

Table des matières

Résumé(Arabe)	iii
Abstract	iv
Résumé	v
Remerciements	vi
Introduction	vii
1 Rappel sur le Mouvement Brownien	1
1.1 Vecteurs gaussiens	2
1.2 Processus stochastiques	3
1.3 Mouvement Brownien	5
1.3.1 Martingales	7
1.3.2 Quelques propriétés du mouvement Brownien stan- dard :	9
1.3.3 Propriété de Markov	9
1.4 Intégrale stochastique	9
1.4.1 Prolongement de l'intégrale stochastique	15
1.4.2 Semi-martingale	16
1.4.3 Formule d'Itô	18
2 Généralités sur l'espérance sous linéaire	20
2.1 Espérance sous linéaire	20
2.1.1 Représentation d'une espérance sous-linéaire	22
2.1.2 Distribution et indépendance	23
2.1.3 Distribution G -normale	27
2.1.4 Théorème de la Limite Centrale	31

3	G–Mouvement Brownien et G–intégrale d’Itô	32
3.1	G –Mouvement Brownien	32
3.1.1	Existence du G –mouvement Brownien et G –espérance conditionnelle	35
3.2	G –Intégrales stochastiques	39
3.2.1	Processus de variation quadratique	44
3.2.2	G –formule d’Itô	50

ملخص

في هذا العمل نقدم مفهوم فضاء الأمل الرياضي التحت خطي حيث نتطرق إلى الأمل الرياضي الغير خطي الناتج عن معادلة حرارية غير خطية و نناقش أيضا G -التوزيع العادي. مع هذا التوزيع الغير خطي يمكننا تعريف G -الأمل الرياضي في إطار فضاء الأمل الرياضي الغير خطي الذي من خلاله تكون عائلة المتغيرات العشوائية عبارة عن G -حركة براو نية و وجد أيضا الحساب الستوكاستيكي بما في ذلك التكامل G -ايتو.

الكلمات المفتاحية :

فضاء الأمل الرياضي الغير الخطي، G -الأمل الرياضي، G -حركة براو نية ، التكامل G - ايتو.

Abstract

In this work, We describe a new framework of a sublinear expectation space then we introduce a notion of nonlinear expectation, G -expectation generated by a nonlinear heat equation and we discuss the notion of G -normal distribution. With this nonlinear distribution we can introduce our G -expectation under which the canonical process is a G -Brownian motion. We then establish the related stochastic calculus, especially stochastic integrals of Ito's type with respect to G -Brownian motion and its quadratic variation.

Key words : Nonlinear expectation space, G -expectation, G -Brownian Motion, G -Itô integral.

Résumé

Dans ce travail, on décrit un nouveau cadre d'espace d'espérance sous linéaire et on introduit la notion d'espérance non linéaire générée par l'équation de chaleur non linéaire, on discutera ainsi la notion de la G -normale distribution. Avec cette distribution non linéaire on introduit la G -espérance sous laquelle le processus canonique est un G -mouvement Brownien. Ensuite on établit le calcul stochastique associé, en particulier les intégrales stochastiques de type Itô par rapport au G -mouvement Brownien et sa variation quadratique.

Mots clés : Espace d'espérance non linéaire, G -espérance, G -mouvement Brownien, G -intégrale d'Itô.

Remerciements

C'est avec une profonde émotion que je rends grâce au bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage d'achever ce modeste travail .

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Madame Grabsia Imen. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs ; plus précisément Mme. Benseguir et Mme. Zidani et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi. Je remercie mes sœurs et mes frères pour leurs encouragements.

Enfin, je remercie mes amis Said et Amar qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Introduction

Depuis la publication du travail de Choquet [5], la théorie d'espérance non linéaire a suscité un grand intérêt chez les chercheurs pour ces applications potentielles dans les problèmes d'incertitude et ces nombreux outils riches, souples et élégants. C'est aussi le point de départ d'une nouvelle théorie du calcul stochastique qui nous donne un nouvel aperçu pour caractériser et pour calculer les différents types des risques financiers.

En particulier, Peng [9] a étudié le théorème de représentation d'une espérance sous-linéaire qui peut être exprimée comme un supremum des espérances linéaires et a établi la théorie fondamentale de la G -espérance [16], où G est la fonction génératrice d'une équation de la chaleur non linéaire. La notion de G -espérance s'est développée très récemment et a ouvert la voix à l'introduction de variables aléatoires G -normales, du G -mouvement Brownien et plus généralement des G -intégrales stochastiques de type Itô, en vertu de laquelle Peng [18, 22] a introduit également la G -normale distribution ainsi que le théorème de la limite centrale et le concept du G -mouvement Brownien correspondant. Peng dans [20] a systématiquement développé le calcul stochastique sous la G -espérance.

Contrairement au mouvement Brownien standard qui est construit dans un espace d'espérance linéaire où une telle supposition de linéarité n'est pas faisable dans de nombreux domaines d'applications car beaucoup de phénomènes incertains ne peuvent pas être bien modélisés en utilisant ces espérances [11], le G -mouvement Brownien se base essentiellement sur la G -espérance qui peut prendre l'incertitude en considération d'une façon systématique, belle et robuste.

Brièvement parlant, le G -mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus continu à accroissements stationnaires et indépendants à l'identique de la G -normale distribution, ce qui signifie qu'il peut caractériser l'incertitude de la volatilité, il a une nouvelle structure très riche et intéressante qui généralise non trivialement celle du cas classique. Par conséquent le calcul stochastique correspondant a été établie, notamment les intégrales

stochastique d'Itô et le processus de variation quadratique $\langle B_t \rangle_{t \geq 0}$ qui lui est associé [19]. Un phénomène très intéressant du G -mouvement Brownien est que son processus quadratique n'est généralement pas un processus déterministe, mais un processus stochastique qui a également des accroissements indépendants qui sont identiquement distribués. On souligne ici que la définition du G -mouvement Brownien est cohérente avec celle du modèle classique dans le sens où il n'y a pas de volatilité incertaine.

Récemment, beaucoup de chercheurs s'intéressent aux applications des G -intégrales stochastiques d'Itô qui sont de plus en plus large [29]. Par conséquent, Panyu [15] a introduit les G -intégrales stochastiques multiples d'Itô en vertu de la G -espérance. La difficulté principale réside dans le fait que le G -espérance est intrinsèque dans le sens où elle n'est pas définie sur un espace de probabilité linéaire donné, ceci nous a donné espoir de développer davantage l'analyse stochastique.

Lié a cette difficulté de la G -espérance, il ya beaucoup d'outils dans le calcul stochastique classique d'Ito qui n'ont pas encore traduit à la G -analyse stochastique, notamment l'inégalité générale de Burk-Davis-Gundy. En outre, Gao [8] a prouvé cette dernière pour les G -intégrales d'Itô sur l'espace G -espérance [2].

Le manuscrit est composée de 3 chapitres.

Dans le premier chapitre on va faire un rappel sur le mouvement Brownien . ce rappel contient quelques définitions concernant : vecteurs gaussiens le processus stochastique mouvement Brownien et l integrale stochastique

Ainsi, dans le chapitre 2 on rappelle les notations de bases et les préliminaires de l'espérance sous linéaire et les espaces d'espérance sous linéaire associés. On donne aussi le théorème de représentation de l'espérance sous linéaire et certaines définitions qu'on utilise par la suite à savoir les notions de distribution et d'indépendances en vertu de l'espérance sous linéaire.

En fin , dans le chapitre 3 on introduit le concept du G -mouvement Brownien et les G -intégrales stochastiques de type Itô passant par les définitions et les propriétés nécessaires, ainsi que le processus a variation quadratique associé.

Chapitre 1

Rappel sur le Mouvement Brownien

Ce chapitre est consacré à une brève présentation du mouvement Brownien, Pour plus de détails voir [11; 12]. Le nom du mouvement Brownien vient du botaniste Robert Brown. Brown a découvert le mouvement Brownien en regardant dans un microscope où il a remarqué le mouvement rapide et irrégulier des particules de pollen en suspension dans de l'eau. Cependant, avant lui on pensait que les particules étaient vivantes. Une autre théorie expliquait que le mouvement des particules était dû à la différence de température entre l'eau et le milieu ambiant provoquant l'évaporation de l'eau, ainsi qu'aux courants d'air. Brown (1828) réfuta ces théories et établit que les particules étaient inanimées. Il expliqua que la matière était composée de petites particules, appelées molécules actives, qui montrent un mouvement rapide et irrégulier, dont l'origine vient des particules. Puis au début des années 1900, le mouvement Brownien fut caractérisé de la façon suivante :

- Le mouvement est très irrégulier, composé de translations et de rotations, la trajectoire ne semble pas avoir de tangentes.
- Deux particules semblent bouger de façon indépendantes, même si elles sont très proches.
- Le mouvement est d'autant plus actif que les particules sont petites.
- La composition et la densité des particules n'ont pas d'influence.
- Le mouvement est d'autant plus actif que le fluide n'est pas trop visqueux.
- Le mouvement est plus actif en température haute.
- Le mouvement est sans fin.

En 1905, la théorie cinétique, expliquant que le mouvement Brownien des particules microscopiques est dû aux bombardements des molécules du fluide, semble la plus plausible. La mise en évidence du mouvement Brownien comme processus stochastique est dû indépendamment au mathématicien français Louis Bachelier (1900) et Albert Einstein en (1905). Bachelier dans sa thèse *Théorie de la spéculation*

avait pour but la modélisation de la dynamique des actifs boursiers et son application au calcul de prix d'option. Il obtient la loi du mouvement Brownien à un instant donné. Il met surtout en évidence le caractère markovien du mouvement Brownien : le déplacement d'une particule Brownienne après un instant t ne dépend que de l'endroit où elle était à l'instant t . Par ailleurs, Einstein, qui ignorait l'existence de ce débat, formula une théorie quantitative en 1905 du mouvement Brownien. Einstein réussit à expliquer la nature du mouvement et donna la valeur du coefficient de diffusion (sous certaines hypothèses). La méthode d'Einstein repose sur des considérations de la mécanique statistique qui le conduit à l'équation de la chaleur puis à la densité gaussienne, solution fondamentale de cette équation. L'existence du mouvement Brownien en tant que processus stochastique a été établie de façon rigoureuse par Wiener en 1923. Paul Lévy manipulera cet objet en entamant une étude du comportement de ses trajectoires dans les années 1930 - 1960. En 1944, Itô construit l'intégrale stochastique et développa le calcul stochastique [12; 2].

1.1 Vecteurs gaussiens

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité complet.

Définition 1.1.1 *On dit qu'une variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une variable aléatoire gaussienne ou normale de paramètres (m, σ^2) , ($m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$) si sa fonction de densité f_x est donnée par*

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

Dans ce cas, sa loi P_x est donnée par $\forall A \in \beta_{\mathbb{R}}; P_x(A) = \int_A f_x(x) dx$ et on note $X \sim N(m, \sigma^2)$

Remarque 1.1.1 *Lorsque $\sigma = 0$, X est une variable constante i.e.*

$$X = mP - p.s$$

Définition 1.1.2 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire gaussien si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont gaussiennes i.e.

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^n a_i X_i.$$

est une variable aléatoire réelle gaussienne.

Exemple 1.1.1 Si X et Y sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes alors (X, Y) et $(X - Y, X + Y)$ sont des vecteurs gaussiens.[2]

1.2 Processus stochastiques

Un processus stochastique est un modèle mathématique qui permet de décrire l'évolution d'un système qui dépend du temps et du hasard.

Définition 1.2.1 Soit T un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} . Un processus stochastique (X_t) dans \mathbb{R}^d ($d \geq 1$) est une famille de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d indexée par le temps T :

- Si $T \subset \mathbb{N}$ ou $T \subset \mathbb{Z}$, on dira que le processus est à temps discret.
- Si $T \subset \mathbb{R}_+$ ou $T \subset \mathbb{R}$, on dira que le processus est à temps continu.

Définition 1.2.2 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $\omega \in \Omega$ et (X_t) est un processus alors l'application $t \longrightarrow X(t, \omega)$ s'appelle trajectoire de (X_t) en ω . Les tribus jouent un rôle très important dans l'étude des processus stochastiques car elles représentent l'information disponible et permettent de traduire les notions de passé, présent et futur.

Définition 1.2.3 Une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de sous tribus de \mathcal{F} tel que

$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s, \forall t \leq s$ s'appelle une filtration. Cette filtration est dite complète si $\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathcal{F}_t$ contient tous les ensemble nigligeables \mathbb{N} de $\mathcal{F} : (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ représente l'information disponible à la date t .

Définition 1.2.4 *Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est adapté à la Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable. Généralement on prend $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ où $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \geq 0} F_t)$ la tribu engendré par $\cup_{t \geq 0} F_t$. Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est toujours adapté à sa filtration naturelle définie par :*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$$

Quand $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration, la σ -algèbre $\cap_{h \geq 0} \mathcal{F}_{t+h}$ est \mathcal{F}_{t+} . Si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ alors la filtration est dite continue à droite. \mathcal{F}_{t-} est la σ -algèbre qui contient toutes les σ -algèbres F_{t-h} pour $h > 0$.

Définition 1.2.5 *Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus croissant si $X_0 = 0$ et si $t \rightarrow X_t$ est une fonction croissante, c'est à dire*

$$\forall t \leq s \quad X_t < X_s \quad p.s.$$

Définition 1.2.6 *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit à variation bornée sur $[0, t]$ si*

$$\text{Sup} \sum |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \leq K$$

le sup étant pris sur les sous divisions $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t : A$ présent, nous donnons trois critères pour comparer deux processus stochastiques.

Définition 1.2.7 *Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique. Les lois de dimension finie du processus X sont les lois des vecteurs du type $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ où $n \geq 1$ et $t_1, \dots, t_n \in T$. On dit que deux processus $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ ont même loi s'ils ont les mêmes lois de dimension finie .*

Définition 1.2.8 *Soient $X = (X_t)_{t \in T}$; $Y = (Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques.*

1 : On dit que Y est une modification de X si

$$\forall t \in T, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 :$$

2 : On dit que les processus X et Y sont indistinguables si

$$\mathbb{P}(\forall t \in T, X_t = Y_t) = 1, \text{ on note } X \cong Y$$

Proposition 1.2.1 Soient T un intervalle de \mathbb{R} , $X = (X_t)_{t \in T}$ et $Y = (Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques continus alors :

X et Y sont indistinguables $\Leftrightarrow X$ est une modification de Y .

Définition 1.2.9 Un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est un processus gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes i.e.

$\forall n_1, \forall t_1 < t_2 < \dots, t_n \in T, (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

Définition 1.2.10 On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants si :

$\forall n_1, \forall t_1, \dots, t_n \in T, X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Définition 1.2.11 Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ s'appelle base stochastique ou espace probabilisé filtré.[2]

1.3 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est le plus célèbre et le plus important des processus stochastiques. Il est un exemple frappant des relations fructueuses qui unissent par moment les mathématiques et la physique et il joue un rôle central dans la théorie des processus aléatoires.[2]

Définition 1.3.1 Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique de dimension $d \geq 1$, défini sur une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ que l'on supposera (\mathcal{F}_t) -adapté. $(B_t)_{t \geq 0}$ est dit mouvement Brownien de dimension d (réel si $d = 1$) si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) $(B_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendant du passé, c'est à dire, pour $t, h > 0$, la variable aléatoire $B_{t+h} - B_t$ est indépendante de la tribu \mathcal{F}_t .

2) Pour tout $t, h \geq 0, B_{t+h} - B_t$ suit la loi normale $N(0, hC)$ où C est une matrice symétrique inversible, c'est à dire la densité de $B_{t+h} - B_t$ est :

$$f(x) = \frac{1}{(1\pi)^{h^c} \det C} e^{-\frac{1}{2}x(h^c)^{-1}x}, x \in \mathbb{R}^d$$

3) Presque toute les trajectoires sont continues, c'est à dire : $\mathbb{P}(\omega : t \rightarrow Bt(\omega))$ n'est pas continue) = 0. Lorsque $B_0 = x, x \in \mathbb{R}^d$ presque surement, on dira que le mouvement Brownien est issu de x .

Lorsque $C = Id$ ($C = 1$ si $d = 1$) et $B_0 = 0$ presque surement, on dira que le mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ est standard.

Remarque 1.3.1 Si $(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{F}_t^x)$ est la filtration naturelle de x , alors dans ce cas, les notions d'indépendances par rapport au passé et à accroissements indépendants coïncident. On dit que (B_t) est un \mathcal{F}_t -mouvement Brownien si B_t est un processus continu, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, vérifiant :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq s \leq t, E(e^{iu(B_t - B_s)} / \mathcal{F}_s) = \exp\{-u^2(t - s)/2\}$$

Le mouvement Brownien possède de nombreuses bonnes propriétés, en effet :

Proposition 1.3.1 Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors :

a) Symétrie :

Le processus $(-B) = (-B_t)_{t \geq 0}$ est encore un mouvement Brownien.

b) Changement d'échelle (scaling) :

Soit $\lambda > 0$: Le processus $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t \geq 0}$ avec $B_t^\lambda = (1/\lambda)B_{\lambda^2 t}$ est encore un mouvement Brownien.

c) Propriété de Markov simple :

Pour $s \geq 0$, posons $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ et $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$: Alors $B^{(s)} = (B_t^{(s)})_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de \mathcal{F}_s .

Définition 1.3.2 Soit (\mathcal{F}_t) une filtration et $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une application. on dit que T est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si $\forall t \in \mathbb{R}_+, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Définition 1.3.3 Soit T un temps d'arrêt, posons $\mathcal{F}_\infty = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. On appelle tribu des évènements antérieurs à T et on note \mathcal{F}_T la tribu

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

Remarque 1.3.2 *On vérifie facilement que \mathcal{F}_T est une tribu et que, si T est constant et égal à t alors T est un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.*

Proposition 1.3.2 *Une constante positive est un temps d'arrêt .
Si T est un temps d'arrêt, T est \mathcal{F}_t -mesurable.*

Si T et S sont des temps d'arrêt, $T \wedge S$ est un temps d'arrêt.
Si T et S sont des temps d'arrêt, tels que $S \leq T$; on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

1.3.1 Martingales

On suppose donné une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

Définition 1.3.4 *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit martingale, (resp. sous martingale, sur martingale) si :*

- 1) (X_t) est (\mathcal{F}_t) -adapté
- 2) $X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \forall t \geq 0$, c'est à dire : $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$
- 3) $\forall t, h \geq 0, \mathbb{E}(X_{t+h} | \mathcal{F}_t) = X_t$ (resp. $\geq X_t, \leq X_t$) presque sûrement.

Remarque 1.3.3 *L'ensemble des martingales est un espace vectoriel.*

Si $X_t = a$ une constante, alors (X_t) est une martingale.

Proposition 1.3.3 *Le processus $(M_t) : M_t = B_t^2 - t$ est une martingale.*

Preuve. Comme B_t est \mathcal{F}_t -mesurable, alors B_t^2 est mesurable donc $M_t = B_t^2 - t$ est \mathcal{F}_t -mesurable. Ce qui implique que (M_t) est (\mathcal{F}_t) -adapté.

2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t^2) &= \mathbb{E}[B_t^4 - 2tB_t^2 + t^2] \\ &= \mathbb{E}[B_t^4] - 2t\mathbb{E}[B_t^2] + \mathbb{E}[t^2] \\ &< \infty \end{aligned}$$

Donc $M_t \in L^2(\Omega)$.

3) On a

$$\mathbb{E}[(B_{t+h} - B_t)^2 | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[(B_{t+h} - B_t)^2] = h$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_{t+h} - B_t)^2 | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[B_{t+h}^2 | \mathcal{F}_t] - 2\mathbb{E}[B_{t+h} \cdot B_t | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[B_t^2 | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[B_{t+h}^2 | \mathcal{F}_t - B_t^2] \\ &= \mathbb{E}[B_{t+h}^2 | \mathcal{F}_t] - E[B_t^2 | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[B_{t+h}^2 - B_t^2 | \mathcal{F}_t] = h \end{aligned}$$

On doit montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{t+h} | t) &= M_t. \\ \mathbb{E}[(M_{t+h} - M_t)^2 | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[B_{t+h}^2 - (t+h) - B_{t+h}^2 | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[B_{t+h}^2 - h - B_t^2 | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

■

Remarque 1.3.4 Si B_t est un mouvement Brownien, alors $\exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2})_{t \geq 0}$ est une martingale.

Définition 1.3.5 (Martingale locale)

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ une base stochastique, $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu. On dit que X est une \mathcal{F}_t -martingale locale, s'il existe une famille de temps d'arrêt $\{T_n, n \geq 1\}$, telle que

(i) La suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est croissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$ p.s.

(ii) Pour tout n , le processus $X^{T_n} I_{\{T_n > 0\}} = (X_t^{T_n} I_{\{T_n > 0\}})_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale uniformément intégrable.

Théorème 1.3.1 Soit X une martingale locale continue. Il existe un unique processus croissant et continu, $\langle X, X \rangle$, nul en 0, tel que $X^2 - \langle X, X \rangle$ soit une martingale locale. La classe des martingales locales est strictement plus large que celle des martingales continues, cependant on a :

Proposition 1.3.4 i) Toute martingale continue est une martingale locale.

ii) Une martingale locale positive est une surmartingale.

iii) Une martingale locale bornée est une martingale.[2]

1.3.2 Quelques propriétés du mouvement Brownien standard :

Variation quadratique du mouvement Brownien

Définition 1.3.6 *La variation quadratique du mouvement Brownien est la limite :*

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} |B(t_i) - B(t_{i-1})|^2, \Delta = \max\{t_i - t_{i-1}\}$$

qui existe dans l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et vaut la constante T .

1.3.3 Propriété de Markov

Définition 1.3.7 *La fonction aléatoire $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov par rapport à \mathcal{F} , si pour $s \geq 0; t \geq 0$ et tout borélien A de \mathbb{R}^d on a :*

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in A | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in A | X_t)$$

Cette dernière égalité signifie que la loi de X_{t+s} sachant \mathcal{F}_t ne dépend que de X_t . "La loi du futur ne dépend du passé que par le présent".

1.4 Intégrale stochastique

Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; (\mathcal{F}_t) sa filtration naturelle i.e. $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$. Le mouvement Brownien n'étant pas à variation bornée, on ne peut pas s'appuyer sur la théorie de l'intégration classique

$$\int_0^t H_s dB_s$$

où H est un processus stochastique continu. C'est pour cette raison qu'on construit une nouvelle intégrale, appelée l'intégrale d'Itô.

Définition 1.4.1 *On appelle processus simple tout processus satisfaisant les conditions suivantes :*

1) $\alpha \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

2) α admet comme représentation

$$\alpha = \sum_k \alpha t_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}$$

où t_k est \mathcal{F}_t -mesurable et $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ est une subdivision de \mathbb{R}_+ ($\alpha_t(\omega) = \sum \alpha t_k(\omega) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(t)$). Soit S l'ensemble des processus simple, alors S est un espace vectoriel.

Définition 1.4.2 Soit $\alpha \in S$: On appelle *intégrale stochastique* de α par rapport à un mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ la variable aléatoire

$$\int_0^t \alpha_s dB_s = \sum_k \alpha t_k (B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t}).$$

Proposition 1.4.1 L'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes :

a) $\alpha \rightarrow \int_0^t \alpha_s dB_s$ est linéaire.

b) Le processus $(\int_0^t \alpha_s dB_s)_{t \in [0, T]}$ est à trajectoires continues.

c) Le processus $(\int_0^t \alpha_s dB_s)_{t \in [0, T]}$ est adapté à $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$.

d) $\mathbb{E} \left[\int_0^t \alpha_s dB_s \right] = 0$ et $Var(\int_0^t \alpha_s dB_s) = \mathbb{E} \left[\int_0^t \alpha_s^2 ds \right]$.

e) On a pour $0 \leq s \leq t \leq T$, $\mathbb{E}[\int_s^t \alpha_u dB_u | \mathcal{F}_s^B] = 0$ et $\mathbb{E}[(\int_s^t \alpha_u dB_u)^2 | \mathcal{F}_s^B] = \mathbb{E}[\int_s^t \alpha_u^2 du | \mathcal{F}_s^B]$

Proposition 1.4.2 Soit $\alpha \in S$ et soit $(M_t) = (\int_0^t \alpha_s dB_s)$ alors (M_t) est une martingale et on a

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \alpha_s dB_s \right)^2 = \mathbb{E} \left(\int_0^t \alpha_s^2 ds \right)$$

Remarque 1.4.1 L'égalité

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \alpha_s dB_s \right)^2 = \mathbb{E} \left(\int_0^t \alpha_s^2 ds \right) \Leftrightarrow \|M_t\|_{L^2(\Omega)}^0 = \|\alpha\|_{L^2(\Omega \times [0,t])}^0$$

signifie que l'application $\varphi \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une isométrie

a) Si $\alpha \in \mathcal{S}$, donc

$$\alpha = \sum \alpha_{t'_k}(\omega) \mathbb{I}_{[t'_k, t'_{k+1}[}$$

où (t'_k) est la subdivision obtenue à l'aide de la subdivision (t_k) et .

$$*M_t = \int_0^t \alpha_s dB_s = \sum_k \alpha_{t'_k} (B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})$$

Comme $t'_k, t'_{k+1} \leq t$ alors $\mathcal{F}_{t'_k} \subset \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_{t'_{k+1}} \subset \mathcal{F}_t$ et comme $\alpha_{t'_k}, B_{t'_k}$ sont $\mathcal{F}_{t'_k}$ -mesurable et $B_{t'_{k+1}}$ est $\mathcal{F}_{t'_{k+1}}$ -mesurable. Alors $\alpha_{t'_k} (B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})$ est \mathcal{F}_t -mesurable, donc M_t est \mathcal{F}_t -mesurable. D'où (M_t) est (\mathcal{F}_t) -adapté.

* $M_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ car :

$$\mathbb{E}(|M_t|) = \mathbb{E} \left(\int_0^t \alpha_s^2 ds \right) < \infty$$

* On a :

$$\begin{aligned} M_{t+h} - M_t &= \int_0^{t+h} \alpha_s dB_s - \int_0^t \alpha_s ds \\ &= \sum_k \alpha_{t''_k} (B_{t''_{k+1}} - B_{t''_k}) \end{aligned}$$

où (t''_k) est la subdivision obtenue à l'aide de la subdivision (t_k) ; $t+h$ et t :

$$\mathbb{E}(M_{t+h} - M_t | \mathcal{F}_s) = \sum_k \mathbb{E} \left[\alpha_{t''_k} (B_{t''_{k+1}} - B_{t''_k}) | \mathcal{F}_s \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k \mathbb{E}[E(\alpha_{t_k''}(B_{t_{k+1}''} - B_{t_k''}) | \mathcal{F}_s) | \mathcal{F}_s] \\
 &= \sum_k \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\alpha_{t_k''}[B_{t_{k+1}''} - B_{t_k''}] | \mathcal{F}_s) | \mathcal{F}_s \right] = 0
 \end{aligned}$$

Donc (M_t) est une martingale.

b) Si $\alpha \in \overline{S}$

Soit (α^n) une suite de S telle que :

$$\alpha^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha \text{ dans } L^2(\Omega \times [0, t])$$

et

$$\int_0^t \alpha_s dB_s = \lim \int_0^t \alpha_s^n dB_s$$

On pose

$$M_t = \int_0^t \alpha_s dB_s \text{ et } M_t^n = \int_0^t \alpha_s^n dB_s$$

Clairement (M_t) est adapté est dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, il reste à démontrer $\mathbb{E}(M_{t+h} | \mathcal{F}_t) = M_t$. On sait que

$$\mathbb{E}(M_{t+h}^n | \mathcal{F}_t) = M_t^n \text{ (car } \alpha^n \in \varphi).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} M_t^n = M_t$, il suffit de montrer .

$$\lim_{L^2} \mathbb{E}(M_{t+h} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(M_{t+h} | \mathcal{F}_t)$$

ou encore

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(M_{t+h}^n | \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(M_{t+h} | \mathcal{F}_t)]^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}(M_{t+h}^n | \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(M_{t+h} | \mathcal{F}_t)]^2 &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(M_{t+h}^n - M_{t+h} | \mathcal{F}_t)]^2 \\ &= \|\mathbb{E}(M_{t+h}^n - M_{t+h} | \mathcal{F}_t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|\mathbb{E}(M_{t+h}^n - M_{t+h})\|_{L^2}^2 \\ &= \mathbb{E}(M_{t+h}^n - M_{t+h})^2 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(M_{t+h} | \mathcal{F}_t) = M_t$, alors M_t est une martingale.

2) On a $\mathbb{E}(\int_0^t \alpha_s dB_s)^2 = \mathbb{E}(\sum \alpha_{t_k} (B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t}))^2$ On pose $t'_k = t_k \wedge t$ qui forme une subdivision de $[0, t]$ et

$$A_k = \alpha_{t'_k} (B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t^2) &= \mathbb{E}(\sum_k A_k)^2 \\ &= \mathbb{E}(\sum_{k,l \geq 0} A_k A_{k+l})^2 \end{aligned}$$

Si $l > 0$: on a

$$\mathbb{E}(\sum A_k A_{k+l}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\sum A_k A_{k+l})]$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[\alpha t'_k \alpha t'_{k+l} (B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k}) (B_{t'_{k+l+1}} - B_{t'_{k+l}}) \mid \mathcal{F}_t] \right] \\
 &= \mathbb{E} \left(\alpha t'_k \alpha t'_{k+l} (B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k}) \right) = \mathbb{E} \left(B_{t'_{k+l+1}} - B_{t'_{k+l}} \mid \mathcal{F}_{t'_{k+l}} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[B_{t'_{k+l+1}} - B_{t'_{k+l}} \mid \mathcal{F}_{t'_{k+l}}] &= \mathbb{E}(B_{t'_{k+l+1}} \mid \mathcal{F}_{t'_{k+l}}) - B_{t'_{k+l}} \\
 &= B_{t'_{k+l}} - B_{t'_{k+l}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(M_t^2) &= \left(\sum_k E(A_k) \right)^2 \\
 &= \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t'_k} (B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})^2) \\
 &= \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t'_k}^2) E(B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})^2 \\
 &= \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t'_k}^2) \mathbb{E}(t_{k+1} - t_k) \\
 &= \int_0^t \mathbb{E}(\alpha_s^2) ds \\
 &= \int_0^t \alpha_s^2 ds
 \end{aligned}$$

1.4.1 Prolongement de l'intégrale stochastique

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On désigne par \overline{S}_t l'adhérence de S dans $L^2(\Omega \times [0, t], dl \times dt)$, c'est à dire : $\forall \alpha \in \overline{S}, \exists$ une suite (α^n) de α tel que :

$$\| \alpha - \alpha^n \|_{L^2(\Omega \times [0, t])} = \left(\mathbb{E} \left[\int_0^t (\alpha_s - \alpha_s^n) ds \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $\overline{S} = \{ \alpha : \text{pour tout } t \geq 0; \alpha_t \in \overline{\varphi}_t \forall t \geq 0 \}$ Ainsi, l'intégrale stochastique se prolonge sur \overline{S} en restant linéaire et isométrique. L'intégrale stochastique est définie par

$$\int_0^t \alpha_s dB_s = \sum_k \alpha_{t_k} (B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t})$$

si $\alpha = \sum_k \alpha_{t_k} \mathbb{I}_{[t_k, t_{k+1}[}$ et si $\alpha \in \overline{S}_t, \exists (\alpha^n) \in S$ tel que : $\alpha^n \rightarrow \alpha$ dans $L^2(\Omega \times [0; t])$: Dans ce cas

$$\int_0^t \alpha_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \alpha_s^n dB_s \text{ dans } L^2_{\mathcal{F}_t}$$

où $L^2_{\mathcal{F}_t} = \{ X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \}$ qui admet une version \mathcal{F}_t - mesurable :

Remarque 1.4.2 Si ; $\alpha \alpha' \in \overline{S}_t$, alors on a :

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \alpha_s dB_s \int_0^t \alpha'_s dB_s \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t \alpha_s \alpha'_s ds \right)$$

En effet on a :

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \alpha_s dB_s \int_0^t \alpha'_s dB_s \right) = \mathbb{E} \left[\frac{1}{4} \left(\left(\int_0^t \alpha_s dB_s + \int_0^t \alpha'_s dB_s \right)^2 - \left(\int_0^t \alpha_s dB_s - \int_0^t \alpha'_s dB_s \right)^2 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{4} \left(\left(\int_0^t (\alpha_s + \alpha'_s) dB_s \right)^2 - \left(\int_0^t (\alpha_s - \alpha'_s) dB_s \right)^2 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t (\alpha_s + \alpha'_s) dB_s \right)^2 \right] - \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t (\alpha_s - \alpha'_s) dB_s \right)^2 \right] \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\mathbb{E} \left(\int_0^t (\alpha_s + \alpha'_s)^2 ds \right) - \mathbb{E} \left(\int_0^t (\alpha_s - \alpha'_s)^2 ds \right) \right) \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \frac{1}{4} [(\alpha_s + \alpha'_s) - (\alpha_s - \alpha'_s)] ds \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \alpha_s \alpha'_s ds \right]
 \end{aligned}$$

Plus généralement, si $B_t^1; B_t^2, \dots, B_t^n$ sont des mouvements Browniens réels indépendants et soient $(\alpha_t^1); (\alpha_t^2), \dots, (\alpha_t^n) \in \bar{\mathcal{F}}$. Alors on a :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \int_0^t \alpha_s^k dB_s^k + \sum_{k=1}^n \int_0^t \alpha_s'^k dB_s^k \right] = \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \int_0^t \alpha_s^k \alpha_s'^k ds \right)$$

1.4.2 Semi-martingale

Définition 1.4.3 On appelle semi-martingale ou processus d'Itô tout processus de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s ds \dots \dots \dots (1.1)$$

telle que :

- 1) X_0 est F_0 - mesurable.
- 2) $\alpha \in \bar{S}$.

3) (X_t) est adapté et $\mathbb{E} \left(\int_0^t |X_s| ds \right) < +\infty. \forall t \geq 0$

Définition 1.4.4 La fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à variation finie ou bornée si

$$\sup \sum f(b_i) - |f(a_i)| < +\infty$$

où le suprémum est pris sur l'ensemble des subdivisions $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$.

Remarque 1.4.3 $M_t = \int_0^t \alpha_s dB_s$ est la partie martingale de (X_t) et $V_t =$

$\int_0^t \alpha_s ds$ est la partie à variation finie de (X_t) .

2) $\int_0^t \beta_s ds$ est à variation finie et :

$$\|V\|_0^t = \int_0^t |\beta_s| ds.$$

3) La formule (1.1) s'écrit aussi sous la forme

$$dX_t = \alpha_t dB_t + \beta_t dt \dots \dots \dots (1.2)$$

La formule (1.2) s'appelle la différentielle de (X_t) .

1.4.3 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastique : elle montre que lorsqu'on applique une application de classe C^2 à une semi-martingale, on conserve une semi-martingale, et elle exprime explicitement la décomposition de cette semi-martingale (martingale locale + processus à variation finie).

Théorème 1.4.1 *Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$: Si (X_t) est une semi-martingale bornée définie par alors*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s dB_s + \int_0^t \beta_s ds$$

$F(X_t)$ est également une semi-martingale et on a la formule :

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'_0(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''_0(X_s) dX_s dX_s \dots \dots \dots (1.3)$$

Remarque 1.4.4 1) Si F est à dérivée seconde bornée, alors la formule s'étant au cas (X_t) n'est pas bornée, cette formule aussi s'étant à tous les cas raisonnables, pourvu que tous les termes aient un sens.

Remarque 1.4.5 2) La formule (1.3) s'écrit aussi sous la forme :

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) \alpha_s dB_s + \int_0^t \left(F'(X_s) B_s + \frac{1}{2} F''(X_s) \alpha_s^2 \right) ds$$

ou encore

$$dF(X_t) = F'(X_s) \alpha_s dB_s + \left(F'(X_s) B_s + \frac{1}{2} F''(X_s) \alpha_s^2 \right) dt$$

Formule d'Itô pour le cas vectoriel

On va maintenant généraliser la formule d'Itô au cas vectoriel, qui se démontre de la même façon que pour la dimension 1.

Théorème 1.4.2 *Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $\vec{X}_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)^t$ un vecteur de semi-martingale bornée. Alors on a la formule d'Itô suivante*

$$F(\vec{X}_t) = F(\vec{X}_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{X}_s) \alpha_s dX_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{X}_s) \alpha_s dX_s^i dX_s^j$$

Remarque 1.4.6 *Si $F(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et X_t une semi-martingale bornée, alors on a :*

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s +$$

$$\frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(s, X_s) ds ds + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(s, X_s) ds dX_s + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) dX_s dX_s \right)$$

ou encore

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) \alpha_s dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) \beta_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) \alpha_s^2 \right) ds.$$

Chapitre 2

Généralités sur l'espérance sous linéaire

Une espérance sous-linéaire peut être exprimée comme un supremum des espérances linéaires. Elle est souvent appliquée à des situations où les modèles de probabilités sont incertains et elle s'avère être un outil de base pour mesurer les pertes de risque en finance. Dans ce chapitre on donne les notations de bases et les préliminaires de la théorie d'espérance sous-linéaire et le G -mouvement Brownien connexe. Plus de détails peuvent être trouvés dans Peng [18].

2.1 Espérance sous linéaire

Soit Ω un ensemble donné et soit \mathcal{H} un espace linéaire de fonctions à valeurs réelles définie sur Ω . On suppose que \mathcal{H} satisfait $c \in \mathcal{H}$ pour chaque constante c et $|X| \in \mathcal{H}$ si $X \in \mathcal{H}$. L'espace \mathcal{H} peut être considéré comme l'espace des variables aléatoires.

Définition 2.1.1 Une espérance sous linéaire $\widehat{\mathbb{E}}$ est une fonction

$\widehat{\mathbb{E}} : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) *Monotonie* :

$$\widehat{\mathbb{E}}[X] \geq \widehat{\mathbb{E}}[Y] \quad \text{si } X \geq Y$$

(ii) *Préservation des constantes* :

$$\widehat{\mathbb{E}}[c] = c \quad \text{pour } c \in \mathbb{R}$$

(iii) *Sous-additivité* : Pour tout $X, Y \in \mathcal{H}$,

$$\widehat{\mathbb{E}}[X] - \widehat{\mathbb{E}}[Y] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X - Y]$$

(iv) **Homogénéité positive** :

$$\widehat{\mathbb{E}}[\lambda X] = \lambda \widehat{\mathbb{E}}[X], \text{ pour tout } \lambda \geq 0$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ est appelé **espace d'espérance sous linéaire**. Si seulement (i) et (ii) sont satisfaites, $\widehat{\mathbb{E}}$ est appelée **espérance non linéaire** et le triplet $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ est appelé **espace d'espérance non linéaire**.

Définition 2.1.2 Soient $\widehat{\mathbb{E}}_1$ et $\widehat{\mathbb{E}}_2$ deux espérances non linéaires définies sur (Ω, \mathcal{H}) . $\widehat{\mathbb{E}}_1$ est dite **dominée par $\widehat{\mathbb{E}}_2$** si

$$\widehat{\mathbb{E}}_1[X] - \widehat{\mathbb{E}}_1[Y] \leq \widehat{\mathbb{E}}_2[X - Y] \text{ pour } X, Y \in \mathcal{H}$$

Remarque 2.1.1 Si l'inégalité (iii) est une égalité, alors $\widehat{\mathbb{E}}$ est une **espérance linéaire classique**, i.e., $\widehat{\mathbb{E}}$ est une fonction linéaire satisfaisant (i) et (ii).

Remarque 2.1.2 Si (iii) et (iv) sont satisfaites alors on dira que $\widehat{\mathbb{E}}$ est **sous-linéaire**. Cette sous-linéarité implique

(v) **Convexité** :

$$\widehat{\mathbb{E}}[\alpha X + (1 - \alpha)Y] \leq \alpha \widehat{\mathbb{E}}[X] + (1 - \alpha) \widehat{\mathbb{E}}[Y] \text{ pour } \alpha \in [0, 1]$$

Notons que la propriété (iv) est équivalente à la propriété suivante

$$\widehat{\mathbb{E}}[\lambda X] = \lambda^+ \widehat{\mathbb{E}}[X] + \lambda^- \widehat{\mathbb{E}}[-X] \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dans ce qui suit, on considère le type d'espace d'espérance non linéaire suivant $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$: si $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{H}$ alors $\varphi(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{H}$ pour tout $\varphi \in C_{l\text{-Lip}}(\mathbb{R}^n)$ où $C_{l\text{-Lip}}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace linéaire de fonctions localement Lipschitzienne φ satisfaisant

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C(1 + |x|^m + |y|^m)|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

pour $C > 0, m \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas $X = (X_1, \dots, X_n)$ est appelé un **vecteur aléatoire à n -dimension**, noté $X \in \mathcal{H}^n$.

Remarque 2.1.3 Il est clair que si $X \in \mathcal{H}$ alors $|X|, X^m \in \mathcal{H}$. Plus généralement, $\varphi(X)\psi(Y) \in \mathcal{H}$ pour tout $X, Y \in \mathcal{H}$ et pour tout $\varphi, \psi \in C_{l\text{-Lip}}(\mathbb{R}^n)$. En particulier, si $X \in \mathcal{H}$ alors $\widehat{\mathbb{E}}[|X^n|] < \infty$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Ici, on utilise $C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ seulement pour la commodité des techniques. En fait, l'exigence essentielle est que \mathcal{H} contient toutes les constantes et, en outre, $X \in \mathcal{H}$ implique $|X| \in \mathcal{H}$. En général, $C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ peut être remplacé par l'un des espaces de fonctions définies sur \mathbb{R}^n suivant.

- $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:Espace de fonctions bornées Borel-mesurables,
- $C_{unif}(\mathbb{R}^n)$:Espace de fonctions bornées et uniformément continues,
- $C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$:Espace de fonctions continues, Lipschitziennes et bornées,
- $Lip(\mathbb{R}^n)$:Espace des fonctions Lipschitziennes sur \mathbb{R}^n .

2.1.1 Représentation d'une espérance sous-linéaire

Une espérance sous-linéaire peut être exprimée comme un supremum des espérances linéaires. Elle est souvent appliquée à des situations où les modèles de probabilité sont incertains.

Théorème 2.1.1 *Soit $\widehat{\mathbb{E}}$ une fonction définie sur un espace linéaire \mathcal{H} satisfaisant la sous-additivité et l'homogénéité positive. Alors il existe une famille de fonctions linéaires $\{E_\theta : \theta \in \Theta\}$ définies sur \mathcal{H} telle que*

$$\widehat{\mathbb{E}}[X] = \sup_{\theta \in \Theta} E_\theta[X] \quad \text{pour } X \in \mathcal{H}$$

et, pour tout $X \in \mathcal{H}$, il existe $\theta_X \in \Theta$ de telle sorte que $\widehat{\mathbb{E}}[X] = E_{\theta_X}[X]$.

En outre, si $\widehat{\mathbb{E}}$ est une espérance sous-linéaire, alors E_θ est une espérance linéaire.

Preuve. Soit $Q = \{E_\theta : \theta \in \Theta\}$ la famille de toutes les formes linéaires définies sur \mathcal{H} , dominées par $\widehat{\mathbb{E}}$ i.e., $E_\theta[X] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X]$, pour tout $X \in \mathcal{H}$ et pour tout $E_\theta \in Q$.

Tout d'abord on montre que Q est non vide. Pour $X \in \mathcal{H}$ donné, on note $L = \{aX : a \in \mathbb{R}\}$ qui est un sous-espace de \mathcal{H} . On définit $I : L \rightarrow \mathbb{R}$ par $I[aX] = a\widehat{\mathbb{E}}[X]$, $\forall a \in \mathbb{R}$, alors $I[\cdot]$ est une fonction linéaire sur \mathcal{H} et $I \leq \widehat{\mathbb{E}}$ sur L . Comme $\widehat{\mathbb{E}}$ est sous-additive et positivement homogène, alors d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonction linéaire E sur \mathcal{H} tel que $E = I$ sur L et $E \leq \widehat{\mathbb{E}}$ sur \mathcal{H} . Ainsi E est une fonction linéaire dominée par $\widehat{\mathbb{E}}$ et telle que $\widehat{\mathbb{E}}[X] = E[X]$.

On définit maintenant

$$\widehat{\mathbb{E}}_Q[X] = \sup_{\theta \in \Theta} E_\theta[X] \quad \text{pour } X \in \mathcal{H}$$

Il est clair que $\widehat{\mathbb{E}}_Q = \widehat{\mathbb{E}}$.

En outre, si $\widehat{\mathbb{E}}$ est une espérance sous-linéaire, alors que nous avons, pour chaque élément non négatif $X \in \mathcal{H}$, $E_\theta[X] = -E_\theta[-X] \geq -\widehat{\mathbb{E}}[-X] \geq 0$. Pour chaque $c \in \mathbb{R}$, $-E_\theta[c] = E_\theta[-c] \leq \widehat{\mathbb{E}}[-c] = -c$ et $E_\theta[c] \leq \widehat{\mathbb{E}}[c] = c$, ainsi nous obtenons $E_\theta[c] = c$. Par conséquent E_θ est une espérance linéaire.

■

Remarque 2.1.4 *Il est important d'observer que l'espérance linéaire définie ci-dessus E_θ est seulement supposée additive. Mais on peut appliquer le théorème bien connu de Daniell-Stone pour prouver qu'il existe une unique mesure de probabilité σ -additive P_θ sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{H}))$ telle que*

$$E_\theta[X] = \int_{\Omega} X dP_\theta, \quad X \in \mathcal{H}$$

L'incertitude du modèle de probabilité correspondant est décrite par le sous-ensemble $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, et l'incertitude correspondante de distributions pour un vecteur aléatoires à n -dimensions X dans \mathcal{H} est décrite

$$\text{par } \{F_X(\theta, A) = P_\theta(X \in A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

Remarque 2.1.5 *Dans le cas où Q est un singleton, $\widehat{\mathbb{E}}$ n'est autre que l'espérance linéaire classique.*

2.1.2 Distribution et indépendance

On donne maintenant la notion de distributions de variables aléatoires selon une espérance non linéaire.

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoires à n -dimensions défini sur un espace d'espérance non linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$. On définit une fonction sur $C_{l\text{-Lip}}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\mathbb{F}_X[\varphi] = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(X)] : \varphi \in C_{l\text{-Lip}}(\mathbb{R}^n).$$

Le triplet $(\mathbb{R}^n, C_{l\text{-Lip}}(\mathbb{R}^n), \mathbb{F}_X)$ forme un espace d'espérance non linéaire. \mathbb{F}_X est appelé **la distribution** de X sous $\widehat{\mathbb{E}}$. Cette notion est très utile pour une espérance sous linéaire $\widehat{\mathbb{E}}$. En outre, on peut prouver qu'il existe une famille de mesures de probabilité $\{F_X^\theta(\cdot)\}_{\theta \in \Theta}$ définie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ (voir remarque 2.1.4) telle que

$$\mathbb{F}_X[\varphi] = \sup_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) F_X^\theta(dx), \quad \text{pour chaque } \varphi \in C_{b\text{-Lip}}(\mathbb{R}^n)$$

Ainsi $\mathbb{F}_X[\varphi]$ caractérise l'incertitude de la distribution de X .

Définition 2.1.3 Soient X_1 et X_2 deux vecteurs aléatoires à n -dimension définies sur deux espaces d'espérances non linéaires $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \widehat{\mathbb{E}}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \widehat{\mathbb{E}}_2)$ respectivement sont identiquement distribuées (on notera $X_1 \stackrel{d}{=} X_2$) si

$$\widehat{\mathbb{E}}_1[\varphi(X_1)] = \widehat{\mathbb{E}}_2[\varphi(X_2)], \quad \text{pour } \varphi \in C_{1.Lip}(\mathbb{R}^n)$$

Il est clair que $X_1 \stackrel{d}{=} X_2$ si et seulement si leurs distributions coïncident.

Remarque 2.1.6 Si la distribution $\widehat{\mathbb{F}}_x$ de $X \in \mathcal{H}$ n'est pas une espérance linéaire, alors X a une distribution incertaine. La distribution de X a les quatre paramètres typiques suivants :

$$\bar{\mu} = \widehat{\mathbb{E}}[X], \quad \underline{\mu} = -\widehat{\mathbb{E}}[-X], \quad \bar{\sigma}^2 = \widehat{\mathbb{E}}[X^2] \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}^2 = -\widehat{\mathbb{E}}[-X^2]$$

Les intervalles $[\bar{\mu}, \underline{\mu}]$ et $[\bar{\sigma}^2, \underline{\sigma}^2]$ caractérisent la **moyenne incertaine** et la **variance incertaine** de X respectivement. Le problème de la moyenne incertaine a été étudié dans [Chen-Epstein] en utilisant la notion de la g -espérances.

Remarque 2.1.7 Dans le cas d'une espérance sous linéaire, $X_1 \stackrel{d}{=} X_2$ implique que les sous-ensembles d'incertitudes de distributions de X_1 et X_2 sont les mêmes, par exemple, dans le cadre de la Remarque 1.1.4,

$$\{F_{X_1}(\theta_1, \cdot) : \theta_1 \in \Theta_1\} = \{F_{X_2}(\theta_2, \cdot) : \theta_2 \in \Theta_2\}$$

La simple propriété suivante est très utile dans la théorie d'espérance sous linéaire.

Proposition 2.1.1 Soient $X, Y \in \mathcal{H}$ telle que $\widehat{\mathbb{E}}[Y] = -\widehat{\mathbb{E}}[-Y]$ (i.e., Y n'a pas une moyenne incertaine). Alors, on a :

$$\widehat{\mathbb{E}}[X + \alpha Y] = \widehat{\mathbb{E}}[X] + \alpha \widehat{\mathbb{E}}[Y]$$

En particulier, si $\widehat{\mathbb{E}}[Y] = -\widehat{\mathbb{E}}[-Y] = 0$, alors $\widehat{\mathbb{E}}[X + \alpha Y] = \widehat{\mathbb{E}}[X]$.

Preuve. On a $\widehat{\mathbb{E}}[\alpha Y] = \alpha^+ \widehat{\mathbb{E}}[Y] + \alpha^- \widehat{\mathbb{E}}[-Y] = \alpha^+ \widehat{\mathbb{E}}[Y] - \alpha^- \widehat{\mathbb{E}}[Y] = \alpha \widehat{\mathbb{E}}[Y]$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

Ainsi
 $\widehat{\mathbb{E}}[X + \alpha Y] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X] + \widehat{\mathbb{E}}[\alpha Y] = \widehat{\mathbb{E}}[X] + \alpha \widehat{\mathbb{E}}[Y] = \widehat{\mathbb{E}}[X] - \widehat{\mathbb{E}}[-\alpha Y] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X + \alpha Y]$ ■

La notion d'indépendance qui suit joue un rôle important dans la théorie d'espérance sous linéaire.

Définition 2.1.4 Dans un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$, le vecteur aléatoire $Y \in \mathcal{H}^n$ est dit indépendant d'un autre vecteur aléatoire $X \in \mathcal{H}^m$ sous $\widehat{\mathbb{E}}$ si pour tout $\varphi \in C_{l.lip}(\mathbb{R}^{n+m})$ on a

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(X, Y)] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x, Y)]_{x=X}\right]$$

où $\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x, Y)]_{x=X}$ signifie $\psi(X)$ où $\psi(x) = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x, Y)]$.

Notons que cette définition est correcte. Pour voir cela, il suffit de montrer que pour chaque $x \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(x, Y) \in \mathcal{H}$ et $\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(\cdot, Y)]$ appartient à $C_{l.lip}(\mathbb{R}^m)$. On doit montrer que $\varphi(x, \cdot) \in C_{l.lip}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. En effet, pour chaque $(x, y), (u, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y) - \varphi(u, z)| &\leq C |(x, y) - (u, z)| \left(1 + |(x, y)|^k + |(u, z)|^k\right), \\ C &> 0, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y) - \varphi(x, z)| &\leq C |y - z| \left(1 + |(x, y)|^k + |(x, z)|^k\right) \\ &\leq C |y - z| \left(1 + (|x|^2 + |y|^2)^{\frac{k}{2}} + (|x|^2 + |z|^2)^{\frac{k}{2}}\right) \\ &\leq C |y - z| \left(1 + 2^{\frac{k}{2}} (|x|^k + |y|^k) + 2^{\frac{k}{2}} (|x|^k + |z|^k)\right) \\ &\leq C' |y - z| \left(1 + (|x|^k + |z|^k)\right), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité $(a + b)^p \leq 2^p (a^p + b^p)$ pour $a, b \geq 0$ et $C' = C \max\left(2^{\frac{k}{2}}, 1 + 2^{\frac{k}{2}+1} |x|^k\right)$. Par conséquent, $\varphi(x, \cdot) \in C_{l.lip}(\mathbb{R}^n)$.

De même, on a

$$|\varphi(x, Y) - \varphi(u, Y)| \leq C |x - u| \left(1 + 2^{\frac{k}{2}} (|x|^k + |Y|^k) + 2^{\frac{k}{2}} (|u|^k + |Y|^k)\right),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \left|\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x, Y)] - \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(u, Y)]\right| &\leq \widehat{\mathbb{E}}|\varphi(x, Y) - \varphi(u, Y)| \\ &\leq C |x - u| \left(1 + 2^{\frac{k}{2}} (|x|^k + \widehat{\mathbb{E}}(|Y|^k)) + 2^{\frac{k}{2}} (|u|^k + \widehat{\mathbb{E}}(|Y|^k))\right) \\ &\leq C'' |x - u| \left(1 + |x|^k + |u|^k\right), \end{aligned}$$

où $C'' = C \max\left(2^{\frac{k}{2}}, 1 + 2^{\frac{k}{2}+1} \widehat{\mathbb{E}}(|Y|^k)\right)$, ce qui signifie que $\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(\cdot, Y)]$ appartient à $C_{l.lip}(\mathbb{R}^m)$. ■

Remarque 2.1.8 Dans un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$, Y est indépendant de X signifie que l'incertitude de distribution $\{F_Y(\theta, \cdot) : \theta \in \Theta\}$ de Y ne change pas après la réalisation de $X = x$. En d'autres termes, "l'espérance conditionnelle sous linéaire" de Y par rapport à X est $\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x, Y)]_{x=X}$. Dans le cas de l'espérance linéaire, cette notion d'indépendance n'est que le cas classique.

Remarque 2.1.9 Il est important de noter que dans une espérance sous linéaire la condition "Y est indépendant de X" ne signifie pas automatiquement que "X est indépendant de Y".

Exemple 2.1.1 On considère le cas où $X, Y \in \mathcal{H}$ sont identiquement distribués et $\widehat{\mathbb{E}}[Y] = -\widehat{\mathbb{E}}[-Y] = 0$ mais $\overline{\sigma}^2 = \widehat{\mathbb{E}}[X^2] > \underline{\sigma}^2 = -\widehat{\mathbb{E}}[-X^2]$. On suppose également que $\widehat{\mathbb{E}}[|X|] = \widehat{\mathbb{E}}[X^+ + X^-] > 0$ ainsi $\widehat{\mathbb{E}}[X^+] = \frac{1}{2}\widehat{\mathbb{E}}[|X| + X] = \frac{1}{2}\widehat{\mathbb{E}}[|X|] > 0$. Dans le cas où Y est indépendante de X , on a

$$\widehat{\mathbb{E}}[XY^2] = \widehat{\mathbb{E}}[X^+\overline{\sigma}^2 - X^-\underline{\sigma}^2] = (\overline{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2)\widehat{\mathbb{E}}[X^+] > 0$$

Mais si X est indépendant de Y , on a $\widehat{\mathbb{E}}[XY^2] = 0$

La propriété d'indépendance de deux vecteurs aléatoires X et Y ne concerne que la distribution conjointe de (X, Y) .

Remarque 2.1.10 La situation "Y est indépendante de X" apparaît souvent lorsque Y survient après X , donc une espérance très robuste devrait prendre l'information de X en compte.

Définition 2.1.5 Une séquence de vecteurs aléatoires à n -dimension $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ définis sur un espace d'espérance non linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ est dite convergente en distribution (ou convergente en loi) sous $\widehat{\mathbb{E}}$ si pour chaque $\varphi \in C_{b\text{-Lip}}(\mathbb{R}^n)$, la suite $\{\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(\eta_i)]\}_{i=1}^{\infty}$ converge.

D'après Peng [20] le résultat suivant est facile à vérifier.

Proposition 2.1.2 Soit $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge en loi dans le sens ci-dessus. Alors l'application $F[\cdot] : C_{b\text{-Lip}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F[\varphi] = \lim_{i \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(\eta_i)] \quad \text{pour } \varphi \in C_{b\text{-Lip}}(\mathbb{R}^n)$$

est une espérance non linéaire sur $(\mathbb{R}^n, C_{b\text{-Lip}}(\mathbb{R}^n))$. Si $\widehat{\mathbb{E}}$ est sous linéaire (resp. linéaire), alors F est également sous linéaire (resp. linéaire).

2.1.3 Distribution G –normale

Une notion fondamentalement importante dans la théorie d'espérance sous-linéaire est que la variable aléatoire X soit $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ –distribuée sous $\widehat{\mathbb{E}}$:

Définition 2.1.6 (*Distribution G –normale*) Dans un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$, une variable aléatoire $X \in \mathcal{H}$ avec

$$\underline{\sigma}^2 = -\widehat{\mathbb{E}}[-X^2], \quad \bar{\sigma}^2 = \widehat{\mathbb{E}}[X^2]$$

est dite $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ –distribuée (on notera par $X \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$) si pour tout $Y \in \mathcal{H}$ indépendante de X telle que $Y \stackrel{d}{=} X$, on a :

$$aX + bY \stackrel{d}{=} \sqrt{a^2 + b^2}X, \quad \forall a, b \geq 0 \quad (2.1)$$

Remarque 2.1.11 D'après la définition ci-dessus, on a

$\sqrt{2}\widehat{\mathbb{E}}[X] = \widehat{\mathbb{E}}[X + Y] = 2\widehat{\mathbb{E}}[X]$ et $\sqrt{2}\widehat{\mathbb{E}}[-X] = \widehat{\mathbb{E}}[-X - Y] = 2\widehat{\mathbb{E}}[-X]$ il résulte que

$$\widehat{\mathbb{E}}[X] = \widehat{\mathbb{E}}[-X] = 0$$

autrement dit une variable aléatoire X , $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ –distribuée n'a aucune moyenne incertaine.

Remarque 2.1.12 Si X est indépendant de Y et $X \stackrel{d}{=} Y$, tels que (1.1) est satisfaite, alors $-X$ est également indépendant de $-Y$ et on a $-X \stackrel{d}{=} -Y$. De même $a(-X) + b(-Y) \stackrel{d}{=} \sqrt{a^2 + b^2}(-X)$, $a, b \geq 0$. Ainsi

$$X \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]) \text{ si et seulement si } -X \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$$

La proposition et le corollaire suivants montrent que $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ est une distribution sous-linéaire définie de façon unique sur $(\mathbb{R}, C_{l.Lip}(\mathbb{R}))$. Peng dans [17] montre que la loi G –normale $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ est caractérisée, ou générée, par l'équation parabolique aux dérivées partielles suivante définie sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}$:

$$\partial_t u - G(\partial_{xx}^2 u) = 0 \quad (2.2)$$

avec la condition de Cauchy $u|_{t=0} = \varphi$, où G est appelée **la fonction génératrice** de (1.2) qui est une fonction sous-linéaire réelle paramétrée par $\underline{\sigma}^2$ et $\bar{\sigma}^2$:

$$G(\alpha) = \frac{1}{2}\widehat{\mathbb{E}}[X^2\alpha] = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^2\alpha^+ - \underline{\sigma}^2\alpha^-), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Ici, on note $\alpha^+ = \max\{0, \alpha\}$ et $\alpha^- = (-\alpha)^+$. L'équation (1.2) est appelée la G -équation de la chaleur de la distribution sous-linéaire $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$. On appelle aussi cette distribution sous-linéaire la **distribution G -normale**.

Remarque 2.1.13 *On utilise la notion de solutions de viscosité de l'équation (1.2). Cette notion a été introduite par Crandall et Lions. Pour l'existence et l'unicité des solutions et des références très riches connexes nous nous référons à Crandall, Ishii et Lions [5]. On notera que, dans la situation où $\underline{\sigma}^2 > 0$, la G -équation de la chaleur*

$$\partial_t u - \frac{1}{2} \left(\bar{\sigma}^2 (\partial_{xx}^2 u)^+ - \underline{\sigma}^2 (\partial_{xx}^2 u)^- \right) = 0, u|_{t=0} = \varphi$$

qui a comme solution de viscosité (1.2) devient une solution classique (voir les derniers travaux de [28]). Le lecteur pourra comprendre (1.2) au sens classique.

Proposition 2.1.3 *Soit X une variable aléatoire $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ -distribuée. Pour tout $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R})$ on définit la fonction $u(t, x) = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x + \sqrt{t}X)]$, $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$.*

Alors on

1)

$$u(t + s, x) = \widehat{\mathbb{E}}[u(t, x + \sqrt{s}X)], \quad s \geq 0. \quad (2.3)$$

2) *Pour tout $T > 0$ il existe des constantes $C, k > 0$ de telle sorte que, pour tous $t, s \in [0, T]$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq C \left(1 + |x|^k + |y|^k \right) |x - y| \quad (2.4)$$

et

$$|u(t, x) - u(t + s, x)| \leq C \left(1 + |x|^k \right) |s|^{1/2} \quad (2.5)$$

En outre, u est l'unique solution de viscosité, continue dans le sens de (1.4) et (1.5) de l'EDP (1.2).

Preuve. *Comme*

$$\begin{aligned} u(t, x) - u(t, y) &= \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x + \sqrt{t}X)] - \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(y + \sqrt{t}X)] \\ &\leq \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x + \sqrt{t}X) - \varphi(y + \sqrt{t}X)] \\ &\leq \widehat{\mathbb{E}}[C_1 (1 + |X|^k + |x|^k + |y|^k) |x - y|] \\ &\leq C (1 + |x|^k + |y|^k) |x - y| \end{aligned}$$

2.1. ESPÉRANCE SOUS LINÉAIRE

Donc, on a (1.4). Soit Y indépendant de X tel que $X \stackrel{d}{=} Y$. Comme X est $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ -distribuée, alors

$$\begin{aligned} u(t+s, x) &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\varphi \left(x + \sqrt{t+s}X \right) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\varphi \left(x + \sqrt{s}X + \sqrt{t}Y \right) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\widehat{\mathbb{E}} \left[\varphi \left(x + \sqrt{s}z + \sqrt{t}Y \right) \right]_{z=X} \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[u \left(t, x + \sqrt{s}X \right) \right]. \end{aligned}$$

On obtient ainsi (1.3) et en vertu de (1.4) il résulte que

$$\begin{aligned} u(t+s, x) &= \widehat{\mathbb{E}} \left[u \left(t, x + \sqrt{s}X \right) - u \left(t, x \right) \right] \\ &\leq \widehat{\mathbb{E}} \left[C_1 \left(1 + |x|^k + |X|^k \right) |s|^{\frac{1}{2}} |X| \right], \end{aligned}$$

d'où (1.5). Maintenant, pour $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, soit $\psi \in C_b^{1,3}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ telle que $\psi \geq u$ et $\psi(t, x) = u(t, x)$. D'après (1.3) il résulte que, pour $\delta \in (0, t)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \widehat{\mathbb{E}} \left[\psi \left(t - \delta, x + \sqrt{\delta}X \right) - \psi \left(t, x \right) \right] \\ &\leq -\partial_t \psi \left(t, x \right) \delta + \widehat{\mathbb{E}} \left[\partial_x \psi \left(t, x \right) \sqrt{\delta}X + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 \psi \left(t, x \right) \delta X^2 \right] + \bar{C} \delta^{\frac{3}{2}} \\ &= -\partial_t \psi \left(t, x \right) \delta + \widehat{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{2} \partial_{xx}^2 \psi \left(t, x \right) \delta X^2 \right] + \bar{C} \delta^{\frac{3}{2}} \\ &= -\partial_t \psi \left(t, x \right) \delta + \delta G \left(\partial_{xx}^2 \psi \left(t, x \right) \right) + \bar{C} \delta^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\left[\partial_t \psi - G \left(\partial_{xx}^2 \psi \right) \right] \left(t, x \right) \leq 0.$$

Il en résulte que u est une sur-solution de viscosité de (1.2). De même, on peut prouver que u est une sous-solution de viscosité de (1.2). ■

Corollaire 2.1.1 lorsque X et \tilde{X} sont $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ -distribuées. Alors $X \stackrel{d}{=} \tilde{X}$. En particulier $X \stackrel{d}{=} -X$.

Preuve. Pour chaque $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R})$ on a

$$u(t, x) = \widehat{\mathbb{E}} \left[\varphi \left(x + \sqrt{t}X \right) \right], \tilde{u}(t, x) = \widehat{\mathbb{E}} \left[\varphi \left(x + \sqrt{t}\tilde{X} \right) \right], (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$$

Par la proposition ci-dessus, u et \tilde{u} sont des solutions de viscosité de G -équation de la chaleur (1.2) avec la condition de Cauchy $u|_{t=0} = \tilde{u}|_{t=0} = \varphi$. Il résulte de l'unicité de la solution de viscosité que $u = \tilde{u}$. En particulier

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(X)] = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(\tilde{X})]$$

Alors $X \stackrel{d}{=} \tilde{X}$. ■

Corollaire 2.1.2 Dans le cas où $\underline{\sigma}^2 = \bar{\sigma}^2 > 0$, $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ est juste la distribution normale classique $\mathcal{N}(0, \bar{\sigma}^2)$.

Preuve. En fait, la solution de l'équation parabolique aux dérivées partielles (1.2) devient l'équation de la chaleur classique

$$\partial_t u = \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \partial_{xx}^2 u, \quad u|_{t=0} = \varphi$$

où la solution est

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\bar{\sigma}^2 t}\right) dy$$

Ainsi, pour chaque φ ,

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(X)] = u(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) dy$$

■

Dans les deux situations suivantes le calcul de $\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$ est facile :

- (i) Pour tout φ convexe, on a

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) dy$$

En effet, pour tout $t \geq 0$ fixé, remarquons que la fonction $u(t, x) = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x + \sqrt{t}X)]$ est convexe, puisque

$$\begin{aligned} u(t, \alpha x + (1-\alpha)y) &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(\alpha x + (1-\alpha)y + \sqrt{t}X\right)\right] \\ &\leq \alpha \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x + \sqrt{t}X\right)\right] + (1-\alpha) \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(y + \sqrt{t}X\right)\right] \\ &= \alpha u(t, x) + (1-\alpha)u(t, y). \end{aligned}$$

Il en résulte que $(\partial_{xx}^2 u)^- = 0$ et par conséquent la G -équation de la chaleur (1, 2) devient

$$\partial_t u = \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \partial_{xx}^2 u, \quad u|_{t=0} = \varphi$$

• (ii) Pour tout φ concave, on a

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

en particulier

$$\widehat{\mathbb{E}}[X] = \widehat{\mathbb{E}}[-X] = 0, \quad \widehat{\mathbb{E}}[X^2] = \bar{\sigma}^2, \quad -\widehat{\mathbb{E}}[-X^2] = \underline{\sigma}^2$$

et

$$\widehat{\mathbb{E}}[X^4] = 6\bar{\sigma}^4, \quad -\widehat{\mathbb{E}}[-X^4] = 6\underline{\sigma}^4$$

2.1.4 Théorème de la Limite Centrale

Théorème 2.1.2 (*Théorème de la limite centrale*) Soit $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite dans \mathcal{H} identiquement distribuée. On suppose également que, X_{n+1} est indépendant de (X_1, \dots, X_n) pour tout $n = 1, 2, \dots$ et que

$$\widehat{\mathbb{E}}[X_1] = \widehat{\mathbb{E}}[-X_1] = 0, \quad \widehat{\mathbb{E}}[X_1^2] = \bar{\sigma}^2, \quad -\widehat{\mathbb{E}}[-X_1^2] = \underline{\sigma}^2$$

pour $0 < \underline{\sigma} < \bar{\sigma} < \infty$ fixés. Alors la suite $\{S_n/\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ où $S_n = X_1 + \dots + X_n$, converge en loi vers une distribution $\xi \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ -distribuée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{E}} \left[\varphi \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] = \widetilde{\mathbb{E}}[\varphi(\xi)], \quad \forall \varphi \in \text{lip}_b(\mathbb{R}).$$

Pour plus de détails voir [16].

Chapitre 3

G –Mouvement Brownien et G –intégrale d'Itô

Le but de ce chapitre est d'introduire la notion du G –Mouvement Brownien liée à la distribution G –normale dans un espace d'espérance sous-linéaire. On donne également la définition de la G –intégrale stochastique et on énonce la G –formule d'Itô.

3.1 G –Mouvement Brownien

Dans cette section on définit le G –mouvement Brownien unidimensionnel et à d –dimension, on donne ainsi quelques propriétés qui sont importantes dans le calcul stochastique.

Définition 3.1.1 Dans un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est appelé G –**mouvement Brownien** si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $B_0 = 0$

(ii) Pour tout $t, s \geq 0$, l'accroissement $B_{t+s} - B_t$ est $\mathcal{N}(0, [\underline{\sigma}^2 s, \bar{\sigma}^2 s])$ – distribué et est indépendant de $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute suite $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$.

Remarque 3.1.1 La lettre G indique que le processus B est caractérisé par sa "fonction génératrice" G définie par :

$$G(\alpha) = \frac{1}{2} \widehat{\mathbb{E}}[\alpha B_1^2], \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

3.1. G -MOUVEMENT BROWNIEN

D'après Peng [15] on peut prouver que la propriété d'échelle du G -mouvement Brownien, qui est la même que celle du mouvement Brownien standard, a savoir, pour tout $\lambda > 0$, le processus $\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}B_{\lambda t}\right)_{t \geq 0}$ est également un G -mouvement Brownien. Pour tout $t_0 > 0$, le processus $(B_{t+t_0} - B_{t_0})_{t \geq 0}$ est aussi un G -mouvement Brownien.

Définition 3.1.2 Soit $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ un espace d'espérance non linéaire. $(X_t)_{t \geq 0}$ est appelé **processus stochastique** à d -dimension si pour tout $t \geq 0$, X_t est un vecteur aléatoire à valeur dans \mathcal{H}^d .

Soit $\mathbb{S}(d)$ (resp. $\mathbb{S}_+(d)$) l'ensemble des matrices (resp. définies positives) carrés symétriques d'ordre d

Soit $G : \mathbb{S}(d) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone et sous linéaire au sens que : pour tout $A, \bar{A} \in \mathbb{S}(d)$, on a

$$\begin{cases} G(A + \bar{A}) \leq G(A) + G(\bar{A}) \\ G(\lambda A) = \lambda G(A), \forall \lambda \geq 0 \\ G(A) \geq G(\bar{A}), \text{ si } A \geq \bar{A} \end{cases}$$

telle que

$$G(A) = \frac{1}{2} \widehat{\mathbb{E}}[(AX, X)] \leq \frac{1}{2} |A| \widehat{\mathbb{E}}[|X^2|]$$

ce qui implique, d'après le théorème (2.1.1), qu'il existe un sous ensemble $\Sigma \subset \mathbb{S}_+(d)$ fermé, borné et convexe tel que

$$G(A) = \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Sigma} \text{tr}[\gamma A], A \in \mathbb{S}(d)$$

Σ étant l'ensemble des matrices d'ordre d (voir [26]).

Définition 3.1.3 (*Distribution G -normale*) Dans un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$, un vecteur aléatoire à d -dimension $X = (X_1, \dots, X_d)$ est dit G -normalement distribué noté par $X \sim \mathcal{N}(0; \Sigma)$ si pour tout $\varphi \in C_{b,Lip}(\mathbb{R}^d)$, la fonction u définie par

$$u(t, x) = \widehat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x + \sqrt{t}X\right)\right], t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$$

satisfait la G -equation de la chaleur suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - G(D^2 u) &= 0, (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) &= \varphi(x), \end{aligned}$$

où $D^2 = \left(\partial_{x_i x_j}^2 u\right)_{i,j=1}^d$ et $G(A) = \frac{1}{2} \sup_{\gamma \in \Sigma} \text{tr}[\gamma \gamma^T A]$, $A = (A)_{i,j=1}^d \in \mathbb{S}(d)$.

On donne maintenant la définition du G -mouvement Brownien d -dimensionnel.

Définition 3.1.4 *Un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ à d -dimension défini sur un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ est dit G -mouvement Brownien de dimension d si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (i) $B_0 = 0$
- (ii) *Pour tout $t, s \geq 0$, l'accroissement $B_{t+s} - B_t$ est $\mathcal{N}(0, s \Sigma)$ -distribué et est indépendant de $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute suite $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$.*

On notera

$$B_t^a := \langle a, B_t \rangle \text{ pour tout } a = (a_1, \dots, a_d)^T \in \mathbb{R}^d$$

Selon la définition ci-dessus, on a la proposition suivante qui est importante dans le calcul stochastique.

Proposition 3.1.1 (voir [20]) *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un G -mouvement Brownien à d -dimension défini sur un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$. Alors $(B_t^a)_{t \geq 0}$ est un G_a -mouvement Brownien à 1-dimension, où $G_a(\alpha) = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{aa^T}^2 \alpha^+ - \underline{\sigma}_{aa^T}^2 \alpha^-)$, $\bar{\sigma}_{aa^T}^2 = 2G(aa^T) = \widehat{\mathbb{E}}[\langle a, B_1 \rangle^2]$, $\underline{\sigma}_{aa^T}^2 = -2G(-aa^T) = -\widehat{\mathbb{E}}[-\langle a, B_1 \rangle^2]$.*

En particulier, pour tout $t, s \geq 0$, $B_{t+s}^a - B_t^a \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, [s\underline{\sigma}_{aa^T}^2, s\bar{\sigma}_{aa^T}^2])$.

Notons que d'après le cas unidimensionnel, on a pour toute fonction convexe φ

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(B_{t+s}^a - B_t^a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \bar{\sigma}_{aa^T}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2s\bar{\sigma}_{aa^T}^2}\right) dy$$

et pour toute fonction concave φ et $\underline{\sigma}_{aa^T}^2 > 0$, on a

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(B_{t+s}^a - B_t^a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \underline{\sigma}_{aa^T}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2s\underline{\sigma}_{aa^T}^2}\right) dy$$

En particulier, on a

$$\widehat{\mathbb{E}}[(B_t^a - B_s^a)^2] = \bar{\sigma}_{aa^T}^2 (t - s), \widehat{\mathbb{E}}[(B_t^a - B_s^a)^4] = 3\bar{\sigma}_{aa^T}^4 (t - s)^2$$

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[- (B_t^a - B_s^a)^2 \right] = -\underline{\sigma}_{aaT}^2 (t - s), \widehat{\mathbb{E}} \left[- (B_t^a - B_s^a)^4 \right] = -3\underline{\sigma}_{aaT}^4 (t - s)^2.$$

Le théorème suivant est dû à Peng [19] et donne une caractérisation du G -mouvement Brownien.

Théorème 3.1.1 *Soit $\tilde{B} = \left(\tilde{B}_t \right)_{t \geq 0}$ un processus défini sur un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathbb{E}})$ tel que :*

(i) $\tilde{B}_0 = 0$

(ii) *Pour tout $t, s \geq 0$, les variables aléatoires $\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_t$ et \tilde{B}_s sont identiquement distribuées et indépendantes de $(\tilde{B}_{t_1}, \dots, \tilde{B}_{t_n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute suite $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$.*

(iii) $\tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{B}_t \right] = \tilde{\mathbb{E}} \left[-\tilde{B}_t \right] = 0$ et $\lim_{t \downarrow 0} \tilde{\mathbb{E}} \left[\left| \tilde{B}_t \right|^3 \right] t^{-1} = 0$.

Alors \tilde{B} est un $G_{[\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]}$ -mouvement Brownien avec $\bar{\sigma}^2 = \tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{B}_1^2 \right]$ et $\underline{\sigma}^2 = -\tilde{\mathbb{E}} \left[-\tilde{B}_1^2 \right]$.

3.1.1 Existence du G -mouvement Brownien et G -espérance conditionnelle

On note par $\Omega = C_0^n(\mathbb{R}_+)$ l'espace de toutes les fonctions $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continues nulles en 0, muni de la distance

$$\rho(\omega^1, \omega^2) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \left[\left(\max_{t \in [0, i]} |\omega_t^1 - \omega_t^2| \right) \wedge 1 \right]$$

Pour tout $T \geq 0$ fixé, on note $\Omega_T = \{\omega_{\cdot \wedge T} : \omega \in \Omega\}$ et on considère le processus canonique $B_t(\omega) = \omega_t, t \in [0, +\infty)$ si $\omega \in \Omega$.

Soit l'espace des variables aléatoires suivant :

$$Lip(\Omega_T) = \{\varphi(B_{t_1 \wedge T}, \dots, B_{t_n \wedge T}) : t_1, \dots, t_n \in [0, \infty), \varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)\},$$

Il est clair que $Lip(\Omega_t) \subset Lip(\Omega_T)$, pour tout $t \leq T$. On note aussi :

$$Lip(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Lip(\Omega_n),$$

Remarque 3.1.2 *Il est clair que $C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$, $Lip(\Omega_T)$ et $Lip(\Omega)$ sont des espaces vectoriels. En outre, notons que $\varphi, \psi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ implique que le produit $\varphi \cdot \psi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$, ainsi si $X, Y \in Lip(\Omega_T)$ alors $X \cdot Y \in Lip(\Omega_T)$. En particulier, pour tout $t \in [0, \infty)$, $B_t \in Lip(\Omega)$.*

Peng [21] a construit une espérance sous-linéaire sur $(\Omega, Lip(\Omega))$ de telle sorte que le processus canonique $(B_t)_{t \geq 0}$ soit un G -mouvement Brownien de la manière suivante : soit $(\xi_i)_{i=1}^\infty$ une suite de vecteurs aléatoires à d -dimension sur un espace d'espérance sous-linéaire $(\Omega, \tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathbb{E}})$ telle que ξ_i est G -normalement distribuée et ξ_{i+1} est indépendante de (ξ_1, \dots, ξ_i) pour tout $i = 1, 2, \dots$

Ensuite il a introduit une espérance sous-linéaire $\widehat{\mathbb{E}}$ définie sur $Lip(\Omega)$, via la procédure suivante : Pour tout $X \in Lip(\Omega)$ avec

$$X = \varphi(B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$$

pour $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ et pour $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$, on pose :

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(\sqrt{t_1 - t_0}\xi_1, \dots, \sqrt{t_n - t_{n-1}}\xi_n\right)\right], \end{aligned}$$

D'après Peng, $\widehat{\mathbb{E}}$ ainsi définie une espérance sous-linéaire sur $Lip(\Omega)$ et $(B_t)_{t \geq 0}$ est un G -mouvement Brownien. Comme $Lip(\Omega_T) \subseteq Lip(\Omega)$, $\widehat{\mathbb{E}}$ est également une espérance sous-linéaire sur $Lip(\Omega_T)$.

L'espérance conditionnelle de X par rapport à Ω_{t_j} est définie par

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_{t_j}] &= \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) | \Omega_{t_j}] \quad (3.1) \\ &= \psi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \end{aligned}$$

où

$$\psi(x_1, \dots, x_j) = \tilde{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(x_1, \dots, x_j, \sqrt{t_{j+1} - t_j}\xi_{j+1}, \dots, \sqrt{t_n - t_{n-1}}\xi_n\right)\right]$$

Dans toute la suite on considère le processus canonique $(B_t)_{t \geq 0}$ défini sur $(\Omega, Lip(\Omega), \widehat{\mathbb{E}})$ dans le cas où $\Omega = C_0^1(\mathbb{R}_+)$.

Proposition 3.1.2 (*Propriétés de $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot | \Omega_t]$*) Pour tout $X, Y \in Lip(\Omega)$:

- (i) Si $X \geq Y$, alors $\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] \geq \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t]$.
- (ii) $\widehat{\mathbb{E}}[\eta | \Omega_t] = \eta$, pour tout $t \in [0, +\infty)$ et $\eta \in Lip(\Omega_t)$.
- (iii) $\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X - Y | \Omega_t]$.
- (iv) $\widehat{\mathbb{E}}[\eta X | \Omega_t] = \eta^+ \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] + \eta^- \widehat{\mathbb{E}}[-X | \Omega_t]$ pour tout $\eta \in Lip(\Omega_t)$.
- (v) $\widehat{\mathbb{E}}\left[\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] | \Omega_s\right] = \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_{t \wedge s}]$, en particulier $\widehat{\mathbb{E}}\left[\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t]\right] = \widehat{\mathbb{E}}[X]$.

Pour tout $X \in Lip(\Omega^t)$, $\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X]$, où $Lip(\Omega^t)$ est l'espace linéaire des variables aléatoires de la forme

$$\begin{aligned} & \varphi(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_{n+1}} - B_{t_n}), \\ m &= 1, 2, \dots, \varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n), t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \in [t, \infty). \end{aligned}$$

Remarque 3.1.3 (ii) et (iii) implique que

$$\widehat{\mathbb{E}}[X + \eta | \Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] + \eta \text{ pour } \eta \in Lip(\Omega_t)$$

En outre, si $Y \in Lip(\Omega)$ satisfait $\widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t] = -\widehat{\mathbb{E}}[-Y | \Omega_t]$ alors

$$\widehat{\mathbb{E}}[X + Y | \Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] + \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t].$$

On considère maintenant l'adhérence de l'espace d'espérance sous-linéaire $(\Omega, Lip(\Omega), \widehat{\mathbb{E}})$.

On note par $L_G^p(\Omega)$, $p \geq 1$, l'adhérence de $Lip(\Omega)$ par rapport à la norme $\|X\|_p := \left(\widehat{\mathbb{E}}[|X|^p]\right)^{\frac{1}{p}}$. De même, on peut définir de façon similaire $L_G^p(\Omega_T)$, $L_G^p(\Omega_T^t)$ et $L_G^p(\Omega^t)$. Il est clair que pour tout $0 \leq t \leq T \leq \infty$, on a $L_G^p(\Omega^t) \subset L_G^p(\Omega_T^t) \subset L_G^p(\Omega)$. Par conséquent $\widehat{\mathbb{E}}$ peut être étendue continuellement à une espérance sous-linéaire sur $(\Omega, L_G^1(\Omega))$ qu'on notera également $\widehat{\mathbb{E}}$.

On considère maintenant l'extension des espérances conditionnelles. Pour tout $t \leq T$ fixé, la G -espérance conditionnelle $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot | \Omega_t] : Lip(\Omega_T) \longrightarrow Lip(\Omega_t)$ est une application continue sous $\|\cdot\|_1$.

En effet, on a

$$\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X - Y | \Omega_t] \leq \widehat{\mathbb{E}}[|X - Y| | \Omega_t],$$

Alors

$$\left| \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t] \right| \leq \widehat{\mathbb{E}}[|X - Y| | \Omega_t].$$

Ainsi, on obtient

$$\left\| \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t] \right\|_1 \leq \|X - Y\|_1$$

Il s'ensuit que $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot | \Omega_t]$ peut être également étendue en une application continue

$$\widehat{\mathbb{E}}[\cdot | \Omega_t] : L_G^1(\Omega_T) \longrightarrow L_G^1(\Omega_t).$$

Remarque 3.1.4 *La proposition ci-dessus est également vraie pour $X, Y \in L_G^1(\Omega)$ à ceci près dans (iv), $\eta \in L_G^1(\Omega_t)$ au lieu de $Lip(\Omega)$ doit être borné, puisque $X, Y \in L_G^1(\Omega)$ n'implique pas forcément que $X \cdot Y \in L_G^1(\Omega)$.*

En particulier, on a l'indépendance suivante :

$$\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X], \forall X \in L_G^1(\Omega^t)$$

On donne la définition suivante qui est similaire à celle du cas classique :

Définition 3.1.5 *Un vecteur aléatoire à n -dimension $Y \in (L_G^1(\Omega))^n$ est dit indépendant de Ω_t ($t \geq 0$), si pour tout $\varphi \in C_{b,Lip}(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(Y) | \Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)].$$

Remarque 3.1.5 *Tout comme dans le cas classique, les accroissements du G -mouvement Brownien $(B_{t+s} - B_t)_{s \geq 0}$ sont indépendants de Ω_t .*

La propriété suivante est très utile pour les développements ultérieurs.

Proposition 3.1.3 *Soient $X, Y \in L_G^1(\Omega)$ tels que $\widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t] = -\widehat{\mathbb{E}}[-Y | \Omega_t]$ pour certains $t \in [0, T]$. Alors on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}[X + Y | \Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] + \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t].$$

En particulier, si $\widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[-Y | \Omega_t] = 0$, alors $\widehat{\mathbb{E}}[X + Y | \Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t]$.

Preuve. Cela découle des deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}[X + Y | \Omega_t] &\leq \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] + \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t], \\ \widehat{\mathbb{E}}[X + Y | \Omega_t] &\geq \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[-Y | \Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] + \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t]. \end{aligned}$$

■

Exemple 3.1.1 *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ fixé, $s \leq t$, on a*

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}[B_t^a - B_s^a | \Omega_s] &= 0, \widehat{\mathbb{E}}[-(B_t^a - B_s^a) | \Omega_s] = 0 \\ \widehat{\mathbb{E}}[(B_t^a - B_s^a)^2 | \Omega_s] &= \bar{\sigma}_{aa^T}^2 (t - s), \widehat{\mathbb{E}}[-(B_t^a - B_s^a)^2 | \Omega_s] = -\underline{\sigma}_{aa^T}^2 (t - s) \\ \widehat{\mathbb{E}}[(B_t^a - B_s^a | \Omega_s)^4] &= 3\bar{\sigma}_{aa^T}^4 (t - s)^2, \widehat{\mathbb{E}}[-(B_t^a - B_s^a | \Omega_s)^4] = -3\underline{\sigma}_{aa^T}^4 (t - s)^2. \end{aligned}$$

3.2. G -INTÉGRALES STOCHASTIQUES

Exemple 3.1.2 Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ fixé, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t \leq T$, $X \in L_G^1(\Omega_t)$ et $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}[X\varphi(B_T^a - B_t^a) | \Omega_t] &= X^+ \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(B_T^a - B_t^a) | \Omega_t] + X^- \widehat{\mathbb{E}}[-\varphi(B_T^a - B_t^a) | \Omega_t] \\ &= X^+ \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(B_T^a - B_t^a)] + X^- \widehat{\mathbb{E}}[-\varphi(B_T^a - B_t^a)].\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\widehat{\mathbb{E}}[X(B_T^a - B_t^a) | \Omega_t] = X^+ \widehat{\mathbb{E}}[(B_T^a - B_t^a)] + X^- \widehat{\mathbb{E}}[-(B_T^a - B_t^a)] = 0.$$

Ceci, combiné avec la proposition (2.1.3) donne

$$\widehat{\mathbb{E}}[Y + X(B_T^a - B_t^a) | \Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t], Y \in L_G^1(\Omega)$$

On a également

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}[X(B_T^a - B_t^a)^2 | \Omega_t] &= X^+ \widehat{\mathbb{E}}[(B_T^a - B_t^a)^2] + X^- \widehat{\mathbb{E}}[-(B_T^a - B_t^a)^2] \\ &= [X^+ \sigma_{aaT}^2 - X^- \sigma_{aaT}^2] (T - t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}[X(B_T^a - B_t^a)^{2n-1} | \Omega_t] &= X^+ \widehat{\mathbb{E}}[(B_T^a - B_t^a)^{2n-1}] + X^- \widehat{\mathbb{E}}[-(B_T^a - B_t^a)^{2n-1}] \\ &= |X| \widehat{\mathbb{E}}[(B_{T-t}^a)^{2n-1}].\end{aligned}$$

Définition 3.1.6 Un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est appelé G -martingale (respectivement, G -sur-martingale ; G -sous-martingale) si, pour tout $t \in [0, \infty)$, $M_t \in \mathcal{H}$ et pour tout $s \in [0, t]$, on a

$$\widehat{\mathbb{E}}[M_t | \Omega_s] = M_s, \quad (\text{resp., } \geq M_s, \leq M_s).$$

3.2 G -Intégrales stochastiques

Dans cette section on présente les notations de base du calcul stochastique comme la construction de l'intégrale d'Itô par rapport au G -mouvement Brownien, passant par quelques propriétés importantes qu'on aura besoin dans ce qui suit.

Dans toute la suite $T \in \mathbb{R}_+$ sera fixé.

Soit $\pi_T^k = \{0 = t_0^k < t_1^k < \dots < t_N^k = T\}$ une suite de subdivisions de $[0, T]$, dont le pas

$$\mu(\pi_T^k) = \max \{|t_{i+1}^k - t_i^k| : i = 0, 1, \dots, N-1\}$$

tend vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$. Par abus d'écriture on écrit $\pi_T = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ au lieu de $\pi_T^k = \{0 = t_0^k < t_1^k < \dots < t_N^k = T\}$.

Soit $p \geq 1$ fixé. On considère le type de processus simples suivant : soit

$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) \mathbf{I}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

où

$$\xi_j \in L_G^p(\Omega_{t_j}) = \left\{ X : \widehat{\mathbb{E}}(|X|^p) < \infty \right\}, j = 0, 1, 2, \dots, k$$

Soit $M_G^{P,0}(0, T)$ l'ensemble de ces processus. L'intégrale de Bochner de (η_t) est définie par

$$\int_0^T \eta_t(\omega_t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) (t_{j+1} - t_j).$$

Remarque 3.2.1 Pour tout $\eta \in M_G^{P,0}(0, T)$, on note

$$\widehat{\mathbb{E}}_T[\eta] = \frac{1}{T} \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t dt \right] = \frac{1}{T} \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) (t_{j+1} - t_j) \right].$$

Il est facile de vérifier que $\widehat{\mathbb{E}}_T : M_G^{P,0}(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ constitue une espérance sous-linéaire, d'où la définition :

Définition 3.2.1 Pour tout $p \geq 1$, on note par $M_G^P(0, T)$ l'adhérence de $M_G^{P,0}(0, T)$ sous la norme

$$\|\eta\|_{M_G^P(0, T)} = \left\{ \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T |\eta_t|^p dt \right] \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que $M_G^P(0, T)$ un espace de Banach.

On donne maintenant la définition de l'intégrale d'Itô.

Soit $G(\alpha) = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^2 \alpha^+ - \underline{\sigma}^2 \alpha^-)$ où $0 \leq \underline{\sigma} \leq \bar{\sigma} < \infty$, $\bar{\sigma}^2 = \widehat{\mathbb{E}}[B_1^2]$ et $\underline{\sigma}^2 = -\widehat{\mathbb{E}}[-B_1^2]$.

Définition 3.2.2 Pour tout $\alpha \in M_G^{2,o}(0, T)$ de la forme

$$\alpha_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

On définit

$$I(\alpha) := \int_0^T \alpha_t dB_t = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Notons que $I(\alpha)$ est complètement indépendante de G , et $\left(\int_0^t \alpha_s dB_s \right)_{0 \leq t \leq T}$

est une G -martingale.

Lemme 3.2.1 L'application $I : M_G^{2,o}(0, T) \longrightarrow L_G^2(\Omega_T)$ est linéaire, continue et peut être donc continuellement étendue vers $I : M_G^2(0, T) \longrightarrow L_G^2(\Omega_T)$, et on a

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T \alpha_t dB_t \right) = 0 \tag{3.2}$$

Preuve. D'après l'exemple (2.1.2), on a pour tout j

$$\widehat{\mathbb{E}} [\xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \Omega_{t_j}] = \widehat{\mathbb{E}} [-\xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \Omega_{t_j}] = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T \alpha_t dB_t \right) &= \widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^{t_{N-1}} \alpha_t dB_t + \xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right) \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^{t_{N-1}} \alpha_t dB_t + \widehat{\mathbb{E}} [\xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) | \Omega_{t_{N-1}}] \right) \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^{t_{N-1}} \alpha_t dB_t \right) \end{aligned}$$

de proche en proche on obtient (2.2). ■

Définition 3.2.3 On définit, pour $\eta \in M_G^2(0, T)$ fixé, l'intégrale stochastique

$$I(\eta) = \int_0^T \eta_t dB_t$$

Il est clair que (2.2) est aussi vraie pour $\eta \in M_G^2(0, T)$.

On énumère quelques propriétés principales de l'intégrante d'Itô par rapport au G -mouvement Brownien.

Proposition 3.2.1 Soient $\eta, \theta \in M_G^2(0, T)$ et soient $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$. Alors on a

- (i) $\int_s^t \eta_u dB_u = \int_s^r \eta_u dB_u + \int_r^t \eta_u dB_u$,
- (ii) $\int_s^t (\alpha \eta_u + \theta_u) dB_u = \alpha \int_s^t \eta_u dB_u + \int_s^t \theta_u dB_u$, si α est bornée dans $L_G^1(\Omega_s)$,
- (iii) $\widehat{\mathbb{E}} \left[X + \int_r^T \eta_u dB_u \mid \Omega_s \right] = \widehat{\mathbb{E}}[X \mid \Omega_s]$ pour $X \in L_G^1(\Omega_s)$.

Voici quelques propriétés de G .

Propriétés de la fonction génératrice G :

1)

$$G(\alpha) = \frac{1}{2} \text{Sup}_{\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}} \sigma^2 \alpha, \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}$$

2)

$$G(\alpha x) = \alpha G(x) \quad \forall \alpha \geq 0$$

3) G est une fonction croissante

4)

$$G^m(\alpha) = \begin{cases} \frac{\bar{\sigma}^{2n}}{2^n} \alpha & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{\underline{\sigma}^2}{2^n} \alpha & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{où } G^n = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{n\text{-fois}}; \quad n \geq 1 \text{ et } G^1 = G$$

5)

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^t G(\alpha_s) ds \right) \leq G \left(\int_0^t \widehat{\mathbb{E}}(\alpha_s) ds \right) \quad \forall \alpha \in M_G^2(0, T)$$

Notons que G n'est pas convexe.

Preuve. 1)

• Si $\alpha \geq 0$, alors $\alpha^+ = \alpha$ et $\alpha^- = 0$, ainsi

$$G(\alpha) = \frac{1}{2} (\alpha^+ \bar{\sigma}^2 - \alpha^- \underline{\sigma}^2) = \frac{1}{2} \alpha \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \sup_{\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}} (\alpha \sigma^2).$$

• Si $\alpha < 0$, alors $\alpha^+ = 0$ et $\alpha^- = -\alpha$, ainsi

$$G(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha \underline{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \sup_{\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}} (\alpha \sigma^2).$$

2) et 3) découlent immédiatement de 1).

4) se démontre par récurrence et en utilisant 2) et le fait que

$$G(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha \bar{\sigma}^2 & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{1}{2} \alpha \underline{\sigma}^2 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

5) Selon le théorème de Fubini qu'on a pour tout $P \in \mathcal{P}$:

$$\mathbb{E}^P \left(\int_0^t G(\alpha_s) ds \right) \leq \int_0^t \mathbb{E}^P (G(\alpha_s)) ds.$$

D'autre part, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\sigma_{\varepsilon, s} \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$ tel que

$$G(\alpha_s) \leq \frac{1}{2} \sigma_{\varepsilon, s}^2 \alpha_s + \varepsilon,$$

ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^P \left(\int_0^t G(\alpha_s) ds \right) &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{E}^P (\sigma_{\varepsilon, s}^2 \alpha_s) ds + \varepsilon t \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{\sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} \sigma^2 \int_0^t \mathbb{E}^P (\alpha_s) ds + \varepsilon t \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{\sigma \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]} \sigma^2 \int_0^t \widehat{\mathbb{E}}(\alpha_s) ds + \varepsilon t \\ &\leq G \left(\int_0^t \widehat{\mathbb{E}}(\alpha_s) ds \right) + \varepsilon t, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t G(\alpha_s) ds \right) \leq G \left(\int_0^t \widehat{\mathbb{E}}(\alpha_s) ds \right).$$

■

3.2.1 Processus de variation quadratique

Le processus de variation quadratique du G -mouvement Brownien est un processus très intéressant. On a vu que le G -mouvement Brownien est un processus de variance incertaine mais sans une moyenne incertaine. Cette incertitude est concentrée dans sa variation quadratique $\langle B \rangle$. Par ailleurs $\langle B \rangle$ lui-même est un processus de moyenne-variance.

Soit π_t^N , $N = 1, 2, \dots$ une suite de subdivision de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0. On considère

$$\begin{aligned} B_t^2 &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(B_{t_{j+1}^N}^2 - B_{t_j^N}^2 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} 2B_{t_j^N} \left(B_{t_{j+1}^N} - B_{t_j^N} \right) + \sum_{j=0}^{N-1} \left(B_{t_{j+1}^N} - B_{t_j^N} \right)^2. \end{aligned}$$

Comme le premier terme du membre droit de cette égalité tend vers $2 \int_0^t B_s dB_s$ dans $L_G^2(\Omega)$. Le second terme doit converger vers une limite. On notera cette limite par $\langle B \rangle_t$, i.e.,

$$\langle B \rangle_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \left(B_{t_{j+1}^N} - B_{t_j^N} \right)^2 = B_t^2 - 2 \int_0^t B_s dB_s. \quad (3.3)$$

Par la construction ci-dessus $(\langle B \rangle_t)_{t \geq 0}$ est un processus croissant avec $\langle B \rangle_0 = 0$. On l'appellera **le processus variation quadratique** du G -mouvement Brownien B . Il est important de rappeler que $\langle B \rangle_t$ n'est pas un processus déterministe, sauf le cas où $\bar{\sigma} = \underline{\sigma}$, i.e., quand $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien classique. En effet, on a le lemme suivant

Lemme 3.2.2 *Pour tout $0 \leq s \leq t \leq \infty$, on a*

$$\widehat{\mathbb{E}}[\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s | \Omega_s] = \bar{\sigma}^2(t - s) \quad (3.4)$$

$$\widehat{\mathbb{E}}[-(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s) | \Omega_s] = -\underline{\sigma}^2(t - s) \quad (3.5)$$

Preuve. D'après la définition de $\langle B \rangle$ et la proposition (2.2.1) (iii), on a

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}[\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s | \Omega_s] &= \widehat{\mathbb{E}}\left[B_t^2 - B_s^2 - 2 \int_s^t B_u dB_u | \Omega_s\right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}}[B_t^2 - B_s^2 | \Omega_s] = \bar{\sigma}^2(t - s). \end{aligned}$$

l'inégalité (2.5) peut être prouvée de manière analogue en utilisant le fait que $\widehat{\mathbb{E}}[-(B_t^2 - B_s^2) | \Omega_s] = -\underline{\sigma}^2(t - s)$. ■

Le lemme suivant est très utile pour la suite.

Lemme 3.2.3 Pour tout $s, t \geq 0$ fixés, $\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s$ est identiquement distribuée comme $\langle B \rangle_t$ et est indépendant de Ω_s .

Preuve. L'indépendance découle directement de ce fait :

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s &= B_{t+s}^2 - 2 \int_0^{s+t} B_u dB_u - \left[B_s^2 - 2 \int_0^s B_u dB_u \right] \\ &= (B_{t+s} - B_s)^2 - 2 \int_s^{s+t} (B_u - B_s) d(B_u - B_s) \\ &= \langle B^s \rangle_t \end{aligned}$$

où $\langle B^s \rangle$ est la variation quadratique du G -mouvement Brownien $B_t^s = B_{t+s} - B_s, t \geq 0$. ■

On va maintenant définir l'intégrale d'un processus $\eta \in M_G^1(0, T)$ par rapport à $\langle B \rangle$. On définit d'abord l'application

$$Q_{0,T}(\eta) = \int_0^T \eta_t d\langle B \rangle_t = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) : M^{1,G}(0, T) \longrightarrow L_G^1(\Omega_T).$$

Corollaire 3.2.1 (voir [17]) Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\underline{\sigma}^2 s \leq (\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s) \leq \bar{\sigma}^2 s$$

Proposition 3.2.2 *Pour tout $\eta \in M_G^2(0, T)$ fixé, on a*

$$\underline{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t^2 dt \right] \leq \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] \leq \bar{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t^2 dt \right] \quad (3.6)$$

Preuve. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t + \xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right)^2 \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t \right)^2 + \eta_{N-1}^2 (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})^2 + \right. \\ &\quad \left. 2 \left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t \right) \eta_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t \right)^2 + \xi_{N-1}^2 (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})^2 \right) \right] \\ &\quad \vdots \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \eta_i^2 \left(\langle B \rangle_{t_{i+1}} - \langle B \rangle_{t_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

D'après le corollaire (1.2.1), on a

$$\underline{\sigma}^2 (t_{i+1} - t_i) \leq \left(\langle B \rangle_{t_{i+1}} - \langle B \rangle_{t_i} \right) \leq \bar{\sigma}^2 (t_{i+1} - t_i)$$

et en multipliant membre à membre par (η_i^2) , on obtient

$$\underline{\sigma}^2 \eta_i^2 (t_{i+1} - t_i) \leq \eta_i^2 \left(\langle B \rangle_{t_{i+1}} - \langle B \rangle_{t_i} \right) \leq \bar{\sigma}^2 \eta_i^2 (t_{i+1} - t_i),$$

d'où

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \sigma^2 \eta_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] \leq \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \eta_i^2 \left(\langle B \rangle_{t_{i+1}} - \langle B \rangle_{t_i} \right) \right] \leq \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \bar{\sigma}^2 \eta_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right],$$

par suite

$$\underline{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t^2 dt \right] \leq \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] \leq \bar{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t^2 dt \right]$$

■

Lemme 3.2.4 *Pour tout $\eta \in M_G^1(0, T)$,*

$$\widehat{\mathbb{E}} [|Q_{0,T}(\eta)|] \leq \bar{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T |\eta_t| dt \right] \quad (3.7)$$

Ainsi $Q_{0,T}(\eta) : M^{1,G}(0, T) \longrightarrow L_G^1(\Omega_T)$ est une application linéaire continue. Par conséquence $Q_{0,T}$ peut être étendue uniquement vers $M^{1,G}(0, T)$. On notera encore cette application par

$$\int_0^T \eta_t d\langle B \rangle_t = Q_{0,T}(\eta) \text{ pour } \eta \in M_G^1(0, T).$$

De même, on a

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\left| \int_0^T \eta_t d\langle B \rangle_t \right| \right] \leq \bar{\sigma}^2 \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T |\eta_t| dt \right] \text{ pour } \eta \in M_G^1(0, T)$$

Proposition 3.2.3 *Soient $0 \leq s \leq t, \xi \in L_G^2(\Omega_s)$ et $X \in L_G^1(\Omega)$. Alors*

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (B_t^2 - B_s^2)] &= \widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (B_t - B_s)^2] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)]. \end{aligned}$$

Preuve. D'après (2.3) et la proposition (3.2.1) (iii) on a

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (B_t^2 - B_s^2)] &= \widehat{\mathbb{E}} \left[X + \xi \left(B_t - B_s + 2 \int_s^t B_u dB_u \right) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (B_t - B_s)] \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (B_t^2 - B_s^2)] &= \widehat{\mathbb{E}} [X + \xi \{(B_t - B_s)^2 + 2(B_t - B_s) B_s\}] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} [X + \xi (B_t - B_s)^2]\end{aligned}$$

■

Comme dans le cas classique on a l'isométrie suivante :

Proposition 3.2.4 *Soit $\eta \in M_G^2(0, T)$. Alors*

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] = \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t^2 d\langle B \rangle_t \right]. \quad (3.8)$$

Preuve. On considère d'abord $\eta \in M_G^2(0, T)$ de la forme

$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

et donc $\int_0^T \eta_s dB_s = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$. D'après la proposition (3.1.3), on a

$$\widehat{\mathbb{E}} [X + 2\xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = \widehat{\mathbb{E}} [X] \text{ pour } X \in L_G^1(\Omega) \text{ et } i \neq j$$

Ainsi,

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] = \widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right)^2 \right] = \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j^2 (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \right].$$

alors, il résulte de la proposition (2.2.3) que

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] = \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j^2 (\langle B_{t_{j+1}} \rangle - \langle B_{t_j} \rangle) \right] = \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \eta_t^2 d\langle B \rangle_t \right].$$

Ainsi (2.8) est vraie pour $\eta \in M_G^{2,0}(0, T)$. On peut étendre continuellement l'égalité ci-dessus dans le cas où $\eta \in M_G^2(0, T)$, (2.8) en résulte.

■

3.2. G -INTÉGRALES STOCHASTIQUES

Le lemme suivant joue un rôle crucial dans la suite.

Lemme 3.2.5 *Pour tout $\alpha, \beta \in M_G^2(0, T)$ on a*

$$-2G \left(\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}(-\alpha_t \beta_t) dt \right) \leq \widehat{\mathbb{E}}(I(\alpha) I(\beta)) \leq 2G \left(\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}(\alpha_t \beta_t) dt \right) \quad (3.9)$$

Preuve. Soit

$$\alpha_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(\omega) I_{[t_k, t_{k+1})}(t), \beta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k(\omega) I_{[t_k, t_{k+1})}(t).$$

D'après la définition de l'intégrale d'Itô et en utilisant des arguments standard de la G -analyse stochastique, on peut écrire

$$\widehat{\mathbb{E}}(I(\alpha) I(\beta)) = \widehat{\mathbb{E}} \left[\int_0^{T_{N-1}} \alpha_s dB_s \int_0^{T_{N-1}} \beta_s dB_s + \alpha_{N-1} \beta_{N-1} (B_{T_N} - B_{T_{N-1}})^2 \right],$$

et en répétant cette procédure on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}(I(\alpha) I(\beta)) &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \beta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \beta_i (\langle B \rangle_{t_{i+1}} - \langle B \rangle_{t_i}) \right]. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\underline{\sigma}^2 (t_{i+1} - t_i) \leq (\langle B \rangle_{t_{i+1}} - \langle B \rangle_{t_i}) \leq \bar{\sigma}^2 (t_{i+1} - t_i),$$

et en multipliant par $\alpha_i \beta_i$, puis en sommant par rapport à i , on obtient

$$\underline{\sigma}^2 \sum_{\alpha_i \beta_i \geq 0} \alpha_i \beta_i (t_{i+1} - t_i) + \bar{\sigma}^2 \sum_{\alpha_i \beta_i \leq 0} \alpha_i \beta_i (t_{i+1} - t_i) \leq \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \beta_i (\langle B \rangle_{t_{i+1}} - \langle B \rangle_{t_i}) \quad (3.10)$$

et

$$\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \beta_i (\langle B \rangle_{t_{i+1}} - \langle B \rangle_{t_i}) \leq \bar{\sigma}^2 \sum_{\alpha_i \beta_i \geq 0} \alpha_i \beta_i (t_{i+1} - t_i) + \underline{\sigma}^2 \sum_{\alpha_i \beta_i \leq 0} \alpha_i \beta_i (t_{i+1} - t_i). \quad (3.11)$$

Le premier membre de (2.10) est égal à

$$\begin{aligned} & \underline{\sigma}^2 \sum_{i=0}^N (-\alpha_i \beta_i)^- (t_{i+1} - t_i) - \overline{\sigma}^2 \sum_{i=0}^N (-\alpha_i \beta_i)^+ (t_{i+1} - t_i) \\ &= -2 \sum_{i=0}^N G(-\alpha_i \beta_i) (t_{i+1} - t_i) \\ &= -2 \int_0^T G(-\alpha_s \beta_s) ds, \end{aligned}$$

et par le même argument, le second membre de (2.11) devient

$$2 \int_0^T G(\alpha_s \beta_s) ds,$$

de sorte que

$$-2 \int_0^T G(-\alpha_s \beta_s) ds \leq \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \beta_i \left(\langle B \rangle_{t_{i+1}} - \langle B \rangle_{t_i} \right) \leq 2 \int_0^T G(\alpha_s \beta_s) ds,$$

Enfin, on obtient

$$-2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T G(-\alpha_t \beta_t) dt \right) \leq \widehat{\mathbb{E}} (I(\alpha) I(\beta)) \leq 2 \widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T G(\alpha_t \beta_t) dt \right)$$

La formule (2.9) résulte par la propriété 5) de G . ■

3.2.2 G -formule d'Itô

Dans cette partie, on donne la G -formule d'Itô.

Définition 3.2.4 *On appelle G -processus d'Itô (cas 1-dimension) tout processus de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dB_s + \int_0^t \eta_s d\langle B \rangle_s, \quad t \in [0, T]$$

où $X_0 \in L_G^2(\Omega_T)$, et α, β et η sont des processus bornés dans $M_G^2(0, T)$.

3.2. G -INTÉGRALES STOCHASTIQUES

On donne maintenant la G -formule d'Itô dans un cadre général. Soit $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ un G -vecteur processus d'Itô au sens que

$$X_t^\nu = X_0^\nu + \int_0^t \alpha_s^\nu ds + \int_0^t \beta_s^\nu dB_s + \int_0^t \eta_s^\nu d\langle B \rangle_s, \quad t \in [0, T], \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

Théorème 3.2.1 (La G -formule d'Itô) Soit Φ une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^n de telle sorte que $\partial_{x_\nu x_\mu}^2 \Phi$ satisfait la condition de croissance polynômiale pour $\nu, \mu = 1, 2, \dots, n$. On suppose que α^ν, β^ν et $\eta^\nu, \nu = 1, 2, \dots, n$ sont des processus bornés de $M_G^2(0, T)$. Alors, pour tout $s, t \geq 0$ on a dans $L_G^2(\Omega_t)$

$$\begin{aligned} \Phi(X_t) &= \Phi(X_s) + \sum_{\nu=1}^n \left(\int_s^t \partial_{x_\nu} \Phi(X_u) \alpha_u^\nu du + \int_s^t \partial_{x_\nu} \Phi(X_u) \beta_u^\nu dB_u \right) \\ &\quad + \int_s^t \left[\sum_{\nu=1}^n \partial_{x_\nu} \Phi(X_u) \eta_u^\nu + \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu=1}^n \partial_{x_\nu x_\mu}^2 \Phi(X_u) (\beta_u^\nu)^2 \right] d\langle B \rangle_u. \end{aligned}$$

Preuve. ci-dessous, on peut supposer que α est borné, puisque le cas général suit par l'argument de troncature d'habitude.

Pour simplifier les formules on utilise les notations suivantes

$$\int_0^t \alpha^2(s) d\langle B \rangle_s = \int \alpha^2 d\langle B \rangle, \quad \int_0^t \alpha(s) dB(s) = \int \alpha dB.$$

Ecrivons $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \rho_{2n}(t) &= h_{2n} \left(\int \alpha^2 d\langle B \rangle, \int \alpha dB \right) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k a_k \left(\int \alpha dB \right)^{2n-2k} \left(\int \alpha^2 d\langle B \rangle \right)^k, \end{aligned} \tag{3.12}$$

où h_{2n} est le polynôme d'Hermite de degré $2n$. ■

Conclusion

En conclusion le G-mouvement brownien a une nouvelle structure très riche et intéressante qui généralise celui du classique non triviale, et la G-espérance est intrinsèque dans le sens où elle n'est pas définie sur un espace de probabilité donné. Cela nous donne espoir de développer d'avantage l'analyse stochastique.

Bibliographie

- [1] H. Boutabia, I.Grabsia; *Chaotic expansion in the G -expectation space*, Opuscula Math., 33 (2013) 4, 647 – 666.
- [2] I.Grabsia; *Chaos de wiener par rapport au G -mouvement Brownien*, Thèse de Doctorat en mathématiques, option : Probabilités; 2014.
- [3] Z.Chen; *A property of backward stochastic differential equations*, C.R. Acad. Sci.Ser.I 326(1998)4, 483 – 488.
- [4] G. Choquet; *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier, (1955) 5, 131 – 295.
- [5] M.Crandall, H. Ishii, P. L. Lions; *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. 27(1992)1, 1 – 67.
- [6] L. Denis, M. Hu, S. Peng; *Function spaces and capacity related to a sublinear expectation : Application to G -Brownian motion pathes*, Potential Anal. **34** (2011) 2, 139 – 161.
- [7] Y. Dolinsky, M. Nutz, H. Mete Soner, *Weak approximation of G -expectations*, arXiv: 1103.0575v1 [math.PR] 2 Mar 2011.
- [8] F. Gao; *Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equations driven by G -Brownian motion*, Stoch. Proc. Appl, 119 (2009) , 3356 – 3382.
- [9] M. Hu, S. Peng; *On the representation theorem of G - expectations and paths of G -Brownian motion*, Acta Math. Appl. Sini. Engl. Seri. **25** (2009) 3, 539 – 546..
- [10] Y. Hu , S. Peng; *Some estimates for martingale representation under G -expectation*, arXiv: 1004.1098v1[math.PR] 7 Apr 2010. .
- [11] I. Karatzas, S.E. Shreve; *Methods of mathematical finance*, Springer, New York 1998.
- [12] E. Nelson; *Dynamical theories of Brownian motion*.[http ://www.math.princeton.edu/,nelson/books/bmotion.pdf](http://www.math.princeton.edu/~nelson/books/bmotion.pdf).

-
- [13] X. Li , S. Peng; *Stopping times and related Itô's calculus with G -Brownian motion*, arXiv: 0910.3871v2 [math.PR] 6 Apr 2011.
- [14] M. Nisio; *On a nonlinear semigroup attached to optimal stochastic control*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 13 (1976) , 513 – 537.
- [15] W. Panyu; *Multiple G -Itô integral in the G -expectation space*, Preprint : arXiv :1012.0368v1 [math.PR] 2 Dec 2010.
- [16] S. Peng; *G -expectation, G -Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type*. Stoch. Anal. Appl., Abel Symp., Springer Berlin (2007) **2**, 541 – 567.
- [17] S. Peng; *Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations*, Preprint : arXiv :0702358v1 [math.PR] 13 Feb 2007.
- [18] S. Peng; *G -Brownian motion and dynamic risk measure under volatility uncertainty*, Preprint : arXiv :0711.2834v1 [math.PR] 19 Nov 2007.
- [19] S. Peng; *Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty with robust central limit theorem and G -Brownian motion*, Preprint : arXi :1002.4546v1 [math.PR] 24 Feb 2010.
- [20] S. Peng; *Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains*, Chin. Ann. Math. 26 (2005) 2, 159 – 184.
- [21] S. Peng; *Filtration Consistent Nonlinear Expectations and Evaluations of Contingent Claims*, Acta Math. Appl. Sin., 20 (2004) 2, 1 – 24.
- [22] S. Peng; *A new central limit theorem under sublinear expectations*, arXiv: 0803.2656v1 [math.PR] 18 Mar 2008.
- [23] W. Schoutens; *Stochastic processes and orthogonal polynomials*, Lecture notes in Statistics.v146 (2000) .Springer- Verlag, ISBN 0 – 387 – 95015 – X.
- [24] H.M. Soner, N.Touzi, J.Zhang; *Quasi-sure stochastic analysis through aggregation*, Electron. J. Probab. **16** (2011) 67, 1844 – 1879.
- [25] H. M. Soner, N. Touzi, J. Zhang; *Martingale representation theorem for the G -expectation*, arxiv: 1001.3802v2, 2010.
- [26] N. Wiener, *The homogeneous chaos*, Amer. J. Math. **60** (1938) , 897 – 936.
- [27] J. Xu, B. Zhang; *Martingale characterization of G -Brownian motion*, Stochastic Process. Appl. **119** (2009) 1, 232 – 248.
- [28] G. Xiaolin, S. Yang; *The numerical properties of G -heat equation and related application*, arXiv :1304.1599v1 [math.NA] 5 Apr 2013

- [29] F.Yulian ; *Some apriori estimates of G-BSDEs and the G-martingale representation for a special case*, arXiv :1303.0937v1 [math.PR] 5Mar 2013.
- [30] B. Zhang, J. Xu, D.Kannan ; *Extension and application of Itô's formula under G-famework*, Stoch. Anal. Appl., 28 (2010) , 322 – 349.