

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد- الطارف

Université Chadli Bendjedid – El Tarf

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات

Département de Mathématiques



## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Spécialité :** Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

### Thème

***Nouvelle Distribution Composée Exponentielle  
Lindley***

Présenté par :

**Oulaya FROUR**

Devant le Jury :

<b>Dr. ZIDANI Nesrine</b>	<b>MCA</b>	Univ Chadli Bendjedid, El-Tarf	Présidente
<b>Dr. GRABSIA Imen</b>	<b>MCB</b>	Univ Chadli Bendjedid, El-Tarf	Rapporteur
<b>Dr. GRINE Razika.</b>	<b>MCB</b>	Univ Chadli Bendjedid, El-Tarf	Examinatrice

**Année Universitaire 2024-2025**

# TABLE DES MATIÈRES

1	<b>Introduction</b> . . . . .	9
<b>1</b>	<b>Notions et quelques lois de probabilités</b>	<b>12</b>
1	<b>Introduction</b> . . . . .	12
2	<b>Définitions</b> . . . . .	12
2.1	<b>Variable aléatoire</b> . . . . .	13
2.2	<b>Loi de probabilité</b> . . . . .	13
2.3	<b>Moment ordinaire</b> . . . . .	14
2.4	<b>Moment centré</b> . . . . .	14
3	<b>Fonction Génératrice des moments</b> . . . . .	14
4	<b>Estimation</b> . . . . .	15
4.1	<b>Propriétés d'un estimateur</b> . . . . .	15
4.2	<b>Normalité asymptotique</b> . . . . .	16
4.3	<b>Construction d'estimateurs</b> . . . . .	17
5	<b>Fonction de survie</b> . . . . .	18
6	<b>Taux de hasard</b> . . . . .	18
7	<b>Fonction W de Lambert</b> . . . . .	19
8	<b>Fonction Quantile</b> . . . . .	20
9	<b>Lois de probabilités usuelles</b> . . . . .	20

9.1	Loi de Poisson . . . . .	20
9.2	Loi Exponentielle . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Distribution de Lindley et ses applications</b>	<b>23</b>
1	Introduction . . . . .	23
2	Distribution de Lindley . . . . .	23
2.1	Moments et mesures connexes . . . . .	25
2.2	Fonction de hasard et fonction de survie . . . . .	26
2.3	Fonction Quantile de la distribution Lindley . . . . .	27
2.4	Estimation . . . . .	28
3	Distribution Poisson–Lindley discrète . . . . .	30
3.1	Moments et Mesures Connexes . . . . .	32
3.2	Fonction Quantile de la distribution de Poisson Lindley	32
3.3	Estimation . . . . .	34
4	Distribution de Deux-Paramètres de Lindley . . . . .	37
5	Distribution de Lindley Modifiée. . . . .	38
5.1	Moments ordinaire . . . . .	39
5.2	Paramètre de fiabilité . . . . .	42
5.3	Statistiques d'ordre extrême . . . . .	43
5.4	Comparaison avec la distribution exponentielle et la distribution Lindley . . . . .	44
5.5	Estimation . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Nouvelle Distribution Composée Exponentielle Lindley</b>	<b>48</b>
1	Introduction . . . . .	48
2	Génération des données . . . . .	48
2.1	Modèle théorique . . . . .	48
3	Caractéristique de forme . . . . .	50
3.1	Forme de la fonction de densité . . . . .	50
3.2	Forme du taux de risque et du risque inversé . . . . .	51
4	Estimation . . . . .	53

---

4.1	Estimation du maximum de vraisemblance . . . . .	53
4.2	Estimation des moindres carrés et des moindres carrés pondérés . . . . .	54
4.3	Méthodes d'estimation . . . . .	55
5	Estimation du paramètre contrainte -résistance $R = P(X > Y)$	56
6	Algorithme de génération et étude de simulation de Monte Carlo . . . . .	58
6.1	Algorithmes . . . . .	58
6.2	Etude de simulation de Monte Carlo . . . . .	59
7	Fiabilité floue . . . . .	59
7.1	Valeurs numériques de la fiabilité floue . . . . .	61
8	Application et comparaison . . . . .	62

---

## REMERCIEMENT

*C'est avec une profonde émotion que je rends grâce au bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage d'achever ce modeste travail que j'ai tant attendu et espéré.*

*Je tiens tout d'abord à adresser mes sincères remerciements à mon encadrante Dr. Grabsia Imene, pour sa bienveillance, sa patience et son soutien indéfectible tout au long de ce travail. Ses judicieux conseils et son accompagnement a été essentiel à la réussite de ce modeste travail .*

*Je remercie les membres de jury Dr. GRINE Razika et Dr. ZIDANI Nesrine pour le temps qu'ils ont consacré à l'évaluation de mon manuscrit, et pour leur remarques constructives.*

*À qui m'ont guidée et ont partagé avec moi leur savoir et leur connaissance. Merci à tous les enseignants et les administrateurs du département de mathématique pour leur accompagnement durant les cinq années d'études, qui à grandement favorisé mon développement académique et personnel .*

*Mon vif remerciement est en priorité destiné à ma chère mère et les membres précieux de ma famille, pour leur amour, leur soutien et leur sacrifices depuis mon plus jeune âge.*

*Enfin, je tiens à exprimer une dernière fois ma profonde reconnaissance à toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont encouragée et soutenue pendant ce parcours, que ce soit par leur présence, leur conseils ou leurs réconfort morale qui m'ont aidée à réussir.*

*« Merci du fond du cœur »*

---

*Dédicace*

À tous ceux qui sont chers, ceux à qui je dois mon succès

À mon paradis, ma source de joie et de bonheur, la prune de mes yeux, ma merveilleuse mère **Warda**. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'immensité de mon amour, de mon respect pour toi, ni la profondeur de ma gratitude pour tous les sacrifices que tu as consentis pour moi depuis mon enfance. Merci infiniment d'avoir cru en moi, de m'avoir encouragée à poursuivre mes rêves même les obstacles semblaient insurmontables. Ta bienveillance me guide et me pousse chaque jour à devenir la meilleure version de moi-même et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force et le secret de mon sourire.

À mes chères tantes, l'âme joyeuse **Mouna**, et l'âme pure **Souraya**, à tous mes précieux oncles et à leurs adorées épouses, vous avez toujours été là pour moi, votre présence douce et rassurante m'a portée dans les moments les plus difficiles . Merci pour vos prières sincères et votre soutien qui ont été pour moi une source de réconfort et de motivation tout au long de mon parcours.

À mes compagnons de souvenirs et de sourires, à ceux qui ont rempli ma vie de moments inoubliables, mes chers cousins et mes chères cousines, des aimés aux plus jeunes, tout particulièrement à celles qui occupent une place toute spéciale dans mon cœur, **Imene, Chaima, Rayen, Ghadir, Ritedj, Belkis, Nermin** et **Lamis**. Merci pour chaque souvenir partagée et chaque éclat de rire échangé qui a tissé entre nous un lien rare et puissant. Je suis profondément reconnaissante pour ce lien unique qui nous unit.

À mes douces amies, à celle qui a la capacité de rendre chaque instant plus beau **Roukaya**, ta gentillesse, ta sagesse et tes conseils ont été toujours un repère pour moi. Merci d'avoir constamment comme une grande sœur attentionnée. Et à ma chère **Amina**, merci d'être une amie fidèle, ta présence et ton écoute sont un véritable trésor dans ma vie .

À toutes les personnes que j'ai connues, qui m'ont offert un conseil, une prière ou un vœu de bonheur, je vous adresse ma profonde gratitude.

« *Je dédie ce mémoire à l'âme de mon père, mon grand-père et ma grand-mère* »

# ملخص

في هذا العمل اقترحنا توزيعاً ذا معلمة واحدة يُسمى التوزيع المركب الجديد الآسي لنندلي ، وذلك من خلال دمج توزيعين معروفين مسبقاً: التوزيع الآسي والتوزيع لنندلي وقد تم تقديم التوزيع الناتج كتوزيع إحصائي يتميز بنموذج لمعدل خطر تنازلي، مما يشكل مساهمة هامة في مختلف سياقات التحليل في مجالي الموثوقية والبقاء. بالإضافة إلى ذلك، تناولنا تقنيات التقدير مع التركيز على طرق القيمة العظمى للاحتماالية، والمربعات الصغرى، والمربعات الصغرى الموزونة. كما تم إجراء مقارنة لهذا النموذج الحديث مع توزيعات أخرى ذات معلمة واحدة و معلمتين، وذلك اعتماداً على بيانات حقيقية. وأخيراً، أجرينا تحليلاً للنائج ولمضامينها التطبيقية من خلال محاكاة باستخدام طريقة مونت كارلو.

## الكلمات المفتاحية :

التوزيع الآسي، توزيع لنندلي، التوزيع ذو معلمة واحدة، التقدير، المحاكاة.

---

## Abstract

In this work, we proposed a new one-parameter distribution called the compounded exponential-Lindley distribution, by merging two well-known distributions : the exponential distribution and the Lindley distribution. This resulting distribution was introduced as a statistical model exhibiting a decreasing hazard rate, offering a significant contribution to various contexts of reliability and survival analysis. Furthermore, we addressed estimation techniques by focusing on the methods of maximum likelihood, least squares, and weighted least squares. Finally, a simulation is proposed to evaluate its performance. This new model is compared with well-known one- and two-parameter distributions.

Keywords : Exponential distribution, Lindley distribution; Distribution with a single parameter, estimation, simulation.

---

## Résumé

Dans ce travail, nous avons proposé une nouvelle distribution à un seul paramètre appelée la distribution composée exponentielle de Lindley , en fusionnant deux distributions déjà connues : la distribution exponentielle et la distribution Lindley. La distribution obtenue a été proposée comme une distribution statistique qui présente un modèle de taux de risque décroissant offrant une contribution significative pour divers contextes d'analyse en fiabilité et survie . En outre, nous avons abordé les techniques d'estimation en se concentrant sur les méthodes du maximum de vraisemblance, des moindres carrés et des moindres carrés pondérés. Enfin, une simulation est proposée pour évaluer ses performances. Ce nouveau modèle est comparé à des distributions bien connues à un et deux paramètres.

Mot clé : Distribution exponentielle, Distribution Lindley ; Distribution à un paramètre, estimation, simulation.

## 1 Introduction

Les statistiques influencent tous les domaines de la vie contemporaine . Elles constituent la base de nombreuses décisions prises par les autorités publiques, les entreprises et les collectivités. Elles fournissent des informations sur les tendances et les forces qui ont un impact sur notre existence. La qualité des procédures mises en œuvre dans une analyse statistique dépend fortement du modèle de probabilité présumé ou de la distribution. À cet effet, d'importants efforts ont été investis dans l'élaboration de grandes catégories de distributions de probabilités standard et de méthodologies statistiques appropriées. Néanmoins, de nombreux problèmes majeurs persistent où les données réelles ne correspondent à aucun des modèles de probabilité conventionnels.

Soit  $X$  une variable aléatoire suit la distribution d'un seul paramètre donné par la fonction de densité suivante :

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2(1+x)e^{-\theta x}}{1+\theta} & x, \theta > 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1)$$

Introduite par Lindley (1958). Sankaran [23] a présenté la distribution discrète de Poisson-Lindley ( $PL$ ) en fusionnant les distributions de Poisson et de Lindley. Les aspects statistiques de la distribution  $PL$  peuvent être dans [12]. De nombreux chercheurs ont amélioré l'application de la distribution  $PL$ . Ghitany et al [10] ainsi qu'Asgharzadeh et al. [1] ont dérivé les distributions  $PL$  tronquée à zéro et Poisson-Lindley de Pareto, respectivement, Mahmoudi et Zakerzadeh [19] ont proposé une version étendue de la distribution de Poisson composée, qui a été établie en combinant la distribution de Poisson avec la distribution de Lindley généralisée (établie par [37]), dans le but de modéliser à la fois la distribution de Poisson et la distribution de Lindley généralisée.

Pour représenter les ensembles de données de comptage surdispersés, nous avons démontré que la distribution de Poisson-Lindley généralisée offre des performances supérieures à la distribution de Poisson généralisée dans le contexte de la surdispersion. Gomez et al [13] ont introduit les distributions  $PL$  discrètes multivariées, en explorant leurs extensions ainsi que leur utilisations et leur applications dans le domaine de l'actuariat.

Shanker et Mishra [31] ont proposé une distribution de Poisson-Lindley à deux paramètres en fusionnant la distribution de Poisson avec la distribution à deux paramètres de Lindley initialement présenté dans [26]. Une distribution quasi Poisson-Lindley a été développée par [25], en combinant la distribution de Poisson avec une distribution quasi Lindley introduite par [27]. Shanker et al [28] ont aussi suggéré une distribution discrète Poisson-Lindley à deux paramètres en mélangeant la distribution de Poisson avec une distribution de Lindley à deux paramètres. Cette modélisation est destinée à représenter les temps de survie et d'attente comme introduit par [29]. De plus, Shanker et Tekie [30] ont obtenu une nouvelle distribution quasi Poisson-Lindley en associant la distribution de Poisson à une nouvelle distribution quasi Lindley introduite par [31].

Par ailleurs, Nedjar et Zeghdoudi [40] ainsi que Zeghdoudi et Nedjar [35] ont proposé deux nouvelles distributions de Poisson composées, appelées la distribution de Poisson gamma Lindley et les distributions de Poisson pseudo-Lindley. Ces modèles découlent de la combinaison de la distribution de Poisson avec les distributions de gamma Lindley et de pseudo-Lindley, introduites respectivement par [39] et [38]. De plus, Grine et Zeghdoudi [14] ont analysé la distribution de Poisson quasi Lindley et ses applications, Wongrin et Bodhisuwan [34] ont examiné le modèle linéaire généralisé basé sur la distribution de Pseudo-Lindley ( $PL$ ) pour les données de comptage et ils ont démontré que le modèle linéaire associé offre une meilleure capacité de modélisation supérieure par rapport aux modèles de régression de Poisson et binomiale négative lorsqu'il y a du surdispersion Et Mohammadpour et al. [20] ont mené une étude sur le modèle  $PL INAR(1)$  et ses utilisations.

Dans ce travail, nous explorons une nouvelle distribution de durée de vie grâce à l'emploi des modèles de mélange, en fusionnant la distribution Exponentielle avec

---

la distribution Lindley à un paramètre. Ce mélange aspire à fournir une contribution importante à la littérature actuelle sur la modélisation des données de survie, notamment dans les secteurs de l'analyse de survie et des sciences actuarielles.

Dans le premier chapitre nous rappelons certaines définitions et certains résultats que nous utiliserons par la suite. Ce rappel comporte des généralités sur quelques distributions de probabilités.

Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous faisons une synthèse des résultats obtenus sur les distributions de Lindley et Poisson Lindley en nous inspirant des travaux de Lindley (1958), Ghitany et al. (2008,a) et Sankaran (1970).

Enfin, le dernier chapitre comporte la nouvelle distribution à un paramètre (Exponentielle Lindley) dont on donne quelques propriétés à savoir : la fonction de répartition, estimation du maximum de vraisemblance, des estimateurs des paramètres obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance et leurs applications dans l'analyse de survie.

# CHAPITRE 1

## Notions et quelques lois de probabilités

### 1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place un cadre statistique et probabiliste solide pour modéliser et examiner le comportement des variables aléatoires liées aux distributions. En explorant ses caractéristiques essentielles, et en utilisant des techniques d'estimations appropriées, nous préparons le chemin pour une analyse approfondie et pratique du modèle.

### 2 Définitions

Soit  $X$  une application définie de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $B$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ . On appelle image inverse de  $B$  par  $X$ , la partie de  $\Omega$  noté  $X^{-1}(B)$ , noté par

$$X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

## 2. Définitions

---

### 2.1 Variable aléatoire

La notion la plus utilisée dans la théorie des probabilités et de la statistique c'est la variable aléatoire.

#### Variable aléatoire réelle

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé. l'application  $X$  définie de  $\Omega$  dans  $R$  est une variable aléatoire vérifiée

$$\begin{aligned} X & : \omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in R. \\ \forall x \in R & : \{X \leq x\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$  étant une tribu.

La variable aléatoire réelle  $X$  est dite discrète si l'espace probabilisé est dénombrable . Sinon la variable aléatoire réelle  $X$  est dite continue.

### 2.2 Loi de probabilité

**Définition 2.1** On définit La loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ , par l'application  $P_X$  telle que :

$$P_X(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}).$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$ , est la fonction  $F$  définie pour toute réel  $x$  par :

$$\begin{aligned} F_X & : R \rightarrow [0, 1]. \\ x & \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = P\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}. \end{aligned}$$

#### Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilités  $P_i$  des évènements  $\{X = x_i\}$ ,  $x_i$  parcourant l'univers image  $X(\Omega)$ .

La loi de probabilité est donnée par les  $(x_i, p_i)$ .

#### 2.3 Moment ordinaire

Le moment ordinaire d'ordre  $r \in \mathbb{N}$  de  $X$  est défini, s'il existe, par :

$$\mu_r^l = E(X^r) = \left( \begin{array}{l} \sum_{k \in I} k^r P_K \quad \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{x \in I} x^r f_X(x) dx \quad \text{si } X \text{ est continue} \end{array} \right)$$

#### 2.4 Moment centré

Le moment centré d'ordre  $r \in \mathbb{N}$  de  $X$  est défini, s'il existe, par :

$$\mu_r = E([X - E(X)]^r) = \left( \begin{array}{l} \sum_{x \in I} [k - E(X)]^r P_k \quad \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{x \in I} [X - E(X)]^r f(x) dx \quad \text{si } X \text{ est continue} \end{array} \right)$$

### 3 Fonction Génératrice des moments

Pour la variable aléatoire  $X$  la fonction génératrice des moments est définie par :

$$H_X(u) = E[e^{Xu}], u \in R.$$

La notion de fonction génératrice peut être utile parfois pour calculer plus facilement les moments de certaines lois de probabilité. par exemple : l'espérance et la variance de  $X$  :

$$\begin{aligned} E(X) &= H_X'(0). \\ Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) = H_X''(0) - [H_X'(0)]^2. \end{aligned}$$

## 4. Estimation

---

Le coefficient de variation ( $\gamma$ ), le coefficient d'asymétrie ( $\sqrt{\beta_1}$ ) et le coefficient d'aplatissement ( $\beta_2$ ) sont :

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{\mathbb{E}(X)} \\ \sqrt{\beta_1} &= \frac{\mathbb{E}(X^3)}{(\text{Var}(X))^{\frac{3}{2}}} \\ \beta_2 &= \frac{\mathbb{E}(X^4)}{(\text{Var}(X))^2}.\end{aligned}$$

## 4 Estimation

**Définition 4.1** *Un estimateur de  $\theta$  est une application  $T_n$  de  $E^n$  dans  $F$  qui à chaque échantillon  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de la loi  $P_\theta$  associé a une variable aléatoire réelle dont on peut déterminer la loi de probabilité, on appelle la valeur  $\hat{\theta}$  estimateur ou estimation.*

$$\hat{\theta} = T_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

### 4.1 Propriétés d'un estimateur

#### Biais

Pour pouvoir considérer  $T_n$  comme une valeur approchée de  $\theta$ , il faut que les valeurs prises par la variable  $T_n$  ne s'écartent pas trop de la valeur fixée de  $\theta$ .

$$B_n(\theta) = E(T_n) - \theta$$

Un estimateur  $T_n$  de  $\theta$  est dite sans biais si pour tout  $\theta$  si  $B_n(\theta) = 0$ , et si  $B_n(\theta) > 0$ , l'estimateur est dit positivement biaisé.

### Convergence

Un estimateur  $T_n$  est convergent si la suite de la variable  $(T_n)$  converge en probabilité vers  $\theta$ , soit :

$$\begin{aligned} T_n \xrightarrow{P} \theta &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \theta| < \varepsilon) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty; \forall \varepsilon > 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Théorème 4.1** *Tout estimateur sans biais dont la variance tend vers 0 est convergent :*

$$(E_\theta(T_n) = \theta \text{ et } \text{Var}_\theta(T_n) \rightarrow 0) \Rightarrow T_n \xrightarrow{P} \theta; n \rightarrow \infty.$$

### Erreur quadratique moyenne

La qualité d'un estimateur va se mesurer à l'aide d'une distance moyenne au paramètre qu'on appelle l'erreur quadratique moyenne (*Mean Squared Error en anglais*) appelée aussi risque quadratique est l'espérance du carré de l'erreur entre la vraie valeur et sa valeur estimée.

$$EQM(T_n) = E_\theta((T_n - \theta)^2).$$

Si le risque est faible, l'estimateur  $T_n$  est proche de  $\theta$ .

## 4.2 Normalité asymptotique

On applique le théorème central limite suivant :

**Théorème 4.2 (Théorème central limite).** *Soient une suite de variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  indépendantes suit le même loi (donc de même espérance  $m$  et de même écart-type  $\sigma$ ).*

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow N(0, 1).$$

*La variable aléatoire  $Z_n$  converge en loi vers la loi normale centrée réduite.*

## 4. Estimation

---

### 4.3 Construction d'estimateurs

#### Méthode du maximum de vraisemblance

**Définition 4.2** On appelle vraisemblance (likelihood) de l'échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  la loi de probabilité de ce  $n$ -uplet, notée  $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  est définie par

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i \mid \theta)$$

si  $X$  est une variable discrète, et par :

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

si  $X$  est une variable aléatoire continue de densité  $f(x; \theta)$

**Définition 4.3** On appelle estimateur de maximum de vraisemblance (emv) de  $\theta$  est la valeur  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$  qui rend maximale la fonction de vraisemblance  $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$ . Donc  $\hat{\theta}_n$  sera en général calculé en maximisant la ln-vraisemblance :

$$\hat{\theta}_n = \max \ln L(\theta; x_1, \dots, x_n).$$

La recherche de l'estimateur de vraisemblance peut se faire directement par la recherche du maximum de  $L$ , ou dans le cas particulier où la fonction  $L$  est deux fois dérivable par rapport à  $\theta$  comme solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta; x_1, \dots, x_n) = 0.$$

$$\text{Où } \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\theta; x_1, \dots, x_n) < 0.$$

Dans ce cas, on les résout numériquement

#### Méthode des Moments

Dans le cas où le paramètre à estimer est  $\theta = E_\theta(X)$  moyenne théorique de la loi, l'estimateur naturel est la moyenne empirique

$$\hat{\theta}_n = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

De même pour estimer le paramètre  $\theta = V_\theta(X)$  variance de  $X$ , l'estimateur naturelle serait la variance empirique

$$S_n'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Plus généralement, pour  $\theta \in \Theta$ , si  $E(X) = \varphi(\theta)$ , où  $\varphi$  est une fonction inversible, alors l'estimateur de  $\theta$  par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta}_n = \varphi^{-1}(\bar{X}).$$

## 5 Fonction de survie

La fonction de survie est la probabilité pour que l'événement d'intérêt (le décès par exemple)  $T$  intervienne après un délai supérieur à  $t$ , autrement dit, que l'événement d'intérêt  $T$  ne survienne pas avant la date  $t$ , c'est-à-dire :

La fonction de survie est par définition le complément à un de la fonction de répartition :

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F_T(t), \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

## 6 Taux de hasard

Le risque instantané (ou taux d'incidence), pour  $t$  fixé caractérise la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps après  $t$ , conditionnellement au fait d'avoir

## 7. Fonction W de Lambert

---

survécu jusqu'au temps  $t$  (c'est-à-dire le risque de mort instantané pour ceux qui ont survécu :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{f(t)'}{1 - F_T(t)}. \quad (1.2)$$

## 7 Fonction W de Lambert

Lambert en 1758 définit une fonction complexe multivaluée appelée fonction de Lambert ( $W$ ) qui est la solution de l'équation suivante

$$W(z) \exp(W(z)) = z. \quad (1.3)$$

Où  $z$  est un nombre complexe. Si  $z$  est un nombre réel sachant que  $z \geq -1/e$  alors  $W(z)$  devient une fonction réelle et elle a deux branches réelles possibles.

La première branche réelle qui a des valeurs dans l'intervalle  $]-\infty, -1]$  c'est la branche négative et notée par  $W_{-1}$ . et la deuxième branche réelle qui a des valeurs dans l'intervalle  $[-1, \infty[$  est appelée la branche principale et notée  $W_0$ . L'émeray ([3]) montre qu'il y a d'autres équations qui peuvent être résolues en termes de la fonction (1,3)  $W$  de Lambert. À cet effet, le lemme suivant, sera essentiel dans notre travail.

**Lemme 7.1** (L'émeray et al.[3]) Soient  $a, b$  et  $c$  des nombres complexes fixés. Par rapport à  $z \in \mathbb{C}$  la solution de l'équation  $z + ab^z = c$  est :

$$z = c - \frac{1}{\log(b)} W(ab^c \log(b)).$$

Où  $W$  est la fonction de Lambert.

**Preuve.** Pour tous nombres complexes  $a, b$  et  $c$  fixés, par rapport à la variable complexe  $z$  on doit résoudre l'équation  $z + ab^z = c$ . Pour cela il faut multiplier les deux côtés de cette équation par  $b^c \log(b)$ , alors l'équation résultante peut être écrite

sous cette forme :

$$(c - z) \log(b) \exp((c - z) \log(b)) = ab^c \log(b). \quad (1.4)$$

Comparent l'équation (1.4) par  $b^c \log(b)$  avec l'équation (1.3). Il est clair que  $(c - z) \log(b)$  est la fonction  $W$  de *Lambert* de l'argument complexe  $ab^c \log(b)$ . Par conséquent, on a

$$W(ab^c \log(b)) = (c - z) \log(b).$$

Ce qui implique le résultat souhaité. Ceci termine la preuve du lemme 1.1. ■

## 8 Fonction Quantile

La fonction quantile d'une variable aléatoire (ou d'une loi de probabilité) est l'inverse de sa fonction de répartition. On appelle fonction quantile de  $X$  la fonction, notée  $Q_X$ , de  $]0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ , qui à  $u \in ]0, 1[$  associé :

$$Q_X(u) = F^{-1}(u) \quad 0 < u < 1. \quad (1.5)$$

## 9 Lois de probabilités usuelles

Dans cette partie on définit quelque lois usuelles parmi les plus utilisées dans notre travail.

### 9.1 Loi de Poisson

La loi de Poisson est une distribution discrète très utile dans l'étude de la survenue dans le temps d'événements homogènes (le nombre d'absents par jour dans une entreprise, le nombre de clients dans une file d'attente durant des laps de temps de même durée).

Une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  (qui est à la fois

## 9. Lois de probabilités usuelles

---

la moyenne et la variance) si :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}; \quad k \in \mathbb{N}.$$

L'espérance mathématique et la variance de  $X$  :

$$E[X] = \text{var}[X] = \lambda.$$

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi gamma est donné par :

$$\log L(x_i, \beta, \eta) = n\lambda + \log \lambda + \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \log(x_i!).$$

L'estimateur  $\hat{\lambda}_{MoM}$  de paramètre  $\lambda$  obtenu par la méthode des moments est :

$$\hat{\lambda}_{MoM} = E[X].$$

## 9.2 Loi Exponentielle

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant  $t$  heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps  $t$ .

Une variable aléatoire continue  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre (d'intensité ou inverse de l'échelle)  $\lambda > 0$  si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On note  $X \rightsquigarrow EXP(\lambda)$ .

La fonction de répartition de  $X$  :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

L'espérance mathématique (ou durée de vie moyenne) et la variance de  $X$  :

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \text{var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

L'estimateur  $\hat{\lambda}_{MoM}$  de paramètre  $\lambda$  obtenu par la méthode des moments est :

$$\hat{\lambda}_{MoM} = \frac{1}{E[X]}.$$

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi exponentielle est donné par :

$$\log L(x_i, \alpha) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n \log x_i.$$

## CHAPITRE 2

# Distribution de Lindley et ses applications

## 1 Introduction

La distribution de Lindley d'un seul paramètre est introduite par Lindley en 1958 comme mélange des deux distributions Exponentielle( $\theta$ ) et Gamma ( $2, \theta$ ). Cette distribution traitée par plusieurs chercheurs pour son usage en modelant des données de vie, et on l'a observé en plusieurs articles que cette distribution a exécuté excellemment.

## 2 Distribution de Lindley

Soient  $Y_1$  et  $Y_2$  deux variables aléatoires indépendantes. Pour  $\theta > 0$ , on considère la variable aléatoire  $X = Y_1$  et  $X = Y_2$  avec les probabilités respectivement  $P_1 = \frac{\theta}{1+\theta}$  et  $P_2 = \frac{1}{1+\theta}$ . ou  $Y_1 \sim exp(\theta)$  et  $Y_2 \sim Gamma(2, \theta)$

La distribution lindley est spécifiée par la fonction de densité suivante :

$$f(x; \theta) = \frac{\theta^2(1+x)e^{-\theta x}}{1+\theta}; \quad x, \theta > 0 \quad (2.1)$$

où la fonction de répartition est donné par :

$$F(x) = 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{1 + \theta} e^{-\theta x}; x > 0, \theta > 0 \quad (2.2)$$

La dérivée première de (2.1) est :

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\theta^2}{1 + \theta} (1 - \theta - \theta x) e^{-\theta x}.$$

Il en résulte que

(i) pour  $\theta < 1$ ,  $\frac{d}{dx} f(x) = 0$  implique que  $x_0 = \frac{1-\theta}{\theta}$  est le point critique unique à laquelle  $f(x)$  est maximisée.

(ii) pour  $\theta \geq 1$ ,  $\frac{d}{dx} f(x) \leq 0$ , c-à-d . $f(x)$  diminue en  $x$  .

**Remarque 2.1** *le mode de cette distribution est :*

$$\text{Mode}(X) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{\theta}, & 0 < \theta < 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

**Théorème 2.1** *Soit  $X \sim \text{Lindley}(\theta)$ . Alors*

$$\text{Mode}(X) < \text{Median}(X) < E(X).$$

**Preuve.** Soient  $M = \text{Mode}(X)$ ,  $m = \text{Median}(X)$  et  $\mu = E(X) = \frac{\theta+2}{\theta(\theta+1)}$ . A partir de la fonction de répartition de la distribution de Lindley, il en résulte que :

$$F(M) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1 + \theta} e^{-(1-\theta)}, & 0 < \theta < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, F(me) = \frac{1}{2}$$

## 2. Distribution de Lindley

---

et

$$F(\mu) = 1 - \frac{\theta^2 + 3\theta + 3}{(1 + \theta)^2} e^{-\frac{\theta + 2}{\theta + 1}}.$$

Notons que  $F(M)$  est une fonction décroissante en  $\theta \in (0, 1)$  et, pour tout  $\theta > 0$ ,  $0 \leq F(M) < 1 - 2e^{-1} < (1/2)$ .

De même,  $F(\mu)$  est une fonction croissante en  $\theta > 0$  et  $(1/2) < 1 - 3e^{-2} < F(\mu) < 1$ .

Enfin, étant donné que  $F(x)$  est une fonction croissante en  $x > 0$  pour tout  $\theta > 0$ , on a  $M < m < \mu$  ■

### 2.1 Moments et mesures connexes

Le  $r^{i\text{eme}}$  moment de la distribution de Lindley est :

$$\mu_r^{\downarrow} = E(X^r) = \frac{r! (\theta + r + 1)}{\theta^r (\theta + 1)}, r = 1, 2, \dots$$

En particulier on a

$$\mu_1^{\downarrow} = \frac{(\theta + 2)}{\theta(\theta + 1)}, \mu_2^{\downarrow} = \frac{2(\theta + 3)}{\theta^2(\theta + 1)}, \mu_3^{\downarrow} = \frac{6(\theta + 4)}{\theta^3(\theta + 1)}, \mu_4^{\downarrow} = \frac{24(\theta + 5)}{\theta^4(\theta + 1)}.$$

Le moment centré de la distribution de Lindley est donné par :

$$\mu_k = E\{(X - \mu)^k\} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \mu_r^{\downarrow} (-\mu)^{k-r}.$$

En particulier on a

$$\mu_2 = \frac{\theta^2 + 4\theta + 2}{\theta^2(\theta + 1)} = \sigma^2, \mu_3 = \frac{2(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2)}{\theta^3(\theta + 1)^3}, \mu_4 = \frac{3(3\theta^4 + 24\theta^3 + 44\theta^2 + 32\theta + 8)}{\theta^4(\theta + 1)^4}.$$

Le coefficient de variation ( $\gamma$ ), le coefficient de d'asymétrie( $\sqrt{\beta_1}$ ) et le coefficient d'aplatissement( $\beta_2$ ) sont :

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\sqrt{\theta^2 + 4\theta + 2}}{\theta + 2}, \\ \sqrt{\beta_1} &= \frac{2(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2)}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \beta_2 &= \frac{3(3\theta^4 + 24\theta^3 + 44\theta^2 + 32\theta + 8)}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^2}.\end{aligned}$$

## 2.2 Fonction de hasard et fonction de survie

Pour la distribution lindley la fonction de taux de hasard est :

$$h(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(X < x + \Delta x \mid X > x)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\theta^2(1+x)}{\theta + 1 + \theta x}. \quad (2.3)$$

et la fonction de survie est :

$$S(x) = 1 - F(x) = \frac{\theta + 1 + \theta x}{1 + \theta} e^{-\theta x}. \quad (2.4)$$

**Remarque 2.2** (i)  $h(0) = f(0) = \frac{\theta^2}{\theta + 1}$ .

(ii) Comme  $\frac{d}{dx}h(x) = \frac{\theta^2(1+x)}{\theta + 1 + \theta x}$ ,  $h(x)$  est une fonction croissante en  $x$  et  $\theta$  en plus  $\frac{\theta^2}{\theta + 1} < h(x) < \theta$ .

### 2.3 Fonction Quantile de la distribution Lindley

La distribution Lindley de paramètre  $\theta$  est spécifiée par sa fonction de répartition définie en (2.2). Il convient de noter qu'elle est continue et strictement croissante de sorte que la fonction de quantile de  $X$  est :

$$Q_X(u) = F_X^{-1}(u), 0 < u < 1.$$

Dans le résultat suivant, on donne une expression explicite de  $Q_X$  en fonction de la fonction  $W$  de Lambert.

**Théorème 2.2** *Pour tout  $\theta > 0$ , la fonction quantile de la distribution Lindley est :*

$$Q_X(u) = -1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} W_{-1} \left( \frac{\theta + 1}{\exp(\theta + 1)} (u - 1) \right), \quad 0 < u < 1, \quad (2.5)$$

Où  $W_{-1}$  désigne la branche négative de la fonction  $W$  de Lambert.

**Preuve.** Pour tout  $\theta$  fixé,  $\theta > 0$ , soit  $u \in (0, 1)$ . On doit résoudre l'équation  $F_X(x) = u$  par rapport à  $x$ , pour tous  $X > 0$  comme suit :

$$(\theta + 1 + \theta x) e^{-\theta x} = (\theta + 1)(1 - u). \quad (2.6)$$

En multipliant par  $-\exp(-\theta - 1)$  l'équation (2.6), on obtient :

$$-(\theta + 1 + \theta x) \exp(-\theta - 1 - \theta x) = (\theta + 1)(u - 1) \exp(-\theta - 1). \quad (2.7)$$

D'après l'équation (2.7), conjointement avec l'équation (1.3), on voit que  $-(\theta + 1 + \theta x)$  est la fonction  $W$  de Lambert de l'argument réel  $(\theta + 1)(u - 1) \exp(-\theta - 1)$ . Alors, on a

$$W \left( \frac{\theta + 1}{\exp(\theta + 1)} (u - 1) \right) = -(\theta + 1 + \theta x), 0 < u < 1. \quad (2.8)$$

Toujours, pour tout  $\theta > 0$  et  $x > 0$  il est immédiat que  $(\theta + 1 + \theta x) > 1$  et il

peut également être vérifié que puisque  $u \in (0, 1)$ . Il pour, en prenant en compte les propriétés de la branche négative de la fonction  $W$  de Lambert a présenté en première chapitre, l'équation (2.8) devient

$$W_{-1} \left( \frac{\theta + 1}{\exp(\theta + 1)} (u - 1) \right) = -(\theta + 1 + \theta x). \quad (2.9)$$

Ce qui implique le résultat. ■

## 2.4 Estimation

### Estimation par la méthode des moments

Étant donné un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$ , de la distribution de Lindley (2.1), l'estimateur des moments ( $MM$ ) de  $\theta$  est :

$$\hat{\theta}_{MM} = \frac{-(\bar{X} - 1) + \sqrt{(\bar{X} - 1)^2 + 8\bar{X}}}{2\bar{X}}, \bar{X} > 0. \quad (2.10)$$

Le théorème suivant montre que l'estimateur  $\hat{\theta}_{MM}$  de  $\theta$  est biaisé.

**Théorème 2.3** *L'estimateur  $\hat{\theta}_{MM}$  de  $\theta$  est positivement biaisée, i.e.  $E(\hat{\theta}) - \theta > 0$ .*

**Preuve.** Soient  $\hat{\theta}_{MoM} = g(\bar{X})$  et  $g(t) = \frac{-(t-1) + \sqrt{(t-1)^2 + 8t}}{2t}$ ,  $\forall t > 0$ .

Comme  $g''(t) = \frac{1}{t^3} \left[ 1 + \frac{3t^3 + 15t^2 + 9t + 1}{[(t-1)^2 + 8t]^{\frac{3}{2}}} \right] > 0$ ,  $g(t)$  est strictement convexe.

Ainsi, par l'inégalité de Jensen, on a  $E(g(\bar{X})) > g[E(\bar{X})]$ . Enfin, étant donné que

$$E(g(\bar{X})) = g(\mu) = g\left(\frac{\theta + 2}{\theta(\theta + 1)}\right) = \theta,$$

## 2. Distribution de Lindley

---

On obtient

$$E\left(\hat{\theta}_{MoM}\right) > \theta.$$

Le théorème suivant donne la loi limite de  $\hat{\theta}_{MM}$ . ■

**Théorème 2.4** *L'estimateur  $\hat{\theta}_{MM}$  de  $\theta$  est convergent et asymptotiquement normal :*

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \theta\right) \xrightarrow{P} N\left(0, \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

*L'intervalle de confiance de  $\theta$  pour un seuil de confiance  $100(1 - \alpha)\%$  est donné par :*

$$\hat{\theta} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n\hat{\sigma}^2}}.$$

Où  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  est le  $(1 - \frac{\alpha}{2})$  percentile de la distribution normale standard.

**Preuve.** Étant donné  $\mu$  est finie,  $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$ .  $g(t)$  est une fonction continue à  $t = \mu$ ,

$g(\bar{X}) \xrightarrow{P} g(\mu)$ , c'est-à-dire  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ . Comme  $\sigma^2 < \infty$ , par le théorème central limite, on a

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow{P} N(0, \sigma^2).$$

En outre, puisque  $g(\mu)$  est différentiable et  $g'(\mu) \neq 0$ , par la méthode Delta, on a :

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}) - g(\mu)) \xrightarrow{P} N\left(0, \left[g'(\mu)\right]^2 \sigma^2\right).$$

Enfin, étant donné que

$$g(\bar{X}) = \hat{\theta}_{MM}, g(\mu) = \theta, \quad \text{et} \quad g'(\mu) = \frac{-1}{2\mu^2} \left[ 1 + \frac{1 + 3\mu}{\sqrt{(\mu - 1)^2 + 8\mu}} \right] = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

■

### Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Soient  $X_i \sim LD(\theta), i = \overline{1, n}$ ,  $n$  variables aléatoires. La fonction de logvraisemblance est :

$$\ln l(x_i; \theta) = 2n \ln \theta - n \ln(\theta + 1) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i + 1) - n\theta \bar{X}.$$

L'estimateurs de la méthode du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_{MV}$  de  $\theta$  est une solution de l'équation :

$$\frac{\partial \ln l(x_i; \beta, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - \bar{X} - \frac{n}{(\theta + 1)} = 0.$$

On obtient

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{-(\bar{X} - 1) + \sqrt{(\bar{X} - 1)^2 + 8\bar{X}}}{2\bar{X}}, \bar{X} > 0.$$

Avec

$$\frac{\partial^2 \ln l(x_i; \beta, \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{2n}{\theta^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(\theta x_i + \theta)^2} < 0.$$

**Remarque 2.3** *L'estimateur de la méthode des moments  $\hat{\theta}_{MM}$  et l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_{MV}$  du paramètre  $\theta$  sont les mêmes.*

## 3 Distribution Poisson–Lindley discrète

Une distribution composée de Poisson peut être obtenue en composant la distribution de Poisson et une distribution due à Lindley. Cette distribution a été introduit par Sankaran [7] pour modéliser des données de comptage.

Supposons que le paramètre  $\lambda$  de la distribution de Poisson à une distribution appartenant à la famille exponentielle de distribution donnée par

$$dF(\lambda) = e^{\lambda\Phi} h(\lambda) B(\Phi) d\lambda$$

### 3. Distribution Poisson–Lindley discrète

---

où

$$h(\lambda) = 1 + \lambda e t \quad B(\Phi) = \frac{[-\Phi]^2}{(1-\Phi)}.$$

Alors la distribution de Poisson composée est :

$$\begin{aligned} P_x(\Phi) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} dF(\lambda) \\ &= \frac{B(\Phi)}{x!} \left[ \int_0^{\infty} e^{(\Phi-1)\lambda} \lambda^x d\lambda + \beta \int_0^{\infty} e^{(\Phi-1)\lambda} \lambda^{x+1} d\lambda \right] \\ &= \frac{\Phi^2}{(1-\Phi)} \left( \frac{1-\Phi+x+1}{(1-\Phi)^{x+2}} \right). \end{aligned}$$

Alors on remplace  $\Phi$  par  $-\theta$  on trouve :

$$P_x(\theta) = \theta^2 \frac{(x+2+\theta)}{(\theta+1)^{x+3}}.$$

La fonction de densité de Poisson-Lindley (*PLD*) est :

$$f_{PLD}(x; \theta) = P_x(\theta) = \theta^2 \frac{(x+2+\theta)}{(\theta+1)^{x+3}}, \quad x = 0, 1, \dots, \theta > 0. \quad (2.11)$$

La fonction de répartition correspondante est :

$$F_{PLD}(x) = 1 - \frac{\theta^2 + 3\theta + 1 - \theta x}{(\theta+1)^{x+3}}, \quad x = 0, 1, \dots, \theta > 0. \quad (2.12)$$

La fonction génératrice de Poisson-Lindley (*PLD*) est :

$$M_X(s) = E(e^{sX}) = \frac{\theta^2}{\theta+1} \frac{2+\theta-s}{(\theta+1-s)^2}.$$

### 3.1 Moments et Mesures Connexes

Soit  $X \rightsquigarrow PLD(\theta)$ , La moyenne et la variance de  $X$  sont :

$$E(X) = \frac{2 + \theta}{\theta(\theta + 1)}, \quad (2.13)$$

$$E(X^2) = \frac{\theta^2 + 4\theta + 6}{\theta^2(\theta + 1)^2}, \quad (2.14)$$

$$Var(X) = \frac{\theta^3 + 4\theta^2 + 6\theta + 2}{\theta^2(\theta + 1)^2}. \quad (2.15)$$

le coefficient d'asymétrie( $\sqrt{\beta_1}$ ) et le coefficient d'aplatissement( $\beta_2$ ) sont :

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{2(\theta + 1)^4(\theta + 2) - \theta^3(\theta + 2)(\theta + 3)}{[2(\theta + 1)^3 - \theta^2(\theta + 2)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\beta_2 = 3 + \frac{2(\theta + 1)^5[(\theta + 3)^2 - 3] - \theta^4(\theta + 2)[(\theta + 4)^2 - 3]}{[2(\theta + 1)^3 - \theta^2(\theta + 2)]^2}.$$

### 3.2 Fonction Quantile de la distribution de Poisson Lindley

Notons  $Q_X$  la fonction quantile de  $X$  défini selon la formule (1.5).(voir[15])

Désormais,  $\log(\cdot)$  désigne le logarithme naturel et  $[t]$  représente le plafond d'un nombre réel  $t$ , qui est,  $t := \inf\{k \in \mathbb{Z} : k \geq t\}$ . Avec la précédente notation, on est en mesure de déclarer ce qui suit.

**Théorème 3.1** *Pour tout  $\theta > 0$ , la fonction quantile de la distribution de Poisson Lindley  $X$  est :*

$$Q_X(u) = -\frac{\theta^2 + 3\theta + 1}{\theta} - \frac{1}{\log(\theta + 1)} W_{-1} \left( \frac{\log(\theta + 1)}{\theta(\theta + 1)^{\frac{(\theta^2 + 1)}{\theta}}} (u - 1) \right), \quad 0 < u < 1. \quad (2.16)$$

**Preuve.** Où  $W_{-1}$  désigne la branche négative de la fonction  $W$  de Lambert.

### 3. Distribution Poisson–Lindley discrète

---

Pour tout  $\theta > 0$ , soit  $u \in (0, 1)$  afin d'obtenir l'expression de  $Q_X$ , on a pour résoudre l'équation  $F_X(x) = u$  par rapport à  $k$ , pour tout  $k \geq 0$ , comme suit :

$$\frac{\theta^2 + 3\theta + 1 + \theta k}{(\theta + 1)^k} = 1 - u, k \geq 0. \quad (2.17)$$

l'équation (2.17) peut être écrit comme suit :

$$k + \frac{(\theta + 1)^3}{\theta} (u - 1) (\theta + 1)^k = - \left( \frac{\theta^2 + 3\theta + 1}{\theta} \right). \quad (2.18)$$

Maintenant, on applique le lemme 1.1 pour résoudre l'équation (2.18) par rapport à  $k$ . Par conséquent, l'égalité suivante est réalisée :

$$W \left( \frac{\log(\theta + 1)}{\theta(\theta + 1)^{\frac{\theta^2 + 1}{\theta}}} (u - 1) \right) = - \left( k + \frac{\theta^2 + 3\theta + 1}{\theta} \right) \log(\theta + 1). \quad (2.19)$$

Voyant maintenant l'équation (2.19). Pour tout  $\theta > 0, k \geq 0$  et  $u \in (0, 1)$  les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(i) \quad \frac{-1}{e} < \frac{\log(\theta + 1)}{\theta(\theta + 1)^{\frac{\theta^2 + 1}{\theta}}} (u - 1) < 0,$$

et

$$(ii) \quad \left( k + \frac{\theta^2 + 3\theta + 1}{\theta} \right) \log(\theta + 1) > 1.$$

En vertu des inégalités (i) et (ii) ci-dessus ainsi que les propriétés de la fonction  $W$  de Lambert, la branche réelle de  $W$  impliqué dans l'équation (2.19) est précisément la branche  $W_{-1}$  négative, ce qui conduit au résultat souhaité. ■

### 3.3 Estimation

#### Maximum de vraisemblance

Étant donné un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$ , de la distribution de Poisson-Lindley discrète (2.11), la fonction de logvraisemblance est :

$$\log l(x_i; \beta, \theta) = 2n \log \theta - n(\bar{x} + 3) \log(1 + \theta) + \sum_{i=1}^n \log [x_i + \theta + 2].$$

Sankaran [7] a montré que l'estimateur de la méthode du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  est une solution de l'équation :

$$\frac{\partial \ln l(x_i, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - n\left(\frac{\bar{x} + 3}{1 + \theta}\right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + \theta + 2} = 0. \quad (2.20)$$

Sankaran [7] a déclaré que la résolution de l'équation (2.20) est équivalente à la résolution d'un polynôme de degré  $(n + 1)$ , et l'équation (2.20) peuvent avoir plusieurs solutions. Dans ce qui suit, on montre que l'équation (2.20) a une solution unique pour tout  $n$ .

**Théorème 3.2** *l'équation (2.20) est équivalent à*

$$\varphi(\theta) = 2n - n\bar{x}\theta - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + 1)\theta}{x_i + \theta + 2} = 0.$$

*La fonction  $\varphi(\theta)$  est strictement décroissante en  $\theta$ , puisque*

$$\varphi'(\theta) = -n\bar{x} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + 1)(x_i + 2)}{(x_i + \theta + 2)^2} < 0.$$

*Comme  $\varphi(0) = 2n$  et  $\varphi(\infty) = -\infty$ , il en résulte que  $\varphi(\theta)$  traversera l'axe  $\theta$  qu'une seule fois, c'est-à-dire il existe un unique  $\hat{\theta}$  tel que  $\varphi(\hat{\theta}) = 0$ .*

### 3. Distribution Poisson–Lindley discrète

---

**Remarque 3.1** Bien qu'efficace de l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}$  mais ce dernier n'est pas facilement obtenu et il peut être suffisant pour des raisons pratiques d'utiliser l'estimation des moments.

#### Méthode des moments

Étant donné un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$ , de la distribution de Poisson-Lindley discrète (2.11), l'estimateur des moments (MM) de  $\theta$  est :

$$\hat{\theta}_{MM} = \frac{-(\bar{X} - 1) + \sqrt{(\bar{X} - 1)^2 + 8\bar{X}}}{2\bar{X}}, \bar{X} > 0. \quad (2.21)$$

Le théorème suivant montre que l'estimateur  $\hat{\theta}_{MM}$  de  $\theta$  est positivement biaisé.

**Théorème 3.3** L'estimateur  $\hat{\theta}_{MM}$  de  $\theta$  est positivement biaisée, c'est-à-dire

$$E(\hat{\theta}) - \theta > 0$$

**Preuve.** Soit  $\hat{\theta} = g(\bar{X})$  et  $g(t) = \frac{-(t-1) + \sqrt{(t-1)^2 + 8t}}{2t} \quad \forall t > 0$ .

Comme  $g''(t) = \frac{1}{t^3} \left[ 1 + \frac{3t^3 + 15t^2 + 9t + 1}{[(t-1)^2 + 8t]^{\frac{3}{2}}} \right] > 0$ ,  $g(t)$  est strictement convexe.

Ainsi, par l'inégalité de Jensen, on a  $E(g(\bar{X})) > g[E(\bar{X})]$ . Enfin, étant donné que

$$E(g(\bar{X})) = g(\mu) = g\left(\frac{\theta + 2}{\theta(\theta + 1)}\right) = \theta,$$

On obtient

$$E(\hat{\theta}_{MM}) > \theta.$$

Le théorème suivant donne la loi limite de  $\hat{\theta}_{MM}$ .

■

**Théorème 3.4** *L'estimateur  $\hat{\theta}_{MM}$  de  $\theta$  est convergent et asymptotiquement normal :*

$$\sqrt{n} \left( \hat{\theta}_{MM} - \theta \right) \xrightarrow{D} N \left( 0, \vartheta^2 (\theta) \right).$$

Où

$$\vartheta^2 (\theta) = \frac{\theta^2 (\theta + 1)^2 (\theta^3 + 4\theta^2 + 6\theta + 2)}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^2}.$$

**Preuve.** Etant donné  $\mu < \infty$ ,  $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$ ,  $g(t)$  est une fonction continue à  $t = \mu$ ,  $g(\bar{X}) \xrightarrow{P} g(\mu)$ , c'est-à-dire  $\hat{\theta}_{MM} \xrightarrow{P} \theta$ . Comme  $\sigma^2 < \infty$ , par le théorème central limite, on a :

$$\sqrt{n} (\bar{X} - \mu) \xrightarrow{P} N (0, \sigma^2).$$

En outre, puisque  $g(\mu)$  est différentiable et  $g'(\mu) \neq 0$ , par la méthode Delta, on a

$$\sqrt{n} (g(\bar{X}) - g(\mu)) \xrightarrow{P} N \left( 0, \left[ g'(\mu) \right]^2 \sigma^2 \right).$$

Enfin, étant donné que

$$g(\bar{X}) = \hat{\theta}_{MM}, g(\mu) = \theta, \quad \text{et} \quad g'(\mu) = \frac{-1}{2\mu^2} \left[ 1 + \frac{1 + 3\mu}{\sqrt{(\mu - 1)^2 + 8\mu}} \right] = -\frac{\theta^2 (\theta + 1)^2}{(\theta^2 + 4\theta + 2)}.$$

En conséquence du théorème 2.6, L'intervalle de confiance de  $\theta$  pour un seuil de confiance  $100(1 - \alpha)\%$  est donné par :

$$\hat{\theta}_{MM} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n\hat{\sigma}^2}}.$$

où  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  est le  $(1 - \frac{\alpha}{2})$  percentile de la distribution normale standard.

■

## 4 Distribution de Deux-Paramètres de Lindley

La distribution de Deux Paramètres de Lindley (*Tow Parameter Lindley (TowPLD)*) avec les paramètres  $\alpha$  et  $\theta$  est définie par sa fonction de densité de probabilité

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} (1 + \alpha x) e^{-\theta x}; \quad x > 0, \theta > 0, \alpha > -\theta. \quad (2.37)$$

Il est facile de voir que si  $\alpha = 1$ , la fonction (2.26) de *TowPLD* réduit à la fonction de distribution de *LD*(2.1) et si  $\alpha = 0$ , elle se réduit à la distribution Exponentielle ( $\theta$ ). La fonction de densité (2.26) de *TowPLD* peut être montrée sous forme de mélange des distributions Exponentielle ( $\theta$ ) et Gamma ( $2, \theta$ ) comme suit :

$$f(x; \alpha, \theta) = p f_1(x) + (1 - p) f_2(x)$$

Où  $p = \frac{\theta}{\theta + \alpha}$ ,  $f_1(x) = \theta e^{-\theta x}$  et  $f_2(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}$ . (pour plus de détails voir. S.Sharma et al.(2013) [?]).

La fonction de répartition correspondante est :

$$F(x) = 1 - \frac{\theta + \alpha + \alpha \theta x}{\theta + \alpha} e^{-\theta x}; \quad x > 0, \theta > 0, \alpha > -\theta. \quad (2.38)$$

Le moment d'ordre  $k$  de la distribution de Deux-Paramètres de Lindley est :

$$\mu_k^l = E(X^k) = \frac{\Gamma(k+1)(\theta + \alpha + \alpha k)}{\theta^k(\theta + \alpha)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

d'où, on a

$$\mu_1^l = \frac{(\alpha + 2\alpha)}{\theta(\theta + \alpha)}, \mu_2^l = \frac{2(\alpha + 3\alpha)}{\theta^2(\theta + \alpha)}, \mu_3^l = \frac{6(\alpha + 4\alpha)}{\theta^3(\theta + \alpha)}, \mu_4^l = \frac{24(\alpha + 5\alpha)}{\theta^4(\theta + \alpha)}.$$

La fonction de logvraisemblance de la distribution de deux-Paramètres de Lindley est :

$$\log L(x; \alpha, \theta) = n \log \theta^2 - n \log(\alpha + \theta) + \sum_{i=0}^n \log(1 + \alpha \theta x_i) - n \theta \bar{X}.$$

### Estimation par la méthode des moments

Étant donné un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$ , de deux-Paramètres de Lindley, les estimateurs des moments  $\hat{\theta}_{MM}$  de  $\theta$  et  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha$  peuvent être obtenus comme suit :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\mu_2'} \left( 2\bar{X} + \sqrt{2} \sqrt{2\bar{X}^2 - \mu_2'} \right), \quad \bar{X} > 0. \quad (2.28)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\theta} - \bar{X}\hat{\theta}^2}{\bar{X}\hat{\theta} - 2}. \quad (2.29)$$

## 5 Distribution de Lindley Modifiée.

Nous nous intéressons ici à la distribution de Lindley modifiée à un paramètre caractérisée par la fonction de répartition (*cdf*),  $F(x)$  donnée par :

$$F(x) = 1 - \left[ 1 + \frac{\theta x}{1 + \theta} e^{-x\theta} \right] e^{-x\theta}, x > 0$$

L'intérêt principal de la distribution  $ML$  et les motivations supplémentaires pour choisir une telle  $w(x)$  seront discutés de manière éparsée dans le présent document seront discutés de manière dispersée dans la suite de l'étude. En outre, des comparaisons sur certains points techniques avec les distributions exponentielle et de Lindley seront présentées dans la sous-section 3.5. Quelques principes de base de la distribution  $ML$  sont présentés ci-dessous. Par différenciation de  $F(x)$ , la fonction de densité de probabilité (*fdp*) correspondante est obtenue comme suit

$$f(x; \theta) = \frac{\theta}{1 + \theta} e^{-2\theta x} [(1 + \theta) e^{\theta x} + 2\theta x - 1], x > 0$$

La fonction de risque(*hrf*) correspondant est donné par

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\theta(\theta x - 1)}{(1 + \theta) e^{\theta x} + \theta x} + \theta \quad x > 0$$

Plusieurs remarques sur les fonctions  $ML$  sont présentées ci-dessous

## 5. Distribution de Lindley Modifiée.

---

**Remarque 5.1** Puisque  $F''(x) = -[\theta^2/(1+\theta)] e^{-2\theta x} [(1+\theta)e^{\theta x} + 4(\theta x - 1)] < 0$  pour  $x > 1/\theta$  la fonction  $F(x)$  est concave en fonction de  $x$  pour tout  $\theta > 0$  et  $x > 1/\theta$ .

**Remarque 5.2** Il est immédiat que  $f(0) = \theta^2/(1+\theta)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Le mode (s) de la distribution  $ML$  est (sont) obtenu(s) en résolvant l'équation  $f'(x) = 0$  c'est-à-dire  $(1+\theta)e^{\theta x} + 4\theta x = 4$ . Une brève étude analytique montre que la distribution  $ML$  est unimodale.

### 5.1 Moments ordinaire

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la distribution  $ML$ , c'est-à-dire, dont la *cdf* est donnée par (3). Introduisons tout d'abord la fonction gamma définie par

$$T(X) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$$

En utilisant (4), pour toute fonction  $Q(x)$  telle que toute l'intégrale à venir existe, on a

$$\begin{aligned} E(Q(X)) &= \int_0^{+\infty} Q(x) f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} Q(x) f_1(x) dx + a \left[ \int_0^{+\infty} Q(x) f_2(x) dx - \int_0^{+\infty} Q(x) f_3(x) dx \right] \end{aligned}$$

En particulier, en utilisant des propriétés bien connues de la fonction gamma, pour tout entier positif  $r$ , le  $r^{ieme}$  moment de  $X$  existe et il est déterminé par

$$\begin{aligned}
 E(X^r) &= \int_0^{+\infty} x^r f(x) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} x^r \theta e^{-\theta x} dx + \frac{1}{2(1+\theta)} \left[ \int_0^{+\infty} x^r (2\theta)^2 x e^{-2\theta x} dx - \int_0^{+\infty} x^r (2\theta) e^{-2\theta x} dx \right] \\
 &= \frac{T(r+1)}{\theta^r} + \frac{1}{2(1+\theta)} \left[ \frac{T(r+2)}{(2\theta)^r} - \frac{T(r+1)}{(2\theta)^r} \right] \\
 &= \frac{1}{\theta^r} \left( 1 + \frac{r}{2^{r+1}(1+\theta)} \right) r!
 \end{aligned}$$

En particulier, les quatre premiers moments de  $X$  sont donnés par :

$$\mu_1^! = \frac{4\theta + 5}{4\theta(\theta + 1)}, \mu_2^! = \frac{4\theta + 5}{2\theta^2(\theta + 1)}, \mu_3^! = \frac{3(19 + 16\theta)}{8\theta^3(\theta + 1)}, \mu_4^! = \frac{3(9 + 8\theta)}{\theta^4(\theta + 1)}$$

Le moment centré de la distribution de Lindley est donné par :

$$\sigma^2 = \mu_2^! - \mu^2$$

En particulier on a

$$\sigma^2 = \frac{(4\theta + 5)(4\theta + 3)}{16\theta^2(\theta + 1)^2}$$

Le  $r^{ieme}$  moment central de  $X$  est donné par :

$$E((x - \mu)^r) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \left( \frac{4\theta + 5}{4\theta(1+\theta)} \right)^k \frac{1}{\theta^{r-k}} \left( 1 + \frac{r-k}{2^{r-k+1}(1+\theta)} \right) (r-k)!$$

## 5. Distribution de Lindley Modifiée.

---

Le coefficient de d'asymétrie( $\sqrt{\beta_1}$ ) et le coefficient d'aplatissement( $\beta_2$ ) sont :

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{1}{\sigma^3} E [(X - \mu)^3] \quad , \quad \beta_2 = \frac{1}{\sigma^4} E [(X - \mu)^4]$$

Le tableau 1 indique les valeurs numériques des quantités ci-dessus, c'est-à-dire  $\mu, E(X^2), E(X^3), E(X^4), \sigma^2, \sqrt{\beta_1}$  et  $\beta_2$ , pour des valeurs sélectionnées de  $\theta$

$\theta$	0.005	0.05	0.5	0.1	1	10	20
$\mu$	249.7512	24.7619	12.27273	2.3333	1.125	0.1022	0.0510
$E(X^2)$	99900.5	990.4762	245.4545	9.3333	2.25	0.0205	0.00510
$E(X^3)$	56955224	56571.43	7022.727	54	6.5625	0.0061	0.0008
$E(X^4)$	43176119403	4297143	267272.7	416	25.5	0.0024	0.0002
$\sigma^2$	37524.81	377.3243	94.8347	3.8888	0.9844	0.0010	0.0025
$\sqrt{\beta_1}$	2.4447	2.1530	1.8551	0.0580	1.5385	20.7620	40.8766
$\beta_2$	8.5175	8.4980	8.4819	8.4612	8.5132	8.8728	8.9311

Pour tout  $t < \theta$  la fonction génératrice de moments de  $X$  est donnée par :

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tx}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tx} \theta e^{-\theta x} dx + \frac{1}{2(1+\theta)} \left[ \int_0^{+\infty} e^{tx} (2\theta)^2 x e^{-2\theta x} - \int_0^{+\infty} e^{tx} 2\theta e^{-2\theta x} \right] \\ &= \frac{\theta}{\theta - t} + \frac{1}{2(1+\theta)} \left[ \frac{(2\theta)^2}{(2\theta - t)^2} - \frac{2\theta}{2\theta - t} \right] \\ &= \frac{\theta}{\theta - t} + \frac{t\theta}{(1+\theta)(2\theta - t)^2} \end{aligned}$$

En adoptant une approche similaire, pour  $t \in \mathbb{R}$ , la fonction caractéristique de  $X$

est donnée par :

$$Q(t) = E(e^{itx}) \frac{\theta}{\theta - it} + \frac{t\theta}{(1 + \theta)(2\theta - it)^2}$$

Introduisons maintenant la fonction gamma incomplète définie par  $\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt, x > 0$  et la fonction indicatrice sur un événement  $A$  notée  $1_A$ . Alors, pour  $t > 0$ , le troisième moment incomplet de  $X$  est donné par

$$\begin{aligned} \mu_r^l(t) &= E(X^r 1_{\{X \leq t\}}) = \int_0^t x^r f(x) \\ &= \int_0^t x^r \theta e^{-\theta x} dx + \frac{1}{2(1 + \theta)} \left[ \int_0^t x^r (2\theta)^2 x e^{-2\theta x} dx - \int_0^t x^r (2\theta) e^{-2\theta x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\theta^r} \left( \gamma(r + 1, \theta t) + \frac{1}{2^{r+1}(1 + \theta)} [\gamma(r + 2, 2\theta t) - \gamma(r + 1, 2\theta t)] \right) \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} \mu_1^l(t) &= \frac{1}{\theta} \left( \gamma(2, \theta t) + \frac{1}{4(1 + \theta)} [\gamma(3, 2\theta t) - \gamma(2, 2\theta t)] \right) \\ &= \frac{1}{\theta} \left( 1 - (1 + \theta) e^{-\theta t} - \frac{1}{4(1 + \theta)} [4\theta^2 t^2 e^{-2\theta t} + 2\theta t e^{-2\theta t} + e^{-2\theta t} - 1] \right) \end{aligned}$$

À partir des moments incomplets, plusieurs quantités liées à la distribution  $ML$  peuvent être exprimées. Par exemple, l'écart moyen autour de  $\mu$  est donné par :

$$\delta_1 = E(|X - \mu|) = 2\mu F(\mu) - 2\mu_1^l(\mu)$$

## 5.2 Paramètre de fiabilité

Nous allons maintenant étudier le paramètre de fiabilité lié à la distribution  $ML$ . Soit  $X_1$  une variable aléatoire suivant la distribution  $ML$  avec le paramètre  $\theta_1 > 0$  et  $X_2$  une variable aléatoire suivant la distribution  $ML$  avec le paramètre  $\theta_2 > 0$ . Nous supposons que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendants. Dans ce cas, un paramètre de fiabilité

## 5. Distribution de Lindley Modifiée.

---

important lié au modèle contrainte-résistance est donné par  $R = P(X_2 < X_1)$  (pour plus de détails, voir Kotz et al. (2003)). Nous l'exprimons en fonction des paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ci-dessous. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 R &= P(X_2 < X_1) = \int_0^{+\infty} F_2(X) f_1(x) dx \\
 &= 1 - \int_0^{+\infty} \left[ 1 + \frac{\theta_2 x}{1 + \theta_2} e^{-\theta_2 x} \right] e^{-\theta_2 x} \frac{\theta_1}{1 + \theta_1} e^{-2\theta_1 x} [(1 + \theta_1) e^{\theta_1 x} + 2\theta_1 x - 1] dx \\
 &= 1 - \frac{\theta_1}{1 + \theta_1} \int_0^{+\infty} e^{-(2\theta_1 + \theta_2)x} [(1 + \theta_1) e^{\theta_1 x} + 2\theta_1 x - 1] dx - \\
 &\quad \frac{\theta_1 \theta_2}{(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)} \int_0^{+\infty} x e^{-2(\theta_1 + \theta_2)x} [(1 + \theta_1) e^{\theta_1 x} + 2\theta_1 x - 1] dx \\
 &= 1 - \frac{\theta_1}{1 + \theta_1} \left( \frac{1 + \theta_1}{\theta_1 + \theta_2} + \frac{2\theta_1}{(2\theta_1 + \theta_2)^2} - \frac{1}{2\theta_1 + \theta_2} \right) - \\
 &\quad \frac{\theta_1 \theta_2}{(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)} \left( \frac{1 + \theta_1}{(\theta_1 + 2\theta_2)^2} + \frac{4\theta_1}{8(\theta_1 + \theta_2)^3} - \frac{1}{4(\theta_1 + \theta_2)^2} \right)
 \end{aligned}$$

En particulier, cette expression peut être intéressante dans un contexte de fiabilité statistique, les estimations de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  donnent une estimation de  $\mathbb{R}$  par substitution.

### 5.3 Statistiques d'ordre extrême

Considérons un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$  de taille  $n$  de la distribution  $ML$  et définissons  $\bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$  alors, par le théorème habituel de la limite centrale,  $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) / \sigma$  se rapproche de la distribution normale standard au fur et à mesure que  $n \rightarrow +\infty$ . Soit maintenant :  $X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$  les maxima de l'échantillon, et  $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$  les minima de l'échantillon. Quelques propriétés asymptotiques de  $X_{n:n}$  et  $X_{1:n}$  sont présentées ci-dessous.

Premièrement, notons que les résultats limites suivants sont valables :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(xt)}{F(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - [1 + \theta x t e^{-\theta x t} / (1 + \theta)] e^{-\theta x t}}{1 - [1 + \theta t e^{-\theta t} / (1 + \theta)] e^{-\theta t}} = x$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - F(x+t)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \theta(x+t) e^{-\theta(x+t)} / (1 + \theta)}{1 + \theta t e^{-\theta t} / (1 + \theta)} e^{-\theta x} = e^{-\theta x}$$

Ainsi, puisque  $F(0) = 0$ , il découle de (Leadbetter et al., 1987, Theorem 1.6.2) qu'il doit exister des constantes de normalisation  $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow 0} p(a_n(X_{n:n} - b_n) \leq x) = \exp(-e^{-\theta x})$$

et

$$\lim_{n \rightarrow 0} p(c_n(X_{n:n} - b_n) \leq x) = 1 - e^{-x}$$

Cela prouve que les distributions asymptotiques de  $X_{n:n}$  et  $X_{1:n}$  sont respectivement de Gumbel et exponentielles.

## 5.4 Comparaison avec la distribution exponentielle et la distribution Lindley

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la remarque 2.3, puisque  $w(x) = e^{-\theta x} \in (0, 1)$  nous avons l'ordre stochastique suivant :

$$G(x) < F(x) \leq H(x)$$

où  $G(x)$  est la fonction de probabilité de la distribution de Lindley avec le paramètre  $\theta$  et  $H(x)$  est la fonction de probabilité de la distribution exponentielle avec le paramètre  $\theta$ . En ce sens, la distribution  $ML$  peut être considérée comme une distribution intermédiaire entre la distribution exponentielle et la distribution de Lindley.

## 5. Distribution de Lindley Modifiée.

---

D'autre part, rappelons que le  $hrf$  de la distribution exponentielle est donné par  $h(x) = \theta$  et le  $hrf$  de la distribution de Lindley est donnée par  $h(x) = \theta^2(1+x)/(\theta+1+x)$ . Dans le premier cas,  $h(x)$  est constante, et dans le second cas,  $h(x)$  est croissante en  $x$ . Pour la distribution  $ML$ ,  $h(x)$  n'est ni constante ni monotone; si  $x$  désigne l'unique point critique de  $h(x)$ ,  $h(x)$  n'est ni constante ni monotone.

Augmente pour  $(0, x_*]$  et diminue pour  $(x_*, +\infty)$

De plus, pour la distribution de Lindley, nous avons toujours  $h(x) \leq \theta$  pour tout  $x > 0$ , alors que dans la distribution  $ML$ ,  $h(x) \geq \theta$  pour tout  $x > 1/\theta$ , et  $h(x) \leq \theta$  si  $x \in (0, 1/\theta]$ . Par ces propriétés immédiates de la  $hrf$ , on peut dire que la distribution  $ML$  est une distribution alternative à un paramètre aux distributions exponentielle et de Lindley, offrant une nouvelle perspective en termes de modélisation.

De plus, le coefficient de l'asymétrie  $\beta_1$  et de l'aplatissement  $\beta_2$  pour la distribution exponentielle sont de 1. Pour la distribution de Lindley,  $\sqrt{\beta_1}$  et  $\beta_2$  sont des fonctions croissantes en  $\theta$ , croissantes en  $q$ . D'après le tableau 1, il est évident que  $\sqrt{\beta_1}$  et  $\beta_2$  de la distribution  $ML$  sont des fonctions décroissantes et croissantes de  $\theta$ . La distribution  $ML$  est donc plus souple que les distributions de Lindley et exponentielle.

Enfin, mentionnons que les distributions asymptotiques de :  $X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$  et  $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$  de la distribution  $ML$  donnée par (5) et (6), respectivement, correspondent à celles des distributions exponentielle et de Lindley.

### 5.5 Estimation

Dans cette section, nous examinons l'inférence pour le modèle  $ML$  via les méthodes des moments et du maximum de vraisemblance.

**Estimation par la méthode des moments**

Soit  $x_1, \dots, x_n$  observations indépendantes de la distribution  $ML$  indépendantes. L'estimation du moment du premier ordre pour  $\theta$  est alors obtenue comme la solution de l'équation suivante :  $\mu = \bar{x}$  en fonction de  $\theta$ , où  $\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$ . Puisque  $\mu = (5 + 4\theta) / [4\theta(1 + \theta)]$  l'estimation du moment pour  $\theta$  est obtenue comme  $\tilde{\theta}^* = g(\bar{x})$  où

$$g(y) = \frac{1 - y + \sqrt{5y + (1 - y)^2}}{2y}$$

On peut alors montrer que  $g''(y) > 0$ , ce qui implique que la version aléatoire de  $\tilde{\theta}$ , disons  $\tilde{\theta}^*$ , est (positivement) biaisée. De plus, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la méthode delta implique que  $\sqrt{n}(\tilde{\theta}^* - \theta)$  converge en distribution vers la distribution normale  $N(0, \sigma^2 [g'(\mu)]^2)$ . Grâce à ce résultat, nous pouvons construire des intervalles de confiance et des tests statistiques impliquant  $\theta$ , entre autres.

**Estimation du maximum de vraisemblance**

Soit  $x_1, \dots, x_n$  un échantillon aléatoire  $n$  de la distribution  $ML$ . Dans ce cas, la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{\theta^n}{(1 + \theta)^n} e^{-2\theta \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n [(1 + \theta) e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1]$$

La fonction de log-vraisemblance est donnée par :

$$l(\theta) = \log [L(\theta)] = n \log(\theta) - n \log(1 + \theta) - 2\theta \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \log [(1 + \theta) e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1]$$

L'estimation du maximum de vraisemblance pour  $\theta$  est obtenue en résolvant  $\partial l(\theta) / \partial \theta = 0$  en fonction de  $\theta$ , c'est-à-dire :

$$\frac{n}{\theta} - \frac{n}{1 + \theta} - 2 \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\theta x_i} (\theta x_i + x_i + 1) + 2x_i}{(1 + \theta) e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1} = 0$$

## 5. Distribution de Lindley Modifiée.

---

Il n'existe pas de solution analytique pour cette équation, mais l'estimation du maximum de vraisemblance peut être déterminée au moins numériquement avec n'importe quelle méthode de calcul. Le maximum de vraisemblance peut être déterminé au moins numériquement avec n'importe quel logiciel mathématique. Désignons l'estimation du maximum de vraisemblance par  $\tilde{\theta}$  et sa version aléatoire par  $\tilde{\theta}^*$ . Il est bien connu que, sous certaines conditions de régularité,  $\tilde{\theta}^*$  est cohérente et asymptotiquement normale, c'est-à-dire, comme  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\sqrt{n}(\tilde{\theta}^* - \theta)$  tend vers la distribution normale avec une moyenne de 0 et une variance de  $l(\theta)^{-1}$  où  $l(\theta)$  représente l'information de Fisher attendue donnée par  $l(\theta) = -E[\partial^2 \log[f(X)]/\partial\theta^2]$ , où  $X$  désigne une variable aléatoire suivant la distribution *ML*. En pratique, sans impact sur la distribution asymptotique, nous pouvons estimer  $l(\theta)$  par  $(1/n) [-\partial^2 l(\tilde{\theta})/\partial^2]$  où

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{n}{(1+\theta)^2} \sum_{i=1}^n \frac{-2\theta(1+\theta)x_i^3 e^{\theta x_i} + (5+\theta)x_i^2 e^{\theta x_i} + 6x_i e^{\theta x_i} + e^{2\theta x_i} + 4x_i^2}{[(1+\theta)e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1]^2}$$

Il est alors possible de construire des ensembles de confiance et des tests statistiques, sont possibles.

**Remarque 5.3** *Contrairement aux distributions exponentielle et de Lindley, l'estimation du moment de  $\theta$  pour la distribution *ML* est différente de l'estimation du maximum de vraisemblance. En effet, nous rappelons que, pour la distribution exponentielle, nous avons  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} = 1/\bar{x}$  alors que, pour la distribution de Lindley, nous avons :*

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} = \left[ -(\bar{x} - 1) + \sqrt{(\bar{x} - 1)^2 + 8\bar{x}} \right] / (2\bar{x})$$

# CHAPITRE 3

## Nouvelle Distribution Composée Exponentielle Lindley

### 1 Introduction

Ce chapitre est basé essentiellement sur la composition des distributions de probabilité telles que celles de Lindley et Exponentielle. La distribution obtenue a été proposée comme une distribution statistique qui offre une contribution significative pour l'analyse de fiabilité et de survie. Des techniques d'estimation sont abordées en se concentrant sur les méthodes du maximum de vraisemblance, des moindres carrés et des moindres carrés pondérés. De plus, une comparaison de ce modèle récent avec d'autres distributions à un paramètre a été construite. Une analyse des résultats ainsi que de leurs implications pratiques sont issues à partir d'une simulation par la méthode de Monte Carlo.

### 2 Génération des données

#### 2.1 Modèle théorique

soit  $X/\lambda$  suivant la distribution exponentielle avec la fonction de densité de probabilité :

## 2. Génération des données

---

$$f(x/\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0,$$

Et  $\lambda/\beta$  ayant *LD* [Lindley (1958)] avec :

$$f(\lambda/\beta) = \frac{\beta^2}{1+\beta}(1+\lambda)e^{-\beta\lambda}, \lambda > 0; \beta > 0,$$

La distribution martingale de  $X$  est appelée nouvelle distribution composée exponentiel de Lindley (*NDCEL*). La fonction de densité de probabilité de  $X$  est obtenue par :

$$f(x) = \frac{\beta^2}{1+\beta} \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^{\infty} (1+\lambda)\lambda e^{-(\beta+x)\lambda} d\lambda$$

En simplifiant, nous obtenons *NDCEL* la fonction de densité de probabilité comme :

$$f(x) = \frac{\beta^2}{1+\beta} \frac{(2+\beta+x)}{(\beta+x)^3}, x > 0; \beta > 0 \quad (3.1)$$

Dev plus, la fonction de distribution cumulative (*FDC*) de *NDCEL* est :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{1+\beta} \frac{x[x(1+\beta) + (2+\beta)\beta]}{(\beta+x)^2} \\ &= \frac{x}{\beta+x} + \frac{\beta x}{(1+\beta)(\beta+x)^2} \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction de fiabilité (survie) correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned} R(x) &= 1 - F(x) = 1 - \left[ \frac{x}{\beta+x} + \frac{\beta x}{(1+\beta)(\beta+x)^2} \right] \\ &= \frac{(\beta+x)^2(1+\beta) - x(1+\beta)(\beta+x) - \beta x}{(\beta+x)^2(1+\beta)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

### 3 Caractéristique de forme

Dans cette section , nous discutons des caractéristiques de forme comme la fonction de densité, la fonction de taux de risque et la fonction de survie de la nouvelle distribution.

#### 3.1 Forme de la fonction de densité

Nous pouvons voir a partir de l'équation (3.1) que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\beta^2}{1 + \beta} \frac{(2 + \beta + x)}{(\beta + x)^3} \right] = \frac{\beta^2(2 + \beta)}{(1 + \beta)\beta^3}$$

**Théorème 3.1** *la foction de densité de la nouvelle distribution comosée exponentielle Lindley données par (3.1) est décroissante pour  $\beta > 0$ .*

**Preuve.** Le logarithme de (3.1) est :

$$\begin{aligned} \log f(x) &= \log \left[ \frac{\beta^2}{1 + \beta} \frac{(2 + \beta + x)}{(\beta + x)^3} \right] \\ &= C + \log(2 + \beta + x) - 3 \log(\beta + x) \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante à valeurs réelles. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log f(x) &= \frac{d}{dx} \log \left[ \frac{\beta^2}{1 + \beta} \frac{(2 + \beta + x)}{(\beta + x)^3} \right] \\ &= \frac{1}{2 + \beta + x} - \frac{3}{\beta + x} \\ &= -\frac{2(3 + \beta + x)}{(\beta + x)(2 + \beta + x)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

for  $\beta = 1$ , nous observons que  $\frac{d}{dx} \log f(x) < 0$

Donc, dans ce cas  $f(x)$  est decroissante pour tout  $x$ . ■

### 3. Caractéristique de forme

---

## 3.2 Forme du taux de risque et du risque inversé

### Fonction de taux

Les fonctions de taux de risque et la fonction de risque inversé correspondant à (3.1) et (3.2) sont données respectivement :

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\left[ \frac{x}{\beta+x} + \frac{\beta x}{(1+\beta)(\beta+x)^2} \right]}{\left[ \frac{(\beta+x)^2(1+\beta) - x(1+\beta)(\beta+x) - \beta x}{(\beta+x)^2(1+\beta)} \right]} \quad (3.4)$$

et

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\left[ \frac{\beta^2}{1+\beta} \frac{(2+\beta+x)}{(\beta+x)^3} \right]}{\left[ \frac{x}{\beta+x} + \frac{\beta x}{(1+\beta)(\beta+x)^2} \right]} \\ &= \frac{\beta^2(2+\beta+x)}{x(\beta+x)[x(1+\beta) + \beta(2+\beta)]} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Le comportement de  $h(x)$ , lorsque  $x \rightarrow 0$  et  $x \rightarrow \infty$  respectivement données par :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\beta^2(2+\beta+x)}{(\beta+x)[(\beta+x)^2(1+\beta) - x(1+\beta)(\beta+x) - \beta x]} \right] = \frac{2+\beta}{\beta(1+\beta)}$$

$$\text{and : } \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$$

De plus, nous pouvons trouver  $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = 0$ . Les fonctions de taux de risque  $h(x)$ , et la fonction de risque inversé  $r(x)$  de *NDCEL* pour certain choix de  $\beta$  sont indiqués.

Pour établir le résultat principal concernant la forme de la fonction de risque  $h(x)$  dans (3.4), nous utilisons le lemme suivant de Glaser (1980)

**Lemme 3.1** *supposent que  $f(t)$ , pour  $t > 0$ , soit la fonction de densité d'une variable aléatoire continue à la valeurs réelles positives,  $f'(t)$  soit la dérivée de  $f(t)$ , et*

### 3. Caractéristique de forme

$\eta(t) = -f'(t)/f(t)$ . Alors, s'il existe  $t_0$  tels que  $\eta'(t) > 0 \forall t \in (0, t_0)$ ,  $\eta'(t) = 0$  and  $\eta'(t) < 0 \forall t \in (t_0, \infty)$ . La fonction de risque correspondante a  $f(t)$  est soit une fonction inverse, soit une fonction décroissante de  $t$ .

**Théorème 3.2** La fonction de taux de risque de NDCEL dans (3.4) est décroissante.

**partie a** : La fonction de taux de risque inversé de NDCEL dans (3.4) est décroissante.

**Partie b** : La fonction de taux de risque inversée de NDCEL dans (3.5) est décroissante.

**Preuve. Partie a** : pour la fonction de densité de probabilité dans (3.1), nous avons :

$$\eta(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2(3 + \beta + x)}{(\beta + x)(2 + \beta + x)}$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{2(6 + 4\beta + 4x + \beta^2 + x^2 + 2\beta x + 2x + 2\beta)}{(\beta + x)^2(2 + \beta + x)^2} \\ &= \frac{2(6(1 + \beta + x) + \beta^2 + x^2 + 2\beta x)}{(\beta + x)^2(2 + \beta + x)^2} \\ &= \frac{2(6(1 + \beta + x) + (\beta + x)^2)}{(\beta + x)^2(2 + \beta + x)^2} < 0 \end{aligned}$$

On a  $\eta'(x) < 0$ . Donc partie a découle du lemme.

**Partie b** : On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log r(x) &= \frac{1}{2 + \beta + x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{\beta + x} - \frac{1}{x(\beta + x) + \beta(2 + x)} \\ &= \frac{-2 - \beta}{(2 + \beta + x)[x(1 + \beta) + \beta(2 + \beta)]} - \frac{1}{x} - \frac{1}{\beta + x} < 0 \end{aligned}$$

pour tous  $\beta$ . Par conséquent, la fonction de taux de risque inversée est décroissante.

■

## 4 Estimation

Dans cette section , nous considerons l'estimation des paramètres inconnus de  $NDCEL(x; \beta)$  par les méthodes du maximum de vraisemblance , des moindres carrés et des moindres carrés pondérés.

### 4.1 Estimation du maximum de vraisemblance

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la  $NDCEL(x; \beta)$ . Alors, la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(x, \beta) = \left( \frac{\beta^2}{1 + \beta} \right)^n \frac{\prod_{i=1}^n (2 + \beta + x_i)}{\prod_{i=1}^n [(\beta + x_i)]^3}$$

La fonction de vraisemblance du paramètre  $\beta$  est :

$$\ln L(\beta, x) = 2n \ln \beta - n \ln(1 + \beta) + \sum_{i=1}^n \ln(2 + \beta + x_i) - 3 \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\beta + x_i} \right) = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L(\beta, x)}{d\beta} &= \frac{d \ln \left[ \left( \frac{\beta^2}{1+\beta} \right)^n \frac{\prod_{i=1}^n (2+\beta+x_i)}{\prod_{i=1}^n [(\beta+x_i)]^3} \right]}{d\beta} \\ &= \frac{2n}{\beta} - \frac{n}{1+\beta} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2+\beta+x_i} \right) - 3 \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\beta+x_i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \ln L(\beta, x)}{d\beta^2} &= \frac{d^2 \ln \left[ \frac{\left(\frac{\beta^2}{1+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (2+\beta+x_i)}{\prod_{i=1}^n [(\beta+x_i)]^3} \right]}{d\beta^2} \\ &= \frac{-2n}{\beta^2} + \frac{n}{(1+\beta)^2} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{(2+\beta+x_i)^2} \right) + 3 \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{(\beta+x_i)^2} \right) \quad (\text{3.8}) \end{aligned}$$

Pour obtenir l'équation non linéaire maximale de  $\beta$ , nous pouvons maximiser (3.6) directement par rapport à  $\beta$  ou nous pouvons résoudre l'équation non linéaire donnée par (3.7). Notez que l'équation non linéaire maximale de  $\beta$  ne peut pas être résolue analytiquement, cependant, des techniques d'itération numérique, telles que l'algorithme de Newton-Raphson ou de la méthode de notation de Fisher peuvent être utilisées.

## 4.2 Estimation des moindres carrés et des moindres carrés pondérés

Nous présentons une méthode d'estimation basée sur la régression pour les paramètres inconnus de *NDCEL*. La méthodes des moindres carrés ordinaires et la méthode des moindres carrés pondérés ont été initialement proposées par Swain (1988) pour estimer les paramètres des distributions bêta.

Supposons que  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , soit un échantillon aléatoire de taille  $n$  provenant d'une fonction de distribution  $F(\cdot)$  et que  $X_1 < X_2 < \dots < X_n$ , soit la statistique ordonnée de l'échantillon  $n$ . Les estimateurs des moindres carrés peut être obtenue en minimisant :

$$\sum_{i=1}^n \left[ F(X_{1:n}) - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

Par rapport au paramètre inconnue de  $F(\cdot)$ . Par conséquent dans le cas de la *NDCEL*, l'estimateur des moindres carrés de  $\beta$ , disons  $\hat{\beta}_{LSE}$  peut être obtenue en

#### 4. Estimation

---

minimisant :

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{1+\beta} \frac{X_{i:n}[X_{i:n}(1+\beta) + (2+\beta)\beta]}{(\beta + X_{i:n})^2} - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

Par rapport à  $\beta$ .

Alors que les estimateurs des moindres carrés pondérés des paramètres inconnues peuvent être obtenus en minimisant :

$$\sum_{i=1}^n w_i \left[ F(X_{i:n}) - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

Par rapport aux paramètres inconnus, où :

$$w_i = \frac{1}{\text{var}[F(X_{i:n})]} = \frac{(1+n)^2(n+2)}{i(n-i+1)}$$

Par conséquent, dans le cas de *NDCEL*, les moindres carrés pondérés obtenus de  $\beta$ , disons  $\hat{\beta}$  peuvent être obtenus en minimisant :

$$\sum_{i=1}^n w_i \left[ \frac{1}{1+\beta} \frac{X_{i:n}[X_{i:n}(1+\beta) + (2+\beta)\beta]}{(\beta + X_{i:n})^2} - \frac{i}{n+1} \right]^2$$

Par rapport à  $\beta$ .

Les solutions numériques de ces estimateurs seront obtenues par une étude de simulation.

### 4.3 Méthodes d'estimation

La méthode du moindre carré pondéré est utilisée pour estimer les paramètres des méthodes univariées continues comme alternative à la méthode de maximum de vraisemblance. L'échantillon uniforme d'un échantillon aléatoire de taille  $n$  à partir de la distribution proposée peut être défini par :

$$D_1 = F(x_l) - F(x_I - 1)$$

---

## 5. Estimation du paramètre contrainte -résistance $R = P(X > Y)$

où  $D_I$  désigne les espacements uniformes,  $F(x_0) = 0$ ,  $F(x_{n+1}) = 1$  et  $\sum_{i=1}^{n+1} D_I = 1$ .

Les estimateurs des paramètres du modèle proposé peuvent être obtenus en maximisant :

$$G = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \log(D_I)$$

## 5 Estimation du paramètre contrainte -résistance

### $R = P(X > Y)$

En fiabilité, le modèle contrainte-résistance décrit la durée de vie d'un composant qui a une résistance aléatoire  $x$  soumis à une contrainte aléatoire  $Y$ . Le composant tombe en panne à l'instant où la contrainte qui lui est appliquée dépasse la résistance et le composant fonctionnera chaque fois que  $X > Y$ .

Dans cette section, nous considérons le problème de l'estimation de  $R = P(X > Y)$ , sous l'hypothèse que  $X \sim NDCEL(\beta_1)$ ,  $Y \sim NDCEL(\beta_2)$ ,  $X$  et  $Y$  sont distribués indépendamment. On voit alors facilement que :

$$\begin{aligned} R &= P(X > Y) = \int_0^{\infty} (X > Y | Y = y) f_y dy \\ &= \int_0^{\infty} [F_x(y)] f_y dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\beta_2^2}{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)} \times \frac{y[y(1 + \beta_1) + (2 + \beta_1)\beta_1][2 + \beta_2 + y]}{(\beta_1 + y)^2 (\beta_2 + y)^3} dy \\ &= H(\beta_1, \beta_2). \end{aligned}$$

Pour calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $R$ , obtenons d'abord les  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Supposons que  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , soient les valeurs observées d'un échantillon aléatoire de taille  $n$  de  $NDCEL(\beta_1)$  and  $y_1, y_2, \dots, y_m$  les valeurs observées d'un

## 5. Estimation du paramètre contrainte -résistance $R = P(X > Y)$

---

échantillons aléatoire de taille  $m$  de  $NDCEL(\beta_2)$ . Par conséquent, la fonction de logarithme de vraisemblance de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  est données par :

$$\begin{aligned} \ln L(\beta_1, \beta_2) &= 2n \ln \beta_1 - n \ln(1 + \beta_1) + \sum_{i=1}^n \ln(2 + \beta_1 + x_i) \\ &\quad - 3 \sum_{i=1}^n \ln(\beta_1 + x_i) + 2m \ln \beta_2 - m \ln(1 + \beta_2) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \ln(3 + \beta_2 + y_i) - 3 \sum_{i=1}^m \ln(\beta_2 + y_i) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , disons  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$ , sont les solutions simultanées des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{2n}{\beta_2} - \frac{m}{1 + \beta_2} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2 + \beta_2 + y_i} - 3 \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta_1 + y_i} &= 0 \\ \frac{2m}{\beta_2} - \frac{m}{1 + \beta_2} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2 + \beta_2 + y_i} - 3 \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta_2 + y_i} &= 0 \end{aligned}$$

Une fois que nous obtenons  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$ , nous calculons l'estimateur de  $R$  comme :

$$\hat{R} = H(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

Ici, l'approche du maximum de vraisemblance ne donne pas d'estimateur explicite pour les *estimateurs* de  $R$ . En pratique, il faut utiliser des méthodes numériques pour les trouver, ces méthodes sont bien implémentées dans les packages *MATLAB* et *R*.

## 6 Algorithme de génération et étude de simulation de Monte Carlo

Dans cette section ,nous proposons deux algorithmes différents pour générer les données aléatoires  $x_1, x_2, \dots, x_n$  à partir du *NDCEL*. De plus, une étude de simulation est donnée pour comparer les performances de différents estimateurs utilisant les différentes méthodes d'estimation.

### 6.1 Algorithmes

Deux algorithmes proposés pour générer les données aléatoires  $x_1, x_2, \dots, x_n$  , à partir de la *NDCEL* sont les suivants :

(i) Le premier algorithme est basé sue la génération de données aléatoires à partir de la *LD* et de la distribution gamma conditionnelle.

(ii) La deuxieme algorithme est basé sue la génération de données aléatoires à partir de la fonction de distribution de données inverse de la *NDCEL*.

#### Algorithmes 6.1 (Distribution conditionnelle)

1. Générer  $y_1 \sim Lindley(\beta), i = 1; 2, \dots, n$ ;
2. Générer  $X_i \setminus \lambda_i \sim \exp(\alpha, \lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ ;

En utilisant l'algorithme 6.1, nous pouvons voir Ghitany (2008) pour générer à partir de la distribution de Lindley

1. Générer  $U_i \sim Uniforme(0, 1), i = 1, \dots, n$ ;
2. Générer  $V_i \sim Exponentiel(\beta), i = 1, 2, \dots, n$ ;
3. Générer  $W_i \sim Gamma(2, \beta), i = 1, 2, \dots, n$ ;
4. si  $U_i \leq p = \beta/(\beta + 1)$ , alors poser  $\lambda_i = V_i$ , sinon poser  $\lambda_i = W_i, i = 1, 2, \dots, n$  .

#### Algorithmes 6.2 (CDF Inverse )

1. Générer  $U_i \sim Uniforme(0, 1), i = 1, \dots, n$ ;

## 7. Fiabilité floue

---

2. Définir

$$X_i = \frac{\beta}{(1 + \beta) \left[ \left(1 + \frac{\beta}{x_i}\right) U_i - 1 \right]} - \beta$$

Notez que  $X$  est la racine de l'équation  $F(X_i) = U_i$ .

### 6.2 Etude de simulation de Monte Carlo

Une simulation est effectuée pour comparer les performances du maximum de vraisemblance, des moindres carrés et des moindres carrés pondérés un estimateur du paramètre inconnu  $\beta$  via la simulation de Monte Carlo est donnée ici. Pour un  $n$  et un  $\beta$  donnés, nous avons généré l'échantillon  $x_1, x_2, \dots, x_n$  à partir du modèle *NDCEL*, puis obtenu les estimations en utilisant les méthodes d'estimation précédentes.

Nous avons utilisé l'algorithme 6.1 pour générer des données à partir du *NDCEL*. L'expérience de simulation a été répétée  $N = 10,000$  fois chacune avec des tailles d'échantillon  $n = 50, 100, 200$  et  $\beta = 0.5, 1.5, 2.5$ . Notez que les valeurs sélectionnées de  $\beta$  sont données (0.1, 0.5, 1, 2, 6) pour le paramètre de forme de la densité. Les deux quantités suivantes ont été examinées dans cette étude de Monte Carlo :

(i) Biais moyen du *MLE* du paramètre  $\hat{\theta} = \beta$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta} - \theta),$$

(ii) Erreur quadratique moyenne (*MSE*) du *MLE* du paramètre  $\hat{\theta} = \beta$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta} - \theta)^2.$$

## 7 Fiabilité floue

Soit  $T$  une variable aléatoire continue qui représente le temps de défaillance d'un système (composant). La fiabilité floue peut alors être calculée en utilisant la proba-

bilité floue dans la formule :

$$R_F(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} u(x)f_{NDCEL}(x)dx , 0 \leq t \leq x < \infty,$$

où,  $u(x)$  est une fonction d'appartenance qui décrit le degré auquel chaque élément d'un univers donné appartient à un ensemble flou. Supposons maintenant que  $u(x)$  est :

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq t_1 \\ \frac{x - t_1}{t_0 - t_1}, & t_1 < x < t_2 \geq 0 \\ 1, & x \geq t_2 \end{cases}$$

Pour  $u(x)$ , par l'analyse informatique de la fonction des nombres flous , la durée de vie  $x(\gamma)$  peut être obtenue et correspond à une certaine valeur de  $\gamma - Cut$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ , peut être obtenue par  $u(x) = \gamma \rightarrow \frac{x - t_1}{t_0 - t_1} = \gamma$ , alors :

$$\begin{cases} x(\gamma) \leq t_1, & \gamma = 0 \\ x(\gamma) = t_1 + \gamma(t_2 - t_1), & 0 < \gamma < 1 \\ x(\gamma) \geq t_2, & \gamma = 1 \end{cases}$$

Par conséquent les valeurs de fiabilité floue peuvent être déterminer pour toutes les valeurs de  $y$ . La fiabilité floue de  $NDCEL$  est déterminer par la fiabilité floue et défini comme suit :

$$R_F(t) = \frac{(\beta + t_1)^2(1 + \beta) - t_1(1 + \beta)(\beta + t_1) - \beta t_1}{(\beta + t_1)^2(1 + \beta)} - \frac{(\beta + x(\gamma))^2(1 + \beta) - x(\gamma)(1 + \beta)(\beta + x(\gamma)) - \beta x(\gamma)}{(\beta + x(\gamma))^2(1 + \beta)}$$

alors  $R_F(t) = 0$ .

## 7. Fiabilité floue

---

### 7.1 Valeurs numériques de la fiabilité floue

Dans cette sous section, nous avons obtenue une comparairson entre la fiabilité traditionnelle et la fiabilité floue, ou la fiabilité traditionnelle est une fonction de survie comme :

$$R(x) = \frac{(\beta + x)^2(1 + \beta) - x(1 + \beta)(\beta + x) - \beta x}{(\beta + x)^2(1 + \beta)}$$

Le Tableau 1 présente la comparaison , les observation suivantes sont basées sur les résultats :

- Lorsque la valeur de coupure  $\gamma$  est augmentée, la fiabilité floue augmente.
- Lorsque le  $t_2$  le l'intervalle de la fonction d'appartenance est augmenté; la fiabilité floue augmente.
- Lorsque le  $t_1$  diminue, la fiabilité floue augmente, et vice versa.
- La fiabilité traditionnelle avec  $t_2$  est inférieur a la fiabilité traditionnelle avec  $t_1$  l'algorithme d'estimation floue produit une série de tirages à partir de *NDCEL* comme dans lalgorithme 1.

Tableau 1 :Fiabilité traditionnelle et floue avec des valeurs différentes

					$R_F$		
$\beta$	$t_1$	$t_2$	$R(t_1)$	$R(t_2)$	0.25	0.5	0.9
0.1	0.001	1	0.9811	0.0157	0.8813	0.9408	0.9630
	0.05	2	0.4646	0.0063	0.4280	0.4493	0.4573
1	0.01	1.5	0.9852	0.2800	0.3619	0.5379	0.6820
	0.2	3	0.7638	0.1562	0.3622	0.4976	0.5933
3	0.1	1	0.9599	0.7031	0.0797	0.1475	0.2373

Tableau 2 :Estimations du paramètres et mesures de qualité d'ajustement dans le premier ensemble de données

	Obs	Lind( $\theta$ )	Exp( $\gamma$ )	NCEL( $\beta$ )
[0, 2]	37	43.634	29.926	37.426
[2, 4]	5	2.285	10.457	4.614
[4, 6]	2	0.0814	3.654	1.5862
[6, 8]	1	0.002	1.723	1.260
[8, 10]	1	0.00001	0.239	1.113
$\chi^2$		6.499	9.777	0.2009

**Algorithmes 7.1 : Algorithme d'estimation floue**

- **Entrée** : valeurs initiales de l'intervalle de temps  $(t_1, t_2)$  et  $\gamma$  ou  $0 < \gamma < 1$
- **Calculer** :  $x(\gamma) = t_1 + \gamma(t_2 - t_1)$
- Pour tous méthode, faire :
  - \***définir** ;  $i = 1$ , estimer paramètre comme  $\beta$
  - \***Calculer**

$$\widehat{R}_F(t) = \frac{(\beta + t_1)^2(1 + \beta) - t_1(1 + \beta)(\beta + t_1) - \beta t_1}{(\beta + t_1)^2(1 + \beta)} - \frac{(\beta + x(\gamma))^2(1 + \beta) - x(\gamma)(1 + \beta)(\beta + x(\gamma)) - \beta x(\gamma)}{(\beta + x(\gamma))^2(1 + \beta)}$$

- Fin**

## 8 Application et comparaison

Dans cette section nous présentons l'application de la *NDCEL* à deux ensembles de données réelles pour illustrer sa flexibilité.

Tableau 3 : Comparaison entre les distributions de Lindley, Exponentiel, de Zeghdoudi et NCEL

## 8. Application et comparaison

---

Temps de survie $m = 3.2$	Obsfréq	Lindley $\hat{\theta} = 0.50$	Exp $\hat{\theta} = 0.30$	Zeghdoudi $\hat{\theta} = 0.6$	NCELD $\hat{\beta} = 4.2$
[0, 2]	34	27.30	33.90	30.05	33.54
[2, 4]	16	22.10	20.50	19.81	15.75
[4, 6]	11	12.15	7.43	10.05	9.10
[6, 8]	7	7.28	6.67	7.02	5.91
[8, 10]	4	3.17	3.50	3.07	4.15
<i>Totale</i>	92	92	92	92	92
$\chi^2$		3.046	2.854	1.085	1.005

**Le premier ensemble de données :** Correspond aux temps de réparation pour 46 pannes d'un récepteur de communications aéroporté. Les données sont présentées dans le tableau 2.

**Le deuxième ensemble de données :** Représente des données réelles sur les temps de survie (en jours) de 72 individus algériens infectés par le corona virus présentées dans le tableau 3, à partir duquel nous comparons la distribution proposée avec les distributions de Lindley.

Les résultats montrent que la distribution *NCELD* offre le meilleur ajustement aux données réelles. Elle obtient la plus faible valeur de la statistique  $\chi^2$ , ce qui signifie qu'elle reflète avec plus de précision le comportement réel avec des défaillances. Elle constitue donc une alternative plus souple et efficace que les lois classiques dans le domaine de la modélisation de la fiabilité.

---

## Conclusion

Ce travail introduit une nouvelle distribution de durée de vie associée à un paramètre, qui est défini comme la distribution d'une variable aléatoire  $X$  suivant la loi exponentielle avec un paramètre  $\lambda$ . On suppose que  $X$  est une variable aléatoire suivant la distribution exponentielle avec un paramètre  $\lambda$ , et que ce dernier est lui-même une variable aléatoire suivant la distribution de Lindley. Elle est appelée distribution composée exponentielle de Lindley. Ses caractéristiques et ses usages sont étudiés. Des formules mathématiques explicites pour certaines de ses propriétés statistiques fondamentales, comme la fonction de distribution. L'estimation du paramètre unique de la distribution *NDCEL* est réalisée à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. La qualité de l'ajustement de la distribution *NDCEL* par rapport à d'autres distributions concurrentes est évaluée pour deux ensembles de données réels. Il est observé que la distribution *NDCEL* se distingue par son efficacité à représenter des données discrètes surdispersées grâce à une structure supérieure flexible, ce qui en fait un outil statistique pertinent et puissant pour l'analyse de données réelles en fiabilité et d'autres domaines appliqués. Ainsi cette distribution est plus performante et efficace que d'autres distributions concurrentes.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Asgharzadeh , Hassan S. Bakouch, L. Esmaeili , Pareto Poisson–Lindley distribution and its application, *Journal of Applied Statistics*, pp. 1–18 (2013).
- [2] D. V. Lindley, Fiducial distributions and Bayes’theorem. *Journal of the Royal Society, series B*, 20, 102-107 (1958).
- [3] E.M.Lémeray,Racines de quelques équations transcendantes. Intégration d’une équation aux différences mêlées. Racines imaginaires, *Nouvelles Ann. Math.* (1897) 540-546.
- [4] H. Zeghdoudi, S. Nedjar (2016a). Gamma Lindley distribution and its application. *Journal of Applied Probability and Statistics Vol. 11*, N° 1.
- [5] H. Zeghdoudi, S. Nedjar (2016b). On Gamma Lindley Distribution : Properties and Simulations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **298** :167-174.
- [6] H. Zeghdoudi, S. Nedjar (2016).On Poisson Gamma Lindley distribution :Properties and Applications. Submitted
- [7] M. Sankaran, The discrete Poisson-Lindley distribution. *Biometrics*, 26, 145-149 (1970)
- [8] M. E. Ghitany, B. Atieh, S. Nadarajah (2008a). Lindley distribution and its applications. *Math. Comput. Simulation* , 78, pp. 493-506 .

- 
- [9] M.E. Ghitany, D.K. Al-Mutairi, and S. Nadarajah, Zero-truncated Poisson–Lindley distribution and its application, *Math. Comput. Simulation* 79, pp. 279–287 (2008).
- [10] P. Jodrá (2010). Computer generation of random variables with Lindley or Poisson–Lindley distribution via the Lambert W function. *Mathematics and Computers in Simulation (MATCOM)*, Vol. **81**, issue **4**, pages 851-859.
- [11] R. E. Glaser, Bathtub and related failure rate characterizations. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 75, 667-672 (1980).
- [12] R. Shanker and A. Mishra, A quasi lindley distribution. *African Journal of Mathematics and computer science research*. vol. 6(4), pp.64-71 (2013).
- [13] R. Shanker, S. Sharma, R. Shanker. (2013). A two-parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data. *Applied Mathematics*, vol. 4, pp. 363-368.
- [14] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey, D.E. Knuth (1996). On the Lambert W function, *Adv. Comput. Math.* **5** 329–359
- [15] Zakerzadah H, Dolati A. Generalized Lindley distribution. *J. Math. Ext.* 3(2) :13-25 (2010).
- [16] A. Asgharzadeh, H. S. Bakouch et L. Esmaeili, Distribution de Pareto Poisson-Lindley avec applications, *J. Appl. Stat.*, 40 (2013), 1717 à 1734.
- [17] E. Altun, Une nouvelle distribution discrète à un paramètre avec régression associée et modèles autorégressifs, *Math. Slovaca*, 70(2020), 979-994.
- [18] A. Bertie et K. McConway, M345 Méthodes statistiques, Unité 11 : Calcul statistique III, Milton Keynes : Open University, 16 (1987).
- [19] D. Bhati, P. Kumawat et E. Gomez-Déniz, Un nouveau modèle de comptage généré à partir de trans-famille exponentielle muette avec une application aux données sur les soins de santé, *Comm. Statist. Méthodes théoriques*, 46(2017), 11060–11076.

- [20] W. Bodhisuwan et S. Sangpoom, La distribution de Lindley pondérée discrète. Dans les Actes de la Conférence internationale sur les mathématiques, les statistiques et leurs applications, Banda Aceh, Indonésie, (2016), 4–6.
- [21] L. Cheng, S. R. Geedipally et D. Lord, Le modèle linéaire généralisé de Poisson-Weibull pour l'analyse données sur les accidents de véhicules à moteur, *Safety Science*, 54 (2013), 38-42.
- [22] C. Chesneau, L. Tomy et J. Gillariose, Une nouvelle distribution de Lindley modifiée avec des propriétés et demandes, *Int. j. stat. manag. Syst.*, 24(2021), 1383-1403.
- [23] E. G. Düeniz, Une nouvelle distribution discrète : propriétés et applications dans les soins médicaux, *J. Appl. Stat.*, 40(2013), 2760–2770.
- [24] Y. Gencturk et A. Yigiter, Numéro de revendication de modélisation à l'aide d'un nouveau modèle de mélange : binôme négatif distribution gamma, *J. Stat. Comput. Simul.*, 86 (2016), 1829-1839.
- [25] M. E. Ghitany, D. K. Al-Mutairi et S. Nadarajah, Distribution de Poisson-Lindley tronquée zéro et son application, *Mathematics and Computers in Simulation*, 79 (2008), 279-287.
- [26] M. E. Ghitany, B. Atieh et S. Nadarajah, La distribution de Lindley et son application, *Math. Comput. Simulation*, 78 (2008), 493 à 506.
- [27] M. E. Ghitany et D. K. Al-Mutairi, Méthodes d'estimation pour la distribution discrète de Poisson-Lindley, *J. Stat. Comput. Simul.*, 79 (2009), 1-9.
- [28] E. Gómez-Düniz, J. M. Sarabia et N. Balakrishnan, Une distribution : extensions et applications actuarielles, *Bulletin ASTIN : Le Journal de l'AAI*, 42 (2012), 655–678.
- [29] R. Grine et H. Zeghdoudi, Sur la distribution quasi-Lindley de Poisson et ses applications, *Journal of Méthodes statistiques appliquées modernes* 16(2017), 21.
- [30] D. J. Hand, F. Daly, A. D. Lunn, K. J. McConway et E. O. Ostrowski, Un livre manuel de petites données Sets, cRc Press, Londres : Chapman and Hall, 1993.

- [31] T. Imoto, C. M. Ng, S. H. Ong et S. Chakraborty, Un binôme modifié de type Conway-Maxwell-Poisson distribution et ses applications, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 46(2017), 12210–12225.
- [32] D. V. Lindley, Distributions de repère et théorème de Bayes, *Journal de la Royal Statistical Society, série B (Méthodologique)*, 20 (1958), 102-107.
- [33] D. Lord et S. R. Geedipally, La distribution binomiale-Lindley négative comme outil d'analyse du crash données caractérisées par une grande quantité de zéros, *Accident Analysis and Prevention*, 43 (2011), 1738-1742.
- [34] E. Mahmoudi et H. Zakerzadeh, Distribution généralisée de Poisson-lindley, *Communications in Statistiques-Théorie et méthodes*, 39(2010), 1785–1798.
- [35] M. Mohammadpour, H. S. Bakouch et M. Shirozhan, modèle Poisson-Lindley INAR (1) avec applicationtions, *Braz. J. Probab. Stat.*, 32 (2018), 262 à 280.
- [36] J. Rodriguez-Avi, A. Conde-Sánchez, A. J. Sáez-Castillo, M. J. Olmo Jiménez et A. M. Martinez-Rodriguez, Un modèle de régression de Waring généralisé pour les données de comptage, *Comput. Étatiste. Analyse des données*, 53(2009), 3717–3725.
- [37] A. J. Sáez-Castillo et A. Conde-Sánchez, Un modèle de régression hyper-Poisson pour les applications sur-dispersées et données de comptage sous-dispersées, *Comput. Étatiste. Analyse des données*, 61 (2013), 148 à 157.
- [38] M. Sankaran, La distribution discrète de Poisson-Lindley, *Biometrics*, 26 (1970), 145-149.
- [39] R. Shanker et A. Mishra, Une distribution de Poisson-Lindley à deux paramètres, *International journal of Statistiques et systèmes*, 9 (2014), 79-85.
- [40] R. Shanker et A. Mishra, Une distribution quasi de Poisson-Lindley, *J. Indian Statist. Assoc.*, 54 (2016), 113–125.
- [41] R. Shanker et A. Mishra, Une distribution de Lindley à deux paramètres, *Statistiques en transition nouvelle série*, 14(2013), 45–56.
- [42] R. Shanker et A. Mishra, Une distribution quasi Lindley, *African Journal of Mathematics and Computer Recherche scientifique*, 6 (2013), 64-71.

- [43] R. Shanker, S. Sharma et R. Shanker, Une distribution de Poisson Lindley discrète à deux paramètres, *Journal de l'Association éthiopienne de statistique*, 21 (2012), 15-22.
- [44] R. Shanker, S. Sharma et R. Shanker, Une distribution de Lindley à deux paramètres pour la modélisation de l'attente  $e$  et  $t$  de la données sur les temps de survie, *Appl. Math.*, 4 (2013), 363-368.
- [45] R. Shanker et A. L. Tekie, Une nouvelle distribution quasi de Poisson-Lindley, *International Journal of Statistics et Systems*, 9 (2014), 87-94.
- [46] R. Shanker et A. G. Amanuel, Une nouvelle distribution quasi Lindley, *International Journal of Statistics et Systems*, 8 (2013), 143-156.
- [47] G. Shmueli, T. P. Minka, J. B. Kadane, S. Borle et P. Boatwright, Une distribution utile pour l'ajustement données discrètes : renaissance de la distribution de Conway-Maxwell-Poisson, *J. Roy. Étatiste. Soc. Ser. C*, 54 (2005), 127-142.
- [48] M. M. Shoukri, M. H. Asyali, R. VanDorp et D. Kelton, La régression gaussienne inverse de Poisson modèle dans l'analyse des données de comptage en grappes, *Journal of Data Science*, 2 (2014), 17-32.
- [49] W. Wongrin et W. Bodhisuwan, Modèle linéaire généralisé de Poisson-Lindley pour les données de dénombrement, *J. Appl.Stat.*, 44 (2017), 2659 à 2671.
- [50] H. Zeghdoudi et S. Nedjar, Sur la distribution de Poisson pseudo Lindley : propriétés et applications, *Journal des probabilités et des sciences statistiques*, 15 (2017), 19-28.
- [51] H. Zamani, N. Ismail et P. Faroughi, Version univariée exponentielle pondérée de Poisson et régression modèle avec applications, *J. Appl. Math. Stat.*, 10 (2014), 148-154.
- [52] H. Zakerzadeh et A. Dolati, Distribution de Lindley généralisée, *J. Math. Ext.*, 3 (2009), 13-25.
- [53] H. Zeghdoudi et S. Nedjar, Une pseudo distribution de Lindley et son application, *Afr. Stat.*, 11 (2016), 923-932.

- [54] H. Zeghdoudi et S. Nedjar, Sur la distribution gamma de Lindley : propriétés et simulations, *J. Comput. Appl. Math.*, 298 (2016), 167 à 174.
- [55] S. Nedjar et H. Zeghdoudi, Nouvelle distribution composée : propriétés, distribution gonflée et application cations, *J. Agric. Stat. Sci.*, 16(2020), 519-526.
- [56] T. BELHAMRA et H.Zeghdoudi et V. Raman ; Nouvelle distribution composée exponentielle Lindley, *J. Agric. Stat. Sci.*, 18 N2,pp 755\_766 2022.