1 Compléments sur la théorie du point fixe</b>	<b>8</b>
<b>2 Fonctions spéciales</b>	<b>11</b>
2.1 Les fonctions Gamma et Beta . . . . .	11
2.1.1 La fonction Gamma . . . . .	11
2.1.2 La fonction Beta . . . . .	13
2.2 Série hypergéométrique et fonction de Kummer . . . . .	15
2.2.1 Fonctions de Mittag-Leffler . . . . .	16
2.2.2 Fonctions de Mainardi et Miller-Ross . . . . .	17
2.3 Opérateurs intégrales et fonction de Mittag-Leffler . . . . .	19
<b>3 Introduction au calcul fractionnaire</b>	<b>22</b>
3.1 Intégrale et dérivée fractionnaires . . . . .	22
3.1.1 Formule intégrale de Liouville . . . . .	22
3.1.2 Dérivations d'ordre $\alpha$ . . . . .	25
3.2 Transformée de Laplace . . . . .	27
3.2.1 Transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler gé- ralisée . . . . .	28
3.2.2 Quelques résultats sur la transformée de Laplace . . . . .	29
3.3 Transformé de Laplace et dérivée fractionnaire . . . . .	30

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	5
3.3.1 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville . . . . .	30
3.3.2 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens Caputo . . . . .	33
<b>4 Equation de relaxation fractionnaire non lineaire</b>	<b>35</b>

# Introduction

Au cours des dernières décennies, le calcul fractionnaire a trouvé de nombreuses applications dans divers domaines des sciences physiques tels que la viscosité élastique, diffusion, contrôle, processus de relaxation, ...etc, voir [8, 13, 14]. Le calcul fractionnaire étant généralisation de l'intégration et la dérivation à l'ordre arbitraire i.e. non entier, il est considéré d'une grande signification dans les dernières décennies en raison à la fois du développement intensif de la théorie du calcul fractionnaire lui-même et leurs applications dans différents domaines [11, 18].

L'étude de l'existence et l'unicité a été un domaine de recherche très actif en mathématiques [1, 9, 17, 20, 22], et pour les équations différentielles fractionnaires on ne fait pas l'exception [5, 12, 21]. L'objectif de ce mémoire est d'exposer cette méthode de point fixe et d'expliquer, par des exemples concrets, son application et illustrer quelques avantages en appliquant le principe de l'application contractante et le théorème de point fixe de Schauder. On s'apercevra que la méthode du point fixe constitue un outil très efficace pour étudier l'existence des solutions pour de nombreux types d'équations et l'équation de relaxation fractionnaire sera l'exemple dans ce mémoire.

Après cette petite introduction, le contenu du mémoire se partage comme suit. Dans le premier chapitre, on donne toutes les définitions et les outils indispensables de la méthode du point fixe. Le deuxième chapitre est consacré à les fonctions spéciales. On y donne une vision générale sur les fonctions spéciales de type Kummer ainsi les fonctions d'Euler. Le troisième chapitre concerne le calcul fractionnaire. Dans ce chapitre on s'aperçoit nettement que la transformée de Laplace est surprenante dans la résolution des équations fractionnaires.

Finalement le quatrième chapitre, on y présente le travail de A. Chidouh, A. Guezane-

Lakoud et R. Bebbouchi [3], sur l'existence de la solution de l'équation de relaxation factionnaire en utilisant la méthode de sur et sous solutions.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Compléments sur la théorie du point fixe

On doit le premier embryon de la théorie du point fixe au mathématicien français H. Poincaré (1854 – 1912). Il fut le premier à avoir utilisé une approche du point fixe. Poincaré a aussi prévu l'importance et l'avenir prometteur du point fixe dans les problèmes de l'analyse mathématique. Aujourd'hui la théorie du point fixe se rencontre pratiquement dans tous les domaines de la recherche en mathématiques.

**Définition 1.0.1. (Point fixe)** Soit  $A$  une application d'un ensemble  $X$  dans lui-même. On appelle point fixe de  $A$  tout point  $y$  tel que  $Ay = y$ . S'il existe un tel  $y$  on dit que  $A$  possède un point fixe, ce qui est équivalent à dire que l'équation  $Ax - x = 0$  possède une solution.

**Définition 1.0.2.** Étant donnés deux espaces métriques  $(X, d)$  et  $(Y, \rho)$  et une application  $A : X \rightarrow Y$ . Alors

- (i)  $A$  est  $k$ -lipschitzienne si  $\forall y, v \in X, \rho(A(y), A(v)) \leq k.d(y, v)$ ,
- (ii) si  $k = 1$ ,  $A$  est dite *non-expansive*,
- (iii) si  $k < 1$ ,  $A$  est dite *contractante*,
- (iv)  $A$  est *contractive* si  $\forall y, v \in X, y \neq v, \rho(A(y), A(v)) < d(y, v)$ .

On a les implications suivantes :

$$\begin{array}{lclcl} A \text{ contractante sur } X & \Rightarrow & A \text{ contractive sur } X & \Rightarrow & \\ A \text{ non-expansive sur } X & \Rightarrow & A \text{ 1-lipschitzienne sur } X & \Rightarrow & \\ A \text{ uniformément continue sur } X & \Rightarrow & A \text{ continue sur } X. & & \end{array}$$

**Proposition 1.0.3**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soit  $A$  une application  $A : X \rightarrow X$ . Si  $A$  est contractive sur  $X$ , elle ne peut avoir qu'un seul point fixe.

**Théorème 1.0.4**

(**Théorème du point fixe de Banach**) Soit  $X$  un espace métrique complet, soit  $S$  une partie fermée de  $X$ , et soit  $A : S \rightarrow S$  une application contractante de constante  $0 \leq k < 1$  telle que  $A(S) \subset S$ . On a :

- (i) Existence et unicité : il existe  $y \in S$  un point fixe unique de  $A$ , i.e.,  $A(y) = y$ .
- (ii) Algorithme de calcul : la suite  $(y_n)_{n \geq 0}$  de points de  $S$  telle que  $y_{n+1} = A(y_n)$  et  $y_0 \in X$  (choisi arbitrairement), avec  $A^0 = Id_X, A^n = A \circ A \circ \dots \circ A$  (itéré de  $A$ ), et  $y_{n+1} = A(y_0)$ .
- (iii) Estimations de l'erreur :  $\forall n \geq 0$ , on a :

$$(iii - 1) \text{ Estimation a priori : } d(y_n, y) \leq \frac{k^n}{1-k} d(y_0, y_1).$$

$$(iii - 2) \text{ Estimation a posteriori : } d(y_{n+1}, y) \leq \frac{k}{1-k} d(y_n, y).$$

- (iv) Vitesse de convergence :  $d(y_{n+1}, y) \leq k \cdot d(y_n, y)$ .

Remarque 1.0.5. Ce résultat est parfois appelé *théorème de point fixe des contractions*, on trouve également dans la littérature : *théorème de Banach-Picard*, *théorème de Banach-Caccioppoli*,...

Remarque 1.0.6. Ce théorème représente en quelque sorte un *idéal* du point de vue de l'analyse numérique. En effet, on a l'existence et l'unicité et un algorithme de calcul stable qui donne la solution (unique). De plus, on dispose de deux majorations, a priori et a posteriori, de l'erreur et de la vitesse de convergence.

**Théorème 1.0.7**

(**Schauder**) Soit  $X$  un espace de Banach, et  $M$  une partie non vide, convexe, bornée et fermée de  $X$ . Alors toute application compacte  $M \rightarrow M$  admet un point fixe.

**Définition 1.0.8.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On dit que  $(E, d)$  est *précompact* (ou bien : *totalelement borné*) si : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un recouvrement fini de  $E$  par des parties finies de  $E$  dont le diamètre est inférieur à  $\varepsilon$ . Une partie  $A$  de  $E$  sera dite *précompacte* dans  $(E, d)$  si le sous-espace métrique  $(A, d_{A \times A})$  est précompact.

**Définition 1.0.9.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Une partie  $A$  de  $E$  sera dite *relativement compacte* dans  $(E, d)$  si la fermeture  $\bar{A}$  de  $A$  est compacte.

**Proposition 1.0.10**

Soit  $A$  un sous-ensemble d'un espace métrique  $X$ . Alors :

- (a) Si  $A$  est relativement compact,  $A$  est précompact.
- (b) Si  $A$  est précompact et  $X$  est complet,  $A$  est relativement compact.

**Théorème 1.0.11**

**(Ascoli-Arzelà)** Soit  $X = C[a, b]$   $-\infty < a < b < \infty$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $M \subset X$ . Si  $M$  est

- (i) uniformément borné, i.e.,  $\exists r \geq 0$  tq  $\|u\|_\infty \leq r \forall u \in M$ ,
- (ii) équicontinu, i.e.,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que

$$|x - y| < \delta \text{ et } \forall x, y \in M \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon,$$

alors  $M$  est totalement borné (précompact).

Maintenant, on donne la définition d'un cône qu'on aura besoin dans le quatrième chapitre pour définir l'espace d'existence des solutions.

**Définition 1.0.12.** Soit  $X$  est un espace de Banach. Un ensemble non vide convexe et fermé  $P \subset X$  est appelé cône s'il satisfait les deux conditions suivantes :

- (i)  $x \in P, \lambda \geq 0$  implique  $\lambda x \in P$ .
- (ii)  $x \in P, -x \in P$  implique  $x = 0$ .

# Chapitre 2

## Fonctions spéciales

Dans ce chapitre, on va définir quelques fonctions spéciales qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire telles que les deux premières fonctions abordées sont d'une grande importance historique, elles ont été introduites en 1772 par Euler. Historiquement et théoriquement, l'étude de ces fonctions et de leurs propriétés a donné un élan considérable à l'étude et la compréhension des aspects fondamentaux de l'analyse mathématique, y compris les limites, produits infinis, et prolongement analytique. Ils ont également motivé le progrès de la théorie de fonction complexe, comme les théorèmes de Weierstrass et de Mittag-Leffler sur les représentations des fonctions entières et méromorphes.

### 2.1 Les fonctions Gamma et Beta

La fonction Gamma d'Euler est une fonction complexe qui prolonge la factorielle aux valeurs réels ou complexes notée par  $\Gamma$ .

#### 2.1.1 La fonction Gamma

**Définition 2.1.1.** La fonction Gamma est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres complexes. Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , on définit la

fonction Gamma par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (2.1)$$

**Exemples :**

- $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$
- $\Gamma(-1) = +\infty.$
- $\frac{1}{\Gamma(0)} = 0.$
- $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$

**propriétés :**

1. La fonction Gamma peut être représentée par la limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \text{avec } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

2. La fonction Gamma est définie et continue sur  $]0, +\infty[.$
3. La fonction Gamma est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} (\ln t)^n \exp(-t) dt.$$

tel que  $\forall z \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*.$

4. Pour tout  $z \in \mathbb{R}_+^*$ , en intégrant par parties dans (2.1), on aura

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (2.2)$$

en particulier  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

La propriété (2.2) permet d'établir que

$$\Gamma(n + 1) = n!, n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

**Exemple 2.1.2.** Cherchons  $(-\frac{1}{2})!$ . Par définition

$$(-\frac{1}{2})! = \Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-1/2} dt.$$

Posons  $t = y^2$ , on aura que

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-y^2} \frac{1}{y} 2y dy = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi},$$

ainsi

$$(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}.$$

En utilisant la fonction Gamma, on peut aussi définir la fonction causale  $H_\alpha(t)$  comme suit

$$H_\alpha(t) := \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (2.4)$$

Cette fonction est utilisée pour donner un sens alternatif aux deux concepts ; la dérivation et l'intégration fractionnaires.

## 2.1.2 La fonction Beta

**Définition 2.1.3.** La fonction Beta est une intégrale d'Euler définie pour tous complexes  $z$  et  $s$  par

$$B(z, s) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{s-1} dt, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (2.5)$$

**Propriétés :**

1. La fonction Gamma et Bêta sont liées par la relation suivante :

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z + \omega)}. \quad (2.6)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \left( \int_0^{+\infty} x^{z-1} \exp(-x) dx \right) \left( \int_0^{+\infty} y^{\omega-1} \exp(-y) dy \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{z-1} y^{\omega-1} \exp(-x-y) dx dy.\end{aligned}$$

Posons  $y = \mu - x$  pour  $0 \leq x \leq \mu$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{\mu} x^{z-1} (\mu - x)^{\omega-1} \exp(-\mu) dx d\mu \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-\mu) \left( \int_0^{\mu} x^{z-1} (\mu - x)^{\omega-1} dx \right) d\mu.\end{aligned}$$

Si on pose  $x = t\mu$  et  $0 < \mu < 1$  on va trouver :

$$\int_0^{\mu} x^{z-1} (\mu - x)^{\omega-1} dx = \mu^{z+\omega-1} \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\omega-1} dt.$$

Alors,

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = B(z, \omega)\Gamma(z + \omega).$$

1. La fonction  $B$  est symétrique d'après la première propriété c-à-d :

$$B(z, s) = B(s, z), \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(s) > 0.$$

*Remarque 2.1.4.* A l'aide de la fonction Bêta, on peut obtenir quelques résultats utiles sur la fonction Gamma :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z).$$

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}.$$

## 2.2 Série hypergéométrique et fonction de Kummer

Après les fonctions eulériennes qui interviennent de façon universelle, ce sont sans aucun doute les fonctions hypergéométriques, la fonction de Gauss et les fonctions confluentes qui fournissent les exemples les plus simples de la mise en œuvre des processus fondamentaux de l'analyse. En effet, la fonction de Gauss, définie par une série entière, apparaît comme une généralisation naturelle de la série géométrique et relève ainsi des méthodes de la théorie des fonctions analytiques. On peut en dire autant des fonctions confluentes, en particulier de la fonction de Kummer qui généralise la fonction exponentielle.

Par définition, on appelle série hypergéométrique la série entière :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n z^n}{(\gamma)_n n!}, z \in \mathbb{C}, \quad (2.7)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  paramètres réels ou complexes quelconques (sous réserve que  $\gamma \neq -n, \dots$ ),  $(\lambda)_n$  symbole désignant  $(\lambda)_0 = 1; (\lambda)_n = \lambda(\lambda + 1)\dots(\lambda + n - 1)$ ,

de sorte que :

$$(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda + n)}{\Gamma(\lambda)}, n \geq 0. \quad (2.8)$$

Lorsque  $\alpha$  ou  $\beta$  est un entier négatif ou nul, la série se réduit à un polynôme. En dehors de ce cas, le rayon de convergence de la série est égal à un, comme on le voit facilement à l'aide du critère de d'Alembert. La somme de la série (2.7) est appelée fonction hypergéométrique ou fonction de Gauss et notée  $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ ; cette définition n'est pas valable, à priori, que pour  $|z| < 1$ . En fait, il existe une fonction analytique dans le plan muni de la coupure  $[1, +\infty]$  qui coïncide avec la fonction de Gauss pour  $|z| < 1$  : c'est le prolongement analytique de la fonction hypergéométrique dans que l'on notera toujours  $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$  dans ce domaine.

**Définition 2.2.1.** On appelle fonction de Kummer ou fonction hypergéométrique confluyente (de première espèce), la fonction  $\Phi(\alpha, \gamma; z)$  définie par la série :

$$Q(\alpha, \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n z^n}{(\gamma)_n n!}, z \in \mathbb{C}. \quad (2.9)$$

### 2.2.1 Fonctions de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est considérée comme généralisation directe de la fonction exponentielle en raison de la substitution de  $n! = \Gamma(n + 1)$  avec  $(\alpha n)! = \Gamma(\alpha n + 1)$ . Les fonctions Mittag-Leffler apparaissent naturellement lorsque nous résolvons les équations différentielles linéaires fractionnaires. Récemment les fonctions de Mittag-Leffler ont été utilisées pour étudier des différents modèles en biologie en physique ...ect. Toutefois, certaines des propriétés des fonctions Mittag-Leffler semblaient être inconnues de nombreux chercheurs.

**Définition 2.2.2.** Une fonction à deux paramètres de type Mittag-Leffler est définie par la série :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0, z \in \mathbb{C}). \quad (2.10)$$

Pour  $\beta = 1$ , on obtient la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \equiv E_{\alpha}(z).$$

#### Exemples

Des cas particuliers de (2.10) représentant des fonctions élémentaires

- $E_{1,1}(z) = e^z, z \in \mathbb{C}.$
- $E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}, z \in \mathbb{C}.$
- $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z), z \in \mathbb{C}.$
- $E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}, z \in \mathbb{C}.$
- $E_{2,1}(-z^2) = \cos z, z \in \mathbb{C}.$
- $E_{1/2,1}(\pm z^{1/2}) = e^z [1 + \operatorname{erf}(\pm z^{1/2})], z \in \mathbb{C},$

où

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

**Propriétés :**

Pour tout  $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$  et  $0 < \alpha < 1$ , on a :

1.

$$E_\alpha(\lambda x^\alpha)E_\alpha(\lambda y^\alpha) = E_\alpha(\lambda(x + y)^\alpha).$$

2.

$$E_\alpha(ix^\alpha) = \cos_\alpha(x^\alpha) + i \sin_\alpha(x^\alpha),$$

où

$$\cos_\alpha(x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{a2k}}{\Gamma(1 + a2k)} \text{ et } \sin_\alpha(x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{a(2k+1)}}{\Gamma(1 + a(2k + 1))}.$$

**2.2.2 Fonctions de Mainardi et Miller-Ross**

On peut aussi représenter d'autres fonctions comme la fonction de Wright, la fonction de Mainardi, la fonction de Miller-Ross [15], la fonction de Rabotnov [19] et l' $\alpha$ -fonction exponentielle.

**Définition 2.2.3.** On appelle  $W$ -fonction ou fonction de Wright, tout série de la forme suivante

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)n!}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0, z \in \mathbb{C}). \quad (2.11)$$

Cas particuliers :

$$W(z; 0, 1) = e^z, z \in \mathbb{C}. \quad (2.12)$$

La  $W$ -fonction est une généralisation de la fonction exponentielle et des fonctions de Bessel.

**Définition 2.2.4.** Soit  $\alpha, z \in \mathbb{C}$ . Alors toute série de la forme suivante

$$M(z; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{\Gamma(-\alpha(n + 1) + 1)n!}, \quad (\alpha, z \in \mathbb{C}). \quad (2.13)$$

s'appelle la  $M$ -fonction de Mainardi.

La fonction  $M$  est un cas particulier de la fonction  $W$  :

$$M(z; \alpha) = W(-z; -\alpha, \nu + 1 - \alpha) \quad (2.14)$$

$$M\left(z; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}. \quad (2.15)$$

**Définition 2.2.5.** On appelle fonction de Miller-Ross, la série presque entière suivante

$$\varepsilon_t(\nu, a) = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(\nu + k + 1)} = t^\nu E_{1, \nu+1}(at). \quad (2.16)$$

**Définition 2.2.6.** On appelle fonction de Rabotnov, la série presque entière suivante

$$\vartheta_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k t^{k(\alpha+1)}}{\Gamma((k+1)(1+\alpha))} = t^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\beta t^{\alpha+1}).$$

**Définition 2.2.7.** On appelle  $\alpha$ -fonction exponentielle et noté par  $e_\alpha^{\lambda z}$ , le cas particulier de la fonction de Mittag-Leffler :

$$e_\alpha^{\lambda z} := z^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda z^\alpha), \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \lambda, z \in \mathbb{C}. \quad (2.17)$$

Prabhakar a introduit la fonction  $E_{\alpha, \beta}^\gamma(z)$  qui généralise la fonction de Mittag-Leffler (2.10) et la fonction de Kummer (2.9),

$$E_{\alpha, \beta}^\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{n!}, \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha > 0), \quad (2.18)$$

où  $(\gamma)_n$  est le symbole de Prabhakar donné par (2.8).

Pour  $\gamma = 1$  cette fonction coïncide avec (2.10). Si on considère le cas particulier de la fonction de Mittag-Leffler généralisée (2.18) où  $\alpha = 1$ , on aura aussi la fonction de Kummer

$$E_{1, \beta}^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} Q(\gamma, \beta; z). \quad (2.19)$$

Prabhakar a étudié quelques propriétés de la fonction Mittag-Leffler généralisée (2.18) et de l'opérateur intégrale

$$\left( \mathbb{E}_{\alpha, \beta, \omega; a}^\gamma \varphi \right) (x) = \int_a^x (x-t)^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^\gamma(\omega(x-t)^\alpha) \varphi(t) dt, \quad (x > a), \quad (2.20)$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma, \omega \in \mathbb{C}$  ( $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0$ ) contenant la fonction (2.18) dans le noyau, et il a appliqué les résultats obtenus pour prouver l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation intégrale correspondante

$$\int_a^x (x-t)^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^{\gamma}(\omega(x-t)^{\alpha}) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.21)$$

sur l'intervalle finie  $[a, b]$ .

## 2.3 Opérateurs intégrales et fonction de Mittag-Leffler

Considérons l'opérateur intégrale  $\mathbb{E}_{\alpha, \beta, \omega; a}^{\gamma}$  donné par (2.20). En particulier, quand  $\gamma = 1$  et  $\alpha = 1$ , (2.20) prends les formes

$$(\mathbb{E}_{\alpha, \beta, \omega; a} \varphi)(x) = \int_a^x (x-t)^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\omega(x-t)^{\alpha}) \varphi(t) dt, \quad (x > a), \quad (2.22)$$

et

$$(\mathbb{Q}_{\gamma, \beta, \omega; a} \varphi)(x) = \int_a^x (x-t)^{\beta-1} Q(\gamma, \beta, \omega(x-t)) \varphi(t) dt, \quad (x > a), \quad (2.23)$$

contenants la fonction de Mittag-Leffler (2.10) et la fonction de Kummer (2.9) respectivement dans le noyau.

### Théorème 2.3.1

[10] Soit  $\alpha, \beta, \gamma, \omega \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ ,  $\operatorname{Re} \beta > 0$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left(z^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^{\gamma}(\omega z^{\alpha})\right) = z^{\beta-n-1} E_{\alpha, \beta-n}^{\gamma}(\omega z^{\alpha}). \quad (2.24)$$

En particulier

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left(z^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\omega z^{\alpha})\right) = z^{\beta-n-1} E_{\alpha, \beta-n}(\omega z^{\alpha}). \quad (2.25)$$

Et

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left(z^{\alpha-1} Q(\gamma, \beta; \omega z)\right) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)} z^{\alpha-n-1} Q(\gamma, \beta-n; \omega z). \quad (2.26)$$

*Démonstration.* En utilisant la définition de la fonction généralisé de Mittag-Leffler (2.18) et on dérive terme par terme sous le signe de sommation, on aura

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dz}\right)^n \left(z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(\omega z^\alpha)\right) &= \left(\frac{d}{dz}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{\omega^k z^{\alpha k + \beta - 1}}{k!}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\omega^k z^{\alpha k + \beta - 1}}{k!}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta - n)} \frac{\omega^k z^{\alpha k + \beta - n - 1}}{k!} \\
 &= z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}^\gamma(\omega z^\alpha),
 \end{aligned}$$

qui prouve (2.24). Lorsque on prends  $\gamma = 1$  et  $\alpha = 1$ , on trouve respectivement les relations (2.25) et (2.26).  $\square$

### Corollaire 2.3.2

Soit  $\alpha, \beta, \gamma, \omega \in \mathbb{C}$  ( $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ ). Alors

$$\int_0^z t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(\omega t^\alpha) dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}^\gamma(\omega z^\alpha). \quad (2.27)$$

En particulier,

$$\int_0^z t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\omega t^\alpha) dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\omega z^\alpha). \quad (2.28)$$

et

$$\int_0^z t^{\alpha-1} Q(\gamma, \beta; \omega t) dt = \frac{1}{\beta} z^\beta Q(\gamma, \beta + 1; \omega z).$$

### Théorème 2.3.3

Soit  $\alpha, \beta, \gamma, \omega \in \mathbb{C}$  ( $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ ) et  $b > a$ , alors l'opérateur  $\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\omega;a}^\gamma$  est borné sur l'espace  $C[a, b]$  des fonctions continues et

$$\left\| \mathbb{E}_{\alpha,\beta,\omega;a}^\gamma \varphi \right\|_C \leq B \|\varphi\|_C,$$

où

$$B = (b-a)^{\operatorname{Re}(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|(\gamma)_k|}{|\Gamma(\alpha k + \beta)| (\operatorname{Re}(\alpha)k + \operatorname{Re}(\beta))} \frac{|\omega(b-a)^{\operatorname{Re}(\alpha)}|^k}{k!} \quad (2.29)$$

*Démonstration.* Pour tout  $x \in [a, b]$  et  $\varphi \in C[a, b]$ , on a

$$\begin{aligned} \left| (\mathbb{E}_{\alpha, \beta, \omega; a}^\gamma \varphi)(x) \right| &\leq \int_a^x \left| (x-t)^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^\gamma(\omega(x-t)^\alpha) \varphi(t) \right| dt \\ &\leq \|\varphi\|_C \int_a^x \left| s^{\operatorname{Re}(\beta)-1} E_{\alpha, \beta}^\gamma(\omega s^\alpha) \right| ds. \end{aligned}$$

L'intégrale sur le côté droit est inférieur ou égal à  $B$  et le théorème est prouvé.  $\square$

#### Corollaire 2.3.4

Soit  $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{C}$  ( $\operatorname{Re} \alpha > 0$ ,  $\operatorname{Re} \beta > 0$ ) et  $b > a$ , alors l'opérateur  $\mathbb{E}_{\alpha, \beta, \omega; a}$  est borné sur  $C[a, b]$  et

$$\|\mathbb{E}_{\alpha, \beta, \omega; a} \varphi\|_C \leq B_1 \|\varphi\|_C,$$

où

$$B_1 = (b-a)^{\operatorname{Re}(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\omega(b-a)^{\operatorname{Re}(\alpha)}|^k}{|\Gamma(\alpha k + \beta)| (\operatorname{Re}(\alpha)k + \operatorname{Re}(\beta))}. \quad (2.30)$$

#### Corollaire 2.3.5

Soit  $\beta, \gamma, \omega \in \mathbb{C}$  ( $\operatorname{Re} \beta > 0$ ) et  $b > a$ , alors l'opérateur  $\mathbb{Q}_{\gamma, \beta, \omega; a}$  est borné sur  $C[a, b]$  et

$$\|\mathbb{Q}_{\gamma, \beta, \omega; a} \varphi\|_C \leq B_2 \|\varphi\|_C,$$

où

$$B_2 = (b-a)^{\operatorname{Re}(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma|_k}{|\Gamma(k + \beta)| (k + \operatorname{Re}(\beta))} \frac{|\omega(b-a)^{\operatorname{Re}(\beta)}|^k}{k!}.$$

En conclusion : Comme nous le disions au début, la fonction de Kummer est la généralisation de la fonction exponentielle, ainsi la fonction  $E_{\alpha, \beta}^\gamma(z)$  est la forme générale qui généralise la fonction exponentielle et même la fonction de Kummer.

# Chapitre 3

## Introduction au calcul fractionnaire

### 3.1 Intégrale et dérivée fractionnaires

#### 3.1.1 Formule intégrale de Liouville

Pour les fonctions causales nulles en 0, l'inverse de l'opérateur de dérivation  $D = \frac{d}{dt}$  est l'opérateur d'intégration  $I$  :

$$Df(t) = \frac{df}{dx}(t) = g(t) \text{ avec } f(0) = 0 \Leftrightarrow f(t) = Ig(t) = \int_0^t g(s)ds. \quad (3.1)$$

De même, toujours pour des fonctions causales avec des conditions initiales nulles, l'inverse de la dérivation  $n^{\text{ième}}$  est définie par le  $n$  itéré de l'opérateur  $I$  précédent. Ainsi la fonction  $f_2$  telle que  $f_2(0) = f_2'(0) = 0$  avec  $f_2'' = g$  est définie par

$$f_2(t) = I^2g(t) = \int_0^t \left( \int_0^s g(x)dx \right) ds. \quad (3.2)$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^2g(t) = \int_0^t g(x) \left( \int_x^t ds \right) dx = \int_0^t (t-x)g(x)dx.$$

Plus généralement on montre que le  $n^{\text{ième}}$  itéré de l'opérateur  $I$  peut s'écrire à l'aide

de la formule intégrale de Cauchy :

$$I^n g(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} g(x) dx. \quad (3.3)$$

Ainsi la fonction  $f_n$  telle que  $f_n(0) = f'_n(0) = \dots = f_n^{(n-1)}(0) = 0$  avec  $f_n^{(n)} = g$  est définie par

$$f_n(t) = I^n g(t). \quad (3.4)$$

Cette formule peut être interprétée par le produit de convolution de la fonction causale  $g$  avec la fonction causale

$$H_n(t) = \frac{t_+^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} H(t)$$

Pour  $n = 0$  ou  $1$ , on a  $H_0 = \delta$  alors que  $\delta$  est la distribution de Dirac en  $0$  et  $H_1$  n'est autre que la fonction de Heaviside. En utilisant la fonction Gamma, on a

$$H_n(t) = \frac{t_+^{n-1}}{\Gamma(n)} \text{ pour } t > 0 \quad (3.5)$$

et

$$I^n g = H_n * g.$$

Comme la fonction Gamma peut être prolongée à l'ensemble du plan complexe privé des nombres entiers négatifs, on peut définir une fonction causale  $H_\alpha(t)$  par

$$H_\alpha(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ pour } t > 0 \text{ et } \alpha > 0. \quad (3.6)$$

Il est alors naturel de définir une intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $g$ .

**Définition 3.1.1.** Soit  $g$  une fonction causale et  $\alpha$  un réel strictement positif. On appelle intégrale d'ordre  $\alpha$  et on note  $I^\alpha g$  la fonction définie par

$$I^\alpha g = H_\alpha * g. \quad (3.7)$$

Quand  $\alpha$  tend vers 0, on aura

$$I^0 g = \delta * g.$$

En utilisant les propriétés des fonctions spéciales, on peut déduire d'après la relation (3.6) que :

$$I^\alpha (I^\beta g) = I^{\alpha+\beta} g \text{ car } H_\alpha * H_\beta = H_{\alpha+\beta}. \quad (3.8)$$

On a aussi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{d^n}{dt^n} (I^\alpha g)(t) = (I^{\alpha-n} g)(t). \quad (3.9)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} (I^\alpha g)(t) &= \frac{d^n}{dt^n} (H_\alpha * g)(t) \\ &= \left( \frac{d^n}{dt^n} H_\alpha * g \right)(t) \\ &= (H_{\alpha-n} * g)(t) \\ &= (I^{\alpha-n} g)(t). \end{aligned}$$

Prenons l'équation (3.9) pour  $\alpha = 0$ , on obtient

$$\frac{d^n}{dt^n} g(t) = g^{(n)}(t) = H_{-n}(t) * g(t), \quad (3.10)$$

ou bien

$$\frac{d^n}{dt^n} g(t) = \int_0^t \delta^{(n)}(t-s) g(s) ds, \quad t > 0,$$

alors que  $H_{-n}(t)$  est la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la distribution de Dirac

$$H_{-n}(t) = \frac{t_+^{-n-1}}{\Gamma(-n)} = \delta^{(n)}(t)$$

### 3.1.2 Dérivations d'ordre $\alpha$

On aimerait pouvoir dire que les dérivées d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  sont obtenues par une convolution avec  $H_{-\alpha}$  :

$$D^\alpha g(t) := H_{-\alpha}(t) * g(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{\alpha+1}} ds, \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad (3.11)$$

là que

$$D^0 g(t) := \delta(t) * g(t) = g(t).$$

Mais au voisinage  $t = 0$ , la fonction  $H_{-\alpha}(t) = \frac{t_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$  n'est pas intégrable quand  $\alpha \geq 0$ . Donc pour obtenir une définition de la dérivée fractionnaire qui est toujours valable pour les fonctions classiques, nous devons régulariser l'intégrale divergente (3.11) d'une certaine façon.

A cet effet, nous considérons le nombre entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n - 1 < \alpha \leq n$  et écrivons :

$$\begin{aligned} H_{-\alpha}(t) * g(t) &= [H_{-n}(t) * H_{n-\alpha}(t)] * g(t) \\ &= H_{-n}(t) * [H_{n-\alpha}(t) * g(t)] \\ &= D^n I^{n-\alpha} g(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} H_{-\alpha}(t) * g(t) &= [H_{-n}(t) * H_{n-\alpha}(t)] * g(t) \\ &= H_{n-\alpha}(t) * [H_{-n}(t) * g(t)] \\ &= I^{n-\alpha} D^n g(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

En conséquence, nous avons obtenu deux définitions régulières alternatives pour  $D^\alpha$  :

**Définition 3.1.2.** La dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha, n - 1 < \alpha \leq n$  est définie par

$$D^\alpha g(t) = D^n I^{n-\alpha} g(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} g(s) ds. \quad (3.14)$$

**Définition 3.1.3.** La dérivée au sens de Caputo d'ordre  $\alpha, n - 1 < \alpha \leq n$  est définie par

$${}^c D^\alpha g(t) = I^{n-\alpha} D^n g(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n g}{dt^n}(s) ds. \quad (3.15)$$

La différence entre les deux définitions est évident lorsque le passage de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  dans la définition 3.1.2. En utilisant la commutativité du produit de convolution et en dérivant sous le signe intégral on obtient :

$$D^\alpha g = {}^c D^\alpha g + \sum_{k=0}^{n-1} g^{(k)}(0^+) H_{k+1-\alpha} \text{ pour } n - 1 < \alpha \leq n, \quad (3.16)$$

On peut remarquer que, dans le cas où  $g$  n'est pas nulle en 0, la dérivation au sens de Riemann-Liouville fait intervenir une fonction  $H_{n-\alpha}$  qui tend vers l'infini en  $t = 0$ . Par contre pour  $g$  a  $n$ -dérivées continue au voisinage de 0, la dérivée au sens de Caputo [2] est continue en 0 et tend vers 0 en  $t = 0$ , ce qui nous amène à dire que la définition 3.1.3 est plus approprié pour des problèmes d'intérêt physique où les conditions initiales classiques sont exprimés en termes de dérivés entiers.

En pratique la dérivation fractionnaire est le plus souvent utilisée pour des fonctions causales. On a vu que la convolution avec la fonction  $H_\alpha(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$  pour  $\alpha > 0$  correspond à une intégration d'ordre  $\alpha$ . Il aurait été mieux d'avoir écrire la dérivée d'ordre  $\alpha > 0$  sous la forme :

$$D^\alpha g = H_{-\alpha} * g. \quad (3.17)$$

Mais malheureusement, la singularité de la fonction  $H_{-\alpha}$  nous empêche de définir un produit de convolution au sens des fonctions. Cependant dans le cadre de distribution on peut définir la dérivation d'ordre  $\alpha > 0$  par un produit de convolution au sens de distribution où  $H_{-\alpha}$  définit une distribution singulière.

Pour  $\alpha = n$  entier positive, on a  $H_{-n} = \delta^{(n)}$  où  $\delta^{(n)}$  est la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la distribution de Dirac en 0. Si  $\alpha \rightarrow n$  dans la formule (3.16), on obtient

$$D^n g = \frac{d^n g}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} g^{(k)}(0^+) \delta^{(n-k)}.$$

La formule ci-dessus est la dérivation au sens distributions d'une fonction causale,  $n$  fois dérivable sur  $[0, +\infty[$ . A partir de ce développement, on conclut que la dérivation au sens de Riemann-Liouville d'une fonction causale n'est autre qu'une généralisation de la dérivée aux sens des distribution tandis que la dérivation de Caputo est plutôt une généralisation de la dérivation ordinaire.

## 3.2 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil très utile pour résoudre les ODE linéaires à coefficients constants car elle convertit les équations différentielles linéaires en équations algébriques linéaires qui peuvent être résolues facilement.

La fonction  $F(s)$  de la variable complexe  $s$  défini par

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.18)$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction  $f$ , laquelle est appelée l'originale.

Pour l'existence de l'intégrale (3.18), la fonction  $f$  doit être d'ordre exponentiel  $\alpha$ , ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives

$M$  et  $T$  telles que

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \text{ pour tout } t > T.$$

En d'autres termes, la fonction  $f(t)$  ne doit pas "croître ou décroître" plus vite qu'une certaine fonction exponentielle quand  $t \rightarrow \infty$ .

L'originale  $f(t)$  peut être reconstituée à partir de la transformée de Laplace  $F(s)$  à l'aide de la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \operatorname{Re}(s) > c_0, \quad (3.19)$$

où  $c_0$  réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (3.18)

Le calcul directe de la transformée de Laplace inverse en utilisant la formule (3.19)

est "souvent compliqué" ; cependant, parfois elle donne une information utile sur le comportement de l'inconnue originale  $f(t)$  qu'on cherche.

### 3.2.1 Transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler généralisée

On considère une fois pour toute, en tant qu'exemple, la transformée de Laplace de la fonction  $t^{\alpha\gamma+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm\omega t^\alpha)$  qui ressemble à la transformée de Laplace de la plus part des fonctions usuelles et spéciales :

$$t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm\omega t^\alpha) \Leftrightarrow \frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp \omega)^{k+1}}, \operatorname{Re}(s) > |\omega|^{1/\alpha}, \quad (3.20)$$

où

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm\omega t^\alpha) \equiv \frac{d^k}{dt^k} E_{\alpha,\beta}(\pm\omega t^\alpha).$$

Cas particuliers :

1. Si  $k = 0$  et  $\beta = \alpha$ , on aura la fonction  $\alpha$ -fonction exponentielle  $t \rightarrow t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)$ .

$$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\omega t^\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{(s^\alpha - \omega)}, \operatorname{Re}(s) > |\omega|^{1/\alpha}. \quad (3.21)$$

2. Si  $k = 0$  et  $\beta = 1$ , on aura la fonction de Mittag-Leffler d'un seul paramètre  $t \rightarrow E_\alpha(\omega t^\alpha)$ .

$$E_\alpha(\pm\omega t^\alpha) \Leftrightarrow \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha \mp \omega)}, \operatorname{Re}(s) > |\omega|^{1/\alpha}. \quad (3.22)$$

3. Si  $k = 0$  et  $\alpha = \omega = \beta = 1$ , on aura la fonction exponentielle  $t \rightarrow e^t$ .

$$e^t \Leftrightarrow \frac{1}{s-1}, \operatorname{Re}(s) > 1. \quad (3.23)$$

4. Si  $\omega = 0$ ,  $\alpha = \beta = 1$  et  $k = n \in \mathbb{N}$ , on aura la fonction puissance  $t \rightarrow t^n$ .

$$t^n \Leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (3.24)$$

5. Si  $k = \omega = 0$  et  $\alpha = \beta = 1$ , on aura la fonction de Heaviside  $H$ .

$$H(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (3.25)$$

6. Si  $k = \omega = 0$  et  $\alpha = \beta = 1/2$ , on aura la fonction  $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ .

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \Leftrightarrow \frac{1}{s^{1/2}}, \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (3.26)$$

### 3.2.2 Quelques résultats sur la transformée de Laplace

Les trois théorèmes suivants sont d'importantes applications de la transformation de Laplace pour la résolution des équations différentielles et intégrales.

#### Théorème 3.2.1

Soit  $f'$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^+$ , sauf éventuellement en  $t = 0$  où  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \equiv f(0^+)$  existe. On suppose en outre que  $f'$  est une fonction continue par morceaux qui admet une transformée de Laplace, alors :

$$L\{f'(t), s\} = sF(s) - f(0^+). \quad (3.27)$$

Ce résultat se généralisé par récurrence pour les dérivées d'ordres supérieurs  $n$  :

$$L\{f^{(n)}(t), s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (3.28)$$

Ainsi, prendre la transformée de Laplace d'une dérivée revient essentiellement à multiplier par  $s$ . On ne sera pas surpris du résultat réciproque : une division par  $s$  correspond à une intégration de la fonction

#### Théorème 3.2.2

Soit  $g$  la primitive de  $f$  qui s'annule en 0, alors

$$L\{g(t), s\} = L\left\{\int_0^t f(r)dr, s\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Venons en maintenant au propriétés liées au produit de convolution.

#### Théorème 3.2.3

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions causales qui admettent des transformées de Laplace, alors ;

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s). \quad (3.29)$$

### 3.3 Transformé de Laplace et dérivée fractionnaire

On utilisera la propriété (3.29) pour calculer la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville. Autre propriété utile dont on aura besoin est la formule (3.28) de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire d'un ordre entier  $n$  de la fonction  $f$  :

#### 3.3.1 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville

Nous allons commencer avec la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  de Riemann-Liouville définie par (3.7)

$$(I^\alpha f)(t) = f(t) * H_\alpha(t), \quad (3.30)$$

où la transformée de Laplace de la fonction  $H_\alpha(t)$  est

$$L\left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}; s\right\} = s^{-\alpha}. \quad (3.31)$$

Par conséquent, si nous utilisons la transformée de Laplace du convolution (3.29), nous obtiendrons la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

$$L\{(I^\alpha f)(t); s\} = s^{-\alpha} F(s). \quad (3.32)$$

Passons maintenant à l'évaluation de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire Riemann-Liouville, à cette fin, nous l'écrivons sous la forme

$$D_{0+}^\alpha f(t) = g^{(n)}(t), \quad (3.33)$$

$$g(t) = f(t) * H_{n-\alpha}(t), \quad n-1 \leq \alpha \leq n, \quad (3.34)$$

avec la transformée de Laplace de cette dernière est déterminée par (3.32) :

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)}F(s). \quad (3.35)$$

En utilisant la transformée de Laplace pour une dérivée d'ordre entier, nous obtenons que :

$$L\{g^{(n)}(t);s\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0), \quad (3.36)$$

et de la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, on aura

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} I^{n-\alpha} f(t) = D^{\alpha-k-1} f(t). \quad (3.37)$$

En substituant (3.35) et (3.37) dans (3.36), nous obtenons l'expression finale suivante pour la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  :

$$L\{D_{0+}^{\alpha} f(t);s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_{0+}^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, \quad n-1 \leq \alpha \leq n. \quad (3.38)$$

Cette transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est bien connue (voir, par exemple, [15] ou bien [16]). Cependant, son application pratique est limitée par l'absence de l'interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure  $t = 0$ .

**Exemple 3.3.1.** On considère les équations différentielles fractionnaires suivantes :

$$a {}_0D_t^{\alpha} u(t) + bu(t) = f(t), \quad {}_0D_t^{\alpha-k} u(t) |_{t=0} = C_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3.39)$$

où  ${}_0D_t^{\alpha}$  est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et  $n-1 < \alpha < n$ .

Grace à la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville (3.38) et la formule (3.20), on obtient la solution de (3.39).

En effet, en tenant compte les conditions initiales, la transformée de Laplace de l'équation nous donne

$$as^{\alpha} U(s) + bU(s) = F(s) + \sum_{k=1}^n C_k s^{k-1},$$

$$U(s) = \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{(s^\alpha + \frac{b}{a})} F(s) + \sum_{k=1}^n C_k \frac{s^{k-1}}{(as^\alpha + b)} \right].$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse et par (3.20), on donne la solution de (3.39) :

$$u(t) = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n C_k t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1} \left( -\frac{b}{a} t^\alpha \right) + \int_0^t G(t-s) f(s) ds$$

où

$$G(t) = \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left( -\frac{b}{a} t^\alpha \right),$$

est la fonction de Green.

Finalement, on a

$$u(t) = \frac{1}{a} \left[ \sum_{k=1}^n C_k t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1} \left( -\frac{b}{a} t^\alpha \right) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left( -\frac{b}{a} (t-s)^\alpha \right) f(s) ds \right]. \quad (3.40)$$

**Exemple 3.3.2.** Maintenant, prenons les équations suivantes :

$${}_0D_t^Q u(t) + {}_0D_t^q u(t) = f(t), \quad {}_0D_t^{Q-1} u(t) + {}_0D_t^{q-1} u(t) |_{t=0} = C, \quad (3.41)$$

Supposons que  $0 < q < Q < 1$ . La transformée de Laplace de (3.41) mène à

$$U(s) = \frac{C + F(s)}{s^Q + s^q} = \frac{C + F(s)}{s^q (s^{Q-q} + 1)} = (C + F(s)) \frac{s^{-q}}{(s^{Q-q} + 1)}.$$

Après l'inversion à l'aide de (3.20) pour  $\alpha = Q - q$  et  $\beta = Q$ , on obtient la solution

$$u(t) = CG(t) + \int_0^t G(t-s) f(s) ds,$$

où

$$G(t) = t^{Q-1} E_{Q-q, Q}(-t^{Q-q}), \quad {}_0D_t^{Q-1} u(t) + {}_0D_t^{q-1} u(t) |_{t=0} = C.$$

### 3.3.2 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens Caputo

Afin d'établir la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo, écrivons la dérivée de Caputo (3.15) sous la forme suivante :

$${}^cD^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} g(t), \quad g(t) = f^{(n)}(t), \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

En utilisant la formule (3.32) de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, on aura

$$L\{{}^cD^\alpha f(t); s\} = s^{-(n-\alpha)} G(s) \quad (3.42)$$

où, grâce à (3.28),

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (3.43)$$

En introduisant (3.43) dans (3.42), on arrive à la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$L\{{}^cD_{0+}^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n. \quad (3.44)$$

Comme cette formule de la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo induit les valeurs de la fonction  $f(t)$  et ses dérivées en la borne inférieure  $t = 0$ , pour laquelle une certaine interprétation physique existe (par exemple,  $f(0)$  est la position initiale,  $f'(0)$  est la vitesse initiale,  $f''(0)$  est l'accélération initiale), on peut espérer qu'il pourrait être utile pour la résolution des problèmes appliqués conduisant aux équations différentielles fractionnaires à coefficients constants accompagnées de conditions initiales dans leur forme traditionnelle.

**Exemple 3.3.3.** On considère les équations différentielles fractionnaires suivantes :

$${}_a^c D_t^\alpha u(t) + bu(t) = f(t), u^{(k)}(t)|_{t=0} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (3.45)$$

où  ${}_0^c D_t^\alpha$  est la dérivée fractionnaire de Caputo et  $n-1 < \alpha < n$ .

Grace à la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens Caputo (3.44) et la formule (3.20), on obtient directement et plus rapidement la solution de (3.45)

$$u(t) = \frac{1}{a} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{b}{a} (t-s)^\alpha \right) f(s) ds, \quad (3.46)$$

où

$$G(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{a} \frac{1}{(s^\alpha + \frac{b}{a})}, t \right\} = \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left( -\frac{b}{a} t^\alpha \right).$$

# Chapitre 4

## Equation de relaxation fractionnaire non lineaire

Dans ce chapitre, nous considérons l'équation fractionnaire de relaxation suivante :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha \sigma(t) + \omega \sigma(t) = \epsilon(t, \sigma(t)), 0 < t < 1, \omega > 0 \\ \sigma(0) = \sigma_0 > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\epsilon : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est une fonction continue et  ${}^C D^\alpha$  est la dérivée au sens Caputo d'ordre  $\alpha \in (0, 1)$ . Alors, on va utiliser la méthode du sous et sur solution pour établir l'existence de la solution et on essaie d'approximer la solution par la méthode des approximations successives.

Inversons les équations ci-dessus par la transformée de Laplace, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) \epsilon(s, \sigma(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

En effet, considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha \sigma(t) + \omega \sigma(t) = \epsilon(t), 0 < t < 1, \omega > 0 \\ \sigma(0) = \sigma_0 > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Quand on applique la transformée de Laplace ( la formule (3.44)) sur les équations (4.3), on aura

$$s^\alpha \sigma(s) - s^{\alpha-1} \sigma_0 + \omega \sigma(s) = \epsilon(s),$$

où  $\sigma, \epsilon$  est la transformée de Laplace de  $\sigma$  et  $\epsilon$  respectivement.

Par conséquent,

$$\sigma(s) = \sigma_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \omega} + \frac{1}{s^\alpha - \omega} \cdot \epsilon(s),$$

et par la transformée de Laplace inverse en utilisant les formules (3.29), (3.22) et (3.21), on obtient :

$$\sigma(t) = \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega t^\alpha) * \epsilon(t)$$

D'où

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) \epsilon(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Nous considérons le cone  $E$  des fonctions continues positives sur  $[0,1]$ . Définissons l'opérateur  $P : E \rightarrow E$  comme suit :

$$P\sigma(t) = \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + (\mathbb{E}_{\alpha,-\omega;0}\sigma)(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

où l'opérateur  $\mathbb{E}_{\alpha,-\omega;0} : E \rightarrow E$  est défini comme suit :

$$(\mathbb{E}_{\alpha,-\omega;0}\sigma)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) \epsilon(s, \sigma(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

**Lemme 4.0.4**

*L'opérateur  $P : E \rightarrow E$  est complètement continu.*

La démonstration du Lemme ci-dessus est basée sur le Théorème de Ascoli Arzella, en tenant compte la continuité de la fonction de Mittag-Leffler et sa bornitude sur  $[0,1]$ .

Maintenant pour tout  $\sigma \in [a, b] \subset \mathbb{R}^+$ , on définit respectivement les sous et sur fonction de controle comme suit :

$$H(t, \sigma) = \sup_{a \leq \eta \leq \sigma} \epsilon(t, \eta), \quad h(t, \sigma) = \inf_{\sigma \leq \eta \leq b} \epsilon(t, \eta).$$

Évidemment ces fonctions sont non décroissantes sur  $\eta$ .

**Définition 4.0.5.** Soit  $\bar{\sigma}(t), \underline{\sigma}(t) \in E$ ,  $a \leq \underline{\sigma}(t) \leq \bar{\sigma}(t) \leq b$ , satisfait

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &\geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) H(s, \bar{\sigma}(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(t) &\leq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) h(s, \underline{\sigma}(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

alors  $\bar{\sigma}(t)$  et  $\underline{\sigma}(t)$  sont appelées respectivement sur et sous solutions de (4.1).

#### **Théorème 4.0.6**

Supposons que  $\epsilon(t, \sigma) : [0, 1] \times [0, +\infty)$  est continue, et  $\bar{\sigma}(t), \underline{\sigma}(t)$  sont respectivement les sur et sous solutions de (4.1), alors le problème (4.1) a au minimum une solution positive.

*Démonstration.* Soit

$$K = \{\sigma(t) \in E, \underline{\sigma}(t) \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma}(t), t \in [0, 1]\},$$

Comme  $K \subset E$  et  $K$  est un ensemble convexe fermé, pour démontrer le Théorème 4.0.6 ci-dessus, il suffit de prouver que  $P : K \rightarrow K$ .

Pour tout  $\sigma(t) \in K$ , on a  $\underline{\sigma}(t) \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma}(t)$ , alors

$$\begin{aligned} P\sigma(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) \epsilon(s, \sigma(s)) ds \\ &\leq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) H(s, \bar{\sigma}(s)) ds \\ &\leq \bar{\sigma}(t) \end{aligned} \tag{4.4}$$

et

$$\begin{aligned} P\sigma(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) \epsilon(s, \sigma(s)) ds \\ &\geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) h(s, \underline{\sigma}(s)) ds \\ &\geq \underline{\sigma}(t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Donc, de (4.4) et (4.5), on obtient que  $P : K \rightarrow K$  est un opérateur compact. Selon le Théorème de point fixe de Schauder,  $P$  admet un point fixe dans  $K$ . Par conséquent le problème (4.1) a au minimum une solution positive  $\sigma$  dans  $E$ .  $\square$

**Corollaire 4.0.7**

Supposons que  $\epsilon(t, \sigma) : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est continue, et il existe  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  tel que

$$\lambda_1 \leq \epsilon(t, l) \leq \lambda_2, (t, l) \in [0, 1] \times [0, \infty) \quad (4.6)$$

alors, le problème (4.1) a au minimum une solution positive  $\sigma \in E$ , de plus

$$\sigma(t) \geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_1 t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\omega t^\alpha), \quad (4.7)$$

et

$$\sigma(t) \leq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_2 t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\omega t^\alpha) \quad (4.8)$$

*Démonstration.* De (4.6) et la définition des fonctions de controle, on a :

$$\lambda_1 \leq h(t, l) \leq H(t, l) \leq \lambda_2 \quad (4.9)$$

Considérons le problème suivant :

$$D^\alpha \bar{\sigma}(t) + \omega \bar{\sigma}(t) = \lambda_2, \bar{\sigma}(0) = \sigma_0. \quad (4.10)$$

Le problème (4.10) a une solution positive donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) ds \\ &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_2 t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\omega t^\alpha), \end{aligned}$$

en tenant compte (4.9), on a

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) ds \\ &\geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) H(s, \bar{\sigma}(s)) ds. \end{aligned}$$

Evidemment,  $\bar{\sigma}(t)$  est sur solution de (4.1).

Maintenant, tournons-nous vers le problème suivant :

$$D^\alpha \underline{\sigma}(t) + \omega \underline{\sigma}(t) = \lambda_1, \underline{\sigma}(0) = \sigma_0. \quad (4.11)$$

qui a également une solution positive

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}(t) &= \sigma_0 t E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) ds \\ &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_1 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha)\end{aligned}$$

Par (4.9) et de la même manière que nous avons utilisé pour chercher la sur solution, on conclut que  $\underline{\sigma}(t)$  est la sous solution de (4.1). Donc, de Théorème 4.0.6, on confirme que le problème (4.1) a au minimum une solution positive  $\sigma \in E$  qui vérifie les inégalités (4.7) et (4.8).  $\square$

#### Corollaire 4.0.8

Supposons que  $\epsilon(t, \sigma) : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow [a, \infty)$  est continue telle que

$$0 < \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \epsilon(t, \sigma(t)) < +\infty \quad (4.12)$$

alors le problème (4.1) a au minimum une solution positive.

*Démonstration.* D'après (4.12), il existe deux constantes positives  $N$  et  $R$  telles que

$$\epsilon(t, \sigma) \leq N \text{ pour tout } \sigma \geq R, t \in [0, 1]. \quad (4.13)$$

soit  $C = \max_{0 \leq t \leq 1, 0 \leq \sigma \leq R} \epsilon(t, \sigma)$ . Alors, par (4.13) on a :

$$a \leq \epsilon(t, \sigma) \leq N + C \text{ pour tout } \sigma \geq 0, t \in [0, 1].$$

Par conséquent, de Corollaire 4.0.7, le problème (4.1) a au minimum une solution positive  $\sigma$  dans  $E$  qui satisfait les inégalités suivantes

$$\sigma(t) \geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + a t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha),$$

et

$$\sigma(t) \leq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + (N + C) t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha)$$

$\square$

#### Corollaire 4.0.9

Supposons que  $\epsilon(t, \sigma) : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow [a, \infty)$  est continue,  $a$  est une constante positive s'il existe,  $c > 0, d > 0$ , tels que

$$\max\{\epsilon(t, \sigma) : (t, \sigma) \in [0, 1] \times [0, d]\} \leq c\Gamma(\alpha + 1) - \sigma_0 \quad (4.14)$$

alors, le problème (4.1) a au minimum une solution positive  $\sigma$  dans  $E$ .

*Démonstration.* D'après (4.14), on a :

$$a \leq \epsilon(t, \sigma) \leq c\Gamma(\alpha + 1) - \sigma_0 \text{ for any } (t, \sigma) \in [0, 1] \times [0, d].$$

Donc, de Corollaire 4.0.7, on conclut directement que le problème (4.1) a au minimum une solution positive  $\sigma$  dans  $E$  satisfait

$$0 \leq \|\sigma\| \leq c$$

□

**Proposition 4.0.10**

Supposons que  $\epsilon(t, \sigma) : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow [a, \infty)$  est continue où  $a$  est constante positive telle que

$$a < \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{\epsilon(t, \sigma)}{\sigma} < +\infty \quad (4.15)$$

alors le problème (4.1) a une solution positive borné  $\sigma$  dans  $E$ .

*Démonstration.* Depuis (4.15) est vérifiée, il existe deux constantes positives  $M$  et  $R$  telles que

$$\epsilon(t, \sigma) \leq M\sigma \text{ for any } \sigma \geq R, t \in [0, 1]. \quad (4.16)$$

Soit  $C = \max_{0 \leq t \leq 1, 0 \leq \sigma \leq R} \epsilon(t, \sigma)$  et par (4.16) on obtient

$$a \leq \epsilon(t, \sigma) \leq M\sigma + C \text{ for any } \sigma \geq 0, t \in [0, 1].$$

Alors, on a :

$$H(t, \sigma) \leq M\sigma + C \text{ for any } \sigma \geq 0, t \in [0, 1]. \quad (4.17)$$

Maintenant, on considère le problème suivant,

$$D^\alpha \bar{\sigma}(t) + \omega \bar{\sigma}(t) = M\sigma + C, \bar{\sigma}(0) = \sigma_0, \quad (4.18)$$

qui a la solution positive suivante

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) (M\bar{\sigma}(s) + C) ds. \end{aligned}$$

Laissez-nous définissons l'opérateur  $A : E \rightarrow E$  comme suit :

$$\begin{aligned} A\bar{\sigma}(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) (M\bar{\sigma}(s) + C) ds, \end{aligned} \quad (4.19)$$

ce qui est complètement continu du Lemme 4.0.4.

Notons

$$\Omega_r = \{ \sigma \in E \mid \|\sigma - v_0\| \leq r < \infty \},$$

où  $v_0(t) = Ct^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha)$  et  $r$  satisfait

$$r \geq \frac{\sigma_0 \Gamma(\alpha + 1)^2 + \theta C}{\Gamma(\alpha + 1)(\Gamma(\alpha + 1) - \theta)}$$

Pour tout  $\sigma \in \Omega_r$ , on a

$$\|\sigma\| \leq r + \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} |A\sigma(t) - v_0(t)| &= \left| \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) \theta \sigma(s) ds \right| \\ &\leq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \theta \|\sigma\| t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha) \\ &\leq \sigma_0 + \frac{\theta(r + \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)})}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|A\sigma - v_0\| &\leq \sigma_0 + \frac{\theta r}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\theta C}{\Gamma(\alpha + 1)^2} \\ &\leq r \end{aligned}$$

Selon le Théorème de point fixe de Schauder, l'opérateur  $A$  admet un point fixe dans  $\Omega_r$ . Donc, le problème (4.18) a au minimum une solution positive  $\bar{\sigma}$  dans  $\Omega_r$ . D'autre part, d'après (4.17) on a

$$\bar{\sigma}(t) \geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) H(s, \bar{\sigma}(s)) ds, \quad \bar{\sigma} \in \Omega_r.$$

Evidemment,  $\bar{\sigma}(t)$  est sur solution de (4.1) et par Corollaire 4.0.7, on conclut également que  $\underline{\sigma}(t) = \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + at^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha)$  est sous solution de (4.1). D'après le Théorème 4.0.6, le problème (4.1) a au minimum une solution positive  $\sigma$  dans  $E$ .  $\square$

**Théorème 4.0.11**

Supposons qu'il existe  $\mu > 0$ , tel que

$$\|\epsilon(t, \sigma_1) - \epsilon(t, \sigma_2)\| \leq \mu \|\sigma_1 - \sigma_2\| \text{ pour tout } \sigma_1, \sigma_2 \in X, \quad (4.20)$$

alors quand,

$$\frac{\mu}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1, \quad (4.21)$$

le problème (4.1) a une solution unique  $\sigma \in E$ .

*Démonstration.* Il suffit démontrer que l'opérateur  $P$  défini au début est une contraction dans  $E$ . En effet, pour tout  $\sigma_1, \sigma_2 \in E$ , et (4.21) est vérifiée, alors on a :

$$\begin{aligned} \|P(\sigma_1) - P(\sigma_2)\| &= \sup_{t \in [0,1]} |T(\sigma_1)(t) - T(\sigma_2)(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) |\epsilon(s, \sigma_1(s)) - \epsilon(s, \sigma_2(s))| ds \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\omega t^\alpha) \|\epsilon(s, \sigma_1) - \epsilon(s, \sigma_2)\| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \mu \|\sigma_1 - \sigma_2\|. \\ &\leq \frac{\mu}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\sigma_1 - \sigma_2\| \end{aligned}$$

Ainsi, quand (4.21) est vérifiée, l'opérateur  $P$  est une contraction.

Donc, d'après le principe de contraction de Banach le problème (4.1) a une seule solution  $\sigma \in E$ .  $\square$

**Exemple 4.0.12.** Considérons l'équation non linéaire de relaxation suivante :

$$\begin{cases} D^{1/2}\sigma(t) + \sigma(t) = \frac{0.5}{1+\sigma(t)}, 0 < t < 1 \\ \sigma(0) = 1 \end{cases} \quad (4.22)$$

Il est claire via le Théorème 4.0.11 et Corrolaire 4.0.7 que les équations (4.22) ont une seule solution positive  $\sigma$  dans  $E$ , de plus,

$$\underline{\sigma}(t) \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma}(t) \quad (4.23)$$

where  $\bar{\sigma}(t) = E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{t}) + \frac{1}{2}\sqrt{t}E_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}(-\sqrt{t})$ ,  $\underline{\sigma}(t) = E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{t})$  est respectivement sous et sur solution d'équations (4.22)

Il existe des méthodes pour calculer la solution approchée du problème (4.22), on se réfère à [4, 5, 7] et on va utiliser le schéma Bashfort-Moulton de correction de prédiction comme dans [6].

$$x_{n+1} = E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{t}) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-\sqrt{t-s})}{\sqrt{t-s}} \frac{ds}{1+x_n} \quad (4.24)$$

La figure 4.1 montre que la solution approximative située entre la sur et sous solution mentionné précédemment.

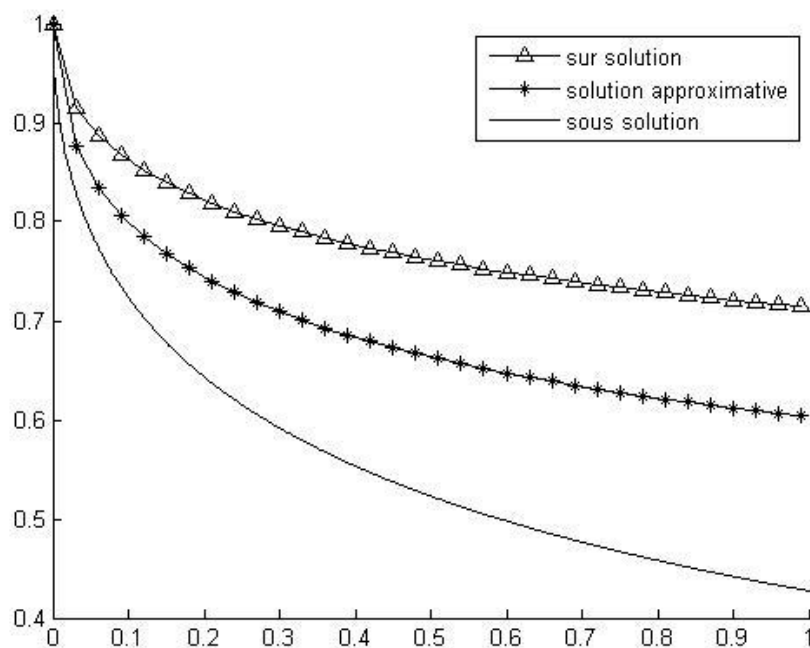


FIGURE 4.1 – Approximate solution

Notons que la décroissance des solutions caractérise bien la relaxation.

# Conclusion générale

Le calcul fractionnaire est devenu un outil très efficace pour modéliser quelques phénomènes en biologie, en mécanique...etc. D'un point vue mathématique l'opérateur fractionnaire est une équation intégrale avec noyau faiblement singulier qui représente un certain retard (convolution). Dans ce mémoire, on a essayé de faire une introduction sur le calcul fractionnaire et ses applications. Nous avons vu les outils principaux pour le calcul comme les fonctions Gamma, Beta et Mittag-Leffler,...etc. La transformée de Laplace est l'une des méthodes les plus efficaces utilisées pour résoudre les équations fractionnaires. Alors, on a donné tous les détails sur cette méthode avec des exemples très claires. Concernant l'analyse d'existence des solutions, on a choisi de travailler sur le problème de relaxation fractionnaire. On a inversé ce problème initial vers une équation intégrale dont le noyau bien exprimé par la fonction spéciale de Mittag-Leffler. Après, on a vu par la méthode du point fixe et la méthode de sur et sous solutions quelques résultats intéressants sur l'existence de la solution. Nous espérons que ce modeste travail sera une vision préliminaire sur le calcul fractionnaire et initiation à la recherche scientifique.

# Bibliographie

- [1] F. M. Atici and G. S. Guseinov. On the existence of positive solutions for non-linear differential equations with periodic boundary conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 132(2) :341–356, 2001.
- [2] M. Caputo. Elasticità e dissipazione (elasticity and anelastic dissipation). Zanichelli Publisher, Bologna). Michele Caputo CAPUTO, M.(1997) : Rigorous time domain responses of polarizable media. I, *Ann. Geofis*, 40(2) :423–434, 1969.
- [3] A. Chidouh, A. Guezane-Lakoud, and R. Bebbouchi. Positive solutions of the fractional relaxation equation using lower and upper solutions. *Vietnam Journal of Mathematics*, pages 1–10, 2016.
- [4] K. Diethelm. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 5(Mar.) :1–6 (electronic), 1997.
- [5] K. Diethelm, N. J. Ford, and A. D. Freed. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynam.*, 29 (1-4) :3–22, 2002. Fractional order calculus and its applications.
- [6] K. Diethelm and A. D. Freed. The fracpece subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Forschung und wissenschaftliches Rechnen : Beitrage zum Heinz- Billing-Preis 1998*, pages 57–71, 1999.
- [7] K. Diethelm and G. Walz. Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation. *Numer. Algorithms*, 16(3-4) :231–253 (1998), 1997.
- [8] N. Heymans and I. Podlubny. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with riemann-liouville fractional derivatives. *Rheologica Acta*, 45(5) :765–771, 2006.

- [9] D. Jiang, J. Chu, D. O'Regan, and R. P. Agarwal. Multiple positive solutions to superlinear periodic boundary value problems with repulsive singular forces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 286(2) :563–576, 2003.
- [10] A. A. Kilbas, M. Saigo, and R. Saxena. Generalized mittag-leffler function and generalized fractional calculus operators. *Integral Transforms and Special Functions*, 15(1) :31–49, 2004.
- [11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. ISBN 978-0-444-51832-3 ; 0-444-51832-0. xvi+523 pp.
- [12] N. Li and C. Wang. New existence results of positive solution for a class of nonlinear fractional differential equations. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, 33(3) : 847–854, 2013.
- [13] F. Mainardi. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena. *Chaos Solitons Fractals*, 7(9) :1461–1477, 1996.
- [14] S. P. C. Marques and G. J. Creus. *Computational viscoelasticity*. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer, Heidelberg, 2012. ISBN 978-3-642-25310-2 ; 978-3-642-25311-9. xii+124 pp.
- [15] K. S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. 1993.
- [16] K. B. Oldham and J. Spanier. *The fractional calculus*, vol. 111 of *mathematics in science and engineering*, 1974.
- [17] D. O'Regan and H. Wang. Positive periodic solutions of systems of second order ordinary differential equations. *Positivity*, 10(2) :285–298, 2006.
- [18] I. Podlubny. *Fractional differential equations*, volume 198 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999. ISBN 0-12-558840-2. xxiv+340 pp. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.
- [19] Y. N. Rabotnov. *Elements of the hereditary mechanics of solids*, 1977.

- [20] P. J. Torres. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a krasnoselskii fixed point theorem. *Journal of Differential Equations*, 190(2) :643–662, 2003.
- [21] X. Zhang, L. Wang, and Q. Sun. Existence of positive solutions for a class of nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions and a parameter. *Appl. Math. Comput.*, 226 :708–718, 2014.
- [22] Z. Zhang and J. Wang. On existence and multiplicity of positive solutions to periodic boundary value problems for singular nonlinear second order differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 281(1) :99–107, 2003.