



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف

Université Chadli Bendjedid – El Tarf

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

**Mesure périodique pour l'équation stochastique d'un gaz visqueux
barotropique dans un domaine discrétisé**

Présenté par:

Khemis Randa

Devant le Jury :

Dr. Grabsia Imen	MCB	Univ. Chadli Bendjedid El-Tarf	Présidente
Dr. Rym Benseghir	MCA	Univ. Chadli Bendjedid El-Tarf	Rapporteur
Dr. Grine Razika	MCB	Univ. Chadli Bendjedid El-Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2022-2023

À Mes Parents

“ À mes parents, Qui ont Eu Foi En Moi ”

“ À mon mari Azeb Issam, Qui m'a offert son soutien ”

“ À mes enfants, Malak, Roukaya et Mohammed ”

“ À mon professeur et mon encadreur, Madame Rym Benseghir ”

Résumé

L'équation stochastique d'un gaz visqueux barotropique en une dimension est considérée. L'application de la formule d'Ito à une fonctionnelle convenablement choisie nous permet d'étudier le comportement de la solution à savoir l'obtention de l'estimation de l'énergie. Cette estimation ne nous permet pas de démontrer la stabilité du système. Pour cette raison, nous passons à étudier la stabilité d'un système d'équations périodiques approchées. Plus précisément, nous démontrons l'existence d'une mesure périodique pour un système discrétisé avec une régularisation de la densité. L'étude se base sur des résultats du théorème de Khas'minskii [15] qui consistent à la construction de la solution des équations différentielles stochastiques ainsi que la démonstration d'une solution stationnaire périodique.

Abstract

We consider the stochastic equation of a viscous barotropic gas in one dimension. By applying Ito's formula to a suitably chosen functional, we can study the solution's behavior and obtain an energy estimate. However, this estimate alone cannot prove the stability of the system. To address this, we study an approximate periodic equations and prove the existence of a periodic measure for a discretized problem with the regularization of the density. This study is based on Khas'minskii's theorem [15], which allows us to prove the existence and uniqueness of a solution for stochastic differential equations and a periodic stationary solution.

ملخص

تعتبر المعادلة العشوائية للغاز اللزج الباروتروبي في بعد واحد. بتطبيق صيغة Ito على دالة تم اختيارها بشكل مناسب يسمح لنا بدراسة سلوك الحل لهذه المعادلة العشوائية أي الحصول على تقدير للطاقة.

هذا التقدير لا يُظهر استقرار النظام. لهذا السبب، فإننا نمر لدراسة ثبات نظام تقريبي من المعادلات الدورية.

بتعبير أدق ، نثبت وجود مقياس دوري لنظام تقديري مع تنظيم الكثافة. الدراسة تطبق استناداً إلى نتائج نظرية

Khas'minski [15] التي تتكون من بناء و انشاء حل للمعادلات

التفاضلية العشوائية كذلك من إثبات وجود مقياس ثابت دوري.



Table des matières

1	Introduction au calcul stochastique	9
1.1	Calcul stochastique dans \mathbb{R}^n	9
1.1.1	Quelques notions générales	9
1.1.2	Equations différentielles stochastiques dans \mathbb{R}^n	11
1.1.3	Stabilité des équations différentielles stochastiques dans \mathbb{R}^n	13
1.2	Equations différentielles stochastiques dans un espace de Hilbert	22
1.2.1	Equations différentielles stochastiques dans un espace de Hilbert	22
1.2.2	Stabilité des équations différentielles stochastiques dans un espace de Hilbert	24
2	Equation stochastique du mouvement d'un gaz visqueux barotropique en une dimension	27
2.1	Equation déterministe du mouvement d'un gaz visqueux barotropique en une dimension spatiale	27
2.1.1	Equation déterministe en coordonnées eulériennes . .	27
2.1.2	Equation déterministe en coordonnées lagrangiennes .	28
2.2	Equations stochastique d'un gaz visquex barotropique en une dimension en coordonnées eulériennes et lagrangiennes . . .	29
2.3	Comportement de la solution (estimation de l'énergie)	30
2.4	Problème approché de l'équation d'un gaz visquex barotropique en une dimension	35

2.4.1	Discrétisation	35
2.4.2	Régularisation de la densité	37
3	Solution périodique de l'équation d'un gaz visquex barotopique en une dimension	41
3.1	Problème périodique	41
3.2	Existence et unicité de la solution	42
3.3	Existence d'une solution stationnaire périodique (mesure périodique)	49
4	Perspectives	53

Introduction

Dans le vaste domaine de la théorie des probabilités, le calcul stochastique se distingue comme un outil d'une puissance exceptionnelle. Ces dernières années, la recherche sur les équations stochastiques a mis en avant un thème central : la mesure invariante. L'existence et l'unicité de cette mesure ont été explorées par de nombreux auteurs dans des contextes variés. Des travaux notables dans ce domaine incluent ceux de Da Prato et Zabczyk [8], Da Prato [7], ainsi que Prévot et Röckner [25], qui ont grandement influencé la recherche. De même, l'équation de Navier-Stokes stochastique a inspiré plusieurs auteurs dont Cruzeiro [6], Albeverio et Cruzeiro [2], Flandoli [10] et Flandoli et Gozzi [11]. Ils ont ajouté de différentes perturbations stochastiques pour démontrer l'existence et l'unicité de la mesure invariante pour des systèmes stochastiques différents.

L'étude du calcul différentiel stochastique trouve ses racines dans les équations différentielles stochastiques développées par Kiyosi Ito en 1940 (l'un de ses premiers articles importants a été publié en 1942). Le calcul différentiel a fourni un cadre pour la notion d'équation différentielle ordinaire, qui présente de modèles pour caractériser les phénomènes variants dans le temps. Les équations différentielles stochastiques ont alors trouvé de nombreuses applications dans les sciences, la géométrie, la biologie et presque toutes les sciences appliquées.

Dans ce travail, nous nous intéressons à étudier l'existence d'une mesure invariante pour l'équation stochastique d'un gaz visqueux barotropique en une dimension, avec une perturbation stochastique exprimée par un mouvement brownien dans un espace de Hilbert. L'existence et l'unicité de la solution de ce problème, avec une condition initiale, ont été démontrées par Fujita Yashima et Tornatore [26]. L'utilisation de la formule d'Ito en dimension infinie, appliquée à une fonctionnelle bien choisie, nous permet d'analyser le comportement de la solution de ce problème, y compris l'estimation de l'énergie. Cependant, cette estimation ne suffit pas de démontrer, pour le moment, l'existence d'une mesure invariante et la stabilité du problème initial.

Par conséquent, nous étudierons un système d'équations stochastiques qui décrit le mouvement d'un gaz visqueux barotropique dans un domaine unidimensionnel discrétisé, en utilisant un poids régularisant la densité. Ce système a été étudié par R. Benseghir et H. Fujita Yashima [5].

Dans ce mémoire, nous généraliserons ce dernier résultat au cas périodique. Plus précisément, nous étudierons l'existence d'une solution périodique stationnaire qui décrit le mouvement d'un gaz visqueux barotropique.

Pour cela, nous suivrons le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous rappellerons la notion d'équations différentielles stochastiques. Ainsi nous introduisons leur stabilité en rappelant la notion de la mesure invariante et la mesure périodique. En effet, nous commencerons d'abord par introduire les équations stochastiques dans \mathbb{R}^n en rappelant les différents résultats qui nous seront utiles dans notre travail, notamment la formule d'Ito et le théorème de l'existence et de l'unicité de la solution. Ensuite, nous introduirons la notion de la mesure invariante et la mesure périodique en nous appuyant sur le théorème de Khas'minskii [15], qui nous donne leur existence. Enfin, nous définirons les équations stochastiques dans un espace de Hilbert en rappelant la notion de mesure invariante pour un semi-groupe de Markov.

Dans le deuxième chapitre, nous introduirons les équations stochastiques qui décrivent le mouvement d'un gaz visqueux barotropique en une dimension spatiale. Nous commencerons par rappeler le système dans le cas déterministe en coordonnées eulériennes et lagrangiennes. Ensuite, nous allons introduire le problème stochastique en ajoutant une perturbation stochastique au problème déterministe où cette perturbation stochastique présentée par un mouvement brownien définit dans un espace de Hilbert. Ainsi, en appliquant la formule d'Ito à une fonctionnelle convenablement choisie va nous permettre d'analyser le comportement de la solution, à savoir l'obtention de l'estimation de l'énergie pour l'équation stochastique d'un gaz visqueux barotropique. Enfin, en utilisant une discrétisation et une régularisation de la densité, nous étudierons un problème approché à notre problème initial.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéresserons au problème approché plus précisément, un problème discrétisé avec une régularisation de la densité. Nous étudierons ce problème dans le cas périodique en cherchant une solution stationnaire périodique, y compris la démonstration de l'existence d'une mesure périodique et cela pour démontrer la stabilité de ce problème pour se faire, nous commencerons par démontrer l'existence et l'unicité de la solution de ce problème. Ensuite, en appliquant le théorème de Khas'minskii [15], nous démontrerons l'existence d'une solution périodique.

Enfin, nous terminons ce mémoire par donner quelques perspectives de notre travail qui sont originales et qui contribuent à la recherche.

Introduction au calcul stochastique

Mémoire fin d'étude 2023.

1.1 Calcul stochastique dans \mathbb{R}^n

1.1.1 Quelques notions générales

Dans toute la suite, on supposera donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition d'un processus stochastique

Définition 1.1.1 *On appelle processus stochastique toute famille de variables aléatoires $(\xi(t), t \in I)$, définie sur (Ω, \mathcal{F}) à valeurs dans l'espace mesurable (E, Σ) où $I = \mathbb{R}_+$.*

Pour $w \in \Omega$ fixé, l'application $t \rightarrow \xi_w(t)$ de I dans E est appelée trajectoire du processus.

Nous disons qu'un processus stochastique est continu si pour presque tout w , ses trajectoires sont continues, i.e.,

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : t \rightarrow \xi_\omega(t), \quad t \in I \text{ continue}\} = 1.$$

Processus de Markov

Avant de définir le processus de Markov, nous aurons besoin de définir la fonction de transition de Markov.

Définition 1.1.2 Soit $A \in \mathcal{B}$, $x \in \mathbb{R}$ et $0 < s < t < \infty$. On appelle probabilité de transition de Markov toute fonction $p(s, X(s), t, \mathcal{A})$ définie par $\mathbb{P}(X(t) \in A | X(s))$, notée est appelée probabilité si $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifiant

- i) Pour tout $0 \leq s < t < \infty$, $A \in \mathcal{B}$, $p(s, \cdot, t, A)$ est \mathcal{B} -mesurable,
- ii) Pour tout $0 \leq s < t < \infty$, $x \in \mathbb{R}$, $p(s, t, x, \cdot)$ est une probabilité,
- iii) La fonction p satisfait l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$p(s, x, t, \mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x, r, dy) p(r, y, t, \mathcal{A}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq s < r < t.$$

Maintenant, nous introduisons la définition d'un processus de Markov.

Définition 1.1.3 Toute famille $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t^s, X(t), \mathbb{P}_{s,x}), s \in I, s \in \mathbb{R}^n$, vérifiant

- a) (Ω, \mathcal{F}) est un espace mesurable tel que

$$\mathcal{F}_t^s = \sigma X(v), s \leq v \leq t,$$

où \mathcal{F}^s est la tribu qui contient toutes \mathcal{F}_t^s .

- b) Il existe une fonction $X(t, w)$ de $[0, +\infty[\times \Omega$ dans \mathbb{R}^n telle que $X(t, \cdot)$ soit \mathcal{F}_t mesurable pour tout $t \geq s$.

- c) Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$, il existe une probabilité $\mathbb{E}_{(s,x)}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^s)$ telle que

$$\mathbb{P}_{s,x}(X(s, w) = x) = 1,$$

$$\mathbb{P}_{s,x} X(t+h, w) \in \mathcal{B} | \mathcal{F}_t^s = p(t, X(t, w), t+h, \mathcal{B}), \mathbb{P}_{s,x} - p.s.,$$

où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $t \geq s, h \geq 0$. est dite processus de Markov correspondant à la probabilité de transition p .

Processus de diffusion

Maintenant, nous allons définir le processus de diffusion.

Définition 1.1.4 Un processus de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit un processus de diffusion si sa probabilité de transition $p(s, x, t, \mathcal{A})$ satisfait les propriétés

i. Pour tout $\epsilon \geq 0$, et $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} p(t, x, t+h, dy) = 0.$$

ii. Pour tout $\epsilon \geq 0$, et $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$ Il existe deux fonctions $a(t, x)$ et $b(t, x)$ verifiant

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} (y-x)p(t, x, t+h, dy) = a(t, x)$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} (y-x)^2 p(t, x, t+h, dy) = b(t, x),$$

où $a(t, x)$ est appelée fonction de diffusion et $b(t, x)$ est appelée le drift.

1.1.2 Equations différentielles stochastiques dans \mathbb{R}^n

Notions générales

Nous considérons un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et un mouvement brownien $W(t)$, $t \geq 0$, à valeurs dans \mathbb{R}^m , adapté à $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Nous posons, pour $1 \leq p < \infty$,

$$L_W^p[0, T] = \left\{ f \text{ nonanticipatives} : \mathbb{P} \left[\int_0^T |f(t)|^p dt < \infty \right] = 1 \right\},$$

$$M_W^p[0, T] = \left\{ f \in L_W^p[0, T] : \mathbb{E} \left[\int_0^T |f(t)|^p dt \right] < \infty \right\}.$$

Comme il est bien connu, on définit d'abord l'intégrale stochastique d'Ito

$$\int_0^t f(t') dW(t'),$$

pour les fonctions $f \in M_W^2[0, T]$, qui jouit des propriétés fondamentales des intégrales stochastiques (pour les détails, voir par exemple [12]).

Dans ce mémoire, nous considérons les équations stochastiques pour un processus stochastique inconnu $\xi(t)$ ($0 \leq t \leq T$) à valeurs dans \mathbb{R}^n ayant la forme

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t b(\xi(s), s) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s), s) dW(s), \quad (1.1)$$

où $b(x, t) = (b_1(x, t), \dots, b_n(x, t))$, $\sigma(x, t) = (\sigma_{ij}(x, t))_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$ sont mesurables en $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$.

Dans (1.1), $\int_0^t b(\xi(s), s)ds$ est l'intégrale dans le sens usuel, tandis que $\int_0^t \sigma(\xi(s), s)dW(s)$ est l'intégrale stochastique d'Ito. Il est clair que, pour que l'égalité (1.1) soit bien définie, ces intégrales doivent être bien définies et donc on exige normalement que $b(\xi(t), t) \in L_W^1[0, T]$ et $\sigma(\xi(t), t) \in L_W^2[0, T]$.

Or, l'équation stochastique (1.1) pourrait avoir la forme différentielle

$$d\xi(t) = b(\xi(t), t)dt + \sigma(\xi(t), t)dW(t), \quad (1.2)$$

$$\xi(0) = \xi_0. \quad (1.3)$$

Formule d'Ito

L'égalité dite *formule d'Ito* est un des outils les plus fréquemment utilisés pour l'étude des équations stochastiques. En effet, nous la citons dans le résultat suivant pour un processus stochastique ayant la forme

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t b(t')dt' + \int_0^t \sigma(t')dW(t'), \quad (1.4)$$

où $b = (b_1, \dots, b_n) \in L_W^1[0, T]$ et $\sigma = (\sigma_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \in L_W^2[0, T]$.

Théorème 1.1.5 [12] *Soit $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ un processus stochastique ayant la forme (1.4). Si $u(x, t)$ est une fonction continue dans $\mathbb{R}^n \times [0, \infty[$ admettant aussi les dérivées continues $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, alors on a*

$$\begin{aligned} u(\xi(t), t) &= u(\xi(t_0), t_0) + \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial u}{\partial t}(\xi(t'), t') + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(\xi(t'), t')b_i(t') \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\xi(t'), t')\sigma_{ik}(t')\sigma_{jk}(t') \right] dt' \\ &\quad + \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(\xi(t'), t')\sigma_{ik}(t')dW_k(t'). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Pour la démonstration du théorème, voir par exemple [12].

Existence et unicité de la solution

En ce qui concerne l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.1) (ou du problème (1.2)-(1.3)), le théorème fondamental est celui d'existence et d'unicité de la solution sous la condition que les coefficients sont lipschitziens. Nous le citons dans la forme suivante.

Théorème 1.1.6 [12] *Supposons que $b(x, t) = (b_1(x, t), \dots, b_n(x, t))$ et $\sigma(x, t) = (\sigma_{ij}(x, t))_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$ sont mesurables en $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ et vérifient les inégalités*

$$\begin{aligned} |b(x, t) - b(\bar{x}, t)| &\leq K_1|x - \bar{x}|, & |\sigma(x, t) - \sigma(\bar{x}, t)| &\leq K_1|x - \bar{x}|, \\ |b(x, t)| &\leq K_2(1 + |x|), & |\sigma(x, t)| &\leq K_2(1 + |x|), \end{aligned}$$

pour tout $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, où K_1 et K_2 sont deux constantes. Soit ξ_0 une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n telle que $\mathbb{E}|\xi_0|^2 < \infty$ et indépendante de la tribu $\mathcal{F}(W(t))$, $0 \leq t \leq T$ engendrée par les trajectoires du mouvement brownien $W(t)$, $0 \leq t \leq T$, à valeurs dans \mathbb{R}^m . Alors, il existe une solution $\xi(t)$ et une seule de l'équation (1.1) (c'est-à-dire, du problème (1.2)-(1.3)) dans $M_W^2[0, T]$.

Notons que l'unicité de la solution est comprise au sens des trajectoires, c'est à dire, si $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ sont deux solutions de l'équation (1.1) (ou du problème (1.2)-(1.3)), alors on a

$$\mathbb{P}(\{\xi_1(t) = \xi_2(t) \text{ pour tout } t \in [0, T]\}) = 1.$$

Pour la démonstration du théorème 1.1.6, voir par exemple [12].

1.1.3 Stabilité des équations différentielles stochastiques dans \mathbb{R}^n

Solution stationnaire et mesure invariante

Considérons l'équation stochastique

$$d\xi(t) = b(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dW, \quad (1.6)$$

pour un processus stochastique inconnu $\xi(t)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n . Dans (1.6) $b(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont des fonctions définies sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n et dans $\mathbb{R}^{n \times m}$ respectivement (ici nous désignons par $\mathbb{R}^{n \times m}$ l'espace des matrices $n \times m$), tandis que $W = W(t)$ est le mouvement brownien dans \mathbb{R}^m .

Définition 1.1.7 ^{21W} Si une mesure de probabilité $\bar{\mu}$ définie sur \mathbb{R}^n jouit de la propriété suivante :

Si une variable aléatoire ξ_0 à valeurs dans \mathbb{R}^n a la mesure de probabilité $\bar{\mu}$ et si la solution $\xi(t)$ de l'équation (1.6) avec la condition initiale $\xi(0) = \xi_0$ a la même mesure de probabilité $\bar{\mu}$ sur \mathbb{R}^n , c'est-à-dire, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\bar{\mu}(\xi(t) \in B) = \bar{\mu}(\{\xi_0 \in B\}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

alors il est légitime d'appeler $\bar{\mu}$ mesure invariante pour l'équation (1.6).

Comme nous allons utiliser le théorème de Khas'minskii[14] pour l'existence d'une mesure invariante, nous formulons la définition d'une mesure invariante selon la terminologie de Khas'minskii (voir [15]).

Définition 1.1.8 Un processus stochastique $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $-\infty < t < +\infty$, à valeurs dans \mathbb{R}^n est dit stationnaire si, pour chaque suite finie de nombres $\{t_1, \dots, t_k\}$, la distribution des variables aléatoires $\xi(t_1 + h), \dots, \xi(t_k + h)$ est indépendante de h .

Remarque 1.1.1 La solution stationnaire de l'équation (1.6), toujours selon la terminologie de [15], est le processus stochastique $\xi(t)$ qui vérifie (1.6) presque sûrement. La mesure invariante pour l'équation (1.6) est la mesure de probabilité induite par les variables aléatoires $\xi(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) quand $\xi(t)$ est la solution stationnaire.

Existence d'une mesure invariante

Nous allons d'abord donner une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution stationnaire (mesure invariante).

Condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution stationnaire (mesure invariante)

: Enonçons un résultat qui nous donne les conditions nécessaires et suffisantes sur les fonctions de probabilité de transition d'un processus de Markov stationnaire.

Théorème 1.1.9 [15] Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un processus de Markov stationnaire de fonction de transition $P(x, t, A)$ de Feller (continue) et stochastiquement continue est que, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P(x, t, \bar{U}_R) dt = 0, \quad (1.7)$$

où $U_R = x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R$ où $R \in \mathbb{R}_+$ et $\bar{U}_R = |x| > R$.

Théorème de Khas'minskii pour l'existence d'une solution stationnaire (mesure invariante)

Considérons l'équation stochastique (1.6). Le théorème fondamental pour l'existence d'une mesure invariante pour une équation stochastique du type (1.6) est celui de Khas'minskii ([15], Chap. III, théorème 5.1), que nous citons ci-dessous.

Théorème 1.1.10 [15] *On suppose qu'il existe un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que l'équation (1.6) avec la condition initiale $\xi(0) = x_0$ admet une solution $\xi(t)$ définie sur tout l'intervalle $[0, \infty[$, et que, pour tout $R > 0$, il existe une constante K_R telle que*

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K_R|x - y|, \quad \text{si } |x| \leq R, |y| \leq R, \quad (1.8)$$

$$|b(x)| + |\sigma(x)| \leq K_R(1 + |x|), \quad \text{si } |x| \leq R, \quad (1.9)$$

Supposons qu'il existe une fonction $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$V(x) \geq 0, \quad (1.10)$$

$$\sup_{|x|>R} LV(x) \rightarrow -\infty, \quad \text{pour } R \rightarrow +\infty, \quad (1.11)$$

où

$$L = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.12)$$

Alors la solution de l'équation (1.6) est un processus de Markov stationnaire.

Notons qu'un processus stochastique $\xi(t)$, $t \geq 0$, défini dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ est appelé processus de Markov s'il vérifie la propriété de Markov, i.e., pour tout $A \in \mathcal{B}$, $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{P}\{\xi(t) \in A | \mathcal{N}_s\} = \mathbb{P}\{\xi(t) \in A | \xi(s, \omega)\}, \quad \text{p.s.},$$

où \mathcal{N}_s est la σ -algèbre engendrée par les événements ayant la forme

$$\{\xi(u) \in A\}, \quad u \leq s, A \in \mathcal{B}.$$

Comme les raisonnements de la démonstration du théorème 1.1.10 vont jouer un rôle important dans l'étude de nos problèmes (Chapitre 3 et 4), nous reproduisons ci-dessous la démonstration illustrée dans [15].

Pour la démonstration du théorème 1.1.10, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1.1 Soient $\xi(u)$ un processus satisfaisant l'équation (1.6) sur $[s, T]$, $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$, U un domaine borné dans \mathbb{R}^n , $\tau_U = \inf\{u : \xi(u) \notin U\}$ et

$$\tau_U(t) = \min(\tau_U, t). \quad (1.13)$$

Supposons que

$$\mathbb{P}\{\xi(s) \in U\} = 1, \quad (1.14)$$

alors on a

$$\mathbb{E}(V(\xi(\tau_U(t))) - V(\xi(s))) = \mathbb{E} \int_s^{\tau_U(t)} LV(\xi(u)) du.$$

Pour la démonstration, voir [15].

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1.10 Notons $\xi^y(t)$, $t \geq 0$, la solution $\xi(t)$ de l'équation (1.6) avec la condition $\xi(0) = y$.

Supposons que $y \in U_q$ où $U_q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < q\}$. Comme $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$, d'après le lemme 1.1.1, on a

$$\mathbb{E}(V(\xi^y(\tau_q(t))) - V(y)) = \mathbb{E} \int_0^{\tau_q(t)} LV(\xi^y(u)) du, \quad (1.15)$$

où $\tau_q = \inf\{u : \xi(u) \notin U_q\}$.

Posons

$$A_R = - \sup_{|x| > R} LV(x),$$

alors la condition (1.11) nous donne

$$LV(\xi^y(u)) \leq -\chi_{\{|\xi^y(u)| > R\}}(\omega) A_R + \sup_{y \in \mathbb{R}^n} LV(y), \quad (1.16)$$

où χ est la fonction indicatrice.

En intégrant $\chi_{\{|\xi^y(u)| > R\}}(\omega) A_R$ de 0 à $\tau_q(t)$ et en appliquant l'espérance mathématique, on peut déduire de l'inégalité (1.16) que

$$\begin{aligned} A_R \mathbb{E} \int_0^{\tau_q(t)} \chi_{\{|\xi^y(u)| > R\}}(\omega) du &\leq -\mathbb{E} \int_0^{\tau_q(t)} LV(\xi^y(u)) du \\ &+ \sup_{y \in \mathbb{R}^n} LV(y) \int_0^{\tau_q(t)} du. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Substituons (1.15) dans l'inégalité (1.17), alors on obtient

$$A_R \mathbb{E} \int_0^{\tau_q(t)} \chi_{\{|\xi^y(u)| > R\}}(\omega) du \leq -\mathbb{E}(V(\xi^y(\tau_q(t)))) + V(y) \quad (1.18)$$

$$+ \sup_{y \in \mathbb{R}^n} LV(y) \int_0^{\tau_q(t)} du.$$

D'après la condition (1.10), on peut trouver deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$A_R \mathbb{E} \int_0^{\tau_q(t)} \chi_{\{|\xi^y(u)| > R\}}(\omega) du \leq c_1 t + c_2. \quad (1.19)$$

Puisque $\xi^y(t)$ est défini pour tout $t \geq 0$, on a $\tau_q \rightarrow t$ quand $q \rightarrow \infty$ et donc en passant à la limite dans (1.19), on obtient

$$\frac{1}{t} \int_0^t P(x, u, \bar{U}_R) du < \frac{c_3}{A_R}. \quad (1.20)$$

En tenant compte de (1.11), ceci nous permet d'utiliser une version du théorème 2.1 du chapitre III de [15] où l'on utilise uniquement la suffisance et en considérant dans (1.20) la lim au lieu de la lim inf. D'où l'existence d'un processus de Markov stationnaire pour l'équation (1.6). \square

Solution stationnaire et mesure périodiques

Dans cette section, nous allons introduire la notion d'un processus périodique qui nous amène à la définition d'une mesure périodique.

Définissons d'abord les processus stochastiques périodiques.

Définition 1.1.11 *Soit T un nombre réel strictement positif. Un processus stochastique $\xi(t)$, $-\infty < t < +\infty$, à valeurs dans \mathbb{R}^n est dit périodique de période T (ou plus brièvement T -périodique), si, pour chaque suite de nombres finis t_1, \dots, t_q , la mesure de probabilité induite par la variable aléatoire $(\xi(t_1 + kT), \dots, \xi(t_q + kT))$ (à valeurs dans \mathbb{R}^q) est indépendante de $k \in \mathbb{Z}$.*

Dans le cas où $\xi(t)$ est un processus de Markov, il suffit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la mesure induite par $\xi(t+kT)$ soit indépendante de $k \in \mathbb{Z}$. Plus précisément, on peut affirmer la propriété suivante.

Remarque 1.1.2 *Un processus de Markov $\xi(t)$ de fonction de transition P est T -périodique, si et seulement si P est T -périodique et la mesure de probabilité induite $P_s(A) = \mathbb{P}(\{\xi(s) \in A\})$ ($A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$) vérifie la relation*

$$P_s(A) = \int_{\mathbb{R}^n} P_s(dx)P(s, x, s + T, A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (1.21)$$

Considérons maintenant l'équation stochastique

$$d\xi(t) = b(t, \xi(t))dt + \sigma(t, \xi(t))dW, \quad (1.22)$$

où $\xi(t)$ est un processus stochastique (inconnu) à valeurs dans \mathbb{R}^n , $b(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot, \cdot)$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^n et dans $\mathbb{R}^{n \times m}$ respectivement et périodiques en t de période T , tandis que $W = W(t)$ est le mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^m (pour que nous puissions définir les solutions périodiques de (1.22), nous laissons $W = W(t)$ pour le moment sans préciser son instant initial).

Pour définir une solution périodique d'une équation stochastique, plutôt que la définir directement, il nous est commode de la définir comme processus de Markov périodique. En effet, comme on connaît bien (voir [9], [14] ou ...), la solution d'une équation stochastique est, sous des conditions assez générales, un processus de Markov. En particulier, la probabilité

$$P(s, x, t, A) = \mathbb{P}(\{\xi^{s,x}(t) \in A\}) \quad (s, t \in \mathbb{R}, s \leq t, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)), \quad (1.23)$$

où $\xi^{s,x}(t)$ est la solution de l'équation

$$\xi^{s,x}(t) = x + \int_s^t b(r, \xi^{s,x}(r))dr + \sigma(r, \xi^{s,x}(r))dW(r), \quad (1.24)$$

est, sous des conditions suffisamment générales, un processus de Markov ayant la propriété de Feller (voir [9], [14] ou ...). Donc nous pouvons définir une solution périodique de l'équation (1.22) comme un processus de Markov périodique ayant la fonction de transition $P(s, x, t, A)$ définie par (1.23)-(1.24).

Existence d'une solution stationnaire périodique

Condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution stationnaire périodique

Dans cette section nous allons rappeler le théorème d'existence d'une solution périodique d'une équation stochastique dans \mathbb{R}^n et sa démonstration. Pour plus de détails, voir Khas'minskii [15].

Tout d'abord, nous commençons par rappeler un résultat de Khas'minskii [15] qui fournit une condition suffisante sur une fonction de transition périodique pour l'existence d'un processus de Markov périodique.

Proposition 1.1.12 *Soit $P(s, x, t, A)$ une fonction de transition T -périodique ayant la propriété de Feller. Une condition suffisante pour l'existence d'un processus de Markov T -périodique à valeurs dans \mathbb{R}^n de fonction de transition $P(s, x, t, A)$ est qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(s_0, x_0, s_0 + kT, \bar{U}_R) = 0, \quad (1.25)$$

où $\bar{U}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > R\}$ avec $R \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous rappelons sa démonstration toujours suivant [15].

Remarque 1.1.3 *La condition*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(s_0, x_0, s_0 + kT, \bar{U}_R) = 0,$$

peut être remplacée par la condition

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau P(s, x, s + u, \bar{U}_R) du = 0, \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.26)$$

à condition que la fonction de transition $P(s, x, t, A)$ satisfasse à l'hypothèse

$$\alpha(R) = \sup_{x \in U_{\beta(R)}, 0 < s, t < T} P(s, x, s + t, \bar{U}_R) \rightarrow 0, \quad \text{quand } R \rightarrow +\infty, \quad (1.27)$$

pour une certaine fonction β de R vérifiant $\beta(R) \rightarrow +\infty$ quand $R \rightarrow +\infty$.

Théorème de Khas'minskii pour l'existence d'une solution périodique

Maintenant, on va énoncer le résultat de Khas'minskii qui donne l'existence d'une solution périodique pour une équation stochastique.

Théorème 1.1.13 [15] *Considérons l'équation stochastique (1.22). Supposons que les coefficients de (1.22) sont T -périodiques en t et vérifient les conditions*

$$\begin{cases} |b(s, x) - b(s, y)| + |\sigma(s, x) - \sigma(s, y)| \leq B_R |x - y|, & \text{dans }]-\infty, +\infty[\times U_R \\ |b(s, x)| + |\sigma(s, x)| \leq B_R(1 + |x|), & \text{dans }]-\infty, +\infty[\times U_R \end{cases} \quad (1.28)$$

où B_R est une constante dépendante de R .

Supposons qu'il existe une fonction V définie sur $]-\infty, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ telle que $V \in C^{1,2}$, la classe des fonctions définies sur $]-\infty, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ continûment différentiables en $t \in]-\infty, +\infty[$ et deux fois continûment différentiables en $x \in \mathbb{R}^n$. De plus, supposons que V est T -périodique en $t \in]-\infty, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, vérifiant les conditions

$$V(t, x) \geq 0, \quad \text{pour tout } (t, x) \in]-\infty, +\infty[\times \mathbb{R}^n, \quad (1.29)$$

$$\sup_{|x| > R, -\infty < t < +\infty} LV(t, x) \rightarrow -\infty, \quad \text{quand } R \rightarrow \infty, \quad (1.30)$$

où

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.31)$$

et

$$\inf_{|x| > R} V(t, x) \rightarrow \infty, \quad \text{quand } R \rightarrow \infty, \text{ pour tout } t \in]-\infty, +\infty[. \quad (1.32)$$

Alors, il existe une solution de l'équation (1.22) qui est un processus de Markov T -périodique.

Pour la démonstration du théorème 1.1.13, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1.2 Soient $\xi(u)$ un processus satisfaisant l'équation (1.22) sur $[s, T]$, $V \in C^{1,2}$, U un domaine borné dans \mathbb{R}^n , $\tau_U = \inf\{u : \xi(u) \notin U\}$ et

$$\tau_U(t) = \min(\tau_U, t). \quad (1.33)$$

Supposons que

$$\mathbb{P}\{\xi(s) \in U\} = 1, \quad (1.34)$$

alors on a

$$\mathbb{E}(V(\tau_U(t), \xi(\tau_U(t))) - V(s, \xi(s))) = \mathbb{E} \int_s^{\tau_U(t)} LV(u, \xi(u)) du.$$

Pour la démonstration, voir [15].

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1.13

La démonstration de ce théorème s'appuie sur la remarque 1.1.3. En effet, pour chaque $s \in]-\infty, +\infty[$, on considère $\xi^{s,x}(t)$ une solution du système d'équations (1.22) définie pour tout $t > s$ avec la condition $\xi^{s,x}(s) = x$, et V une fonction vérifiant les conditions (1.29) et (1.30).

D'après le lemme 1.1.2, on a

$$\mathbb{E}V(\tau_q(t), \xi^{s,x}(\tau_q(t))) - V(s, x) = \mathbb{E} \int_s^{\tau_q(t)} LV(u, \xi^{s,x}(u)) du, \quad (1.35)$$

où $\tau_q(t) = \min(\tau_q, t)$ avec $\tau_q = \inf\{u : \xi^{s,x}(u) \notin U_q\}$ où $U_q = \{x : |x| < q\}$.

Posons

$$A_R = - \sup_{|x| > R, s \leq t < +\infty} LV(t, x).$$

Comme on a

$$LV(u, \xi^{s,x}(u)) \leq -\chi_{\{|\xi^{s,x}(u)| > R\}}(\omega) A_R + \sup_{|x| > R, s \leq t < +\infty} LV(t, x), \quad (1.36)$$

en intégrant de s à $\tau_q(t)$ et en appliquant l'espérance mathématique à l'inégalité (1.36), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_s^{\tau_q(t)} LV(u, \xi^{s,x}(u)) du &\leq -A_R \mathbb{E} \int_s^{\tau_q(t)} \chi_{\{|\xi^{s,x}(u)| > R\}}(\omega) du \\ &+ \sup_{|x| > R, s \leq t < +\infty} LV(t, x) \mathbb{E} \int_s^{\tau_q(t)} du, \end{aligned} \quad (1.37)$$

ainsi, on trouve deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$A_R \int_s^{\tau_q(t)} \mathbb{E} (\chi_{\{|\xi^{s,x}(u)|>R\}}(\omega)) du \leq c_1 t + c_2. \quad (1.38)$$

Puisque $\xi^{s,x}(t)$ est défini pour tout $t \geq s$, comme $\tau_q \rightarrow t$ quand $q \rightarrow +\infty$, par passage à la limite de (1.38), on obtient

$$\frac{1}{t} \int_0^t P(s, x, s+u, \bar{U}_R) du < \frac{c_3}{A_R}. \quad (1.39)$$

Il nous reste donc à démontrer (1.27). Pour cela, on suppose que la fonction V , en plus des conditions (1.30) et (1.32), vérifie aussi la condition (1.29). Ainsi, il s'ensuit d'après les hypothèses du théorème que

$$L(V(t, x) - kt) \leq 0, \quad \text{pour tout } t \in]-\infty, +\infty[, \quad (1.40)$$

où k est une constante suffisamment grande.

En utilisant (1.40) et le lemme 1.1.2, on obtient

$$\mathbb{E}V(t, \xi^{s,x}(t)) \leq k(t-s) + V(s, x), \quad \text{pour tout } t \geq s.$$

D'après l'inégalité de Cebycev, on obtient

$$P(s, x, t, \bar{U}_R) \leq \frac{k(t-s) + V(s, x)}{\inf_{|x|>R} V(t, x)}, \quad \text{pour tout } t \geq s.$$

On remarque que la condition (1.27) sera satisfaite si la fonction $\beta(R)$ est choisie telle que

$$\frac{\sup_{|x|<\beta(R)} V}{\inf_{|x|>R} V} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad \text{pour tout } t \geq s.$$

Ceci est possible d'après la condition (1.32).

□

1.2 Equations différentielles stochastiques dans un espace de Hilbert

1.2.1 Equations différentielles stochastiques dans un espace de Hilbert

Soit \mathbf{H} un espace de Hilbert réel séparable. Nous considérons l'équation

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t b(\xi(s), s) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s), s) dW(s), \quad (1.41)$$

ou, dans l'écriture "différentielle" conventionnelle,

$$d\xi(t) = b(\xi(t), t)dt + \sigma(\xi(t), t)dW(t), \quad (1.42)$$

$$\xi(0) = \xi_0, \quad (1.43)$$

pour un processus stochastique inconnu $\xi(t)$ défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbf{H} . Dans (1.41) (ou (1.42)), $W(t)$ est un mouvement brownien à valeurs dans \mathbf{H} .

Ici, nous considérons le mouvement brownien $W(t)$ ayant la forme

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k W^k(t), \quad (1.44)$$

où λ_k , $k = 1, 2, \dots$, sont des nombres réels positifs, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une base orthonormale de \mathbf{H} et $W^k(t)$, $t \in [0, T]$, $k = 1, 2, \dots$ sont des mouvements browniens canoniques à valeurs réelles indépendants définis sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour plus de détails, on peut consulter [8] et [25].

Dans (1.41), l'intégrale $\int_0^t b(\xi(s), s)ds$ doit être considérée au sens de Bochner, tandis que le terme $\int_0^t \sigma(\xi(s), s)dW(s)$ est l'intégrale stochastique dans l'espace de Hilbert \mathbf{H} . Cette dernière a été introduite premièrement par Kunita [20] et a été étudiée par divers auteurs (voir [22], [24], etc...). Pour l'étude des équations stochastiques dans un espace de Hilbert, une présentation plus récente des définitions et des propriétés de l'intégrale de Bochner et de l'intégrale stochastique en dimension infinie est décrite dans [8] et [25].

Formule d'Ito

Il existe différentes manières de définir la formule d'Ito en dimension infinie. Dans ce travail, nous allons utiliser celle donnée par Pardoux [24].

Soient \mathbf{E} un espace de Banach, \mathbf{H} et \mathbf{K} deux espaces de Hilbert séparables et $\Phi : \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K}$ une application admettant les dérivées (au sens de Fréchet) $\Phi^{1,0} = \frac{\partial \Phi(e,h)}{\partial e}$, $\Phi^{0,1} = \frac{\partial \Phi(e,h)}{\partial h}$ et $\Phi^{0,2} = \frac{\partial^2 \Phi(e,h)}{\partial h^2} = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial \Phi(e,h)}{\partial h} \right)$ en tout point $(e, h) \in \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Notons que

$$\Phi^{1,0}(e, h) \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{K}),$$

$$\Phi^{0,1}(e, h) \in \mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{K}),$$

$$\Phi^{0,2}(e, h) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^1(\mathbf{H}', \mathbf{H}); \mathbf{K}),$$

où $\mathcal{L}(X, Y)$ est l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y , tandis que $\mathcal{L}^1(X, Y)$ est l'espace des opérateurs nucléaires de X dans Y (voir [25]). Nous désignons également par $\mathcal{M}_{loc}^2(X)$ l'espace de toutes les martingales à valeurs dans X continues et de carré localement intégrables.

Théorème 1.2.1 [24] *On suppose que $\Phi : \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K}$ vérifient les conditions :*

- (i) $\Phi, \Phi^{1,0}, \Phi^{0,1}$ et $\Phi^{0,2}$ sont bornées sur les bornés de $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$,
- (ii) $\Phi, \Phi^{1,0}$ et $\Phi^{0,1}$ sont continues de $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ dans $\mathbf{K}, \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{K})$ et $\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$ respectivement,
- (iii) pour tout $k' \in \mathbf{K}', Q \in \mathcal{L}(\mathbf{H}', \mathbf{H})$, l'application

$$(e, h) \rightarrow (k', \Phi^{0,2}(e, h)Q)$$

est continue de $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ dans \mathbb{R} .

Soient V_t un processus adapté, continu et à variations bornées à valeurs dans \mathbf{E} et $M_t \in \mathcal{M}_{loc}^2(\mathbf{H})$. On a alors la relation

$$\begin{aligned} \Phi(V_t, M_t) &= \Phi(V_0, M_0) + \int_0^t \Phi^{1,0}(V_s, M_s) dV_s \\ &+ \int_0^t \Phi^{0,1}(V_s, M_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi^{0,2}(V_s, M_s) d\langle\langle M \rangle\rangle_s, \end{aligned} \quad (1.45)$$

où $\langle\langle M \rangle\rangle_s$ est le processus à valeurs dans $\mathcal{L}^1(\mathbf{H}', \mathbf{H})$, continu et à variations bornées sur tout intervalle compact de \mathbb{R}^+ (voir [24], théorème 2.8).

Nous renvoyons la démonstration de ce théorème à [24].

1.2.2 Stabilité des équations différentielles stochastiques dans un espace de Hilbert

Mesure invariante pour un semi-groupe de Markov

Même si notre résultat principal ne concerne pas directement les mesures invariantes pour une équation stochastique dans un espace de Hilbert, notre problème est lié d'une manière naturelle à une équation stochastique dans un espace de Hilbert (ou dans un espace de Banach) et à la question d'une mesure invariante pour cette équation. Il nous sera donc fort utile de rappeler la notion de mesure invariante pour une équation stochastique dans un

espace de Hilbert et des résultats concernant ce problème. Dans [7], [25], on trouve une version mieux formulée de la mesure invariante dans un espace de Hilbert, que nous allons suivre. Rappelons que la définition donnée dans [7], [25], de la mesure invariante dans un espace de Hilbert est formulée comme celle d'un semi-groupe.

Désignons par $\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ l'espace des opérateurs linéaires et bornés d'un espace de Banach \mathbf{U} dans un espace de Banach \mathbf{V} et par $C_b(\mathbf{H}) = C_b(\mathbf{H}, \mathbb{R})$ l'espace des applications d'un espace de Banach \mathbf{H} dans \mathbb{R} uniformément continues et bornées muni de la norme $\|\varphi\|_0 = \sup_{x \in \mathbf{H}} |\varphi(x)|$. Nous posons $\mathcal{L}(\mathbf{U}) = \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{U})$. Désignons en outre par $B_b(\mathbf{H}) = B_b(\mathbf{H}, \mathbb{R})$ l'espace de toutes les applications boréliennes de \mathbf{H} dans \mathbb{R} et par $\mathcal{P}(\mathbf{H})$ l'espace de toutes les mesures de probabilité définies sur l'espace mesurable $(\mathbf{H}, \mathcal{B}(\mathbf{H}))$. Ce symbolisme nous permet de formuler une définition de semi-groupe d'opérateurs dans un espace de Banach \mathbf{H} (dans la suite nous considérerons seulement le cas où \mathbf{H} est un espace de Hilbert, mais la définition suivante du semi-groupe peut être formulée sans difficulté pour le cas où \mathbf{H} est un espace de Banach).

Définition 1.2.2 *On appelle semi-groupe de Markov (homogène) toute application $P : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(B_b(\mathbf{H}))$ vérifiant les relations*

(i) $P_0 = Id$ et $P_t P_s = P_{t+s}$ pour tout $s, t \geq 0$ (Id désigne l'application identique),

(ii) pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbf{H}$, il existe une mesure de probabilité $\pi_t(x, \cdot) \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$ telle que

$$P_t \varphi(x) = \int_{\mathbf{H}} \varphi(y) \pi_t(x, dy), \quad \forall \varphi \in B_b(\mathbf{H}),$$

(iii) pour tout $\varphi \in C_b(\mathbf{H})$ (resp. $B_b(\mathbf{H})$) et $x \in \mathbf{H}$, l'application $t \rightarrow P_t \varphi(x)$ est continue (resp. mesurable).

Soit $(P_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de Markov sur \mathbf{H} (dans le sens de la définition 1.2.2). Maintenant on définit la mesure invariante.

Définition 1.2.3 *On appelle mesure invariante pour le semi-groupe de Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ toute mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$ vérifiant la relation*

$$\int_{\mathbf{H}} (P_t \varphi)(x) \mu(dx) = \int_{\mathbf{H}} \varphi(x) \mu(dx), \quad \forall \varphi \in B_b(\mathbf{H}), \quad t \geq 0. \quad (1.46)$$

Existence d'une mesure invariante pour un semi-groupe de Markov

Pour démontrer l'existence d'une mesure invariante pour un semi-groupe markovien d'opérateurs, le théorème de Krylov-Bogoliubov, joint au théorème de Prokhorov, joue le rôle fondamental. Rappelons d'abord le théorème de Prokhorov.

Théorème 1.2.4 [7] *Soit Λ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbf{H})$. Si, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K_ε de \mathbf{H} tel que*

$$\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall \mu \in \Lambda, \quad (1.47)$$

alors il existe une suite $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ d'éléments de Λ et une mesure de probabilité $\bar{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$ telles que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{H}} \varphi(x) \mu_j(dx) = \int_{\mathbf{H}} \varphi(x) \bar{\mu}(dx) \quad \forall \varphi \in C_b(\mathbf{H}). \quad (1.48)$$

Les ensembles vérifiant la condition (1.47) sont souvent dits “*tight*” dans la littérature, tandis que l'ensemble de mesures de probabilités admettant une sous-suite $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ vérifiant (1.48) peut être dit *relativement faiblement compact*.

Pour la démonstration du théorème de Prokhorov, on peut consulter par exemple [7], [14].

Nous citons maintenant le théorème de Krylov-Bogoliubov. Ce théorème a été démontré premièrement dans [19], mais ici pour la commodité de la présentation, nous le citons dans la version donnée dans [7].

Théorème 1.2.5 [7] *Soit P_t un semi groupe de Markov vérifiant la propriété de Feller. Supposons que pour certain $x_0 \in \mathbf{H}$, l'ensemble $(\mu_T)_{T>0}$ défini par*

$$\mu_T(E) = \frac{1}{T} \int_0^T \pi_t(x_0, E) dt, \quad E \in \mathcal{B}(\mathbf{H}), \quad T > 0 \quad (1.49)$$

vérifie l'hypothèse du Théorème 1.2.4. Alors il existe une mesure invariante pour P_t .

Pour la démonstration de ce théorème, voir [7].

Equation stochastique du mouvement d'un gaz visqueux barotro- pique en une dimen- sion

2.1 Equation déterministe du mouvement d'un gaz visqueux barotropique en une dimen- sion spatiale

2.1.1 Equation déterministe en coordonnées eulériennes

Les équations qui décrivent le mouvement d'un gaz visqueux se trouve dans plusieurs ouvrages, dont [21]. Elles sont établies par les lois de la conservation de la masse, de la conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de l'énergie. En suivant essentiellement la formulation de [21], nous considérons le système d'équations

$$\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0, \quad (2.1)$$

$$\varrho(\partial_t v + v\partial_x v) = \mu\partial_x^2 v - h\partial_x \varrho^\gamma + \varrho f. \quad (2.2)$$

Le système d'équations (2.1)-(2.2) peut être envisagé par exemple dans le domaine $D =]0, 1[$ avec les conditions aux limites

$$v = 0 \quad \text{pour } x = 0, \quad x = 1, \quad (2.3)$$

et les conditions initiales

$$\varrho(0, x) = \varrho_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) \quad \text{pour } x \in [0, 1]. \quad (2.4)$$

2.1.2 Equation déterministe en coordonnées lagrangiennes

Comme il est bien connu, lorsqu'il s'agit d'une équation du mouvement d'un gaz en une dimension spatiale, l'utilisation des coordonnées dites lagrangiennes peut être utile. Les coordonnées lagrangiennes (t, x_0) normalement utilisées dans la mécanique des milieux continus utilisent la position initiale x_0 comme coordonnée spatiale, de sorte que les coordonnées lagrangiennes (t, x_0) sont liées aux coordonnées eulériennes (t, x) par les relations

$$\frac{dx(x_0; t)}{dt} = v(t, x(x_0; t)) \quad (2.5)$$

avec les conditions initiales

$$x(x_0; 0) = x_0. \quad (2.6)$$

$$\partial_t \varrho + \varrho^2 \partial_\xi v = 0, \quad (2.7)$$

$$\partial_t v + h \partial_\xi \varrho^\gamma = \mu \partial_\xi (\varrho \partial_\xi v) + f. \quad (2.8)$$

Le système d'équations (2.7)-(2.8) peut être envisagé par exemple dans le domaine $D =]0, 1[$ avec les conditions aux limites

$$v = 0 \quad \text{pour } \xi = 0, \quad \xi = 1, \quad (2.9)$$

et les conditions initiales

$$\varrho(0, \xi) = \varrho_0(\xi), \quad v(0, \xi) = v_0(\xi) \quad \text{pour } \xi \in [0, 1]. \quad (2.10)$$

L'existence et l'unicité de la solution globale du problème (2.7)-(2.10) ont été démontrées par Kazhikhov dans [16] (sur d'autres propriétés de cette équations ont été étudiées dans [18]).

2.2 Equations stochastique d'un gaz visqueux barotropique en une dimension en coordonnées eulériennes et lagrangiennes

Dans la section précédente, nous avons vu la formulation déterministe du mouvement d'un gaz visqueux en une dimension spatiale en coordonnées eulériennes et en coordonnées lagrangiennes massiques. Si nous supposons que le mouvement du gaz est soumis à une perturbation aléatoire, il est naturel de proposer une équation stochastique formulée en ajoutant à l'équation déterministe une perturbation stochastique. Il y a naturellement diverses formulations d'une équation stochastique du mouvement d'un gaz visqueux. Si nous nous limitons aux gaz visqueux barotropique, la première formulation naturelle serait obtenue en ajoutant à (2.2) une perturbation stochastique dH ou en ajoutant à (2.8) une perturbation stochastique dG ; il nous faut rappeler que l'équation (2.2) est exprimé dans les coordonnées eulériennes, tandis que l'équation (2.8) est exprimée dans les coordonnées lagrangiennes. En ajoutant simplement à (2.2) une perturbation stochastique dH , on a le système stochastique

$$\varrho dv = [-\varrho v \partial_x v + \mu \partial_x^2 v - h \partial_x \varrho^\gamma] dt + \varrho dH, \quad (2.11)$$

$$\partial_t \varrho = -\partial_x(\varrho v). \quad (2.12)$$

Nous considérons les équations (2.11)-(2.12) par exemple dans le domaine

$$0 \leq x \leq 1$$

avec les conditions

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (2.13)$$

Dans (2.11), $H = H(t)$ est un processus stochastique que nous devons préciser. Mais avant de le préciser, nous allons faire des remarques générales sur la relation avec l'équation en coordonnées lagrangiennes.

D'une manière analogue, si on ajoute à (2.8) le terme d'une perturbation stochastique dG , on a le système d'équations

$$dv = [\mu \partial_\xi(\varrho \partial_\xi v) - h \partial_\xi \varrho^\gamma] dt + dG, \quad (2.14)$$

$$\partial_t \varrho = -\varrho^2 \partial_\xi v. \quad (2.15)$$

Nous considérons le système (2.14)-(2.15) par exemple dans le domaine

$$0 \leq \xi \leq 1$$

avec les conditions

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (2.16)$$

Nous devons maintenant préciser le processus stochastique $G(t)$. Ainsi, nous allons utiliser le mouvement brownien $G(t) = W(t)$ à valeurs dans l'espace $L^2(0, 1)$ ayant la forme

$$W(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k(\xi) W^{(k)}(t),$$

où λ_k , $k = 1, 2, \dots$ sont des nombres réels positifs, $(e_k)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ est une base orthonormale dans $L^2(0, 1)$ et $W^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, sont des mouvements browniens à valeurs réelles indépendants définis sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Cette caractérisation de ce mouvement brownien dans un espace de Hilbert nous est utile pour des raisons techniques. Rappelons que, comme l'espace $L^2(0, 1)$ est un espace séparable, il existe une base orthonormale dénombrable de $L^2(0, 1)$.

Pour plus de détails, voir par exemple [13] et [26].

2.3 Comportement de la solution (estimation de l'énergie)

L'égalité de l'énergie que l'on peut établir pour la solution du problème (2.17)-(2.18) nous donne le bilan précis de l'énergie entre celle qui entre par la perturbation stochastique et celle qui sort par la dissipation due à la viscosité ainsi que celle accumulée dans la pression. L'égalité de l'énergie dans son expression quantitative est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 2.3.1 *Si (v, ϱ) est une solution du problème*

$$dv = [\mu \partial_\xi (\varrho \partial_\xi v) - h \partial_\xi \varrho^\gamma] dt + dW, \quad (2.17)$$

et les conditions initiales

$$v|_{t=0} = v_0, \quad \varrho|_{t=0} = \varrho_0. \quad (2.18)$$

et si $v_0 \in L^2(0, 1)$ et $\varrho_0^{\gamma-1} \in L^1(0, 1)$, alors on a

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^1 v^2 d\xi \right] + \frac{h}{\gamma-1} \mathbb{E} \left[\int_0^1 \varrho^{\gamma-1} d\xi \right] + \mu \mathbb{E} \left[\int_0^t \int_0^1 \varrho (\partial_\xi v)^2 d\xi ds \right] \quad (2.19)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^1 (v_0)^2 d\xi \right] + \frac{h}{\gamma-1} \mathbb{E} \left[\int_0^1 (\varrho_0)^{\gamma-1} d\xi \right] + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2.$$

Pour démontrer la proposition 2.3.1, nous commençons par le lemme suivant.

Lemme 2.3.1 *Si (v, ϱ) est une solution du problème (2.17)-(2.18), alors on a*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{v^2}{2} d\xi + \frac{h}{\gamma-1} \int_0^1 \varrho^{(\gamma-1)} d\xi - \int_0^1 \frac{v_0^2}{2} d\xi + \frac{h}{\gamma-1} \int_0^1 \varrho_0^{(\gamma-1)} d\xi &= \quad (2.20) \\ &= -\mu \int_0^t \int_0^1 \varrho (\partial_\xi v)^2 d\xi ds + \int_0^t \langle v, dW_s \rangle + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \end{aligned}$$

presque surement.

DÉMONSTRATION On définit la fonctionnelle φ par

$$\varphi(t) = \int_0^1 \frac{v^2}{2} d\xi + \frac{h}{\gamma-1} \int_0^1 \varrho^{(\gamma-1)} d\xi \quad (2.21)$$

et pose

$$v = u + W.$$

D'après la formule d'Ito, on a

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} d\rho + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial W_s} dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 W_s} dW_s^2, \quad (2.22)$$

où $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial W}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial W^2}$ sont des dérivées de Fréchet. On rappelle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(f) &= \int_0^1 v f d\xi, & \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(f) &= h \int_0^1 \varrho^{\gamma-2} f d\xi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial W}(f) &= \int_0^1 v f d\xi, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial W^2}(f)(g) &= \int_0^1 f g d\xi. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (2.17),

$$\partial_t \varrho = -\varrho^2 \partial_\xi v, \quad (2.23)$$

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(\xi) W^{(k)}(t), \quad (2.24)$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial u} du &= \int_0^1 [\mu v \partial_\xi (\varrho \partial_\xi v) - h v \partial_\xi \varrho^\gamma] d\xi ds, & \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} d\varrho &= -h \int_0^1 \varrho^\gamma \partial_\xi v d\xi ds, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial W} dW &= \langle v, dW_s \rangle, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial W^2} (dW, dW) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \lambda_k^2 e_k^2 dx ds = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2.\end{aligned}$$

En substituant ces relations dans (2.22), on obtient

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi(0) &= \int_0^t \int_0^1 [\mu v \partial_\xi (\varrho \partial_\xi v) - h v \partial_\xi \varrho^\gamma] \partial_\xi ds - h \int_0^1 \int_0^t \varrho^\gamma \partial_\xi v d\xi ds + \\ &+ \int_0^t \langle v, dW_s \rangle + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2.\end{aligned}\tag{2.25}$$

On remarque que, en vertu des conditions aux limites

$$v(0) = v(1) = 0\tag{2.26}$$

, on a

$$\int_0^1 (-h v \partial_\xi \varrho^\gamma - h \varrho^\gamma \partial_\xi v) d\xi = \int_0^1 (\partial_\xi (v \varrho^\gamma)) d\xi = 0,$$

ce qui nous permet de déduire (2.20) de (2.25) et de (2.21).

□

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.3.1 En appliquant l'espérance mathématique à (2.20), on obtient (2.19).

□

Même si l'estimation de l'énergie de la solution du système d'équations en coordonnées eulériennes s'obtient d'une manière tout analogue (comme nous l'avons vu, l'équation stochastique en coordonnées eulériennes et celle en coordonnées lagrangiennes ne sont pas équivalentes et donc la traduction directe de l'égalité (2.19) en coordonnées eulériennes ne donne pas l'égalité de l'énergie pour l'équation stochastique en coordonnées eulériennes avec la perturbation en coordonnées eulériennes), nous pensons qu'elle mérite d'être citée, car on peut obtenir directement d'elle une "bonne" estimation de $\partial_x v$. Rappelons le système d'équations

$$\varrho dv = [-\varrho v \partial_x v + \mu \partial_x^2 v - h \partial_x \varrho^\gamma] dt + \varrho dW,\tag{2.27}$$

$$\partial_t \varrho = -\partial_x(\varrho v), \quad (2.28)$$

les conditions aux limites

$$v(0) = v(1) = 0 \quad (2.29)$$

et les conditions initiales

$$v|_{t=0} = v_0, \quad \varrho|_{t=0} = \varrho_0, \quad \varrho_0(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.30)$$

Pour $W = W(t)$ qui figure dans (2.27) nous supposons que

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(x) W^{(k)}(t), \quad (2.31)$$

où $W^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, sont des mouvements browniens à valeurs réelles indépendants et adaptés à un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et

$$e_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi\xi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

La forme de (2.31) est formellement identique à (2.24) si on écrit x au lieu de ξ . Mais comme nous l'avons remarqué dans la section précédente, l'équation en coordonnées lagrangiennes avec (2.24) et l'équation en coordonnées eulériennes avec (2.31) ne sont pas équivalentes.

Proposition 2.3.2 *Soit (v, ϱ) la solution du problème (2.27)-(2.30). Si $\sqrt{\varrho_0}v_0 \in L^2(0, 1)$, $\varrho_0 \in L^\gamma(0, 1)$, alors on a*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_0^1 \varrho \frac{v^2}{2} dx + \frac{h}{\gamma-1} \int_0^1 \varrho^\gamma dx \right) + \mu \mathbb{E} \int_0^1 \|\partial_x v\|_{L^2}^2 ds \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^1 \varrho_0 \frac{v_0^2}{2} dx + \frac{h}{\gamma-1} \int_0^1 \varrho_0^\gamma dx \right) + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^1 \varrho e_k^2 dx ds. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Corollaire 2.3.3 *Etant fixées les données initiales (v_0, ϱ_0) telles que $\sqrt{\varrho_0}v_0 \in L^2(0, 1)$, $\varrho_0 \in L^\gamma(0, 1)$, il existe une constante C telle que*

$$\frac{1}{T} \mathbb{E} \int_0^T \|\partial_x v\|_{L^2(0,1)}^2 dt \leq C. \quad (2.34)$$

DÉMONSTRATION Une fois la proposition 2.3.2 étant démontrée, pour démontrer (2.34), il suffit de rappeler les relations

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} e_k^2(x) = \sup_{0 \leq x \leq 1} (\sqrt{2} \sin(k\pi x))^2 = 2,$$

$$\int_0^1 \varrho e_k^2 dx \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} e_k^2(x) \int_0^1 \varrho dx = 2.$$

□

Pour démontrer la proposition 2.3.2, nous commençons par établir l'égalité suivante.

Lemme 2.3.2 *On a*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varrho \frac{v^2(t)}{2} dx + \frac{1}{\gamma-1} h \int_0^1 \varrho^\gamma(t) dx - \int_0^1 \varrho \frac{v^2(0)}{2} dx + \frac{1}{\gamma-1} h \int_0^1 \varrho^\gamma(0) dx &= \\ &= -\mu \int_0^t \int_0^1 (\partial_x v)^2 dx ds + \int_0^t \langle \varrho v, dW_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^1 \varrho e_k^2 dx ds \end{aligned} \quad (2.35)$$

presque surement.

DÉMONSTRATION On considère la fonctionnelle $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ définie par

$$\varphi_1 = \int_0^1 \varrho \frac{v^2}{2} dx + \frac{1}{\gamma-1} h \int_0^1 \varrho^\gamma dx. \quad (2.36)$$

Si on pose

$$u = v - W,$$

en appliquant la formule d'Ito à φ_1 , on a

$$\varphi_1(t) - \varphi_1(0) = \int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} d\varrho + \int_0^t \frac{\partial \varphi_1}{\partial W_s} dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial^2 W_s} dW_s^2. \quad (2.37)$$

Or, d'après (2.27) et (2.28), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du &= \int_0^1 [-\varrho v^2 \partial_x v + \mu v \partial_x^2 v - h v \partial_x \varrho^\gamma] ds dx, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} d\varrho &= \int_0^1 [-\frac{v^3}{2} \partial_x \varrho - \varrho \frac{v^2}{2} \partial_x v] dx ds - \frac{\gamma}{\gamma-1} h \int_0^1 (v \varrho^{\gamma-1} \partial_x \varrho + \varrho^{\gamma-1} \varrho \partial_x v) dx ds, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial W} dW = \langle \varrho v, dW_s \rangle,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial W^2} (dW, dW) = \int_0^1 \varrho \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 e_k^2 dx ds.$$

En substituant ces relations dans (2.37), on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) - \varphi_1(0) &= \int_0^t \int_0^1 [-\varrho v^2 \partial_x v + \mu v \partial_x^2 v - h v \partial_x \varrho^\gamma] dx ds + \quad (2.38) \\ &+ \int_0^t \int_0^1 [-\frac{v^3}{2} \partial_x \varrho - \varrho \frac{v^2}{2} \partial_x v - h \frac{\gamma}{\gamma-1} (v \varrho^{\gamma-1} \partial_x \varrho + \varrho^{\gamma-1} \varrho \partial_x v)] dx ds + \\ &+ \int_0^t \langle \varrho v, dW_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \varrho \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 e_k^2 dx ds. \end{aligned}$$

Or, comme on a

$$\begin{aligned} - \int_0^1 (\varrho v^2 \partial_x v + \frac{v^3}{2} \partial_x \varrho + \varrho \frac{v^2}{2} \partial_x v) dx &= - \int_0^1 \partial_x [\varrho v \frac{v^2}{2}] dx = 0, \\ \int_0^1 (v \varrho^{\gamma-1} \partial_x \varrho + \varrho^{\gamma-1} \varrho \partial_x v + \frac{\gamma-1}{\gamma} v \partial_x \varrho^\gamma) dx &= \int_0^1 \partial_x [v \varrho^\gamma] = 0 \end{aligned}$$

(ici on a utilisé les relations $v(0) = v(1) = 0$), en substituant ces relations dans l'égalité (2.38), on obtient l'égalité (2.35).

□

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.3.2 L'égalité (2.35) étant établie, on applique l'espérance mathématique à (2.35), de sorte que on obtient l'égalité (2.33).

□

2.4 Problème approché de l'équation d'un gaz visqueux barotopique en une dimension

2.4.1 Discrétisation

Dans cette partie nous allons considéré le système d'équations (2.11)-(2.12) en coordonnées lagrangiennes massique ξ dans le domaine

$$0 < \xi < 1 \quad (2.39)$$

avec la condition aux limites (2.13). Dans ce chapitre nous allons étudier une approximation de ce système, approximation faite par la discrétisation du domaine $]0, 1[$ et par l'introduction d'un nombre $\varepsilon > 0$ qui régularise la densité ϱ .

Pour ce faire, nous précisons avant tout la discrétisation du domaine. Soit N un nombre naturel qui n'est pas inférieur à 2. Nous posons

$$\xi_i = \frac{i}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.40)$$

Considérons deux fonctions $v(t, \xi)$ et $\varrho(t, \xi)$ définies sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ telle que $\varrho(t, \xi) > 0$ pour tout $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ et que $v(t, \cdot) \in C^2([0, 1])$ et $\varrho(t, \cdot) \in C^1([0, 1])$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Si on pose

$$\widehat{v}_i(t) = v(t, \xi_i), \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$\widehat{\varrho}_i(t) = \varrho(t, \frac{\xi_i + \xi_{i-1}}{2}), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\delta = \frac{1}{N},$$

$$R_N^{[1,i]} = \partial_\xi v \Big|_{\xi = \frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2}} - \frac{1}{\delta} (\widehat{v}_i(t) - \widehat{v}_{i-1}(t)), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$R_N^{[2,i]} = \partial_\xi (\varrho^\gamma) \Big|_{\xi = \xi_i} - \frac{1}{\delta} ((\widehat{\varrho}_{i+1}(t))^\gamma - (\widehat{\varrho}_i(t))^\gamma) \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$R_N^{[3,i]} = \partial_\xi v \Big|_{\xi = \frac{\xi_i + \xi_{i-1}}{2}} - \frac{1}{\delta} (\widehat{v}_i - \widehat{v}_{i-1}),$$

alors on a

$$R_N^{[1,i]} \rightarrow 0, \quad R_N^{[2,i]} \rightarrow 0, \quad R_N^{[3,i]} \rightarrow 0, \quad \text{pour } N \rightarrow \infty.$$

En d'autres terme, les approximations

$$\partial_\xi (\varrho \partial_\xi v) \Big|_{\xi = \xi_i} \approx \frac{1}{\delta} \left[\widehat{\varrho}_{i+1} \frac{\widehat{v}_{i+1} - \widehat{v}_i}{\delta} - \widehat{\varrho}_i \frac{\widehat{v}_i - \widehat{v}_{i-1}}{\delta} \right] \quad (2.41)$$

$$= \frac{1}{\delta^2} (\widehat{\varrho}_{i+1} \widehat{v}_{i+1} - (\widehat{\varrho}_{i+1} + \widehat{\varrho}_i) \widehat{v}_i + \widehat{\varrho}_i \widehat{v}_{i-1}),$$

$$\partial_\xi (\varrho^\gamma) \Big|_{\xi = \xi_i} \approx \frac{1}{\delta} ((\widehat{\varrho}_{i+1})^\gamma - (\widehat{\varrho}_i)^\gamma), \quad (2.42)$$

$$\partial_\xi v \Big|_{\xi = \frac{\xi_i + \xi_{i-1}}{2}} \approx \frac{1}{\delta} (\widehat{v}_i - \widehat{v}_{i-1}) \quad (2.43)$$

sont valables dans le sens que le deuxième membre de ces égalités approximatives tendent vers les premiers membre quand N tend vers l'infini. Rappelons également que les approximations (2.41)-(2.43) sont du même type que celles communément utilisées dans le calcul numérique. Sur la base des relations (2.41)-(2.43) nous proposons les équations approchées

$$\begin{aligned}
dv_i &= \left[\frac{\eta}{\delta^2} (\varrho_{i+1} v_{i+1} - (\varrho_{i+1} + \varrho_i) v_i + \varrho_i v_{i-1}) - \frac{h}{\delta} ((\varrho_{i+1})^\gamma - (\varrho_i)^\gamma) \right] dt \quad (2.44) \\
&\quad + \lambda_i dW_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \\
\frac{d}{dt} \frac{1}{\varrho_i} &= \frac{1}{\delta} [v_i - v_{i-1}], \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.45)
\end{aligned}$$

où les λ_i , $i = 1, \dots, N-1$, sont des constantes positives et les W_i , $i = 1, \dots, N-1$, sont des mouvements browniens canoniques à valeurs réelles définis sur une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$; on suppose que W_i , $i = 1, \dots, N-1$, sont indépendants. Il s'agit donc d'un système d'équations pour $2N-1$ inconnues $v_1, \dots, v_{N-1}, \varrho_1, \dots, \varrho_N$. L'équation (2.44) peut être complétée par

$$v_0 = v_N = 0,$$

qui correspond évidemment aux conditions aux limites (2.13) pour l'équation (2.11)

2.4.2 Régularisation de la densité

Malgré l'élégance de la formule (2.34), il nous est difficile d'en déduire une estimation sur ϱ utile pour prouver l'existence d'une mesure invariante. Cette difficulté persiste même dans les équations discrétisées (2.44)-(2.45). En prenant acte à cette difficulté, nous proposons d'introduire une approximation de l'équation (2.45).

Soit $\varepsilon > 0$. Au lieu de (2.45) nous considérons l'équation

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\delta} [v_i - v_{i-1}] + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\varrho_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Donc, en définitive, le système d'équations et les conditions que nous allons considérer sont

$$dv_i = \left[\frac{\eta}{\delta^2} (\varrho_{i+1} v_{i+1} - (\varrho_{i+1} + \varrho_i) v_i + \varrho_i v_{i-1}) - \frac{h}{\delta} ((\varrho_{i+1})^\gamma - (\varrho_i)^\gamma) \right] dt \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda_i dW_i, & i = 1, \dots, N-1, \\
\frac{d}{dt} \frac{1}{\varrho_i} &= \frac{1}{\delta} [v_i - v_{i-1}] + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\varrho_i}, & i = 1, \dots, N,
\end{aligned} \tag{2.47}$$

avec

$$v_0 = v_N = 0, \tag{2.48}$$

Lorsque nous considérons le système (2.46)-(2.47) avec une condition initiale, outre la condition naturelle pour la densité

$$\varrho_i(0) > 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

nous exigeons également que

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(0)} = 1. \tag{2.49}$$

Si $\varrho_i > 0$ (ϱ_i devant correspondre à la densité à un point, nous voulons que $\varrho_i > 0$), alors, en posant

$$\sigma_i = \log \varrho_i,$$

on peut transformer le système (2.46)-(2.47) en

$$\begin{aligned}
dv_i &= \left[\frac{\eta}{\delta^2} (e^{\sigma_{i+1}} v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i}) v_i + e^{\sigma_i} v_{i-1}) - \frac{h}{\delta} ((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma) \right] dt \\
& + \lambda_i dW_i, & i = 1, \dots, N-1,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_i = -\frac{e^{\sigma_i}}{\delta} [v_i - v_{i-1}] - \varepsilon (e^{\sigma_i} - 1), \quad i = 1, \dots, N. \tag{2.51}$$

Le système (2.46)-(2.47) est considéré à valeurs dans $\mathbb{R}^{N-1} \times (\mathbb{R}_+)^N$, tandis que le système (2.50)-(2.51) est à considérer à valeurs dans \mathbb{R}^{2N-1} . Donc, du point de vue technique, il est plus convenable de considérer le système d'équations (2.50)-(2.51).

On rappelle que l'équation (2.15), jointe à la condition (2.16), entraîne la relation

$$\int_0^1 \frac{1}{\varrho(\xi, t)} d\xi = \int_0^1 \frac{1}{\varrho(\xi, 0)} d\xi, \quad \forall t \geq 0.$$

Comme dans les coordonnées lagrangiennes massiques, $\frac{1}{\varrho(\xi, t)}$ représente le volume occupé par le gaz, cette égalité signifie que l'espace (longueur de l'intervalle) occupé par le gaz de masse totale 1 reste invariant. Si on normalise la longueur de l'intervalle occupé par le gaz, on aura $\int_0^1 (\varrho(\xi, t))^{-1} d\xi =$

$\int_0^1 (\varrho(\xi, 0))^{-1} d\xi = 1$. Ce fait, dans notre problème discrétisé, correspond à la relation

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(t)} = 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.52)$$

En effet, si on somme les deux membres de (2.47) pour $i = 1, \dots, N$, en tenant compte des conditions (3.33), on a

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(t)} = \varepsilon - \varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(t)};$$

si on considère cette équation comme une équation différentielle ordinaire pour $y(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(t)}$ et on résout le problème de Cauchy consistant à cette équation avec la condition initiale (2.49), on trouve (2.52).

Pour l'expression en σ_i , la condition (2.49) s'exprime évidemment par

$$\delta \sum_{i=1}^N e^{-\sigma_i(0)} = 1 \quad (2.53)$$

et la relation (2.52) sera exprimée par

$$\delta \sum_{i=1}^N e^{-\sigma_i(t)} = 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.54)$$

Rappelons que le problème de l'existence d'une mesure invariante a été démontré dans [26].

Solution périodique de l'équation d'un gaz visqueux barotopique en une dimension

Dans ce chapitre, nous présentons la généralisation du résultat présenté dans le chapitre 2 au cas périodique, qui constitue le contenu du travail [4]. Le résultat va être présenté comme théorème d'existence d'une solution périodique pour le système d'équations du mouvement d'un gaz visqueux barotopique dans le domaine discrétisé en une dimension spatiale (une mesure de probabilité dépendante de t et périodique en t sera induite par la solution périodique) et sa démonstration se base sur le théorème de Khas'minskii pour la solution périodique pour les équations stochastiques dans \mathbb{R}^n . Pour cette raison nous commençons par rappeler la définition de la solution périodique pour les équations stochastiques, suivant la présentation de [15].

3.1 Problème périodique

Dans cette partie, nous allons démontrer l'existence d'une mesure périodique pour l'équation stochastique du mouvement d'un gaz visqueux dans un domaine discrétisé en appliquant le théorème 1.1.13.

Considérons le système d'équations (2.50)-(2.51) tel que la pression p est donnée par

$$p = h(t) \varrho^\gamma, \quad (3.1)$$

i.e., le système d'équations (2.50)-(2.51) s'écrit sous la forme

$$dv_i = \left[\frac{\eta}{\delta^2} (e^{\sigma_{i+1}} v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i}) v_i + e^{\sigma_i} v_{i-1}) - \frac{h(t)}{\delta} ((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma) \right] dt \quad (3.2)$$

$$+ \lambda_i(t) dW_i, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_i = -\frac{e^{\sigma_i}}{\delta} [v_i - v_{i-1}] - \varepsilon (e^{\sigma_i} - 1), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.3)$$

Ici, nous supposons que $h(t)$ et $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, N-1$, sont T -périodiques avec

$$\sup_{t \in [0, T]} \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2(t) \leq M, \quad (3.4)$$

où M est une constance.

3.2 Existence et unicité de la solution

On considère le système d'équations (3.2)-(3.3) avec la condition

$$v_0 = v_N = 0. \quad (3.5)$$

et les conditions initiales

$$v_i(0) = v_{0i}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad \sigma_i(0) = \sigma_{0i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.6)$$

où $X_0 = (v_{01}, \dots, v_{0N-1}, \sigma_{01}, \dots, \sigma_{0N})$ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^{2N-1} satisfaisant à la condition

$$\delta \sum_{i=1}^N e^{-\sigma_{0i}} = 1 \quad \text{a.s.} \quad (3.7)$$

Pour ce problème, on démontre l'existence et l'unicité de la solution.

Proposition 3.2.1 *On suppose que la variable aléatoire $X_0 = (v_{01}, \dots, v_{0N-1}, \sigma_{01}, \dots, \sigma_{0N})$ vérifie, outre(3.7), la condition*

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} v_{0i}^2 < \infty, \quad \mathbb{E} \sum_{i=1}^N e^{\sigma_{0i}} < \infty. \quad (3.8)$$

De plus, supposons que les fonctions $h(t)$ et $\lambda_i(t)$ sont T -périodique et remplir les conditions

$$\sup_{t \in [0, T]} \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2(t) \leq M, \quad M \text{ est une constante positive,} \quad (3.9)$$

,

$$\min_{t \in [0, T]} h(t) = m > 0 \quad (3.10)$$

et

$$0 \leq h'(t) < C, \quad \forall t \in [0, T], \quad C \text{ est une constante positive.} \quad (3.11)$$

. Ensuite, pour tout $t_1 \in [0, T]$, le système des équations (3.2)-(3.3) avec les conditions (3.5) et (3.6) a, sur l'intervalle $[0, t_1]$, a unique T -solution périodique $(v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$. De plus, il satisfait la relation

$$\delta \sum_{i=1}^N e^{-\sigma_i(t)} = 1 \quad a.s., \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.12)$$

PREUVE. La preuve est similaire à celle donnée dans [5]. Plus précisément, une suite de solution qui converge vers la solution désirée solutions est construite. Laisser $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 1$, nous présentons la fonction θ_ν défini par

$$\theta_\nu = \theta_\nu(\{\sigma_i^{(\nu)}\}_{i=1}^N) = \min\left(1, \frac{\nu}{\sum_{i=1}^N e^{\sigma_i^{(\nu)}}}\right) \quad (3.13)$$

et on considère le système d'équations dans $v_i^{(\nu)}, \sigma_i^{(\nu)}$

$$dv_i^{(\nu)} = \left[\frac{\eta}{\delta^2} \theta_\nu (e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}} v_{i+1}^{(\nu)} - (e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}} + e^{\sigma_i^{(\nu)}}) v_i^{(\nu)} + e^{\sigma_i^{(\nu)}} v_{i-1}^{(\nu)}) \right] \quad (3.14)$$

$$- \frac{h(t)}{\delta} \theta_\nu^\gamma [(e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma] dt + \lambda_i(t) dW_i, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_i^{(\nu)} = - \frac{\theta_\nu^\gamma e^{\sigma_i^{(\nu)}}}{\delta} [v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)}] - \varepsilon \theta_\nu (e^{\sigma_i^{(\nu)}} - 1), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.15)$$

avec

$$v_0^{(\nu)} = v_N^{(\nu)} = 0, \quad (3.16)$$

$$v_i^{(\nu)}(0) = v_{0i}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad \sigma_i^{(\nu)}(0) = \sigma_{0i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.17)$$

Lemme 3.2.1 *Pour tous $t_1 \in [0, T]$, le système d'équations (3.14)-(3.15) avec les conditions (3.16)- (3.17) a, sur l'intervalle $[0, t_1]$, a T - solution périodique $(v_1^{(\nu)}, \dots, v_{N-1}^{(\nu)}, \sigma_1^{(\nu)}, \dots, \sigma_N^{(\nu)})$ qui est unique et il satisfait l'inégalité*

$$\frac{\delta}{2} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^{(\nu)}(t))^2 + \frac{m\delta}{\gamma-1} \mathbb{E} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \leq C_0 + C_1 t, \quad \forall t \in [0, t_1], \quad (3.18)$$

où C_0 et C_1 sont deux constantes non négatives indépendantes de ν .

PREUVE DE LEMMA 3.2.1. De la définition (3.13) de θ_ν , il s'ensuit immédiatement que

$$0 < \theta_\nu \leq 1, \quad 0 < \theta_\nu e^{\sigma_i^{(\nu)}} \leq \frac{\nu}{\delta}.$$

De ces inégalités, il résulte que les coefficients de (3.14) et (3.15) satisfont la condition de Lipschitz pour $(v_1^{(\nu)}, \dots, v_{N-1}^{(\nu)}, \sigma_1^{(\nu)}, \dots, \sigma_N^{(\nu)}) \in \mathbb{R}^{2N-1}$. En outre, comme les coefficients de (3.14)- (3.15) sont T -périodique (par hypothèse, $h(t)$ et $\lambda_i(t)$ sont T -périodique), par le classique théorèmes d'existence et d'unicité de solution (voir par exemple [15], Théorème 3.2), pour tout $t_1 > 0$, le problème (3.14)-(3.15) admet, dans l'intervalle $[0, t_1]$, est unique T - solution périodique $(v_1^{(\nu)}, \dots, v_{N-1}^{(\nu)}, \sigma_1^{(\nu)}, \dots, \sigma_N^{(\nu)})$.

Pour prouver l'inégalité (3.18), nous considérons la fonction

$$\psi(t) = \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^{(\nu)}(t))^2.$$

Comme

$$\frac{\partial \psi}{\partial v_i^{(\nu)}} = \delta v_i^{(\nu)},$$

en appliquant la formule d'Ito á $\psi(t)$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \psi(t) - \psi(0) &= \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} G_i^{(\nu)} ds + \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} \lambda_i(s) dW_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2(s) ds, \end{aligned} \quad (3.19)$$

où

$$G_i^{(\nu)} = \frac{\eta}{\delta^2} \theta_\nu (e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}} v_{i+1}^{(\nu)} - (e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}} + e^{\sigma_i^{(\nu)}}) v_i^{(\nu)} + e^{\sigma_i^{(\nu)}} v_{i-1}^{(\nu)}) - \frac{h(s)}{\delta} \theta_\nu^\gamma ((e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma).$$

Depuis (3.16), l'égalité (3.19) est écrit par :

$$\begin{aligned} \psi(t) - \psi(0) &= -\eta \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{\theta_\nu e^{\sigma_i^{(\nu)}}}{\delta} (v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)})^2 ds \quad (3.20) \\ &- \frac{\delta}{\gamma-1} \int_0^t \sum_{i=1}^N h(s) \frac{d(e^{\sigma_i^{(\nu)}(s)})^{\gamma-1}}{ds} ds - \int_0^t h(s) \varepsilon \theta_\nu \sum_{i=1}^N \delta ((e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}) ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \delta \sum_{i=1}^N \lambda_i^2(s) ds + \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} \lambda_i(s) dW_i. \end{aligned}$$

Comme nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^t h(s) \frac{d(e^{\sigma_i^{(\nu)}(s)})^{\gamma-1}}{ds} dt' &= h(t) (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} - h(0) (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1} \quad (3.21) \\ &- \int_0^t \frac{dh(s)}{ds} (e^{\sigma_i^{(\nu)}(s)})^{\gamma-1} ds, \end{aligned}$$

l'égalité (3.20) devient

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^{(\nu)}(t))^2 - \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{0i})^2 &= -\eta \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{\theta_\nu e^{\sigma_i^{(\nu)}}}{\delta} (v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)})^2 ds \quad (3.22) \\ &- \frac{h(t)\delta}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} + \frac{h(0)\delta}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1} + \frac{\delta}{\gamma-1} \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{dh(s)}{ds} (e^{\sigma_i^{(\nu)}(s)})^{\gamma-1} ds \\ &- \int_0^t h(s) \varepsilon \theta_\nu \sum_{i=1}^N \delta ((e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \delta \sum_{i=1}^N \lambda_i^2(s) ds + \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} \lambda_i(s) dW_i. \end{aligned}$$

De l'état (3.10), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^{(\nu)}(t))^2 + \frac{m\delta}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \quad (3.23) \\ \leq \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{0i})^2 + \frac{h(0)\delta}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1} + \frac{\delta}{\gamma-1} \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{dh(s)}{ds} (e^{\sigma_i^{(\nu)}(s)})^{\gamma-1} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\eta \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{\theta_\nu e^{\sigma_i^{(\nu)}}}{\delta} (v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)})^2 ds - \int_0^t h(s) \varepsilon \theta_\nu \sum_{i=1}^N \delta ((e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}) ds \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2(s) ds + \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} \lambda_i(s) dW_i.
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance de cette inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{2} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^{(\nu)}(t))^2 + \frac{m\delta}{\gamma-1} \mathbb{E} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \leq \tag{3.24} \\
& \leq \frac{\delta}{2} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{0i})^2 + \frac{\delta}{\gamma-1} \mathbb{E} \sum_{i=1}^N h(0) (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1} + \frac{\delta}{\gamma-1} \mathbb{E} \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{dh(s)}{ds} (e^{\sigma_i^{(\nu)}(s)})^{\gamma-1} ds \\
& - \eta \mathbb{E} \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{\theta_\nu e^{\sigma_i^{(\nu)}}}{\delta} (v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)})^2 ds - \mathbb{E} \int_0^t h(s) \varepsilon \delta \theta_\nu \sum_{i=1}^N ((e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}) ds \\
& \quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2(s) ds.
\end{aligned}$$

Comme nous avons

$$-((e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}) \leq \sup_{s>0} (s^{\gamma-1} - s^\gamma) = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\gamma-1} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^\gamma, \tag{3.25}$$

puis, compte tenu des conditions (3.10), (3.11) et (3.9), l'inégalité (3.24) devient

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{2} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^{(\nu)}(t))^2 + \frac{m\delta}{\gamma-1} \mathbb{E} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \leq \\
& \frac{\delta}{2} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{0i})^2 + \frac{\delta}{\gamma-1} \mathbb{E} \sum_{i=1}^N h(0) (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1} \\
& + \left(\varepsilon \left(\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\gamma-1} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^\gamma \right) \sup_{0 \leq t \leq T} h(t) + \frac{\delta}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2(t) \right) t,
\end{aligned}$$

donc l'inégalité (3.18) se prouve en laissant

$$C_0 = \frac{\delta}{2} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{0i})^2 + \frac{\delta}{\gamma-1} \mathbb{E} \sum_{i=1}^N h(0) (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1},$$

$$C_1 = \varepsilon \left(\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^{\gamma-1} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^\gamma \right) \sup_{0 \leq t \leq T} h(t) + \frac{\delta}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2(t).$$

Le lemme est démontré. \square

Lemme 3.2.2 *Nous avons*

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)} \geq \nu - 1 \right\} \rightarrow 0 \quad \text{for } \nu \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

PREUVE DU LEMME 3.2.2. L'inégalité (3.25) est vrai indépendamment de $\omega \in \Omega$, depuis(3.23),on peut aussi en déduire que

$$\frac{m\delta}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \quad (3.27)$$

$$\leq \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{0i})^2 + \frac{h(0)\delta}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1} + C_1 t + \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(s) \delta v_i^{(\nu)} dW_i,$$

où C_1 est la même constante introduite pour (3.18). Il s'ensuit que

$$\mathbb{E} \frac{m\delta}{\gamma-1} \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \leq C_0 + C_1 T + \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} \delta v_i^{(\nu)} \lambda_i(s) dW_i, \quad (3.28)$$

avec la même constante C_0 utilisé pour (3.18). Maintenant, en utilisant les inégalités de Cauchy Schwarz et Doob, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \delta v_i^{(\nu)} \lambda_i(s) dW_i &\leq (\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |\int_0^t \delta v_i^{(\nu)} \lambda_i(s) dW_i|^2))^{\frac{1}{2}} \quad (3.29) \\ &\leq 2(\mathbb{E}(\int_0^T \delta v_i^{(\nu)} \lambda_i(s) dW_i)^2)^{\frac{1}{2}} = 2(\mathbb{E} \int_0^T (\delta v_i^{(\nu)} \lambda_i(s))^2 ds)^{\frac{1}{2}} = 2\delta(\mathbb{E} \int_0^T (\lambda_i(s) v_i^{(\nu)})^2 ds)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Il découle de la condition (3.9) et l'inégalité (3.18)

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} \delta v_i^{(\nu)} \lambda_i(s) dW_i \leq 2M^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E} \int_0^T \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^{(\nu)})^2 ds)^{\frac{1}{2}} \leq 2M^{\frac{1}{2}} \delta (2C_0 T + C_1 T^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En substituant cette inégalité dans (3.28), nous obtenons

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{m\delta}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \leq C_0 + C_1 T + 2M^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}} (2C_0 T + C_1 T^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.30)$$

Pour $\gamma > 2$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\sum_{i=1}^N e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)} \leq N^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} \left(\sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

et il se déduit de (3.30)

$$\delta^{2-\gamma} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)} \right)^{\gamma-1} \leq \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \delta \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \leq K, \quad (3.31)$$

où

$$K = \frac{\gamma - 1}{m} N^{\gamma-2} (C_0 + C_1 T + 2M^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}} (2C_0 T + C_1 T^2)^{\frac{1}{2}}).$$

En appliquant l'inégalité de Markov, l'inégalité (3.31) donne

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)} \right)^{\gamma-1} \geq (\nu - 1)^{\gamma-1} \right\} \leq \frac{1}{(\nu - 1)^{\gamma-1}} \cdot \frac{K}{\delta^{2-\gamma}}, \quad (3.32)$$

le lemme est démontré.

□

SUIVI DE LA PREUVE 3.2.1. Ayant prouvé l'existence et l'unicité de la solution approchée $(v_1^{(\nu)}, \dots, v_{N-1}^{(\nu)}, \sigma_1^{(\nu)}, \dots, \sigma_N^{(\nu)})$ pour chaque ν , on prouve maintenant la proposition 3.2.1. La définition (3.13) de θ_ν implique que, si $0 < \nu < \nu'$, nous avons

$$v_i^{(\nu)} = v_i^{(\nu')}, \quad \sigma_i^{(\nu)} = \sigma_i^{(\nu')} \quad \text{p.s.}$$

dans $\{\sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)} \leq \nu - 1\}$.

laisser

$$A_\nu = \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)} > \nu - 1 \right\}.$$

De l'inégalité (3.32), on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_\nu\} < \infty$$

et en utilisant le lemme de Borel-Cantelli, on obtient

$$\mathbb{P}\{\overline{\lim} A_\nu\} = 0.$$

Il en déduit que la suite $\{(v_1^{(\nu)}, \dots, v_{N-1}^{(\nu)}, \sigma_1^{(\nu)}, \dots, \sigma_N^{(\nu)})\}_{\nu=1}^\infty$ converge presque certainement vers une limite notée par $(v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$. Il est facile de constater que $(v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$ satisfait le système d'équations (3.2)-(3.3).

L'unicité de la solution $(v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$ est affiché en utilisant les arguments standard. Dans en fait, il suffit de noter que, sur $\{\sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i(t)} \leq \nu - 1\}$ les deux possibles les solutions doivent coïncider et nous avons

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i(t)} \leq \nu - 1\right\} \rightarrow 1 \quad \text{for } \nu \rightarrow \infty.$$

Prouver(3.12), on rappelle le raisonnement pour obtenir

$$v_0 = v_N = 0, \tag{3.33}$$

on trouve facilement la relation (3.12). Le résultat est avéré.

Remarque 3.2.1 *Si nous laissons $\varrho_i = e^{\sigma_i}$, $i = 1, \dots, N$, alors il est clair que $(v_1, \dots, v_{N-1}, \varrho_1, \dots, \varrho_N)$ est la solution du système d'équations (2.46)-(2.47) avec la condition(3.33) et les conditions initiales*

$$v_i(0) = v_{0i}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad \varrho_i(0) = \varrho_{0i} \equiv e^{\sigma_{0i}}, \quad i = 1, \dots, N$$

et on obtient

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(t)} = 1 \quad p.s., \quad \forall t \geq 0.$$

3.3 Existence d'une solution stationnaire périodique (mesure périodique)

On a le résultat suivant.

Théorème 3.3.1 *Supposons que la fonction $h(t)$ vérifie $h'(t) < C$ et $\min_t h(t) > 0$. Alors le système d'équations (3.2)-(3.3) admet une mesure périodique.*

Comme précédemment, nous récrivons notre système d'équations sous la forme

$$dX(t) = B(t, X(t))dt + Q(t)dW(t). \quad (3.34)$$

$B(t, x)$ étant localement lipschitzienne, pour qu'il existe une mesure périodique pour l'équation (3.34), on va appliquer le théorème 1.1.13. En effet, considérons la fonction T -périodique $V(t, x)$ donnée par

$$V(t, x) = \sum_{i=1}^{N-1} \delta \frac{v_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N \delta e^{-\sigma_i} + h(t) \frac{1}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{N-1} \delta e^{(\gamma-1)\sigma_i}. \quad (3.35)$$

On remarque que la fonction V vérifie

$$V(t, x) \geq 0, \quad \text{pour tout } (t, x) \in]-\infty, +\infty[\times \mathbb{R}^{2n-1} \quad (3.36)$$

et

$$\inf_{|x| > R} V(t, x) \rightarrow +\infty \quad \text{pour } R \rightarrow +\infty, \quad \text{pour tout } t \in]-\infty, +\infty[. \quad (3.37)$$

Aussi, on introduit l'opérateur L défini par

$$L = L_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2(t) \frac{\partial^2}{\partial v_i^2}, \quad (3.38)$$

où

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i(t) \frac{\partial}{\partial v_i} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \quad (3.39)$$

avec

$$\alpha_i(t) = \frac{\eta}{\delta^2} (e^{\sigma_{i+1}} v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i}) v_i + e^{\sigma_i} v_{i-1}) - \frac{h(t)}{\delta} (e^{\gamma \sigma_{i+1}} - e^{\gamma \sigma_i}), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$\beta_i = \frac{-e^{\sigma_i}}{\delta} (v_i - v_{i-1}) - e^{\sigma_i} \varepsilon + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N, \quad v_0 = v_N = 0,$$

Si on applique l'opérateur L_1 à la fonction $V(t, x)$, alors on obtient

$$\begin{aligned} L_1 V(t, x) &= \frac{\partial h(t)}{\partial t} \frac{1}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^N \delta e^{(\gamma-1)\sigma_i} - \frac{\eta}{\delta} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i - v_{i-1})^2 e^{\sigma_i} \\ &+ h(t) \varepsilon \sum_{i=1}^N \delta e^{(\gamma-1)\sigma_i} - h(t) \varepsilon \sum_{i=1}^N \delta e^{\gamma \sigma_i} - \sum_{i=1}^N \delta \varepsilon e^{-\sigma_i} + \delta \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.40)$$

D'après l'inégalité

$$\sum_{i=1}^N (v_i - v_{i-1})^2 e^{\sigma_i} \geq k_\delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^2$$

et les hypothèses sur $h(t)$, on peut trouver deux constantes $C_0 \in \mathbb{R}$ et $C_1 > 0$ telles que

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial h(t)}{\partial t} \frac{1}{\gamma - 1} + h(t)\varepsilon \right) \left(\sum_{i=1}^N \delta e^{(\gamma-1)\sigma_i} \right) - h(t)\varepsilon \sum_{i=1}^N \delta e^{\gamma\sigma_i} \right] - \sum_{i=1}^N \delta \varepsilon e^{-\sigma_i} \quad (3.41) \\ & \leq C_0 - C_1 \sum_{i=1}^N \sigma_i^2. \end{aligned}$$

Des relations (3.40) et (3.41), on déduit qu'il existe des constantes M'_0, M'_1, M'_2 telles que on ait

$$L_1 V(t, x) \leq M'_0 - M'_1 \sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 - M'_2 \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \quad (3.42)$$

et d'après (3.4), on obtient finalement

$$\sup_{|x| > R, -\infty < t < +\infty} LV(t, x) = -A_R \rightarrow -\infty, \quad \text{quand } R \rightarrow \infty. \quad (3.43)$$

Ainsi, on remarque que les hypothèses du théorème 1.1.13 sont vérifiées et donc il existe une mesure périodique pour notre problème. \square

Perspectives

Après avoir trouvé l'existence d'une mesure périodique, nous pouvons étudier l'unicité également de la mesure périodique pour l'équation stochastique d'un gaz visqueux barotropique discrétisée. On peut aussi se pencher sur le problème d'un gaz visqueux barotropique en dimension 2 et 3, étude qui, pour l'instant, n'a jamais été faite dans la littérature. Pour le problème discrétisé, il reste à étudier la convergence des mesures périodiques quand le pas de discrétisation tend vers 0, c'est à dire voir si la limite des mesures périodiques représente la mesure périodique pour notre problème initial.



Bibliographie

- [1] M.Z. Aissaoui, H. Fujita Yashima : *Fluides newtoniens*, Cours, Univ. Guelma, 2012-2013.
- [2] S. Albeverio, A.B. Cruzeiro : *Global flows with invariant (Gibbs) measures for Euler and Navier-Stokes two dimensional fluids*. Comm. Math. Phys., vol. 129, pp. 431-444, 1990.
- [3] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, V. N. Monakhov : *Boundary value problems in mechanics of non homogeneous fluids* (traduit du russe). North-Holland, 1990.
- [4] R. Benseghir et A. Benchettah : *Periodic measure for the discretized equation of a viscous gas in one dimensional*. En préparation.
- [5] R. Benseghir, H. Fujita Yashima. Mesure invariante pour l'équation stochastique d'un gaz visqueux en une dimension avec la discrétisation du domaine. *Romanian Journal. Pure Appl. Math.*, **58** (2013), pp. 149-162.
- [6] A.B. Cruzeiro : *Solutions et mesures invariantes pour des équations stochastiques du type Navier-Stokes*. Expos. Math., vol. 7, pp. 73-82, 1989.
- [7] G. Da Prato : *An Introduction to Infinite e-Dimensional Analysis*, Springer-Verlag, 2006.
- [8] G. Da Prato, J. Zabczyk : *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge University Press, 1992.
- [9] E. B. Dynkin : *Markov Processes*, Springer-Verlag, Berlin, vol. 1, 2, 1965.

- [10] F. Flandoli : *Dissipativity and invariant measures for stochastic Navier-Stokes equations*, Nonlinear Differential Equations Appl., vol 1, pp. 403-423, 1994.
- [11] F. Flandoli and F. Gozzi : *Kolmogorov Equation Associated to a Stochastic Navier-Stokes Equation*, Journal of Functional Analysis vol. 160, pp. 312-336, 1998.
- [12] A. Friedman : *Stochastic Differential Equation and Application*, New York, Academic Press, 1975-1976.
- [13] H. Fujita Yashima : *Equations stochastiques d'un gaz visqueux isotherme dans un domaine monodimensionnel infini*, Acta Math. Vietnamica, vol. 26, pp. 147-168, 2001.
- [14] I. I. Guikhman (Gikhman), A. V. Skorokhod : *Introduction à la théorie des processus aléatoires* (traduit du russe), Mir (Moscou), 1980.
- [15] R. Z. Has'minskii : *Stochastic stability of differential equations* (translated from Russian), Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [16] A. V. Kazhikhov : *Correction globale des problèmes aux limites mixtes pour le système d'équations du modèle d'un gaz visqueux* (en russe). Dinamika Sploshnoi Sredy, vol. 21, pp. 18-47, 1975.
- [17] Kazhikhov, A. V., Shelukhin, V. V. : Résolubilité unique globale dans le temps du problème aux conditions initiales et aux limites pour les équations monodimensionnelles d'un gaz visqueux (en russe). *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 41 (1977), pp. 282-291.
- [18] A. V. Kazhikhov : *Sur la stabilisation de la solution du problème aux conditions initiales et aux limites pour les équations d'un gaz visqueux barotrope* (en russe). Diff. Uravn., vol. 15, pp. 662-667, 1979.
- [19] N. Kryloff, N. Bogoliuboff : *La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire*. Annals Math., vol. 38, pp. 65-113, 1937.
- [20] : H. Kunita : *Stochastic flows and stochastic differential equations*. Cambridge University Press, 1990.
- [21] L. D. Landau, E. M. Lifchitz : *Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.
- [22] M. Métivier : *Notions fondamentales des probabilités*. Dunod Université, 1968.
- [23] P.-L. Lions : *Mathematical topics in fluid mechanics*. Oxford Univ. Press. Oxford, vol. 1, 1996 ; vol. 2, 1998.

- [24] E. Pardoux : *Intégrales stochastiques hilbertiennes*, Publ. interne Univ. Paris - Dauphine, 1976.
- [25] C. Prévôt, M. Röckner : *A concise course on stochastic partial differential equations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [26] E. Tornatore, H. Fujita Yashima : *Equazione stocastica monodimensionale di un gas viscoso barotropico*. *Ricerche Mat.*, vol. 46, pp. 255-283, 1997.