الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Solutions positives d'un problème non linéaire de quatrième ordre

Présenté par: HACINI Abderrahmane

Devant le Jury :

Dr. SAKRI Amine	MCB	ESSG - Annaba	Président
Dr. MANSSOURI Bouzid	MCA	ENSET - Skikda	Rapporteur
Dr. GHARBI Ouahiba	MCB	Univ Badji – Mokhtar Annaba	Examinatrice

Année Universitaire 2022-2023

Table des matières

Remerciement

Je tiens avant tout à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a donnés pour pouvoir mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier **Dr. MANSOURI Bouzid**, mon encadreur de mémoire, pour la confiance qu'elle m'a donné, ses conseils avisés, et le temps qu'il a consacré à la réalisation du mémoire et à la finalisation du travail. Je voudrais aussi lui combien j'apprécie sa grande présence et son respect indéfectible des rendez-vous.

Je voudrais également remercier les membres du jury

Dr. SAKRI Amine, pour l'honneur qu'elle ma fait en acceptant d'être présidante de mon jury.

Dr. GHARBI Ouahiba, qui a bien voulu examiner ce travail.

Enfin, je remercie ma famille en particulier **mon père**, **ma mère** et **ma femme**, qui m'ont toujours soutenu et fait preuve de courage dans des moments difficiles, aussi que tous **mes amis plus proches**.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A celui qui m'a encouragé à persévérer tout au long de ma vie, à l'homme le plus important de ma vie (Mon cher père : **Moussa** , que Dieu ait pitié de lui et le fasse habiter dans ses vastes jardins)

À celui qui est au-dessus et basé sur lui, au coeur qui donne (Ma mère bien-aimée : **Baya**, que Dieu prolonge sa vie et garde sa santé et son bien-être)

À un compagnon de lutte et de circonstances difficiles qui n'a pas ménagé son temps ni ses efforts pour m'aider (Ma femme vertueuse **Ahlam** et mon cher fils **Adam**)

À tous ceux qui ont contribué, même par une lettre, à ma vie universitaire, parmi les honorables professeurs et collègues, et désolé pour ceux d'entre nous qui sont tombés par inadvertance, mais dans le coeur il y a une place

Quant aux remerciements particuliers. Nous le tournons également vers tous ceux qui ne nous ont pas soutenus. Au contraire, il s'est mis sur notre chemin.

Et obstrué la marche de nos recherches et planté des épines sur le chemin. Sans leur présence, nous n'aurions pas ressenti le plaisir de la recherche, ni la douceur d'une compétition positive pour briser leur puissance. Nous avons tous nos remerciements....

A eux tous : je dédie cet humble travail, que je demande à Dieu Tout-Puissant de l'accepter sincèrement. Puisse-t-il être dans la balance de vos bonnes actions et des miennes...

Professeur étudiant

Hacini Abderrahmane

ملخص

في هذه المذكرة، سوف ندرس وجود الحل الإيجابي لمشكل المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الرابعة في النقطة التالية

$$u''''(t) + f\big(u(t)\big) = 0, t \in (01),$$

مع

$$u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0\ , u(0) = \int_0^1 a(s)u(s)ds.$$

باستعمال نظرية النقطة الثابتة على مخروط و الشرط لبرهنة وجود على الاقل حل موجب

الكلمات المفتاحية : الحل الإيجابي، نظرية النقطة الثابتة لكاسنسلسكي، مشكل ذات الرتبة الرابعة، وجود، مخروط .

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie l'existence de la solution positive pour le problème d'éqution différentielle d'ordre quatre à deux point suivant

$$u''''(t) + f(u(t)) = 0,\ t \in (0,1),$$

avec

$$u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0,\ u(0) = \int_0^1 a(s)u(s)ds.$$

Par l'utilisation du théorème du point fixe sur le cône et des conditions suffisante on démontre l'existence d'au mois une solution positive.

Mots clés : Solution positive, théorème de point fixe de Krasnoselskii, problème d'ordre quatre, existence, cône.

Abstract

In this paper, we study the existence of positive solutions for a nonlinear fourth-order two-point boundary value problem

$$u''''(t) + f(u(t)) = 0,\ t \in (0,1),$$

avec

$$u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0,\ u(0) = \int_0^1 a(s)u(s)ds.$$

By using Krasnoselskii's fixed point theorem on cones, sufficient conditions for the existence of at least one positive solutions are obtained.

Key words and phrases : Positive solutions, Krasnoselskii's fixed point theorem, fourth-order integral boundary value problems, existence, cone.

Notations

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers positive.

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

$\mathbb{R}^n$: Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.

$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.

$\| \,.\, \|$: Norme.

(E, d) : Espace métrique.

$G(t, s)$: Fonction de Green.

Chapitre 1

Introduction

Les équations différentielles ordinaires du quatrième ordre represente généralement des modèles de flexion ou de déformation des poutres élastiques, et ont donc des applications importantes en ingénierie et en sciences physiques. Récemment, les problèmes de valeurs aux limites à deux points et multipoints pour les équations différentielles non linéaires du quatrième ordre ont reçu beaucoup d'attention de la part de nombreux auteurs. De nombreux auteurs ont étudié l'équation du faisceau sous plusieurs conditions aux limites et par différentes approches.
En 2009, J. R. Graef, J. Henderson et B. Yang [5] considère le problème des valeurs limites en trois points du quatrième ordre suivant

$$u''''(t) = g(t)f(u(t)),\ t \in (0,1),$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u'(0) = u''(\beta) = u''(1) = 0.$$

En 2006, D. R. Anderson et R. I. Avery [1] ont étudié le problème à valeurs aux limites à quatre points du quatrième ordre suivant

$$u''''(t) + f(u(t)) = 0,\ 0 < t < 1,$$

avec

$$u(0) = u'(q) = u''(r) = u'''(1) = 0.$$

En 2014, Xiaorui Liu et Dexiang Ma [9], ont considéré le problème aux limites à deux points du troisième ordre

$$u'''(t) + f(u(t) = 0,\ 0 < t < 1,$$

avec

$$u'(0) = u'(1) = 0,\ u(0) = \int\limits_0^1 k(s)u(s)ds,$$

Dans ce travail, nous étudions l'existence de solutions positives d'un problème aux limites non linéaire à deux points pour l'équation différentielle du quatrième ordre suivante

$$u''''(t) + f(u(t)) = 0,\ t \in (0,1), \tag{1.1}$$

avec

$$u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0,\ u(0) = \int\limits_0^1 a(s)u(s)ds, \tag{1.2}$$

où

(H_1) $f \in C([0,\infty),[0,\infty))$,

(H_2) $a \in C([0,1],[0,\infty))$ et $0 < \int\limits_0^1 a(s)ds < 1$.

Le but de ce travail est d'établir des conditions suffisantes pour l'existence d'au moins une solution positive du (1.1) et (1.2). Nous allons d'abord construire la fonction de Green pour le problème aux limites linéaire associé, puis on détermine les propriétés de la fonction de Green pour le problème aux limites linéaire associé. Enfin, les résultats d'existence pour au moins une solution positive pour le problème ci-dessus sont établis lorsque f est superlinéaire ou souslinéaire. Comme applications, quelques exemples intéressants sont présentés pour illustrer les principaux résultats.

Cette mémoire est présentée en trois chapitres

Chapitre 01 : Une introduction générale.

Chapitre 02 : Dans ce chapitre on rappel quelques définitions et théorèmes utiles pour la suite de cette mémoire.

Chapitre 03 : Ce chapitre contient les principaux résultat de notre mémoire.

Chapitre 2

Préliminaires et rappels

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires pour mieux comprendre ce manuscrit.

2.1 Notions Préliminaires

2.1.1 Les espaces métriques

Définition 2.1.1 *Soit E un ensemble non vide. Une distance (ou métrique) sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout x, y et z de E*

1. $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie)*,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire)*.

Exemple 2.1.1 $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ *est une distance sur $\mathbb{R}$, car pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$

2. $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|} = d(y,x)$.

3. *On remarque que la fonction* $F : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *définie par* $F(x) = \dfrac{x}{1+x}$ *est croissante. En particulier, en utilisant aussi l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a*

$$d(x,z) = F(|x-z|) \leq F(|x-y| + |y-z|),$$

mais

$$\begin{aligned} F(|x-y|+|y-z|) &= \frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|} + \frac{|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|} \\ &\leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|} \\ &\leq d(x,y) + d(y,z), \end{aligned}$$

ainsi, on a bien démontrer que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Définition 2.1.2 *On dit que deux distances* d_1, d_2 *sur un ensemble* E *sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles* $\beta \geq \alpha > 0$ *telles que*

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y),$$

pour tout $x, y \in E$.

Exemple 2.1.2 *Soit* $(d_i)_{1\leq i\leq p}$ *une famille finie de* p *distances sur* E_i*, on pose*

$$E = \prod_{i=1}^{p} E_i,$$

et on définit sur le produit cartésien $E \times E$ *deux distances comme suit*

$$D_1(x,y) = \sup_{1\leq i\leq p} d_i(x_i,y_i),\ D_2(x,y) = \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i,y_i),$$

pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *et* $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *de* E*. On a*

$$\sup_{1\leq i\leq p} d_i(x_i,y_i) \leq \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i,y_i) \leq p \sup_{1\leq i\leq p} d_i(x_i,y_i),$$

donc

$$D_1(x,y) \leq D_2(x,y) \leq pD_1(x,y).$$

Alors D_1 *et* D_2 *sont équivalentes, telles que* $\alpha = 1$, $\beta = p$.

Définition 2.1.3 *On appelle espace métrique tout ensemble non vide E muni d'une distance d. Cet espace sera noté par (E, d).*

Exemple 2.1.3 *L'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$ et dit métrique, lorsqu'il est muni d'une des distances suivantes*

1. $d_1(f, g) = \displaystyle\int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$
2. $d_2(f, g) = \left(\displaystyle\int_0^1 [f(t) - g(t)]^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$
3. $d_\infty(f, g) = \max\limits_{t \in [0;1]} |f(t) - g(t)|.$

Définition 2.1.4 *Une partie S d'un espace métrique $(E, |\cdot|)$ est dite bornée s'il existe une constante $L < \infty$ telle que $|x| \leq L$ pour tout $x \in S$. Une fonction f est dite bornée si son image est une partie bornée de E.*

2.1.2 Suites dans les espaces métriques

Définition 2.1.5 (La convergence) *Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E converge vers un point $l \in E$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que*

$$d(x_n, l) < \varepsilon, \text{ pour tout } n \geq N_\varepsilon.$$

On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$ ou $x_n \to l$.

Proposition 2.1.1 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve. Supposons que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l, il existe alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel n

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| \leq 1,$$

alors $\forall n \geq N_\varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} |U_n| &= |U_n - l + l| \\ &\leq 1 + |l|, \end{aligned}$$

on a donc $|U_n| \leq 1 + |l|$. Notons $M = \max(|U_0|, |U_1|, \cdots, |U_{N_\varepsilon - 1}|, 1 + |l|)$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n| \leq M.$$

Par conséquent, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. ■

Définition 2.1.6 (La continuité) *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, f une application de E dans F, et a un point de E, on dit que f est continue en a si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ d_E(x, a) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Si l'application f est continue en tout point a de E, on dit qu'elle est continue sur E ou tout simplement continue.

Proposition 2.1.2 *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et f une application de E dans F. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1. *f est continue en un point $a \in E$.*
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Définition 2.1.7 (La continuité uniforme) *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Une application $f : E \to F$ est dite uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in E,\ d_E(x, y) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

δ ne dépend que de ε.

Remarque 2.1.1 *Il est clair que la continuité uniforme sur E implique la continuité sur E. Par contre, la réciproque est fausse.*

Exemple 2.1.4 *L'application $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Définition 2.1.8 (Familles équicontinues) *Soit U un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions avec $f_n : U \to \mathbb{R}^P$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $t_1, t_2 \in U$ et $|t_1 - t_2| < \delta$, alors $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
Autrement dit, toutes les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont continues sur I, et elles sont continues " de la même façon ".

Exemple 2.1.5 *On considère la suite de fonctions*

$$f_n(t) = \sin\left(\sqrt{t + 4(n\pi)^2}\right),\ t \in [0, \infty[.$$

- *Pour $t \geq 0$ fixé, alors*

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= \sin\left(\sqrt{t + 4(n\pi)^2}\right) \\
&= \sin\left(2n\pi\sqrt{1 + \frac{t}{4n^2\pi^2}}\right) \\
&= \sin\left(2n\pi\left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{t}{4n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= sin\left(2n\pi + \frac{t}{4n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= sin\left(\frac{t}{4n\pi}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Donc quand $n \to +\infty$ alors $f_n(t) \to 0$, donc (f_n) converge simplement vers 0.

- *Pour $n \geq 1$*

$$\begin{aligned}
\left|f_n'(t)\right| &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t + 4n^2\pi^2}} \cos\sqrt{t + 4n^2\pi^2} \\
&\leq \frac{1}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Pour $t \geq 0$ fixé et $\varepsilon > 0$ donné, on pose $\eta = 4\pi\varepsilon$ alors par l'inégalité des accroissement finis

$$\forall n \geq 1,\ \left|t - t'\right| < \eta \Rightarrow \left|f_n(t) - f_n(t')\right| \leq \frac{1}{4\pi}(t - t') < \varepsilon.$$

Donc (f_n) est une famille équicontinue.

Définition 2.1.9 (Suites de Cauchy) *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique (E, d) est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N} : n > m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

On écrit alors

$$d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$$
$$n, m \to +\infty.$$

Exemple 2.1.6 *On munit l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ par la distance fondamentale d_1 et on considère les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par*

$$f_n(x) = min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \begin{cases} n, & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2}, \\ \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & si \quad \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout n et m de $\mathbb{N}^*$, avec $n > m$, on a

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} (n-m)dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}} (\frac{1}{\sqrt{x}} - m)dx + \int_{\frac{1}{m^2}}^1 (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx \\ &= (\frac{1}{n}) - (\frac{m}{n^2}) + 2(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}) - m(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Donc, en prend $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, on trouve que

$$n > m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Proposition 2.1.3 *Toute suite convergente d'un espace métrique (E,d) est de Cauchy.*

Remarque 2.1.2 *Il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas comme la suite $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans l'espace $]-1,1[$, mais cette suite est convergente dans $\mathbb{R}$ vers 1 dont $1 \notin]-1,+1[$.*

2.1.3 Les espaces complets

Définition 2.1.10 *On dit qu'un espace métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E.*

Exemple 2.1.7 $(\mathbb{R}^N, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}^N, |\cdot|)$ *sont des espaces complets.*

Exemple 2.1.8 $(\mathbb{Q}^N, |\cdot|)$ *n'est pas complet, on prend par exemple la suite* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *qui converge vers* $\mathbf{e}$ *mais* $\mathbf{e} \notin \mathbb{Q}^N$.

2.1.4 Les espaces de Banach

Définition 2.1.11 *Un espace vectoriel* $(E, +, .)$ *est un espace normé si pour tout* $x, y \in S$ *il existe une fonction continue de* E *dans* $\mathbb{R}_+$ *vérifiant*

1. $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$, *et*
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemple 2.1.9 *Soit* $E = M_n(\mathbb{R})$, *si* A *est dans* E, *on pose* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *alors*

$$\|A\|_\infty = \sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|,$$

définit une norme sur E.

Exemple 2.1.10 *L'espace* $C([0,1], \mathbb{R})$ *et dit normé, lorsqu'il est muni d'une des normes suivantes*

1. $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. *(La norme de la convergence uniforme)*
2. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt$.
3. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 [f(t)]^2 dt}$.

Remarque 2.1.3 *Un espace normé est un espace métrique dont la distance est définie par*

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Cependant, un espace métrique est toujours un espace normé même s'il possède une structure vectorielle car une distance n'est pas souvent associée à une norme.

Définition 2.1.12 *On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha > 0$ telles que*

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \text{ pour tout } x \in E.$$

Définition 2.1.13 *Un espace de Banach est un espace normé complet pour la distance associée à sa norme.*

Exemple 2.1.11 *Soit $E = C([a,b], \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^n$. Le nombre*

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|,$$

où $|\cdot|$ est la norme dans $\mathbb{R}^n$, définit une norme rendant $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Exemple 2.1.12 *On note l'espace des suites multiples bornées*

$$l^\infty(Z^N) = \left\{ x : Z^N \to \mathbb{K}, \sup_{k \in Z^N} |x(k)| < \infty \right\},$$

et pour tout $x \in l^\infty(Z^N)$, on pose

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in Z^N} |x(k)| < \infty.$$

Alors $l^\infty(Z^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

2.1.5 La convexité

Définition 2.1.14 *Un sous-ensemble S de $\mathbb{R}$ est dit convexe si pour tout $x, y \in S$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S.$$

Définition 2.1.15 (La fonction convexe) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si pour tout x, y de I et tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Exemple 2.1.13 *La fonction $x \to |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car si $\lambda \in [0,1]$, alors*

$$\begin{aligned} |\lambda x + (1-\lambda)y| &\leq |\lambda x| + |(1-\lambda)y| \\ &= \lambda |x| + (1-\lambda) |y| . \end{aligned}$$

2.1.6 La compacité

Définition 2.1.16 *Soit (S,d) un espace métrique. Un sous ensemble $\mathbb{M}$ de S est dit compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert de $\mathbb{M}$ on peut extraire un sous recouvrement fini. D'une manière équivalente, un sous ensemble $\mathbb{M}$ de S est compact si et seulement si tout suite de $\mathbb{M}$ admet une sous suite convergente dans $\mathbb{M}$.*

Définition 2.1.17 (***relativement compacte***) *Soit (E,d) un espace métrique. Une partie A de E est dite relativement compacte dans (E,d) si la ferméture $\bar{A}$ de A est compacte.*

Définition 2.1.18 *un opérateur $T : E \to E$ est complètement continues s'il est continues et transforme des ensembles bornés à des ensembles relativement compacts.*

Définition 2.1.19 *Soit (f_n) une suite de fonctions réelles $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. (f_n) est uniformément bornée sur $[a,b]$ s'il existe un $l > 0$ tel que*

$$|f_n(t)| \leq l, \ \forall t \in [a,b].$$

Définition 2.1.20 *Soit $\mathbb{M}$ un sous ensemble de $E = C([a,b], \mathbb{R})$, $\mathbb{M}$ est dit équicontinu si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in [a,b],\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in [a,b],$$
$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \forall f \in \mathbb{M},\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

2.2 Théorèmes de point fixe

2.2.1 Rappel et quelques notions sur la théoire de point fixe

Aujourd'hui la théorie du point fixe se rencontre pratiquement dans tous les domaines de la recherche en mathématiques et spécialement quand on étudie l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielles.

L'objectifs de notre travail est d'exposer cette méthode de point fixe et d'expliquer, par des exemples concrets, ses applications et illustrer quelques avantages d'appliquer le principe de l'application contractante et le théorème de point fixe de Schauder.

Définition 2.2.1 (***Point fixe***) *Soit A une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe de A tout point y tel que $Ay = y$. S'il existe un tel y on dit que A possède un point fixe, ce qui est équivalent à dire que l'équation $Ax - x = 0$ possède une solution.*

Définition 2.2.2 *Étant donnés deux espaces métriques (X, d) et (Y, ρ) et une application $A : X \to Y$. Alors*

1. *A est k-Lipschitzienne si $\forall y, v \in X,\ \rho(A(y), A(v)) \leq kd(y, v)$,*
2. *si $k = 1$, A est dite non-expansive,*
3. *si $k < 1$, A est dite contractante,*
4. *A est contractive si $\forall y, v \in X,\ y \neq v,\ \rho(A(y), A(v)) < d(y, v)$.*

et on a les implications suivantes

$$A \text{ contractante sur } X \Longrightarrow A \text{ contractive sur } X \Longrightarrow$$
$$A \text{ non-expansive sur } X \Longrightarrow A \text{ 1-lipschitzienne sur } X \Longrightarrow$$
$$A \text{ uniformément continue sur } X \Longrightarrow A \text{ continue sur } X.$$

Proposition 2.2.1 *Soit (X, d) un espace métrique et soit A une application $A : X \longrightarrow X$. Si A est contractive sur X, elle ne peut avoir qu'un seul point fixe.*

2.2.2 Théorème du Point Fixe de Banach

Théorème 2.2.1 ([12]) *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $T : E \to E$ une application contractante de constante $k \in [0, 1[$. Alors il existe un point unique $x \in E$ tel que $T(x) = x$.*

Remarque 2.2.1 *Si A est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées A^P est une contraction, alors A a un seul point fixe.*

En effet, soit x l'unique point fixe de A^P on a

$$A^P(A(x)) = A(A^p(x)) = A(x),$$

ce qui convient à dire que $A(x)$ est aussi un point fixe de A^P et grâce à l'unicité $A(x) = x$. Ce résultat est valable pour tous les types de contractions qui assurent l'unicité du point fixe.

2.2.3 Théorème de point fixe de Schauder

Théorème 2.2.2 ([12]) *Soit $\mathbb{M}$ un sous ensemble convexe fermé borné et non vide d'un espace de Banach E et $T : \mathbb{M} \to E$ une application compacte. Alors T possède un point fixe.*

Remarque 2.2.2 *Si $\mathbb{M}$ est compact et convexe, il suffit que T soit continue pour avoir un point fixe pour T.*

2.2.4 Théorème de point fixe de Krasnoselskii

Théorème 2.2.3 ([12]) *Soit* $\mathbb{M}$ *un sous ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Banach* $(E, \|\cdot\|)$*. On suppose que* $A, B : \mathbb{M} \to E$ *sont deux applications satisfaisant*

1. $Ax + By \in \mathbb{M},\ \forall x, y \in \mathbb{M}$,
2. A *est complètement continue,*
3. B *est une application contractante.*

Alors il existe $z \in \mathbb{M}$ *avec* $z = Az + Bz$.

Preuve. D'une part, la 3$^{\text{ème}}$ condition donne

$$\begin{aligned} \|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\ &\leq \|x-y\| + \|Bx-By\| \\ &\leq \|x-y\| + k\|x-y\| \\ &\leq (1+k)\|x-y\|, \end{aligned} \tag{2.1}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\ &\geq \|I(x-y)\| - \|Bx-By\| \\ &\geq \|x-y\| - k\|x-y\| \\ &\geq (1-k)\|x-y\|. \end{aligned} \tag{2.2}$$

De (2.1) et (2.2), il résulte que

$$(1-k)\|x-y\| \leq \|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| \leq (1+k)\|x-y\|.$$

Cette double inégalité montre que $(I-B) : \mathbb{M} \to (I-B)\mathbb{M}$ est continue et bijective. Donc, $(I-B)^{-1}$ existe et elle est continue. Posons $U = (I-B)^{-1}A$, il est clair que U est une application compacte, puisque U est une composition d'une application continue et une application compacte. En vertu du théorème de Schauder, U admet un point fixe, c'est à dire

$$\exists x \in \mathbb{M},\ (I-B)^{-1}Ax = x,$$

ceci équivaut à dire

$$Ax + Bx = x,$$

et la preuve est achevée. ■

2.3 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Ci-dessous on rappelle un outil classique et puissant pour montrer qu'une partie de l'espace des fonctions continues sur un compact est relativement compacte.

Théorème 2.3.1 (d'Ascoli-Arzelà) *Soit $C([a,b],\mathbb{R})$, $-\infty < a < b < +\infty$, l'espace de fonctions continues définies sur le compact $[a,b]$ et à valeurs réelles muni de la norme*

$$\|u\| = \max_{a\leq t\leq b} |u(t)|.$$

Une partie F de $C([a,b],\mathbb{R})$ est relativement compacte dans $C([a,b],\mathbb{R})$ si et seulement si elle est uniformément bornée et équicontinue.

Définition 2.3.1 *Soit X et Y deux espaces vectoriels normés et Ω un sous ensemble de X.*

$i)$ Une application continue $A : X \to Y$ est dite compacte si lorsque Ω est borné implique $A(\Omega)$ est relativement compact, c'est à dire $A(\Omega)$ est compact. C'est à dire si pour toute suite bornée (x_n) dans X, la suite $A(x_n)$ possède une sous suite convergeant dans Y,

$ii)$ A est dite complètement continue si elle est compacte et continue.

Exemple 2.3.1 *Soit $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, considérons l'équation intégrale*

$$u(t) \to \int_0^t g(s,u(s))ds,\ t \in [0,1],$$

alors l'opérateur de Hammerstein

$$\begin{aligned} G: \quad C([0,1]) &\longrightarrow C([0,1]) \\ u &\mapsto Gu, \end{aligned}$$

tel que

$$Gu(t) = \int_0^t g(s,u(s))ds,$$

est compact.

Preuve. Soit l'ensemble $A = \{g \in C([0,1]),\ \|g\| \leq M\}$. Comme g est continue et bornée, alors

$$\begin{aligned} |Gu(t)| &= \left| \int_0^t g(s,u(s))ds \right| \\ &\leq \int_0^t |g(s,u(s))|\, ds \\ &\leq M \int_0^t ds \\ &\leq M, \end{aligned}$$

$\forall t \in [0,1]$. Donc G est borné. Maintenant on va montrer que G est équicontinu. On a

$$\begin{aligned} |Gu(t_1) - Gu(t_2)| &= \left| \int_0^{t_1} g(s,u(s))ds - \int_0^{t_2} g(s,u(s))ds \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} |g(s,u(s))|\, ds \\ &\leq M \int_{t_1}^{t_2} ds \\ &\leq M\, |t_2 - t_1|\,. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta < \dfrac{\varepsilon}{M}$ tel que, pour tout $t_1, t_2 \in [0,1]$, $|t_2 - t_1| < \delta$ alors

$$|Gu(t_1) - Gu(t_2)| \leq M\delta < \varepsilon,$$

d'où l'équicontinuité de G. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, G est compact dans A. ■

2.4 Fonction de Green pour le problème aux limites

On considère les équations différentielles de Sturm-Liouville linéaires sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

$$(H) : \left(py'\right)' + qy = 0, (NH) : \left(py'\right)' + qy = f,$$

où $f, q \in C\left([a,b]\right)$ et $p \in C^1([a,b])$, associées aux conditions aux bords homogènes et non homogènes

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y'\left(a\right) + \alpha_2 y'\left(a\right) = 0, \\ \beta_1 y\left(b\right) + \beta_2 y'\left(b\right) = 0. \end{cases}$$

$$(CB)_{nh}\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y^{'}(a)=\gamma,\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y^{'}(b)=\delta.\end{cases}$$

où $\gamma,\delta,\alpha_i,\beta_i\ (i=1,2)$ sont des constantes réelles telles que $|\alpha_1|+|\alpha_2|,|\beta_1|+|\beta_2|\neq 0$.

Théorème 2.4.1 *Supposons que le problème $(H)-(CB)_h$ admet pour unique solution la solution triviale nulle. Alors il existe une unique fonction $G=G(x,y)$ (dite fonction de Green), telle que pour toute fonction f, la solution y du problème homogènes $(NH)-(CB)_h$ S'écrit d'une manière unique sous la forme*

$$y(x)=\int_a^b G(x,y)\,f(y)\,dy.$$

De pius, G vérifiée les propriétés suivanntes

1. *G est continue sur $[a,b]^2$.*
2. *G est symétrique i.e. $G(x,y)=G(y,x),\forall x,y\in[a,b]$.*
3. *$\frac{\partial G}{\partial X}(x,y)$ est continue pour tout $x\neq y$.*
4. *La fonction partielle $x\longmapsto G(x,y)$ est solution de l'équation (H) por tout $x\neq y$.*
5. *La fonction partielle $x\longmapsto G(x,y)$ vérifiée les conditions $(CB)_h$ pour tout $y\in[a,b]$.*

Exemple 2.4.1 *Considérons le problème aux limites du second ordre*

$$(p)\begin{cases}-u''(t)=f(u(t)),\ 0<t<1,\\ u(0)=u(1)=0.\end{cases}$$

où $u(0)$ et $u(1)$ des conditions initiales de problème (p). Le problème (p) est équivalent à l'équation intégrale

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\,f(u(s))\,ds.$$

où la fonction de Green $G:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ est donnée par

$$G(t,s)=\begin{cases}t(1-s),0\leq t\leq s\leq 1,\\ \\ s(1-t),0\leq s\leq t\leq 1,\end{cases}$$

La fonction de Green associée au probléme (p) a les propiétés suivantes

1. $G(t,s) \geq 0, \forall t,s \in [0,1]$.
2. $G(t,s) \leq s(1-s) < 1, \forall t,s \in [0,1]$.
3. $G(t,s) \geq \frac{1}{4}s(1-s), \forall t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ et $\forall s \in [0,1]$.
4. $\int_0^1 G(t,s)\,ds = \frac{t(1-t)}{2} \leq \frac{1}{8}, \forall t \in [0,1]$.
5. $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(t,s)\,ds \leq \frac{1}{2}, \forall t \in [0,1]$.

Chapitre 3

Solutions positives d'un problème de valeur aux limites intégrale non linéaire du quatrième ordre

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions positives d'un problème aux limites non linéaire à deux points pour l'équation différentielle du quatrième ordre suivante

$$u''''(t) + f(u(t)) = 0,\ t \in (0,1),$$

avec

$$u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0,\ u(0) = \int_0^1 a(s)u(s)ds.$$

3.1 Solutions positives

Nous allons considérer l'espace de Banach $C([0,1])$ muni de la norme supemum

$$\|u\| = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|.$$

Pour prouver certains de nos résultats, nous utiliserons le théorème du point fixe suivant, qui est dû au théorème de Krasnoselskii [8].

Définition 3.1.1 *Soit E un espace de Banach réel. A ensemble convexe, fermé non vide, $K \subset E$ un cône s'il satisfait les deux conditions suivantes*

1. $x \in K$, $\lambda \geq 0$ *implique* $\lambda x \in K$.
2. $x \in K$, $-x \in K$ *implique* $x = 0$.

Théorème 3.1.1 ([8]) *Soit E un espace de Banach, et soit $K \subset E$, être un cône. Supposons que Ω_1 et Ω_2 sont des sous-ensembles ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et soit $A : k \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1) \to K$ un opérateur complètement continu tel que*

(i) $\|Au\| \leq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, *et* $\|Au\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$ *; ou*

(ii) $\| Au \| \geq \| u \|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, *et* $\| Au \| \leq \| u \|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.
Alors A possède un point fixe dans $k \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$.

Considérons le problème à valeur limite en deux points

$$u''''(t) + y(t) = 0, \; t \in (0.1), \tag{3.1}$$

avec

$$u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0, u(0) = \int_0^1 a(s)u(s)ds. \tag{3.2}$$

Lemme 3.1.1 ([2]) *Le problème (3.1)-(3.2) admet une solution unique*

$$u(t) = \int_0^1 (G(t,s) + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(\tau)G(\tau,s)d\tau)y(s)ds,$$

où $G(t,s) : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est la fonction de Green définie par

$$G(t,s) = \frac{1}{6} \begin{cases} t^3(1-s)^2 - (t-s)^3, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t^3(1-s)^2, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases} \tag{3.3}$$

et

$$\alpha = \int_0^1 a(t)dt.$$

Preuve. En intégrant (3.1) sur l'intervalle $[0,t]$ pour $t \in [0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned} u'''(t) &= -\int_0^t y(s)ds + C_1, \\ u''(t) &= -\int_0^t (t-s)y(s)ds + C_1 t + C_2, \\ u'(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)ds + \frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t + C_3, \end{aligned}$$

$$u(t) = -\frac{1}{6}\int_0^t (t-s)^3 y(s)ds + \frac{1}{6}C_1 t^3 + \frac{1}{2}C_2 t^2 + C_3 t + C_4. \tag{3.4}$$

du conditions aux limites (3.2) on obtient

$$C_2 = C_3 = 0, \;\; C_1 = \int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds,$$

et

$$\begin{aligned} C_4 &= u(0) \\ &= \int_0^1 a(\tau)\left(-\frac{1}{6}\int_0^\tau (\tau-s)^3 y(s)ds + \frac{1}{6}\tau^3\int_0^1 (1-s)^2 y(s)dt + C_4\right)d\tau \\ &= C_4\int_0^1 a(\tau)d\tau - \frac{1}{6}\int_0^1 a(\tau)\left(\int_0^\tau (\tau-s)^3 y(s)ds\right)d\tau \\ &\quad + \frac{1}{6}\int_0^1 a(\tau)\tau^3\left(\int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds\right)d\tau, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{1}{6(1-\alpha)}\left(\int_0^1 a(\tau)\tau^3\left(\int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds\right)d\tau \right. \\ &\quad \left. -\int_0^1 a(\tau)\left(\int_0^\tau (\tau-s)^3 y(s)ds\right)d\tau\right). \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\frac{1}{6}\int_0^t (t-s)^3 y(s)ds + \frac{1}{6}t^3\int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{6(1-\alpha)}\left[\int_0^1 a(\tau)\tau^3\left(\int_0^1 (1-s)^2 y(s)ds\right)d\tau\right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 a(\tau)\left(\int_0^\tau (\tau-s)^3 y(s)ds\right)d\tau\right] \\
&= \frac{1}{6}\int_0^t [t^3(1-s)^2-(t-s)^3]y(s)ds + \frac{1}{6}\int_t^1 t^3(1-s)^2 y(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{6(1-\alpha)}\left[\int_0^1 a(\tau)\left(\int_0^\tau [\tau^3(1-s)^2-(\tau-s)^3]y(s)ds\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \int_\tau^1 \tau^3(1-s)^2 y(s)ds\right)d\tau\right] \\
&= \frac{1}{6}\int_0^t [t^3(1-s)^2-(t-s)^3]y(s)ds + \frac{1}{6}\int_t^1 t^3(1-s)^2 y(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1\left(\frac{1}{6}\int_0^\tau a(\tau)[\tau^3(1-s)^2-(\tau-s)^3]y(s)ds\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6}\int_\tau^1 a(\tau)\tau^3(1-s)^2 y(s)ds\right)d\tau \\
&= \int_0^1 G(t,s)y(s)ds + \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1\left(\int_0^1 a(\tau)G(\tau,s)y(s)ds\right)d\tau \\
&= \int_0^1\left(G(t,s) + \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 a(\tau)G(\tau,s)d\tau\right)y(s)ds.
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.1.2 ([2]) *Soit $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$ fixé. Alors*

1. $G(t,s) \geq 0$, *pour tous* $t, s \in [0,1]$,
2. $\frac{1}{6}\theta^3 s(1-s)^2 \leq G(t,s) \leq \frac{1}{6}s(1-s)^2$, *pour tous* $(t,s) \in [\theta, 1-\theta] \times [0,1]$.

Preuve. 1. Nous allons montrer que $G(t,s) \geq 0$, pour tous $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$. IL est évident pour $t \leq s$, il suffit de prouver le cas $s \leq t$.
Maintenant on suppose que $s \leq t$. Alors

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{1}{6}[t^3(1-s)^2 - (t-s)^3] \\ &= \frac{1}{6}[t(t-ts)^2 - (t-s)^3] \\ &\geq \frac{1}{6}[t(t-s)^2 - (t-s)^3] \\ &\geq \frac{1}{6}(t-s)^2[t-(t-s)] \\ &= \frac{1}{6}s(t-s)^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

2. Si $s \leq t$, d'après (3.3) on a

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{1}{6}[t^3(1-s)^2 - (t-s)^3] \\ &\geq \frac{1}{6}[t^3(1-s)^3 - (t-s)^3] \\ &= \frac{1}{6}[(t-ts)^3 - (t-s)^3] \\ &= \frac{1}{6}s(1-t)[t^2(1-s)^2 + t(1-s)(t-s) + (t-s)^2] \\ &\geq \frac{1}{6}t^2(1-t)s(1-s)^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} G(t,s) - \frac{1}{6}s(1-s)^2 &= \frac{1}{6}t^3(1-s)^2 - \frac{1}{6}(t-s)^3 - \frac{1}{6}s(1-s)^2 \\ &= \frac{1}{6}s(-2t^3 + t^3 s + 3t^2 - 3ts - 1 + 2s) \\ &= \frac{1}{6}s(t-1)^2[(s-2)t + 2s - 1] \\ &\leq \frac{1}{6}s(t-1)^2[(s-2)t + 2t - 1] \\ &= \frac{1}{6}s(t-1)^2(st-1) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Si $t \leq s$, d'après (3.3), on a

$$G(t,s) = \frac{1}{6}t^3(1-s)^2 = \frac{1}{6}t^3 s(1-s)^2, \tag{3.8}$$

et

$$G(t,s) = \frac{1}{6}t^3(1-s)^2 \leq \frac{1}{6}s^3(1-s)^2 \leq \frac{1}{6}s(1-s)^2. \tag{3.9}$$

Soit

$$\rho(t) = \frac{1}{6}\min\{t^3, t^2(1-t)\} = \frac{1}{6}\begin{cases} t^3, & t \leq \frac{1}{2}; \\ t^2(1-t), & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

De (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9) nous avons

$$\rho(t)s(1-s)^2 \leq G(t,s) \leq \frac{1}{6}s(1-s)^2, \text{ pour tous } (t,s) \in [0,1] \times [0,1].$$

Pour $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$, nous avons

$$\frac{\theta^3}{6}s(1-s)^2 \leq G(t,s) \leq \frac{1}{6}s(1-s)^2, \text{ pour tous } (t,s) \in [\theta, 1-\theta] \times [0,1].$$

■

Lemme 3.1.3 ([2]) *Soit $y(t) \in C([0,1],[0,\infty))$ et $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$. La solution unique de (3.1)-(3.2) est positive et satisfait*

$$\min_{t \in [\theta, 1-\theta]} u(t) \geq \theta^3(1-\alpha+\beta)\|u\|,$$

où

$$\beta = \int_\theta^{1-\theta} a(t)dt, \quad \alpha = \int_0^1 a(t)dt.$$

Preuve. D'après le Lemme (3.1.1) et le Lemme (3.1.2), $u(t)$ est positive. Pour $t \in [0,1]$, d'après Lemme (3.1.1) et Lemme (3.1.2), on a

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 \left(G(t,s) + \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 a(\tau)G(\tau,s)d\tau \right) y(s)ds \\ &\leq \frac{1}{6}\int_0^1 s(1-s)^2\left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) y(s)ds \\ &= \frac{1}{6(1-\alpha)}\int_0^1 s(1-s)^2 y(s)ds. \end{aligned}$$

Alors

$$\|u\| \leq \frac{1}{6(1-\alpha)} \int_0^1 s(1-s)^2 y(s)ds, \tag{3.10}$$

et pour $t \in [\theta, 1-\theta]$, nous avons

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 \left(G(t,s) + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(\tau)G(\tau,s)d\tau \right) y(s)ds \\ &\geq \frac{\theta^3}{6} \int_0^1 \left[s(1-s)^2 + \frac{1}{1-\alpha} \int_\theta^{1-\theta} s(1-s)^2 a(\tau)d\tau \right] y(s)ds \qquad (3.11) \\ &= \frac{\theta^3}{6} \int_0^1 s(1-s)^2 \left(1 + \frac{\beta}{1-\alpha} \right) y(s)ds \\ &= \frac{\theta^3}{6} . \frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha} \int_0^1 s(1-s)^2 y(s)ds. \end{aligned}$$

De (3.10) et (3.11), on obtient

$$\min_{t \in [\theta, 1-\theta]} u(t) \geq \theta^3 (1-\alpha+\beta) \|u\| .$$

■

Soit $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$. On définit le cône

$$K = \left\{ u \in C([0,1], \mathbb{R}),\ u \geq 0 : \min_{t \in [\theta, 1-\theta]} u(t) \geq \theta^3 (1-\alpha+\beta) \|u\| \right\},$$

et soit l'opérateur $A : K \to C[0.1]$ par

$$Au(t) = \int_0^1 \left(G(t,s) + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(\tau)G(\tau,s)d\tau \right) f(u(s))ds. \tag{3.12}$$

Remarque 3.1.1 *D'apres le Lemme (3.1.1), le probleme (1.1)-(1.2) admet une solution positive $u(t)$ si et seulement si u est un point fixe de A.*

Lemme 3.1.4 ([2]) *L'opérateur A défini en (3.12) est complètement continu et satisfait $AK \subset K$.*

Preuve. A partir du Lemme (3.1.3), on obtient $AK \subset K$. A est complètement continue par une application du théorème d'Arzela-Ascoli. ■

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes

$$f_0 = \lim_{u \to 0_+} \frac{f(u)}{u}, \quad f_\infty = \lim_{u \to \infty} \frac{f(u)}{u}.$$

On note que le cas $f_0 = 0$ et $f_\infty = \infty$ correspond au cas superlinéaire et $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$ correspond au cas sous-linéaire.

3.2 Existence de solutions positives

Dans cette section, nous allons énoncer et prouver nos principaux résultats.

Théorème 3.2.1 ([2]) *Supposons que $f_0 = 0$ et $f_\infty = \infty$. Alors (1.1)-(1.2) ont au moins une solution positive.*

Preuve. Puisque $f_0 = 0$, il existe $\rho_1 > 0$ tel que $f(u) \leq \varepsilon u$, pour $0 < u \leq \rho_1$, où $\varepsilon > 0$ satisfait

$$\frac{\varepsilon}{6(1-\alpha)} \leq 1.$$

Ainsi, si

$$\Omega_1 = \{u \in C[0.1] : \|u\| < \rho_1\},$$

alors, pour $u \in K \cap \partial\Omega_1$, on a

$$\begin{aligned}
Au(t) &= \int_0^1 \left(G(t,s) + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(\tau) G(\tau,s) d\tau \right) f(u(s)) ds \\
&\leq \frac{1}{6} \int_0^1 \left(s(1-s)^2 + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 s(1-s)^2 a(\tau) d\tau \right) \varepsilon u(s) ds \\
&\leq \frac{1}{6} . \frac{\varepsilon}{1-\alpha} \|u\| \int_0^1 s(1-s)^2 ds \qquad (3.13) \\
&\leq \frac{1}{6} . \frac{\varepsilon}{1-\alpha} \|u\| \\
&\leq \|u\| .
\end{aligned}$$

Par conséquent
$$\|Au\| \leq \|u\|, \; u \in K \cap \partial\Omega_1.$$

De plus, puisque $f_\infty = \infty$, il existe $\widehat{\rho}_2 > 0$ tel que $f(u) \geq \delta u$, pour $u > \widehat{\rho}_2$, où $\delta > 0$ est choisi de sorte que
$$\delta \frac{\theta^6}{36} \cdot \frac{(1-\alpha+\beta)^2}{1-\alpha}(1-2\theta)(\frac{1}{2}+\theta-\theta^2) \geq 1.$$

Soit $\rho_2 = \max\left\{2\rho_1, \frac{\widehat{\rho}_2}{\theta^3(1-\alpha+\beta)}\right\}$ et $\Omega_2 = \{u \in C[0.1] : \|u\| < \rho_2\}$. Alors $u \in K \cap \partial\Omega_2$ implique que
$$\min_{t\in[\theta,1-\theta]} u(t) \geq \theta^3(1-\alpha+\beta)\|u\| = \theta^3(1-\alpha+\beta)\rho_2 \geq \widehat{\rho}_2,$$

donc, d'après (3.12) et pour $t \in [\theta, 1-\theta]$, on obtient
$$\begin{aligned}
Au(t) &= \int_0^1 \left(G(t,s) + \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 a(\tau)G(\tau,s)d\tau \right) f(u(s))ds \\
&\geq \int_\theta^{1-\theta} \left[\frac{\theta^3}{6}s(1-s)^2 + \frac{1}{1-\alpha}\int_\theta^{1-\theta} \frac{\theta^3}{6}s(1-s)^2 a(\tau)d\tau \right] \delta u(s)ds \\
&= \frac{\theta^3}{6}\delta \int_\theta^{1-\theta} s(1-s)^2 \left(1+\frac{\beta}{1-\alpha}\right) u(s)ds \\
&= \frac{\theta^3\delta}{6}\left(\frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha}\right)\int_\theta^{1-\theta} s(1-s)^2 u(s)ds \qquad (3.14)\\
&\geq \frac{\theta^3\delta}{6}\cdot\left(\frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha}\right)\min_{t\in[\theta,1-\theta]} u(t)\int_\theta^{1-\theta} s(1-s)^2 ds \\
&\geq \delta\frac{\theta^6}{36}\cdot\frac{(1-\alpha+\beta)^2}{1-\alpha}(1-2\theta)(\frac{1}{2}+\theta-\theta^2)\|u\| \\
&\geq \|u\|.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|Au\| \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$. D'après le théorème (3.1.1), l'opérateur A a un point fixe dans $k \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$ tel que $\rho_1 \leq \|u\| \leq \rho_2$. ■

Théorème 3.2.2 **([2])** *Supposons que $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$. Alors (1.1)-(1.2) ont au moins une solution positive.*

Preuve. Supposons que $f_0 = \infty$, il existe $\rho_1 > 0$ tel que $f(u) \geq \lambda u$, pour $0 < u \leq \rho_1$, où $\lambda > 0$ est choisi tel que

$$\lambda \frac{\theta^6}{36} \cdot \frac{(1-\alpha+\beta)^2}{1-\alpha}(1-2\theta)(\frac{1}{2}+\theta-\theta^2) \geq 1.$$

Ainsi, pour $u \in K \cap \partial\Omega_1$ avec

$$\Omega_1 = \{u \in C[0.1] : \|u\| < \rho_1\},$$

on a de (3.14)

$$\begin{aligned} Au(t) &= \int_0^1 \left(G(t,s) + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(\tau)G(\tau,s)d\tau \right) f(u(s))ds \\ &\geq \int_\theta^{1-\theta} \left[\frac{\theta^3}{6} s(1-s)^2 + \frac{1}{1-\alpha} \int_\theta^{1-\theta} \frac{\theta^3}{6} s(1-s)^2 a(\tau)d\tau \right] \lambda u(s)ds \\ &\geq \lambda \frac{\theta^6}{36} \cdot \frac{(1-\alpha+\beta)^2}{1-\alpha}(1-2\theta)(\frac{1}{2}+\theta-\theta^2)\, \|u\| \\ &\geq \|u\|. \end{aligned}$$

Alors, $Au(t) \geq \|u\|$ pour $t \in [\theta, 1-\theta]$, ce qui implique que

$$\|Au\| \leq \|u\|, \quad u \in K \cap \partial\Omega_1.$$

On construit ensuite l'ensemble Ω_2. Nous discutons deux cas possibles

Cas 1. Si f est bornée. Alors, il existe $L > 0$ tel que $f(u) \leq L$.
Soit

$$\Omega_2 = \{u \in C[0.1] : \|u\| < \rho_2\},$$

où $\rho_2 = \max\left\{2\rho_1, \frac{L}{6(1-\alpha)}\right\}$.
Si $u \in K \cap \partial\Omega_2$, similaire aux estimations de (3.13), nous obtenons

$$Au(t) \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{1-\alpha} \int_0^1 s(1-s)^2 ds$$

$$\leq \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{1-\alpha} \leq \rho_2 = \| u \|,$$

et par conséquent, $Au(t) \geq \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Cas 2. Supposons que f est non bornée, puisque $f_\infty = 0$, il existe $\widehat{\rho}_2 > 0$ ($\widehat{\rho}_2 > \rho_1$) tel que $f(u) \leq \eta u$ pour $u > \widehat{\rho}_2$, où $\eta > 0$ satisfait

$$\frac{\eta}{6(1-\alpha)} \leq 1.$$

D'autre part, d'après la condition (H1), il y a $\sigma > 0$ tel que $f(u) \leq \eta\sigma$, avec $0 \leq u \leq \widehat{\rho}_2$.

Maintenant, soit

$$\Omega_2 = \{u \in C[0.1] : \|u\| < \rho_2\},$$

où $\rho_2 = \max\{\sigma, \widehat{\rho}_2\}$. Si $u \in K \cap \partial\Omega_2$, ensuite nous avons $f(u) \leq \eta\rho_2$. Similaire aux estimations de (3.13), nous obtenons

$$Au(t) \leq \frac{1}{6}.\frac{\eta\rho_2}{1-\alpha}\int_0^1 s(1-s)^2 ds$$

$$\leq \frac{1}{6}.\frac{\eta\rho_2}{1-\alpha} \leq \rho_2 = \|u\|,$$

donc, $\|Au\| \geq \|u\|$, pour $u \in K \cap \partial\Omega_2$. Donc d'après le Théorème (3.1.1), A admet au moins un point fixe, qui est une solution positive de (1.1)-(1.2). ■

3.3 Exemples

Exemple 3.3.1 *Considérons le problème des valeurs limites*

$$u''''(t) + u^2(e^{-u} + 1) = 0,\ 0 < t < 1, \tag{3.15}$$

avec

$$u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0,\ u(0) = \int_0^1 s^2 u(s) ds, \tag{3.16}$$

où $f(u) = u^2(e^{-u}+1) \in C([0,\infty),[0,\infty))$ *et* $a(t) = t^2 \geq 0$, $\int_0^1 a(s)ds = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0_+}\frac{f(u)}{u} &= \lim_{u\to 0_+}\frac{u^2(e^{-u}+1)}{u} = 0,\\ \lim_{u\to +\infty}\frac{f(u)}{u} &= \lim_{u\to +\infty}\frac{u^2(e^{-u}+1)}{u} = +\infty.\end{aligned}$$

D'après le Théorème (3.2.1), *le problème* (3.15)-(3.16) *admet au moins une solution positive.*

Exemple 3.3.2 *Considérons le problème des valeurs limites*

$$u''''(t) + \sqrt{1+u} + \sin u = 0,\ 0 < t < 1, \tag{3.17}$$

avec

$$u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0,\ u(0) = \int_0^1 su(s)ds, \tag{3.18}$$

où $f(u) = \sqrt{1+u} + \sin u \in C([0,\infty),[0,\infty))$ *et* $a(t) = t \geq 0$, $\int_0^1 a(s)ds = \int_0^1 sds = \frac{1}{2}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0_+}\frac{f(u)}{u} &= \lim_{u\to 0_+}\frac{\sqrt{1+u}+\sin u}{u} = +\infty,\\ \lim_{u\to +\infty}\frac{f(u)}{u} &= \lim_{u\to +\infty}\frac{\sqrt{1+u}+\sin u}{u} = 0.\end{aligned}$$

D'après le Théorème (3.2.2), *le problème* (3.17)-(3.18) *admet au moins une solution positive.*

Conclusion

Notre but principal dans ce mémoire consistait à présenter quelques résultats d'existence de solution d'un problème non linéaire du quatriéme ordre en utilisant certains théorèmes de point fixe sur le cône et des conditions suffisante on démontre l'existence d'au mois une solution positive .

Bibliographie

[1] D. R. Anderson and R. I. Avery, A fourth-order four-point right focal boundary value problem, Rocky Mountain J. Math., 36, (2006), 367{380.

[2] S. Benaicha and F. Haddouchi, *Positive Solutions of a Nonlinear Fourth-order Integral Boundary Value Problem*, Seria Matematica - Informatica, 1, (2016), 73-86.

[3] L. Daniel, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés. © Ellipses Édition Marketing S.A., (2013).

[4] J. R. Graef, C. Qian, and B. Yang, A three point boundary value problem for nonlinear fourth order di erential equations, J. Math. Anal. Appl., 287, (2003), 217-233.

[5] J. R. Graef, J. Henderson, and B. Yang, Positive solutions to a fourth-order three point boundary value problem, Discrete Contin. Dyn. Syst., Supplement, (2009), 269-275.

[6] J. Henderson and D. Ma, Uniqueness of solutions for fourth-order nonlocal boundary value problems, Bound. Value Probl., 2006, (2006), Art. ID 23875, 12 pages.

[7] A. Kolmogorov, S. Fomine, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. 2^e edition, Editions Mir-Moscou. (1974).

[8] M. A. Krasnoselskii, Positive Solutions of Operator Equations, P. Noordho , Groningen, The Netherlands, 1964.

[9] X. Liu and D. Ma, The existence of positive solution for a third-order two-point boundary value problem with integral boundary conditions, Scienti c Journal of Mathematics Research, 4 (1), (2014), 1-7.

[10] R. Ma and W. Haiyan, On the existence of positive solutions of fourth-order ordinary differential equations, Appl. Anal., 59, (1995), 225-231.

[11] L. Schwartz, Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle, Édition Corrigée Paris. (2008).

[12] D. R. Smart, *Fixed points theorems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[13] B. Yang, Positive solutions for a fourth-order boundary value problem, Electron. J. Qual. Theory Di er. Equ., 3, (2005), 1-17.