



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف

Université Chadli Bendjedid – El Tarf

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات

Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

### Thème

**Stabilité exponentielle du système Bresse Timoshenko non  
Linéaire avec deuxième son**

Présenté par:

Mesbahi Karim

Devant le Jury :

Dr. Zehani Nadjla.	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. Adjemi Salim.	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Bourara Abdelfatah.	MAA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examineur

Année Universitaire 2023–2024.

## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à :*

Mon père, qui n'a jamais cessé de m'encourager dans la poursuite de mes études en m'apportant tout son soutien, que dieu le garde.

Ma très chère mère qui m'encouragé et aider durant tout le cycle d'études en lui souhaitant longue vie et que dieu la protège.

Mes soeurs et les enfants de mes soeurs.

Toute la famille : Mesbahi et Khennouchi.

Tous mes amis et tous les étudiants Master 2 Mathématique 2024.

## REMERCIEMENTS

*Je tiens avant tout à remercier ALLAH tout puissant qui m'a donné la patience, la volonté et le courage pour bien achever mes études.*

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur **Dr. Adjemi Salim** pour ses aides et sa disponibilité.

Je remercie **Dr. Zehani Nadjla** pour avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie mon examinateur **Dr. Bourara Abdelfatah** pour son aide et ses conseils et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, je remercie aussi mes très chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin.

# Résumé

Cette thèse a pour but d'étudier le système de Bresse-Timoshenko non linéaire unidimensionnel avec second son, la condition thermique donnée par la loi de Cattaneo est effective dans la seconde équation. nous prouvons que le système est exponentiellement stable en utilisant la méthode de l'énergie qui nécessite la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov appropriée en exploitant la méthode des multiplicateurs. De plus, le résultat ne dépend d'aucune condition des coefficients du système.

## Mots clés :

Système non linéaire de Bresse-Timoshenko, second son, décroissance exponentielle, méthode de l'énergie.

## Abstract

This theme aims to study the one dimensional nonlinear Bresse-Timoshenko system with second sound where the heat condition given by Cattaneo's law is effective in the second equation. We prove that the system is exponentially stable by using the energy method that requires constructing a suitable Lyapunov functional through exploiting the multipliers method. Furthermore, the result does not depend of any condition on the coefficients of the system.

## Key words :

Nonlinear Bresse-Timoshenko system, second sound, exponential decay, energy method

# Table des matières

Remerciements	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	v
Introduction	1
<b>1 Préliminaires et rappels</b>	<b>10</b>
1.1 Espace de lebegue $L^P(\Omega)$ . . . . .	10
1.2 Rappels sur les espaces de Sobolev en dimension un . . . . .	14
<b>2 Rappels sur quelque théorie des semi-groupes</b>	<b>18</b>
2.1 Quelques définitions. . . . .	18
2.2 $C_0$ -Semi-groupe généré par un opérateur dissipatif . . . . .	22
2.2.1 Systèmes de Timoshenko . . . . .	26
2.2.2 Systèmes de Bresse . . . . .	31
2.3 Méthode de Faedo-Galerkin pour un problème. . . . .	34

<b>3</b>	<b>Décroissance exponentielle et solution du système non linéaire de Bresse - Timoshenko avec deuxième son</b>	<b>35</b>
3.1	Stabilité exponentielle . . . . .	36
	<b>Conclusion</b>	<b>47</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

# Introduction

Dans ce travail nous détaillons le papier [47], qui parle sur l'astabilité au sens de Lyapunov considérons le problème non linéaire unidimensionnel avec deuxième son suivat :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t = 0, \quad x \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ -\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \gamma \theta_x + f(\psi) = 0, \quad x \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t + \kappa q_x + \gamma \psi_{tx} + \lambda \theta = 0, \quad x \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \iota_0 q_t + \delta q + \kappa \theta_x = 0, \quad x \in (0, 1) \times (0, \infty), \end{array} \right. \quad (1)$$

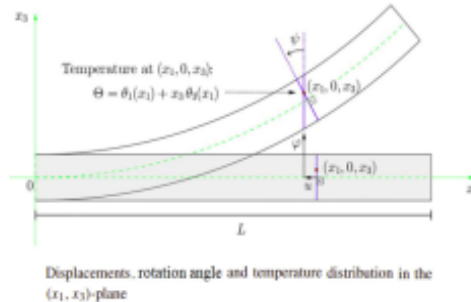
avec les conditions initiales et aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in (0, 1), \\ \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), q(x, 0) = q_0(x), \quad x \in (0, 1), \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi_x(0, t) = \psi(1, t) = q(0, t), \\ q(1, t) = \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \end{array} \right. \quad (2)$$

où  $t \in (0, +\infty)$ , définit la variable temporelle et  $x \in (0, 1)$  la variable spatiale sont-elles liées au faisceau de longueur :  $\varphi, \psi, \theta, q$  et  $f(\psi)$  fonctions spécifiques de configuration d'équilibre représentent respectivement le déplacement transversal

du faisceau, l'angle actalis, les températures ferentes, le flux thermique et le terme de forçage. Les coefficients  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \iota_0, \delta, \gamma, b, \kappa$  et  $\lambda$  sont des constantes positives qui représentent les paramètres constatatifs définissant le couplage entre les matériaux.

Du point de vue physique, il est bien connu que le modèle utilisant le laser de Fourier clamar conduit au paradoxe physique de la vitesse infinie de propagation de la chaleur. De nombreuses thèses ont finalement émergé, pour surmonter ces obstacles physiques tout en gardant les caractéristiques d'un processus d'aspiration de chaleur. Dont l'apparition des seconds effets sonores observés expérimentalement dans les matériaux à un niveau très élevé lorsque la chaleur est transportée par un processus de propagation d'ondes au lieu du deuren habituel. Cette théorie suggère de remplacer la loi classique de Founars  $\gamma\theta_x + q$ . où  $\gamma$  est le coefficient de conductivité thermique al est le premier repère par une loi modifiée de régulation thermique appelée loi de Cattaneo  $\gamma\theta_x + q + \iota q_t$  Ici le paramètre  $\iota > 0$  représente le temps de relaxation décrivant le temps enregistré dans la réponse de flux de chaleur vers un gradient de température. Le système thermique obtenu est de type hyperbolique et élimine donc automatiquement le paradoxe des vitesses infinies. Parmi les travaux qui ont été réalisés dans ce domaine. on renvoie le lecteur dans la figure suivante, on introduit les déplacements et l'angle de rotation dans le plan  $(x_1, x_3)$  ainsi que la distribution de température avec sa contribution à la déformation de la poutre comme le montrent de nombreux ouvrages pour invance



où

$-u = u(x_1, t)$  : le long tudinal d placement des peintures se trouvant sur l'axe des  $x_1$ .

$-\psi = \psi(x_1, t)$  : l'angle de rotation de la normale à l'axe  $x_1$ .

$\Theta$  le développement de Taylor pour la distribution de température en pouces ( $x_1, x_3$ )  
-plan ( avec  $x_2 = 0$ )

$$\Theta(x_1, x_3, t) = \Theta(x_1, 0, x_3, t) = \theta_1(x, t) + x_3\theta_3(x, t)$$

où  $\theta_1$ , et  $\theta_3$ , sont des composants de température ( fonctionnels qui peut représenter les écarts de température par rapport à la température de référence  $\Theta_0$  dans les directions long itudinale et verticale.

Elishakofi.ont donné une brève description du modèle de poutre en une dimension pour les vibrations de poutre. L'équation différentielle classique de Bernoull Eula enflamme l'inertie de rotation. et déformation alwar. Elle est donnée par

$$EI\varphi_{xxxx} + \rho A\varphi_{tt} = 0, \tag{3}$$

où  $E$  est le module d'élasticité, $I$  est le moment d'inertie,  $\varphi(x, t)$  est le déplacement transversal,  $x$  est le cocaïne axial,  $t$  est le temps,  $\rho$  est la densité du matériau.  $A$  est l'aire de la section transversale.

Plus tard, Bresse et Rayleigh ont étendu et corrigé l'équation de Bernoulli-Euler (??), en prenant en compte le mouvement de rotation des éléments de poutre. L'angle de rotation est égal à la pente de déflexion. courbe  $\varphi_x$ , l'accélération angulaire escociée est  $\varphi_{xtt}$ . En conséquence le moment d'inertie du clément autour d'un axe passant par son centre de masse est égal à plode  $\rho I\varphi_{xtt}dx$  et selon le principe de D'Alembert , on obtient

$$-V + M_x - \rho I \varphi_{xtt} = 0, \quad (4)$$

where  $V(x, t)$  the shear force and  $M(x, t)$  the bending moment.

By replacing this equation in the case of dynamic equilibrium by the forces of vibration transverse that we have

$$V_x = -\rho A \varphi_{tt} = (M_x - \rho I \varphi_{xtt}) \quad (5)$$

Physically from the theory of elasticity, we have  $M = EI \varphi_{xx}$  dit dans un Rayleigh, un modèle pour le cas que

$$EI \varphi_{xxxx} + \rho A \varphi_{tt} - \rho I \varphi_{xtt} = 0 \quad (6)$$

we call Equation (6) the rotational inertia.

Afterwards Timoshenko has finished the equation (6) by adding the effect of the deformation in shear, expressing the slope of the deflection curve in the parts

$$\varphi_x = -\psi + \zeta, \quad (7)$$

$\psi$  the rotation of the cross-sections with the neglect of the deformation by shear and of the angle associated with the deformation by shear at the neutral axis in the same cross-section. In the mechanics of solids one can write

$$M = EI \psi_x, \quad (8)$$

$$V = \kappa_1 \zeta AG = \kappa_1 \zeta AG (\varphi_x + \psi), \quad (9)$$

avec  $\kappa_1$  les coefficients de cisaillement et  $G$  est le module de cisaillement.

L'état d'équilibre dynamique des forces dans les directions verticales est donné par

$$\rho A \varphi_{tt} - V_x = 0, \quad (10)$$

Dérivant par rapport à une Equation (7) et en substituant dans l'équation d'équilibrium dynamique du mouvement (4), voir get

$$-V + M_x + \rho I \psi_{tt} = 0, \quad (11)$$

Le système de Timoshenko, a été obtenu en substituant respectivement (9) et (8) ito 10 et (11), on obtient

$$-\kappa_1 A G (\varphi_x + \psi)_x + \rho A \varphi_{tt} = 0, \quad (12)$$

$$\kappa_1 A G (\varphi_x + \psi) + E I \psi_x + \rho I \psi_{tt} = 0, \quad (13)$$

où

$\rho_1 = \rho A$  est la densité du masse.

$\rho_2 = \rho I$  le moment d'inertie.

$b = E I$  est le coefficient de rigidité (de la section transversale),

$\kappa = \kappa_1 A G$  est le module de casticité en cisaillement.

Ensuite, le système de Timoshenko prend la forme suivante

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

Il convient de noter que mentionné le problème joue un rôle crucial dans les appli-

cations d'ingénierie Et pour plus de détails sur les précieuses ressources qui ont été réalisées concernant le système Timoshenko,

Elishakoff, en différenciant les hypothèses de Timoshenko (7) par rapport à  $t$ , nous obtenir

$$\psi_{tt} = -\varphi_{ttx} \quad (15)$$

En insérant (15) dans (14), nous obtenons le système bien connu de Bresse Timoshenko en combinant le concept d'équilibre dynamique de d'Alembert avec les hypothèses de Timoshenko pour obtenir le système de Lodovico –bike

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ -\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

De nombreuses recherches ont été réalisées concernant le comportement asymptotique de la solution du système de Bresse Timoshenko. Parmi elles, nous citons les travaux d'Almeida et Blancos, qu'ils ont considéré comme suit

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \beta (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ -\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \beta (\varphi_x + \psi) + \mu_1 \psi_t = 0, \end{cases} \quad (17)$$

où ils ont montré que l'amortissement visqueux agissant sur la rotation angulaire du système ci-dessus est suffisamment fort pour provoquer une décroissance exponentielle de la solution, ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \beta (\varphi_x + \psi)_x + \mu_1 \psi_t = 0, \\ -\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \beta (\varphi_x + \psi) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

et ils ont montré que le daesping mécanique donné par l'amortissement visqueux agissant sur le déplacement transversal du faisceau se stabilise de façon exponentielle

Zenit et al ont étudié le système non linéaire de Bresse Timoshenko suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \partial_{tt} \varphi - \kappa (\varphi_x + \psi)_x + \sigma_1 \partial_t \varphi = 0, \\ -\rho_2 \partial_{tt} \varphi_x - \alpha \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) - \zeta_1 \theta_x \\ \quad - \zeta_2 \rho_x + \sigma_2 \mathfrak{g} (\partial_t \psi) = 0, \\ c \partial_t \theta + d \partial_t \rho - \kappa \theta_{xx} - \zeta_1 \partial_t \psi_x = 0, \\ d \partial_t \theta + r \partial_t \rho - h \rho_{xx} - \zeta_2 \partial_t \psi_x = 0, \end{array} \right. \quad (19)$$

Les auteurs ont prouvé la bonne position du système en utilisant les approximations classiques de Faede Galerki et ont montré un résultat de désintégration générale du système.

Motivés par les travaux précédents, nous donnons dans cet article des résultats d'existence et de régularité globale, qui peuvent être prouvés en utilisant la méthode standard de Feado-Galerkin. De plus, nous montrons que la dissipation donnée par le deuxième son est suffisamment forte pour donner une stabilité exponentielle de solution du système (1) en utilisant la méthode énergétique, ce qui nécessite de construire une fonctionnelle de Lyapunov appropriée qui nous permet d'estimer l'énergie du système (1) et de montrer qu'il décroît de manière exponentielle avec toutes conditions sur les coefficients du système. L'importance de ce contrôle complémentaire et son influence sur le comportement asymptotique de la salation apparaît dans de nombreux travaux pour les différents types de problèmes tels que [14, 18] . Enfin, certains résultats de simulation numérique sont obtenus à l'aide du logiciel MATLAB. La suite de cet article est organisée comme suit : nous rappelons quelques préliminaires, nous énonçons sans preuve un résultat global d'existence et de régularité du problème (1). enfin, nous établissons le résultat de stabilité exponentielle.

### **Préliminaires et principaux résultats**

Dans cette section, nous présentons et rappelons quelques notions mathématiques à utiliser pour la preuve du résultat de stabilité

$$|f(\psi^2) - f(\psi^1)| \leq \kappa_0 (|\psi^1|^e + |\psi^2|^e) \psi^1 |\psi^1 - \psi^2| \quad \text{et} \quad \psi^1 \in \mathbb{R}, \psi^2 \in \mathbb{R}, \quad (20)$$

où  $\kappa_0 > 0, \ell > 0$ . De plus, nous supposons que

$$0 \leq \widehat{f}(\psi) \leq \psi f(\psi) \quad \text{implique} \quad -\psi f(\psi) \leq -\widehat{f}(\psi) \leq 0, \psi \in \mathbb{R} \quad (21)$$

avec

$$\widehat{f}(\psi) = \int_0^\psi f(s) ds \quad (22)$$

Voici les inégalités fonctionnelles qui nous aident. A fin d'atteindre notre résultat de stabilité, nous rappelons dans ce qui suit l'inégalité de Yong donnée par

$$ab \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1, q > 1 \right)$$

D'après l'inégalité de Young, pour tout  $\varepsilon > 0$ , et  $p = q = 2$ , nous obtenons

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad (23)$$

Ensemble avec l'inégalité de Poincaré donnée par

$$\int_1 u^2 dx \leq C \int_1 u_x^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(I), \quad (24)$$

où  $I$  est un intervalle rebondi et  $C$  est une constante ( dépendant de  $|I| < \infty$ ).

**Remarque 0.0.1** *On a*

$$-2(\varphi_x + \psi)\psi \leq (\varphi_x + \psi)^2 + \psi^2,$$

et , d'autre part , on a aussi

$$(\varphi_x + \psi - \psi)^2 = (\varphi_x + \psi)^2 + \psi^2 - 2(\varphi_x + \psi)\psi \leq 2(\varphi_x + \psi)^2 + 2\psi^2$$

Finalement , en intégrant et en utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient l'inégalité suivante

$$\int_0^1 \varphi_x^2 dx \leq 2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx \quad (25)$$

ou

$$C = \frac{1}{|I|} \geq 0,$$

Par souci d'exhaustivité nous énonçons sans preuve le résultat global d'existence et de régularité suivant qui peut être prouvé en utilisant la méthode standard Feado-Galerkin, pour cela nous renvoyons le lecteur à [26, 29].

# Chapitre 1

## Préliminaires et rappels

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notations et résultats utilisés tout au long de ce travail de chapitre est organisé comme suit : Le premier lieu nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces ( $L^p$ , espace de sobolev ,.....) rapide.

### 1.1 Espace de lebeque $L^p(\Omega)$

**Définition et propriété sélémentaires des espaces  $L^p(\Omega)$**

**Définition 1.1.1** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

**Définition 1.1.2** on définit sur  $L^p(\Omega)$  la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

**Définition 1.1.3** on pose  $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que}$   
*on note*  $\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C, |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$ ,  
 $\|\cdot\|_{L^\infty}$  *est une norme.*

**Remarque 1.1.1** *l'espace*  $L^2(I)$  *muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_a^b uv dx, \quad u, v \in L^2(I)$$

*est un espace de Hilbert.*

$L^p$  *est un espace de banach pour tout*  $1 \leq p \leq +\infty$

**Lemme 1.1.1 (Inégalité de Young)** *soient*  $a, b \geq 0$  *deux réels, Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*En particulier si*  $u, v \in L^2(\Omega)$ . *alors*

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |v|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

**Démonstration.**

La conclusion est évident si  $a = 0$  ou  $b = 0$ , donc on peut suppose que  $a, b > 0$ . la fonction exp est convexe ce qui veut dire que pour tout  $x, y$  et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , nous avons

$$\exp(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(y).$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
 ab &= \exp\left(\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q\right) \\
 &\leq \frac{1}{p} \exp(\ln a^p) + \frac{1}{q} \exp(\ln b^q) \\
 &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.
 \end{aligned}$$

**Théorème 1.1.1 (Inégalité de Hölder)** soit  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ ,

Alors  $f, g \in L^1$  et

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

**Démonstration.**

La conclusion est évident si  $p = 1, p = \infty$ , Autrement, nous appliquons l'inégalité de Young

$$|f| |g| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \quad p, p,$$

il en résulte que  $f, g \in L^1$  et que

$$\int_{\Omega} |f| |g| \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|g\|_{L^q}^q$$

remplaçant  $f$  par  $\lambda f (\lambda > 0)$ , il vient

$$\int_{\Omega} |f| |g| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_{L^q}^q$$

on choisit  $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^q}^{\frac{q}{p}}$ , la preuve est achevée.

**Corollaire 1.1.1 (Inégalité de Minkovski)** soit  $1 \leq p \leq \infty$  pour  $f, g$  mesu-

table

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^p}$$

**Démonstration.**

Les cas  $p = 1$ , et  $p = \infty$  sont faciles.

supposons maintenant que  $1 < p < \infty$  comme l'inégalité est triviale si  $\|f + g\|_{L^p} = 0$

on peut supposer que  $\|f + g\|_{L^p} \neq 0$ , Alors

$$\int_{\Omega} |f + g|^p dx \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f| dx + \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |g| dx.$$

en appliquant successivement l'inégalité de Hölder à  $|f + g|^{p-1}$  avec l'exposant  $p'$  et  $f$  avec l'exposant  $p$  puis  $g$  avec l'exposant  $p$ , on obtient

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq \|f + g\|_{L^p}^{p-1} (\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q})$$

ce qui prouve l'inégalité.

**Définition 1.1.4** soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable, on dit que  $f$  localement intégrable si  $f \in L^1(K)$  pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ . on note  $L^1_{loc}(\Omega)$  l'espace des classes des fonctions localement intégrables sur  $\Omega$ , ie

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \int_K |f(x)| dx < \infty, \text{ pour tout } K \text{ de } \Omega \right\}$$

**Définition 1.1.5** soit  $1 \leq p \leq +\infty$  on dit qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  appartient à  $L^p_{loc}(\Omega)$  si  $f|_K \in L^p(\Omega)$  pour tout compact  $K \subset \Omega$

**Dérivée faible**

soit  $I$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  une fonction  $u \in L^1_{loc}(I)$  a une dérivée faible dans  $L^1_{loc}(I)$  s'il existe  $v \in L^1_{loc}(I)$  telle que pour tout  $\varphi \in C_0^\infty(I)$  on ait

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx.$$

Cela revient à dire que  $v$  est la dérivée de  $u$  au sens des distributions, on écrira

$$u' = v$$

## 1.2 Rappels sur les espaces de Sobolev en dimension un

Les espaces de sobolev sont des espaces vectoriels normés qui sont bien adaptés à la résolution de nombreux problèmes d'équation différentielles aux dérivées partielles. par ailleurs les problèmes concret rencontrés en physique, mécanique, comportent en général des conditions au bord du domaine.

### Espace de sobolev $W^{1,p}(I)$

**Définition 1.2.1** soit  $I = ]a, b[$  un intervalle borné ou non et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$  un espaces de sobolev  $W^{1,p}(I)$  est défini par :

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ telle que } \int_I u \varphi' dx = \int_I g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}$$

on pose :

$$H^1(I) = W^{1,2}(I),$$

**Notation 1.2.1** *l'espace  $W^{1,p}$  est muni de la norme :*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

*l'espace  $H^1$  est muni du produit scalaire :*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

*la norme associée :*

$$\|u\|_{H^1} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

*est équivalente à la norme de  $W^{1,2}$ .*

**Exemple 1.2.1** *soit  $I = ]-1, 1[$ . vérifier à titre d'exercice que :*

1. *La fonction  $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$  appartient à  $W^{1,p}(I)$  pour tout  $1 \leq p \leq \infty$  et que  $u' = H$  où*

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

*plus généralement une fonction continue sur  $I$  et continument dérivable par morceaux sur  $\bar{I}$  appartient à  $W^{1,p}(I)$  pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .*

2. *La fonction  $H$  n'appartient pas à  $W^{1,p}$  pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ ,*

**Théorème 1.2.1 (Densité)** *soit  $u \in W^{1,p}(I)$  avec  $1 \leq p < \infty$ , Alors il existe une suite  $u_n$  dans  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $u_n|_I \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(I)$ .*

**Corollaire 1.2.1 (Intégration par parties)** *soient  $v, u \in W^{1,p}(I)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors  $v, u \in W^{1,p}(I)$  et  $(uv)' = u'v + uv'$ . De plus. on a la formule d'intégration*

par parties

$$\int_x^y u'v = -u(x)v(x) + u(y)v(y) - \int_x^y uv', \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

**Espace de Sobolev**  $W^{m,p}(I)$

**Définition 1.2.2** *Étant donné un entier  $m \geq 2$  et un réel  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit par récurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I) \right\}$$

on pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I)$$

l'espace  $W^{m,p}$  est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

et l'espace  $H^m$  est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

**Espace de Sobolev**  $W_0^{m,p}(I)$

**Définition 1.2.3** *Étant donné  $1 \leq p \leq \infty$  et  $m \in \mathbb{N}$ . on désigne par  $W_0^{m,p}(I)$  la fermeture de  $C_c^m(I)$  dans  $W^{m,p}(I)$  on note  $H_0^m(I) = W_0^{m,p}(I)$ .*

l'espace  $W_0^{1,p}$  muni de la norme induit par  $W^{1,p}$  est un espace de banach séparable, il est de plus réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

l'espace  $H_0^1$  muni du produit scalaire induit par  $H^1$  est un espace de Hilbert séparable

**Remarque 1.2.1** lorsque  $I = \mathbb{R}$  on sait que  $C_c^1(\mathbb{R})$  est dense dans  $W^{1,p}(\mathbb{R})$  et par conséquent  $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$ .

**Théorème 1.2.2** soit  $u \in W^{m,p}(I)$  alors  $u \in W_0^{m,p}(I)$  si et seulement si  $u = 0$  sur  $\partial I$ .

# Chapitre 2

## Rappels sur quelque théorie des semi-groupes

Dans ce chapitre nous donnons quelque théories importants (théorie demi-groupe,....., Feodo-GaLarkin)

### 2.1 Quelques définitions.

**Définition 2.1.1** Soit  $H$  un espace de Hilbert muni de produit scalaire  $(.,.)$  et de norme associée  $\|.\|$  et soit  $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$  un opérateur linéaire non-borné.  $O$

$n$  ditque  $A$  est dissipatif si

$$\forall x \in D(A) \quad , \quad (Ax, x) \leq 0$$

**Définition 2.1.2** Une famille  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  d'opérateurs linéaires continus est dite semi-groupe fortement continu (ou  $C_0$ -semi-groupe) sur  $H$  si elle satisfait les propriétés suivantes :

i)  $S(0) = Id,$

ii)  $S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0,$

iii) Pour chaque  $x \in H$  est continue sur  $[0, +\infty[$  ie

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\|_H = 0$$

**Définition 2.1.3**

On appelle générateur infinité si mal du  $C_0$ -semi-groupe  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , tout opérateur  $A$  défini sur l'ensemble

$$D(A) = \left\{ x \in H, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

par

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \forall x \in D(A)$$

Parfois on note  $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$  pour  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .

**Définition 2.1.4**

Un semi-groupe fortement continue  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  sur  $H$  est dit de contractions si

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0$$

**Exemple 2.1.1**

On considère l'espace  $L^2]0, +\infty[, 1 \leq p < +\infty$  L'espace  $L^2]0, +\infty[$  muni de la norme

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une space de Hilbert. On définit :

$$(S(t)f)(x) = f(t+x), \forall t \geq 0 \text{ et } x \in ]0, +\infty[$$

Evidemment  $S(t)$  est un opérateur linéaire et en plus, on a :

$$\|S(t)f\|_2^2 = \int_0^{+\infty} |f(t+x)|^2 dx = \int_t^{+\infty} |f(y)|^2 dy \leq \int_0^{+\infty} |f(y)|^2 dy = \|f\|_2^2$$

Donc  $S(t)$  est un opérateurs linéaires continus. Il est facile de vérifier que  $S(0) = Id$  et

$$S(t+s) = S(t)S(s); \forall t; s \geq 0;$$

et d'autre part, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)f - f\|_2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \int_0^{+\infty} |f(t+x) - f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Par conséquent  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  est un  $C_0$ -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur  $L^2]0, +\infty[$

$$A : D(A) \subset L^2]0, +\infty[ \rightarrow L^2]0, +\infty[$$

le générateur infinité si mal du  $C_0$ -semi-groupe  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Si  $f \in D(A)$ , alors on a

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} = f'(x)$$

uniformément par rapport à  $x$ . Par conséquent

$$D(A) \subset \left\{ f \in L^2]0, +\infty[ : f' \in L^2]0, +\infty[ \right\}$$

Si  $f \in L^2]0, +\infty[$  telque  $f' \in L^2]0, +\infty[$ ; alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{S(t)f - f}{t} - f' \right\|_2^2 &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{S(t)f - f}{t} - f' \right|^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{t} [f(s)]_x^{t+x} - \frac{1}{t} [f']_x^{t+x} \right|^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{t} \int_x^{t+x} f'(s) ds - \frac{1}{t} f'(x) \right|^2 dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

uniformément par rapport à  $x$  quand  $t \rightarrow 0^+$ . Donc

$$\left\{ f \in L^2]0, +\infty[ : f' \in L^2]0, +\infty[ \right\} \subset D(A)$$

Par conséquent

$$Af = f' \text{ et } D(A) = \left\{ f \in L^2]0, +\infty[ : f' \in L^2]0, +\infty[ \right\}$$

### Définition 2.1.5

$\{e^{At}\}$  est dit exponentiellement stable s'il existe des constantes positives  $\alpha$  et  $M$  telles que

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq M e^{-\alpha t} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

### Définition 2.1.6

$\{e^{At}\}$  est dit analytique si  $e^{At}$  admet une extension  $T(\lambda)$  pour  $\lambda \in \Delta_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg(\lambda)| < \theta\}$  pour certain  $\theta > 0$  telle que  $\lambda \rightarrow T(\lambda)$  est analytique et

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \in \Delta_\theta \rightarrow 0} \|T(\lambda)z - z\| = 0, \forall z \in H \\ T(\lambda + \mu) = T(\lambda)T(\mu), \forall \lambda, \mu \in \Delta_\theta \end{cases}$$

ou de manière équivalente (voir le Théorème 5.2 dans le livre de Pazy), il existe une constante  $K > 0$  telle que

$$\|e^{At}\| \leq Kt^{-1}, \forall t > 0$$

## 2.2 $C_0$ -Semi-groupe généré par un opérateur dissipatif

Supposons que l'opérateur linéaire  $A$  génère un  $C_0$ -semi-groupe  $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $H$ . Alors, nous avons

**Théorème 2.2.1 (Hille-Yosida)** *Un opérateur linéaire (non borné)  $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contractions  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  si et seulement si*

- i)  $A$  est un opérateur fermé et  $\overline{D(A)} = H$ ,
- ii) L'ensemble résolvant  $\rho(A)$  de  $A$  contient  $R^+$  et pour tout  $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

**Théorème 2.2.2 (Lumer-Phillips)** *Soit  $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$  un opérateur linéaire et  $D(A)$  est dense dans  $H$ . Alors  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contractions si et seulement si*

- i)  $A$  est dissipatif,
- ii) Il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\text{Im}(\lambda I - A) = H$  ( $A$  est maximal).

**Remarque 2.2.1** *Dans l'espace unidimensionnel, sous certaines hypothèses, le sys-*

tème linéaire de base s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} u_{tt} - \tau u_{xx} + \gamma \theta_x = f \\ \delta \theta_t - \kappa \theta_{xx} + \gamma u_{tx} = g, \end{cases}$$

et le système non linéaire peut s'écrire comme les système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - a(u_x, \theta) u_{xx} + b(u_x, \theta) \theta_x = f \\ c(u_x, \theta) \theta_t - d(u_x, \theta) \theta_{xx} + b(u_x, \theta) u_{tx} = g, \end{cases}$$

**Remarque 2.2.2** Dans le cas 1 - D linéaire, le système de base donné par :

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta \theta_x = f, \\ c_0 \theta_t - \gamma q_x + \beta u_{tx} = g, \\ \tau q_t + q + \kappa \theta_x = 0, \end{cases}$$

et dans le cas  $n \rightarrow D(n = 2, 3)$  par :

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla (\operatorname{div} u) + \beta \nabla \theta = f, \\ c_0 \theta_t - \gamma \operatorname{div} q + \beta \operatorname{div} u_t = g, \\ \tau q_t + q + \kappa \nabla \theta = 0, \end{cases}$$

Un autre modèle de propagation de la chaleur considère que  $q$  est aussi dépendant de l'effet de mémoire. Dans les matériaux à mémoire, la loi classique de Fourier du flux de chaleur est remplacée par la formule suivante :

$$q = -\frac{\kappa}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-s)} \nabla \theta(x, s) ds, \quad (2.1)$$

où  $\tau > 0$  est le temps de relaxation, Il en résulte facilement de (2.1) que l'on obtient l'équation de Maxwell-Cattaneo

$$\tau q_t + q + \kappa \nabla \theta = 0;$$

en plus, nous tenons à prendre en compte la conductivité de Fourier ( $q$ ), où

$$q = -\kappa(\theta) \nabla \theta - \alpha_0 \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-s)} \nabla \theta(x, s) ds, \alpha_0 = \text{constant.}$$

A la fin du siècle dernier, Green et Naghdi [6][7] ont introduit trois types de la théorie thermoélastique fondés sur une égalité entropique au lieu de l'inégalité entropique habituelle. Dans chacune de ces théories, le flux thermique est donné par une hypothèse de comportement différent. En conséquence, les trois théories sont obtenues et ont été appelées thermoélastique de type I, type II et de type III, respectivement. Ce développement est effectué d'une manière rationnelle à fin d'obtenir une théorie entièrement compatible, qui intégrera la transmission d'impulsion thermique d'une manière très logique et élève le paradoxe de la vitesse infinie de propagation de la chaleur induite par la théorie classique. Lorsque ces théories sont linéarisées, le type I conduit à la conduction de la chaleur habituelle par la loi de Fourier (??), le type II conduit à une équation du télégraphe

$$\theta_{tt} + \frac{1}{\tau} \theta_t = c^2 \Delta \theta \tag{2.2}$$

qui est hyperbolique et transmet des ondes à une vitesse finie  $c$ , et le type III conduit à l'équation de type de Jeffrey

$$\tau q_t + q + \kappa \nabla \theta + \tau \kappa_1 \nabla \theta_t = 0;$$

Les deux théories de types *II* et *III* pour le flux de chaleur dans un solide rigide fixe accommodent la vitesse d'on définie, mais seulement le type *II* n'implique aucune dissipation d'énergie. conformément à la classification utilisée dans [6] pour le flux de la chaleur dans un solide rigidefixe, la dérivation de Green et Naghdi [7] est appelé thermo élasticité classique (ou thermoélasticité de type *I*). Cependant, la procédure qu'ils ont utilisé pour le développement d'équations constitutives est basée sur la procédure proposée dans [?],qui emploie une loi de balnce de l'entropie et exige la satisfaction de l'équation d'énergie réduite avant d'imposer toute autre restriction résultant de la seconde loi de la thermo dynamique. En outre, il sont considéré dans une autre théorie thermoélastique, la partie thermique qui résulte de la transmission de la chaleur sous forme d'ondes et est analogue à cellede la réponse d'un matériau élastique dans une théorie mécanique. Ils se sont référés à lui comme thermo élasticité sans dissipation d'énergie (thermoélasticité de type *II*), car il ne comporte aucune dissipation d'énergie.Les modèles en  $1 - D$  et  $n - D$  sont

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta \theta_x = 0, \\ \theta_{tt} - \kappa \theta_{xx} + \beta u_{ttx} = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

et

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla (\operatorname{div} u) + \beta \nabla \theta = 0, \\ \theta_{tt} - \kappa \Delta \theta + \beta \operatorname{div} u_{tt} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

respectivement. Equations (2.3), (2.4) permettent la propagation des ondes sans amortissement (damping).

Plus tard dans [11], Greenet Naghdi dérivent des modèles de thermo élasticité de type *III* pour les milieux isotrope en utilisant les équations constitutives développées dans [6].

Le système  $1 \rightarrow D$  est donnée par :

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta \theta_x = 0, \\ \theta_{tt} - \kappa \theta_{xx} - \delta \theta_{txx} + \beta u_{ttx} = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

et dans  $n \rightarrow D$  par :

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla (\operatorname{div} u) + \beta \nabla \theta = 0, \\ \theta_{tt} - \kappa \Delta \theta - \delta \theta_t \beta \operatorname{div} u_{tt} = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

### 2.2.1 Systèmes de Timoshenko

En 1921, un modèles impledécrivait la vibration transversa le d'une poutre a été développé. Ce modèle est donné en conformité avec les équations suivantes :

$$\begin{cases} \rho A \varphi_{tt}(x, t) = S_x(x, t), \\ \rho I \psi_{tt}(x, t) = M_x(x, t) - S(x, t), \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $t$  désigne la variable temporelle, et  $x$  est la distance le long de la lignemoyenne de la poutre. La fonction  $\varphi$  représente le déplacement transversal de la poutre  $\psi$  et l'angle derotation du filament de la poutre. Nous utilisons pour la densité,  $M$  pour le moment de flexion,  $S$  pour la force decisaillage,  $A$  pour l'aire de la section transversale et  $I$  pour le second moment de la section transversale de la poutre. Les relations entre déformations et contraintes pour le comportement élastique de la poutre entexion sont donnés par :

$$M(x, t) = EI \psi_x(x, t), \quad (2.8)$$

$$S(x, t) = \kappa AG (\varphi_x + \psi)(x, t), \quad (2.9)$$

où  $E$  représente le module de Young,  $G$  le module de rigidité, et  $k$  le facteur de forme. Considérant le couplage des équations (2.6), (2.7) et (2.8),(2.9), Timoshenko établit les équations aux dérivées partielles suivantes pour les vibrations mécaniques dans les poutres planes sans la présence de mécanismes dissipatifs :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

en posant  $\rho_1 = \rho A, \rho_2 = \rho I, \kappa = \kappa A G$  et  $b = EI$ . La stabilité des systèmes de type Timoshenko (dans des domaines bornés) a reçu beaucoup d'attention ces dernières années, et plusieurs résultats concernant l'existence et le comportement asymptotique de l'énergie ont été établis. Fondamentalement, trois types de mécanismes dissipatifs (ou des combinaisons de ceux-ci) ont été envisagés :

1. La dissipation par frottement obtenue en introduisant un amortissement (damping) par frottement qui peut agir soit sur le bord soit au voisinage du bord
2. La dissipation thermique qui est obtenue par la conduction de la chaleur contenue de la loi de Fourier ou de la loi de Cattaneo.
3. La dissipation viscoélastique donnée par les effets de mémoire.

Muñoz Rivera et Racke ont étudié le système de Timoshenko avec dissipation thermoélastique efficace dans l'équation de moment de flexion, ce qui signifie qu'il est considéré  $M = b\psi_x + \gamma\theta$ , produit par la loi de Fourier. Plus précisément, le sauteur est considéré le système d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \gamma \theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t - \tilde{\kappa} \theta_{xx} + \gamma \psi_{tx} = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

Les auteurs ont montré que le système (2.11) est exponentiellement stable si et seule-

mentsi  $\chi = 0$  (avec  $\chi = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}$ ).

Le système de Timoshenko avec la loi de Cattaneo est particulièrement intéressant car le comportement du système de Timoshenko en thermoélasticité du second son est différent de celui de thermo élasticité classique .En fait, le premier exemple dans ce sens a été donné dans [?]; Fernández Sare et Rackeont étudié le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \gamma \theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t - \gamma q_x + \delta \psi_{tx} = 0, \\ \tau q_t + q + \kappa \theta_x = 0 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Il sont montré que ce système n'est pas exponentiellement stable, même si les vitesses des deux première séquations (2.12) sont égales(i.e.  $\frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}$ ).

Un résultat en core plus surprenant est que le couplage de Cattaneo " détruit " même la stabilité exponentielle.Plus précisément, Muñoz Rivera et Fernández Sare [?] ont considéré un système de type Timoshenko avec un termemémoire agissant dans une seule équation. Il sont examiné le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b \psi_{xx} + \int_0^{+\infty} g(t) \psi_{xx}(t-s, \cdot) ds + \kappa (\varphi_x + \psi) = 0, \end{array} \right. \quad (2.13)$$

avec des conditions aux limites homogènes dans un domaine borné, et il sont montré que la dissipation donnée par le termemémoire est suffisamment forte pour stabiliser le système (2.13) de façon exponentielle si et seulement si et la fonction de relaxation  $g$  décroît exponentiellement. Alors que la loi de Cattaneo "détruit" cette propriété, comme [?]. Pour cette raison, certain sterms d'amortissement supplémentaires pour raient être nécessairespourr établir lastabilité exponentielle du système (2.12). Cette situation a été étudiée par Messaoudi et autres, où une version non linéaire du

système (2.12) a été également examiné et un terme d'amortissement de la forme  $t$  à été introduite. A savoir, il sont examiné le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta \theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t - \gamma q_x + \delta \psi_{tx} = 0, \\ \tau q_t + q + \kappa \theta_x = 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

, et la fonction non linéaire est supposée être suffisamment lisse et satisfait

$$\sigma_{\varphi_x}(0, 0) = \sigma_{\psi}(0, 0) = \kappa$$

et

$$\sigma_{\varphi_x \varphi_x}(0, 0) = \sigma_{\varphi_x \psi}(0, 0) = 0$$

Concernant les systèmes de Timoshenko pour les matériaux à mémoire finie, Ammar-Khodjaetal.[20] ont étudié le système linéaire de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \int_0^{+\infty} g(t) \psi_{xx}(x, t-s) ds = 0, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

avec des conditions aux limites homogènes, et il sont montré, en utilisant la méthode des multiplicateurs, que le système (2.15) est exponentiellement stables si et seulement si  $\kappa = 0$  et  $g$  décroît exponentiellement. Précisément, sous certaines conditions techniques supplémentaires sur  $g'$  et  $g''$ , ils ont établi un résultat de décroissance exponentielle (respectivement polynomial) pour  $g$  décroît de façon exponentielle (respectivement polyno-miale). Cedernier résultat a ensuite été obtenu par Guesmia et Messaoudi [?] avec des conditions plus faibles que celles qui sont considérées dans [20]. En outre, Messaoudi et Mustafa ont discuté (2.15), pour la fonctions de relaxa-

tion satisfait

$$g'(t) \leq -\zeta(t)g(t), \forall t \geq 0 \quad (2.16)$$

où  $\zeta : R_+ \rightarrow R_+$  est une fonction différentiable non croissante, et ils ont donné un résultat de décroissance plus générale, à partir du quel, les résultat shabituels de décroissance exponentielle et polynomiale sont que des cas particuliers. La stabilité de (2.15); dans le cas où les vitesses des on des sont différentes, à été étudiée par Guesmia et Messaoudi sous la condition

$$g'(t) \leq -\zeta(t)g^p(t), \forall t \geq 0$$

où  $p > 1$ , et une estimation de décroissance générale pour l'énergie de solutions régulières a été prouvée.

Dans [?], Guesmia et Messaoudi ont considéré le système 2.13, où la fonction de relaxation  $g$  satisfait la relation (2.16) : Sous la même hypothèse sur  $g$  et imposée pour le cas de mémoire finie, il sont établi des résultats de décroissance générale dans les cas où les vitesses de propagations ont égales et différentes. Ces résultat sont permis d'améliorer certains des taux de décroissance connus. Guesmia [?] a considéré un système de type Timoshenko avec un terme mémoire et un amortissement par frottement agissant seulement dans l'équation de l'angle de rotation. Il a examiné le problème suivant

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa_1 (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - \kappa_2 \psi_{xx} + \kappa_1 (\varphi_x + \psi) + b(x) h(\psi_t) + \int_0^{+\infty} g(t) (a(x) \psi_x(t-s))_x ds = 0, \end{cases}$$

et il à montré que la dissipation donnée par ces contrôles complémentaires est assez forte pour garantir la stabilité du système en ce qui concerne les vitesses de propagation sont égales, ainsi que dans le cas contraire. Un résultats imilaire à ce lui

trouvé par Guesmia et Messaoudi [?] dans le cas où le terme mémoire et l'amortissement par frottement agissant dans l'équation du déplacement transversal. Dans [?], Guesmia a étudié le système de Timoshenko avec une mémoire infinie et un retard distribué (distributed time delay) à la fois agissant sur l'équation de l'angle de rotation

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa_1 (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - \kappa_2 \psi_{xx} + \kappa_1 (\varphi_x + \psi) + \int_0^{+\infty} g(t) \psi_{xx}(t-s) ds + \int_0^{+\infty} g(t) \psi_t(t-s) ds = 0, \end{cases}$$

Il a donné des estimations de décroissance pour les deux cas de vitesses.  $L$  est aux de décroissance obtenus dépendent des noyaux de la mémoire et le retard à l'infini. Dans le cas d'inégalité de vitesse, le taux de décroissance dépend également de la régularité des données initiales. La constante est un nombre important qui caractérise le comportement asymptotique des solutions au système Timoshenko. Cela a été prouvé pour le comportement viscoélastiques dans [19],[20],[21],[22], pour le comportement thermoélastique avec la loi de Fourier et aussi à la dissipation thermo élastique de type *III*, et le système Timoshenko avec dissipation aux limites dans [25].

Plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour les deux cas linéaires et non linéaire sont été établis sans l'hypothèse Pour le système de Timoshenko pur (c'est-à-dire sans conduction de chaleur) dans le domaine borné, il existe une vaste littérature. Le lecteur intéressé est appelé à regarder [29], pour les systèmes de Timoshenko avec amortissement par frottement, et [20], pour les systèmes de Timoshenko avec amortissement viscoélastique.

### 2.2.2 Systèmes de Bresse

Le problème de l'arc de cercle est également connu comme le système de Bresse. Les structures élastiques de type arc sont des objets d'étude largement exploités dans

l'ingénierie, l'architecture, l'ingénierie marine, l'aéronautique et d'autres. En particulier, les vibrations libres sur les structures élastiques sont un sujet de recherche important dans l'ingénierie et aussi en mathématiques. Dans le domaine de l'analyse mathématique, il est intéressant de connaître les propriétés qui concernent le comportement de l'énergie associée au modèle dynamique respectif. Pour les lois de rétroaction (feedback), par exemple, nous pouvons nous demander à quelles conditions à propos du modèle dynamique doit être assurée l'obtention de la décroissance de l'énergie des solutions dans le temps  $t$ . En ce sens, la propriété de stabilisation a été étudiée pour des problèmes dynamiques dans les structures élastiques sont traduits en fonction de séquations aux dérivées partielles.

Le système de Bresse original est donné par les équations suivantes (voir [14]) :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = q_x + lN + F_1, \\ \rho_2 \psi_{tt} = Mx - q + F_2, \\ \rho_3 \omega_{tt} = N_x - lq + F_3, \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $F_i$  sont les forces extérieures et  $N$ ,  $Q$  et  $M$  désignent la force axiale, la force de cisaillement et le moment de tension, respectivement. Ces forces sont les relations contrainte-déformation (stress-strain) pour le comportement élastique et elles sont données par :

$$\begin{aligned} N &= \kappa_0 (\omega_x - l\varphi) \\ q &= \kappa (\varphi_x + l\omega + \psi) \\ M &= b\psi_x \end{aligned} \quad (2.18)$$

où  $\rho_1 = \rho A$ ,  $\rho_2 = \rho I$ ,  $\kappa = \kappa AG$ ,  $\kappa_0 = EA$ ,  $b = EI$  et  $l = R^{-1}$  est la densité du matériau,  $E$  est le module d'élasticité,  $G$  est le module de cisaillement,  $k$  est le facteur de cisail-

ment,  $A$  est la surface en coupetrans versale,  $I$  est le second moment de la section transversale et  $R$  est le rayon de courbure. Les fonctions  $\varphi, \psi$  et  $\omega$  désignent, respectivement, le déplacement transversal, l'angle de rotation d'un filament et le déplacement longitudinal de la poutre. Considérant le couplage des équations (2.17) et (2.18), nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + l\omega + \psi) - \kappa_0 l (\omega_x - l\varphi) = F_1, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + l\omega + \psi) = F_2, \\ \rho_3 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + l\omega + \psi) = F_3, \end{array} \right.$$

Il y a un bon nombre de publications relatives à la stabilisation du système de Bresse [15], et [18]. En particulier, Liu et Rao ont étudié la stabilisation du système de Bresse avec deux lois différentes de dissipation thermique agissant sur les équations concernant le déplacement longitudinal et la rotation angulaire. Sous la condition d'égalité des vitesses de propagation des ondes, il est établi un taux de décroissance exponentiel de l'énergie. Dans le cas contraire, ils ont montré que la solution lisse décroît polynomialement vers zéro avec des taux  $t^{1=2}$  ou  $t^{1=4}$  pour les conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann-Neumann ou Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet respectivement. Dans [18], Fatori et Rivera ont considéré le système de Bresse avec une loi de dissipation de température globale agissant sur l'équation de rotation angulaire. Il est établi le même taux de décroissance exponentielle de l'énergie dans le cas d'égalité des vitesses de propagation de sondes. Dans le cas contraire, ils ont montré que la solution lisse décroît polynomialement vers zéro avec des taux  $t^{-\frac{1}{3}}$ .

**Remarque 2.2.3** *Si  $R \rightarrow +\infty$ , alors  $l \rightarrow 0$ , et ce modèle se réduit aux équations de poutre de Timoshenko.*

## 2.3 Méthode de Faedo-Galerkin pour un problème.

La méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

### 1\_ Solutions approchées.

L'espace  $V$  est séparable, il existe une suite  $W_1, W_2, \dots, W_m$ , ayant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_i \in V, \forall i; \\ \forall m, W_1, W_2, \dots, W_m \text{ sont linéairement indépendants;} \\ V_m = \langle \{W_1, W_2, \dots, W_m\} \rangle \text{ est dense dans } V. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

### 2\_ Estimations a priori.

### 3\_ Passage à la limite.

# Chapitre 3

## Décroissance exponentielle et solution du système non linéaire de Bresse - Timoshenko avec deuxième son

En ce chapitre nous pouvons l'astabilité de ce problème (1).

**Théorème 3.0.1** *Soit  $(\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ ,  $(\psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$   
et  $(\theta_0, q_0) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  soient donnés. Supposons que (A) soient satisfaits,  
alors le problème (1)-(2) solution unique de réglage global satisfaisant*

$$\varphi, \psi \in C(\mathbb{R}_+, H_0^1(0, 1)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2(0, 1)),$$

$$\theta, q \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(0, 1)).$$

### 3.1 Stabilité exponentielle

Dans cette section, nous utilisons la méthode énergétique pour établir la stabilité exponentielle du système (1)-(2). Pour atteindre notre objectif, nous énonçons et prouvons les lemmes suivants.

**Lemme 3.1.1** *Soit  $(\varphi, \psi, \omega, \theta, q)$  la solution de (1)-(2). Alors la fonction énergie  $\varepsilon(t)$ , définie par*

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \rho_1 \varphi_t^2 + \kappa (\varphi_x + \psi)^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{tt}^2 + \rho_2 \varphi_{tx}^2 + b \psi_x^2 \right] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \rho_3 \theta^2 + \iota_0 q^2 + 2\widehat{f}(\psi) \right] dx \end{aligned} \quad (3.1)$$

dont le théorème isotoniqument nouveau théorème la section

$$\varepsilon'(t) = -\mu_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{\mu_1 \rho_2}{\kappa} \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx - \delta \int_0^1 q^2 dx - \lambda \int_0^1 \theta^2 dx \leq 0 \quad (3.2)$$

**Preuve** .Multiplication (1)<sub>1</sub> ,(1)<sub>2</sub>, (1)<sub>3</sub>, et (1)<sub>4</sub> avec  $\varphi_t$  ,  $\psi_t$  ,  $\theta$  and  $q$  repectivement , et un intégration par partie (1) on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 \varphi_t [\rho_1 \varphi_{tt}(x, t) - \kappa (\varphi_x + \psi)_x(x, t)] \\ & + \int_0^1 \varphi_t [\mu_1 \varphi_t(x, t)] dx = 0 \quad \text{dans } (0, 1) \times (0, \infty), \\ & \int_0^1 \psi_t [-\rho_2 \varphi_{tx}(x, t) - b \psi_{xx}(x, t)] dx = 0 \\ & \quad + \int_0^1 \psi_t [\kappa (\varphi_x + \psi)(x, t)] dx \\ & + \int_0^1 \psi_t [\gamma \theta_x(x, t) + f(\psi)(x, t)] dx = 0 \quad \text{dans } (0, 1) \times (0, \infty), \\ & \int_0^1 \theta [\rho_3 \theta_t(x, t) + \kappa q_x(x, t) + \gamma \psi_{tx}(x, t)] dx \\ & \quad + \int_0^1 \theta [\lambda \theta(x, t)] dx = 0 \quad \text{dans } (0, 1) \times (0, \infty), \\ & \int_0^1 q [\iota_0 q_t(x, t) + \delta q(x, t) + \kappa \theta_x(x, t)] dx = 0 \quad \text{dans } (0, 1) \times (0, \infty), \end{aligned} \right. \quad (3.3)$$

En utilisant l'intégration par partie dans 3.3, et les condition aux limites 2, on obtient

$$3.3_1 \Leftrightarrow \frac{\rho_1 d}{2dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \varphi_{tx} dx + \mu_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx = 0. \quad (3.4)$$

$$3.3_2 \Leftrightarrow \frac{bd}{2dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \psi_t dx + \rho_2 \int_0^1 \varphi_{tt} \psi_{tx} dx \\ \Leftrightarrow +\gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx + \frac{d}{dt} \int_0^1 \widehat{f}(\psi) dx = 0. \quad (3.5)$$

$$3.3_3 \Leftrightarrow \frac{\rho_3 d}{2dt} \int_0^1 \theta^2 dx + \kappa \int_0^1 q_x \theta dx - \gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx + \lambda \int_0^1 \theta^2 dx = 0. \quad (3.6)$$

$$3.3_4 \Leftrightarrow \frac{\iota_0 d}{2dt} \int_0^1 q^2 dx - \kappa \int_0^1 q_x \theta dx + \delta \int_0^1 q^2 dx = 0. \quad (3.7)$$

par l'équation (1)<sub>1</sub>, on obtient

$$\psi_{tx} = \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi_{tt}(x, t) + \frac{\mu_1}{\kappa} \varphi_{tt}(x, t) - \varphi_{tt}(x, t). \quad (3.8)$$

En remplaçant maintenant (3.8) dans (3.5), nous obtenons

$$\Leftrightarrow \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ + \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \psi_t dx + \frac{\mu_1 \rho_2}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx \\ + \gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx + \frac{d}{dt} \int_0^1 \widehat{f}(\psi) dx \quad (3.9)$$

$$= 0. \quad (3.10)$$

En sommant les équations (3.4), (3.6), (3.7), et (3.9), on a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{2dt} \left[ \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx \right] \\ & + \frac{d}{2dt} \left[ \rho_2 \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \iota_0 \int_0^1 q^2 dx + 2\widehat{f}(\psi) \right] \\ & + \mu_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\mu_1 \rho_2}{\kappa} \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx + \delta \int_0^1 q^2 dx + \lambda \int_0^1 \theta^2 dx \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$= 0. \quad (3.12)$$

par (3.11), on obtient (3.2). La preuve du lemme est terminée.

Tout d'abord, nous devons introduire des lemmes l'auxiliaires.

Laisser

$$\begin{aligned} F_1(t) &= -\frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx \\ F_2(t) &= -\rho_2 \int_0^1 \varphi_{tx} \psi dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \varphi dx \\ &+ \frac{\rho_2 \rho_3}{\gamma} \int_0^1 \varphi_t \theta dx \end{aligned}$$

**Lemme 3.1.2** Soit  $(\varphi, \psi, \omega, \theta, q)$  la solution de (1)- (2). Alors la fonctionnelle  $F_1(t)$

$$F_1(t) = -\frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx \quad (3.13)$$

satisfait pour tout  $\varepsilon_1 > 0$ , l'estimation suivant

$$F_1'(t) \leq -\kappa \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx + \kappa \varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \left( \rho_1 + \frac{\kappa}{4\varepsilon_1} \right) \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx \quad (3.14)$$

**Preuve** Différenciant  $F_1$ , on obtient

$$F_1'(t) = -\mu_1 \int_0^1 \varphi_t \varphi_{tt} dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx \quad (3.15)$$

en utilisant (1)<sub>1</sub>, et en intégrant par parties, on obtient

$$F'_1(t) = \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tt} \psi_x dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx \quad (3.16)$$

**preuve** Calcul direct par intégration par parties, on obtient

$$F'_1(t) = -\mu_1 \int_0^1 \varphi_t \varphi_{tt} dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx \quad (3.17)$$

en utilisant (3.17), et le fait que

$$\varphi_t(x, t) = -\frac{\rho_1}{\mu_1} \varphi_{tt}(x, t) + \frac{\kappa}{\mu_1} (\varphi_x + \psi)_x(x, t),$$

on obtient

$$\begin{aligned} F'_1(t) &= \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx - \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx \\ &\quad - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx \\ &= \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx \kappa + \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx \\ &\quad - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx + \kappa \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx \\ &= \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx - \kappa \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young nous obtenons (3.14). En appliquant l'inégalité de Young (23), on obtient (3.14).

**Lemme 3.1.3** *Soit  $(\varphi, \psi, \theta, q)$  la solution de (1) - (2). La fonctionnelle  $I_3$  est définie par*

$$\begin{aligned}
 F_2(t) &= -\rho_2 \int_0^1 \varphi_{tx} \psi dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \varphi dx \\
 &\quad + \frac{\rho_2 \rho_3}{\gamma} \int_0^1 \varphi_t \theta dx
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

satisfait, pour tout  $\forall t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
 F_2'(t) &\leq -\kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \left( \rho_1 + \frac{\lambda \rho_2}{2\gamma} \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
 &\quad + \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx + \frac{\kappa \rho_2}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx + \frac{\kappa \rho_2}{2\gamma} \int_0^1 q^2 dx \\
 &\quad + \left( \frac{\gamma^2}{2b} + \frac{\rho_2}{2\gamma} (\rho_3 + \lambda) \right) \int_0^1 \theta^2 dx - \int_0^1 \psi \widehat{f}(\psi) dx
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

**Preuve .** En différenciant  $F_2$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 F_2'(t) &= \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi \varphi_t dx + \mu_1 \int_0^1 \varphi_t \varphi_{tt} dx - \rho_2 \int_0^1 \varphi_{tx} \psi dx \\
 &\quad - \rho_2 \int_0^1 \varphi_{tx} \psi_t dx + \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_{tt} \theta dx + \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_t \theta_t dx
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

En utilisant (1)<sub>1</sub>, (1)<sub>2</sub>, (1)<sub>3</sub>, et on intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
 F_2'(t) &= \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \varphi_t \psi_{tx} dx - b \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 &\quad - \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \gamma \int_0^1 \theta \psi_x dx + \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_{tt} \theta dx \\
 &\quad + \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_t \theta_t dx - \int_0^1 \psi f(\psi) dx
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

en exploitant (21) dans le dernier terme de (3.21), on peut écrire

$$\begin{aligned}
F_2'(t) &\leq \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - b \int_0^1 \psi_x^2 dx - \frac{\rho_2 \kappa}{\gamma} \int_0^1 \varphi_{tx} q dx \\
&\quad + \gamma \int_0^1 \theta \psi_x dx + \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_{tt} \theta dx - \frac{\gamma \rho_2}{\gamma} \int_0^1 \varphi_t \theta dx - \int_0^1 \widehat{f}(\psi) dx
\end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de young (23), nous obtenons (3.19). Différencier  $F_2$  et intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned}
F_2'(t) &= \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi \varphi_{tt} dx + \mu_1 \int_0^1 \varphi \varphi_t dx - \rho_2 \int_0^1 \varphi_{tx} \psi dx \\
&\quad - \rho_2 \int_0^1 \varphi_{tx} \psi_t dx + \frac{\rho_2 \rho_3}{\gamma} \int_0^1 \varphi_{tt} \theta dx + \frac{\rho_2 \rho_3}{\gamma} \int_0^1 \varphi_t \theta_t dx
\end{aligned} \tag{3.22}$$

D'un autre coté, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l}
\varphi_t(x, t) = -\frac{\rho_1}{\mu_1} \varphi_{tt}(x, t) + \frac{\kappa}{\mu_1} (\varphi_x + \psi)_x(x, t), \\
\varphi_{ttx}(x, t) = -\frac{b}{\rho_2} \psi_{xx}(x, t) + \frac{\kappa}{\rho_2} (\varphi_x + \psi)(x, t) + \frac{\gamma}{\rho_2} \theta_x(x, t) \\
\quad + \frac{1}{\rho_2} f(\psi)(x, t) \\
\psi_{tx}(x, t) = -\frac{\rho_3}{\gamma} \theta_t(x, t) - \frac{\kappa}{\gamma} q_x(x, t) - \frac{\lambda}{\gamma} \theta(x, t)
\end{array} \right. \tag{3.23}$$

(3.22)\_(3.23) implique que

$$\begin{aligned}
F_2'(t) &= \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \varphi_t \psi_{tx} dx - b \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&\quad - \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \gamma \int_0^1 \theta \psi_x dx - \int_0^1 \psi f(\psi) dx \\
&\quad + \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_{tt} \theta dx - \int_0^1 \varphi_t \theta_t dx
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 F_2'(t) &= \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - b \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 &+ \rho_2 \int_0^1 \varphi_t \left( -\frac{\rho_3}{\gamma} \theta_t - \frac{\kappa}{\gamma} q_x - \frac{\lambda}{\gamma} \theta \right) dx + \gamma \int_0^1 \theta \psi_x dx - \int_0^1 \psi f(\psi) dx \\
 &+ \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_{tt} \theta dx + \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_t \theta_t dx
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Les inégalités de cauchy\_schwarz et de poincaré conduisent à

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |f(\psi) \psi| dx &\leq \int_0^1 |\psi|^\ell |\psi| |\psi| dx \\
 &\leq \|\psi\|_{2(\ell+1)}^\ell \|\psi\|_{2(\ell+1)} \|\psi\| dx \\
 &\leq c_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

pour certains  $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0, c_1 > 0, c_2 > 0$

A ce stade, nous distinguons deux cas.

**cas 1 :** si  $H$  est linéaire sur  $[0, \varepsilon]$ . Dans ce cas, en utilisant l'hypothèse, on peut écrire

$$\kappa_2 \int_0^1 f(\psi)^2 dx \leq \kappa_2 \int_0^1 [\psi^2 + f(\psi)^2] dx \leq \kappa_2 \int_0^1 \psi f(\psi) dx \leq -\kappa_3 \varepsilon'(t),$$

cette inégalité implique que

$$- \int_0^1 f(\psi)^2 dx \geq - \int_0^1 \psi \widehat{f}(\psi) dx \tag{3.26}$$

D'après (3.24) et (3.26), on obtient

$$F_2'(t) \leq \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - b \int_0^1 \psi_x^2 dx - \frac{\rho_2 \kappa}{\gamma} \int_0^1 \varphi_{tx} q dx \\ + \gamma \int_0^1 \theta \psi_x dx + \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_{tt} \theta dx - \frac{\gamma \rho_2}{\gamma} \int_0^1 \varphi_t \theta dx - \int_0^1 \widehat{f}(\psi) dx$$

alors

$$F_2'(t) \leq -\kappa \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \left( \rho_1 + \frac{\lambda \rho_2}{2\gamma} \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ + \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx + \frac{\kappa \rho_2}{2\gamma} \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx + \frac{\kappa \rho_2}{2\gamma} \int_0^1 q^2 dx \\ + \left( \frac{\gamma^2}{2b} + \frac{\rho_2}{2\gamma} (\rho_3 + \lambda) \right) \int_0^1 \theta^2 dx - \int_0^1 \psi \widehat{f}(\psi) dx \quad (3.27)$$

en choisissant on obtient (3.19). Finalement nous obtenons l'estimation (3.19).

Maintenant, nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov  $\mathcal{L}(t)$ , par

$$\mathcal{L}(t) = N\varepsilon(t) + N_1 F_1(t) + N_2 F_2(t) \quad (3.28)$$

ou  $N, N_1$ , et  $N_2$  sont des constantes positives.

**Lemme 3.1.4** Soit  $(\varphi, \psi, \omega, \theta, z)$  une solution pour (1) - (2) Alors il existe deux constantes positives  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , telles que la fonctionnelle de Lyapunov (3.28) satisfait,

$$\gamma_1 \varepsilon(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \gamma_2 \varepsilon(t), \forall t \geq 0, \quad (3.29)$$

et

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\beta_1 \varepsilon(t), \forall t \geq 0, \quad (3.30)$$

**Preuve .** d'après (3.28), on obtient

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(t) - N\varepsilon(t)| &\leq \frac{N_1\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + N_1\kappa \int_0^1 |\varphi_{tx}\varphi| dx \\
 &\quad + \frac{N_1\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{N_2\rho_2\rho_3}{\gamma} \int_0^1 |\varphi_t\theta| dx \\
 &\quad + N_2\rho_1 \int_0^1 |\varphi_t\theta| dx + N_2\rho_2 \int_0^1 |\varphi_{tx}\psi| dx
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

en appliquant les inégalités de Young (23), de Poincaré (24), et en exploitant (25), on arrive à

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(t) - N\varepsilon(t)| &\leq \delta_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \delta_2 \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx + \delta_3 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
 &\quad + \delta_4 \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx + \delta_5 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \delta_6 \int_0^1 \theta^2 dx \\
 &\quad + \delta_7 \int_0^1 q^2 dx + \delta_8 \int_0^1 \widehat{f}(\psi) dx \\
 &\leq C\varepsilon(t)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

dans laquelle  $\delta_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) sont des constantes positives comme dans [?, ?, ?].

cela donne donc  $(N - C)\varepsilon(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + C)\varepsilon(t)$ , en choisissant  $N$  (dépendant de  $N_1, N_2$ ) suffisamment grand on obtient (3.29).

Maintenant, en différenciant  $\mathcal{L}(t)$ , en exploitant (3.14),(3.19), et en définissant  $\varepsilon_1 = \frac{1}{N_1}$ , nous obtenons

**Preuve.** nous définissons une fonctionnelle de Lyapunov appropriée comme

$$\mathcal{L}(t) = N\varepsilon(t) + N_1F_1(t) + N_2F_2(t)$$

ou  $N, N_1$ , et  $N_2$  sont des constantes positives à choisir correctement ultérieurement.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) &\leq - \left[ \mu_1 N - \left( \rho_1 + \frac{\lambda \rho_2}{2\gamma} \right) \right] \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
&\quad - \left[ \kappa N_1 - \frac{\kappa \rho_2}{2\gamma} N_2 \right] \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx \\
&\quad - \kappa N_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - N_2 \int_0^1 \widehat{f}(\psi) dx \\
&\quad - \left[ \frac{\mu_1 \rho_2}{\kappa} N - \left( \rho_1 + \frac{\kappa N_1}{4} \right) N_1 - \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} N_2 \right] \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx \\
&\quad - \left[ \frac{b}{2} N_2 - \kappa \varepsilon_1 N_1 \right] \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&\quad - \left[ \lambda N - \left( \frac{\gamma^2}{2b} + \frac{\rho_2}{2\gamma} (\rho_3 + \lambda) \right) N_2 \right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
&\quad - \left[ \delta N - \frac{\kappa \rho_2}{2\gamma} N_2 \right] \int_0^1 q^2 dx
\end{aligned}$$

en fixant  $\varepsilon_1 = \frac{1}{N_1}$ , on arrive à suivre

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) &\leq - \left[ \mu_1 N - \left( \rho_1 + \frac{\lambda \rho_2}{2\gamma} \right) \right] \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
&\quad - \left[ \kappa N_1 - \frac{\kappa \rho_2}{2\gamma} N_2 \right] \int_0^1 \varphi_{tx}^2 dx \\
&\quad - \kappa N_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - N_2 \int_0^1 \widehat{f}(\psi) dx \\
&\quad - \left[ \frac{\mu_1 \rho_2}{\kappa} N - \left( \rho_1 + \frac{\kappa N_1}{4} \right) N_1 - \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} N_2 \right] \int_0^1 \varphi_{tt}^2 dx \\
&\quad - \left[ \frac{b}{2} N_2 - \kappa \right] \int_0^1 \psi_x^2 dx - \left[ \delta N - \frac{\kappa \rho_2}{2\gamma} N_2 \right] \int_0^1 q^2 dx \\
&\quad - \left[ \lambda N - \left( \frac{\gamma^2}{2b} + \frac{\rho_2}{2\gamma} (\rho_3 + \lambda) \right) N_2 \right] \int_0^1 \theta^2 dx \tag{3.33}
\end{aligned}$$

on choisit  $N_2$  suffisamment grand pour qu'ensuite

$$\frac{b}{2} N_2 - \kappa > 0,$$

on prenne  $N_1$  suffisamment grand pour.

$$\kappa N_1 - \frac{\kappa \rho_2}{2\gamma} N_2 > 0,$$

une fois  $N_2$  et  $N_1$  fixés, on choisit  $N$  suffisamment grand (reste valide) tel que

$$\begin{aligned} \mu_1 N - \left( \rho_1 + \frac{\lambda \rho_2}{2\gamma} \right) N_2 &> 0, \\ \frac{\mu_1 \rho_2}{\kappa} N - \left( \rho_1 + \frac{\kappa N_1}{4} \right) N_1 - \frac{\rho_2 \rho_3}{2\gamma} N_2 &> 0, \\ \lambda N - \left( \frac{\gamma^2}{2b} + \frac{\rho_2}{2\gamma} (\rho_3 + \lambda) \right) N_2 &> 0, \end{aligned}$$

et

$$\delta N - \frac{\kappa \rho_2}{2\gamma} N_2 > 0,$$

Finalement, on obtient

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\beta_1 \varepsilon(t), \forall t \geq 0, \quad (3.34)$$

ou  $\beta_1$  est une constante positive.

nous sommes maintenant prêts à énoncer et à prouver le résultat de stabilité exponentielle suivant.

### **Théorème 3.1.1**

Soit  $(\varphi, \psi, \theta, z)$  une solution pour (1),(2). Alors, il existe deux constantes positives  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ , telles que la fonction énergie (3.1) vérifie, pour tout  $t \geq 0$

$$\varepsilon(t) \leq \lambda_0 e^{-\lambda_1 t} \quad (3.35)$$

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié le système non linéaire de Bresse-Timochenko avec second son et nous a montré que la dissipation apportée par ce contrôle complémentaire combinée à la température.

L'effet de nature permet de stabiliser exponentiellement le système. De plus, les tests numériques qui ont été réalisés pour étudier le comportement asymptotique de l'énergie. l'avenir, nous allons considérons un autre mécanisme d'amortissement tel que la microtempérature pour étudier la stabilité de Système Bresse-Timochenko. Le problème en question est le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad x \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ -\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \gamma \omega_x = 0, \quad x \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \omega_t - \kappa_1 \omega_{xx} + \lambda \omega - \gamma \psi_{tx} = 0, \quad x \in (0, 1) \times (0, \infty), \end{array} \right. \quad (3.36)$$

dans ce cas la situation est différente et plus compliquée que le problème (1) car dans dans ce cas nous avons considéré un seul terme de dissipation donné par la microtempérature.

# Bibliographie

- [1] Salim Adjemi, Berkane, salah Zitouni & Tahar Bechouat (2022) :Exponential decay and numerical solution of non linear Bresse-Timshenko system with second sound,Journal of Thermal Stresses.
- [2] Z. Liuand S. Zheng, Semi groups Associated with Dissipative Systems, Chapman & Hall,1999.
- [3] A. Pazy, Semi groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer, New York, 1983.
- [4] S. Jiangand R. Racke, Evolution equation in thermoelasticity, Mono graphs and Surveys, Pure Appl.Math.112, Champan & Hall/ CRC, Boca Raton, 2000.
- [5] C. Cattaneo, Sullaconduzionedelcalore, Atti Sem.Math.FisUniv.Modena,3 (1948),83-101
- [6] A.E.Green and P.M.Naghdi, Are-examination of the basicpostulatesofthermo-mechanics, Proc.Royal Society London.A., 432(1991), 171-194.
- [7] A.E.Green and P.M.Naghdi, On undamped heatwavesinan elastic solid, J. Thermal Stresses,15(1992),253-264
- [8] C.M.Dafermos, Hyperbolic Conservation Lawsin Continuum Physics, Springer-Verlag, NewYork, Heidelberg, 2000...
- [9] S.Timoshenko, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismaticbars, Philisophical Magazine, 41(1921), 744-746.

- [10] K. Saxton and R.Saxton, Non linearity and memory electsinlow temperature heat propagation, Arch.Rational Mech.,52(2000),127-142.
- [11] A.E.Green and P.M.Naghdi, Thermoelasticity without energy dissipation, J. Elasticity,31(1993),189-208
- [12] M.L.Santos and D.S. Almeida Junior, Numerical Exponential Decay to Dissipative Bresse System, J.Appl.Math.Article,2010(2010),17pages..
- [13] Z. Liu and B.Rao, Energy Decay of the Thermoelastic Bresse System, Z.angew. Math.Phys.,60(2009),54-69.
- [14] J.A.C.Bresse, Cours de Mécanique Appliquée, Mallet Bachelier, Paris, 1859.
- [15] F.Alabau-Boussouira, J.E.Muñoz Rivera and D.S.Almeida Júnior, Stability to weak dissipative Bresse system, J.Math.Anal.Appl.,347(2011),481-498.
- [16] A.Wehebe and W. Youssef, Exponential and polynomial stability of anelastic Bresse system with two locally distributed feedback Journalof Mathematical Physics, 51(2010), 1067-1078.
- [17] Z.Liu and B.Rao, Energy Decay of the Thermo elastic Bresse System, Z.angew. Math.Phys.,60(2009),54-69.
- [18] Fatori, Luci Harueand J.E.Muñoz Rivera, Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system, IMAJ.Appl.Math.,75(2010),881-904.
- [19] M.Alves,C.A.Raposo,M.Sepulveda and O.Vera,Uniform stabilization for trans-mission problem for Timoshenko's system with memory, J.Math.Anal.Appl.,369(1)(2010),323-345.
- [20] F.Ammar Khodja, A.Benabdallah, J.E.Muñoz Rivera and R.Racke, Energy decay fo rTimoshenko systems of memory type, J.Differential Equations194(1)(2003),82-115.
- [21] H.D.Fernández Sare, Exponential decay of Timoshenko systems with indefinite memory dissipation, Adv.Differential Equations, 13(7-8)(2009),733-752.

- [22] M.Grasselli, V.Pata and G.Prouse, Long time behavior of a visco elastic Timoshenko beam, *Discrete Contin.Dyn.Syst.*,10(1-2)(2004),337-348.
- [23] S.A.Messaoudi and B.Said-Houari, Energy decay in a Timoshenko-type system with history in thermoelasticity of type III, *Adv.Differential Equations*, 14(3-4)(2009), 375-400.
- [24] S.A.Messaoudi and M.I.Mustafa, A stability result in a memory-type Timoshenko system, *Dynam.Systems Appl.*,18(3-4)(2009),457-468.
- [25] F. Ammar-Khodja, S.Kerbal and A.Soufyane, Stabilization of the non uniform-Timoshenko beam, *J.Math.Anal.Appl.*, 327(1)(2007), 525-538.
- [26] S. A. Messaoudi and A.Soufyane, Boundary stabilization of solutions of a non linear system of Timoshenko type, *Non linear Anal.*, 67(7)(2007), 2107-2121.
- [27] A.Guesmia and S.A.Messaoudi, General energy decay estimates of timoshenko systems with frictional versus visco elastic damping, *Math.Meth.Appl.Sci.*,32(16)(2009),2102-2122.
- [28] S.A.Messaoudi and B.Said-Houari, Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history. *J.Math.Anal.Appl.*,360(2)(2009),459-475.
- [29] F. Alabau-Boussouira, A asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control, *Nonlinear Differ.Equ.Appl*,14(2007),643-669.
- [30] J.E.Muñoz Rivera and R.Racke, Timoshenko systems with indefinite damping, *J.Math.Anal.Appl.*, 341(2)(2008), 1068-1083.
- [31] J. A. C. Bresse, *Cours de Mathématique Appliquée*. Mallet Bachelier, Paris (1859).