



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف

Université Chadli Bendjedid – El Tarf

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات

Département de Mathématiques



Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

**Méthode des équations Intégrales Au Bord Pour
Le Bi- Laplacien**

Présenté par :

Gasmallah Assil

Devant le Jury :

Dr. Youbi Zahra	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. Bousselsal Naila	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Zidani Nesrine	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2022-2023

Résumé

Dans ce travail, en utilisant la méthode des équations intégrales au bord, pour étudier l'équation de Bi- Laplace avec des conditions non linéaires sur le bord. Basé sur la formule de Green, on obtient un système d'équation intégrale non linéaire sur le bord. Par le Théorème de Browder et Minty sur les opérateurs monotones, l'existence et l'unicité de la solution est établie.

Abstract

In this work, using the method of boundary integral equation study the Bi-Laplace equation with nonlinear boundary conditions. Based on the green formula a nonlinear system of boundary integral equation is obtained. By the Browder and Minty theorem on monotone operators, the existence and the uniqueness of the solution is established.

المخلص

في هذا العمل نستعمل طريقة المعادلات التكاملية على الحافة لدراسة معادلة لابلاس المضاعف في منطقة محدودة و غير خطية من المستوي. استنادا لصيغة (غرين) نحصل بذلك على جملة من المؤثرات التكاملية الغير خطية. بواسطة نظرية (براودر ومينتي) التي تسمح لنا بإعطاء وجود وحدانية الحل لجملة المؤثرات التكاملية.

Table des matières

0.1	Introduction	6
1	Rappels et préliminaires	9
1.1	Analyse Fonctionnelle	9
1.1.1	Les espaces L^p	9
1.1.2	Les espaces de Sobolev	10
1.1.3	Théorie des Distributions	13
1.1.4	Transformation de Fourier	14
1.1.5	Théorème de Lax-Milgram	15
1.2	Fonctions de Green et solutions élémentaires	16
1.2.1	La fonction de Green	16
1.2.2	La solution élémentaire	17
1.3	Equations aux dérivées partielles	18
1.4	Opérateurs intégraux	19
1.4.1	Noyaux intégraux	20
1.4.2	Opérateur différentiel	21
1.4.3	Opérateur pseudo-différentiel	21
1.5	Alternative de Fredholm	23
1.6	Théorie du potentiel	25
1.7	Méthode des opérateurs monotones	30

2	Problème du Bi-Laplacien dans un domaine régulier dans le plan	31
2.1	Introduction	31
2.2	Formulation du problème	31
2.3	Etude variationnelle	32
2.4	Formules de représentation et équation intégrale	35
2.5	Système des équations intégrales	42
2.6	Existence et Unicité	48
3	Problème du Bi-Laplacien avec des conditions non linéaires dans un domaine régulier	50
3.1	Introduction	50
3.2	Formulation du problème	51
3.3	Méthode des équations intégrales sur la frontière	52
3.4	Solvabilité du système d'équation intégrale (3.14) au bord	57

REMERCIEMENT

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH qui m'a aidé, qui m'a donné la force, la volonté et le moral pour accomplir mes études en master en mathématique.

Mes premiers remerciements vont à mon encadreur Dr. BOUSSELSAL NAILA qui a dirigé mes travaux de recherche avec beaucoup de patience et de gentillesse.

Je tiens à remercier vivement Dr. YUBI ZAHRA, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant d'être président du jury, je lui exprime mon profond respect et ma sincère reconnaissance.

Ma gratitude et reconnaissance à Dr. ZIDANI NESRINE, je la remercie pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je ne saurai oublier de remercier Dr SAIFIA OUARDA le chef de département de mathématique et l'ensemble des enseignants qui ont participé dans notre formation, sans oublier le personnel administratif.

Mes remerciements vont également à tous mes camarades et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour achever ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À celle qui m'a éclairé ma vie, au symbole de la tendresse

À vous ma chère maman

À ce qui m'a soutenu durant tout mon cycle d'étude, au la fleur de ma vie

À vous mon cher père

je vous remercie mes parents pour tout le soutien et l'amour qui vous me porter depuis
mon enfance.

A mes très chères sœurs

et mes frères.

A toute ma famille

A tous les amis

Toute ma gratitude, ma reconnaissance et mon amour,
à toute personne de proche ou de loin qui n'a pas cessé de me guider et de
m'encourager durant la réalisation de ce travail.

À tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

0.1 Introduction

L'étude des équations intégrales et de leur résolution numérique est un sujet qui connaît un grand succès. La raison provient du fait que de telles équations peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes aux dérivées partielles (EDP). Dans la nature, les systèmes et phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis entre eux par un grand nombre de paramètres non linéaires (la météorologie, la turbulence des fluides. . . etc). En fait, seulement un petit nombre de problème aux EDP peut être reformuler en équations intégrales, mais heureusement ce sont les problèmes les plus importants pour les applications : le problème de Laplace, de Helmholtz, de bi-Laplacien.

Ces équations intégrales peuvent être obtenues en utilisant la méthode des équations intégrales qui a débuté avec les travaux de Fredholm, principal fondateur de la théorie des équations intégrales de deuxième espèce, qui porte son nom. On peut distinguer deux formulations pour cette méthode :

1. La méthode directe qui consistent à établir une relation directe entre les fonctions inconnues (densité de simple ou de double couche), c'est à dire, les fonctions inconnues sont les variables physiques du problème considéré [3], [9].
2. La méthode indirecte qui signifie que les fonctions de densité n'ont pas une signification directe dans le problème aux EDP initial [1], [12], [23].

Un point fort de ces méthodes est une réductions de la dimension du problème considéré d'une unité, c'est à dire l'équation à résoudre à lieu sur la frontière. Il est possible de résoudre aussi le problème intérieur que le problème extérieur et aussi la possibilité de traiter des domaines infinis ou semi-infinis (problèmes extérieures) sans avoir à tronquer artificiellement le domaine d'étude.

D'autre part ces méthodes utilisent des solutions élémentaires, elles donc seulement applicables à des problèmes décrits pour les opérateurs aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. Ceci peut apparaître un inconvénient, mais heureusement que les systèmes physiques, décrits par des opérateurs de ce type, sont très fréquemment rencontrés dans la pratique. Il est aussi possible d'étendre le domaine d'application en couplant les éléments frontières avec des éléments classiques.

Un autre inconvénient dans la plupart des cas, est que la classe des opérateurs intégraux obtenus est plus large que celle des équations de Fredholm de deuxième espèce à noyau faiblement singulière. Ces difficultés peuvent être surmontées, si on interprète les opérateurs intégraux obtenus en tant qu'opérateurs pseudo différentiels et, via le calcul symbolique lié à ce dernier, permet de contourner cette difficulté majeure, pour pouvoir obtenir ainsi a des résultats d'unicité et d'existence de la solution.

Un autre inconvénient est basé sur le domaine (demi-plan). Cette situation est gênante pour la réduction des problèmes considérés sur le bord.

Une autre direction de recherche est née avec les travaux de Wendland qui consiste à interpréter n'importe quel opérateur intégral en tant qu'opérateur pseudo-différentiel, via le calcul symbolique associé à ce dernier, pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité de la solution.

Donc on peut appliquer la théorie des opérateurs pseudo-différentiels qui permet de formuler des propriétés commune, telle l'ellipticité forte et la coercivité sous la forme de l'inégalité de Garding, pour une large classe d'espaces de Sobolev.

Nous voulons étudier ici un autre inconvénient qu'on peut le rencontrer aussi si les problèmes constituent des conditions non linéaires. Ces problèmes forment une base des modèles mathématiques qui représentent différents phénomènes et processus dans la mécanique et en physique.

Cette difficulté pourra surmontée si nous transformons ces problèmes en équations intégrales non linéaires sur le bord. Pour étudier la solvabilité de ces équations, nous donnons quelques hypothèses sur la partie non linéaire.

Un résumé de ce travail est décrit comme suit :

On commence par le premier chapitre qui contient un résumé des définitions et des résultats mathématiques de base utilisés tout au long de ce travail.

Dans Le chapitre deux, on applique la méthode des équations intégrales pour le Bi-Laplacien avec des conditions linéaires dans un domaine borné. L'objectif est d'établir un système d'équations intégrales en appliquant la formule de Green. On montre alors que ce système est fortement elliptique à l'aide de l'inégalité de Garding.

Les équations intégrales, obtenues dans ce chapitre, sont de différents types.

On a :

1. Des équations intégrales de Fredholm de première espèce avec un noyau faiblement singulier.
2. Des équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce non intégrable, qui sont interprétées au sens d'une valeur principale.
3. Un système d'équations intégrales.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la méthode des équations intégrales pour l'équation bi-harmonique avec des conditions non linéaires au bord dans un domaine Ω régulier de $\mathbb{R}^2$. Nous obtenons un système non linéaire des équations intégrales. Le Théorème de Browder et Minty sur les opérateurs monotones, garantie un résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Nous terminons ce travail avec une conclusion générale.

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

Dans ce chapitre nous précisons un rappel d'analyse fonctionnelle et de certaines théories importantes qui seront d'une grande importance dans notre travail.

1.1 Analyse Fonctionnelle

Soit H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et la norme associée $\|.\|_H$.

L'espace de Hilbert H' désigne le dual de H , et $\langle ., . \rangle_{H' \times H}$ est le produit de dualité avec $\|.\|_{H'}$ est la norme associée.

1.1.1 Les espaces L^p

Les L^p ou les espaces de Lebesgue correspondent aux classes des fonctions mesurables de Lebesgue définies sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Ils sont définies, pour $1 \leq p < \infty$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \ ; \ \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty \right\}. \quad (1.1)$$

Où la norme est donnée par

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} (\int_{\Omega} | u(x) |^p dx)^{\frac{1}{p}} & ; \quad 1 \leq p < \infty \\ \sup_{x \in \Omega} | u(x) | & ; \quad p = \infty \end{cases} \quad (1.2)$$

En particulier $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert s'écrit :

Si $p = 2$:

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} ; u \text{ mesurable et telle que } \int_{\Omega} | u(x) |^2 dx < \infty \right\} \quad (1.3)$$

et muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \quad ; \forall u, v \in L^2(\Omega) \quad (1.4)$$

La norme associée est :

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} | u(x) |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.2 Les espaces de Sobolev

Soit u une fonction réelle, ou plus généralement, une fonction à valeur complexe définie sur le domaine Ω et soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_N^0$, nous écrivons

$$D^{\alpha} u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_N} \right)^{\alpha_N} u \quad (1.5)$$

Pour noter une dérivée partielle mixte de u d'ordre

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \quad (1.6)$$

Les espaces de Sobolev d'ordre entier

Nous définissons maintenant les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ pour $1 \leq p < \infty$ et $m \in \mathbb{N}_0^N$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N \quad |\alpha| \leq m \right\} \quad (1.7)$$

Où alternativement, par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty \right\} \quad (1.8)$$

muni d'une norme donnée par

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u(x)\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & ; \quad 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u(x)\|_{L^p(\Omega)} & ; \quad 1 \leq p < \infty \end{cases} \quad (1.9)$$

Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ sont réellement les espaces de Banach, à condition que les dérivées soient données dans le sens des distributions (section (1.14)). si $m = 0$ alors on a

$$W^{0,p} = L^p(\Omega) \quad , \quad 1 \leq p < \infty \quad (1.10)$$

Pour $p = 2$ l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ devient un espace de Hilbert, et il est dénoté en particulier par $H^m(\Omega)$.

L'espace $H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx \quad ; \quad \forall u, v \in H^m(\Omega) \quad (1.11)$$

associée à la norme

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} | D^{\alpha} u(x) |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} ; \quad \forall u \in H^m(\Omega) \quad (1.12)$$

Nous définissons $H^m(\Omega)$ comme espace de Sobolev d'ordre m

$$H^m(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) ; D^{\alpha} u \in L^2(\Omega) ; \forall \alpha \in \mathbb{N}^N ; |\alpha| \leq m \} \quad (1.13)$$

Proposition 1.1 (*Inégalité de Poincaré*)

$\forall p \in [1, \infty[, \exists c > 0, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\| u \|_p \leq c \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la norme $\left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$ est équivalente de celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.1 (*Théorème de trace*)

Supposons Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe C^1 par morceaux.

Considérons l'application $\gamma_0 : \mathfrak{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow L^2(\Gamma)$, alors $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, et l'application se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ encore notée γ_0 .

$H_0^1(\Omega)$ est le noyau de l'application trace γ_0 , c'est à dire

$$H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) , v = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est l'image de γ_0 ,

$$\left(\text{Im } \gamma_0 = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) , H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ est dense dans } L^2(\Gamma) \right)$$

1.1.3 Théorie des Distributions

Définition 1.1 (*d'une Distribution*)

Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^N$, on note comme fonctions test dans Ω les éléments de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$. Le support d'une fonction est la fermeture de l'ensemble des points où la fonction ne s'annule pas. L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est aussi noté par $\mathfrak{D}(\Omega)$, c'est à dire,

$$\mathfrak{D}(\Omega) = \{ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \varphi \subseteq \Omega \} = C_0^\infty(\Omega) \quad (1.14)$$

Un exemple classique d'une fonction test $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ est donné par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(|x|^2-1)}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.15)$$

La densité de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ nous assure que la classe des fonctions test est suffisamment large.

On considère d'autres fonctions test, les fonctions à décroissance rapide, plus précisément, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que

$$q_h(\varphi) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ |\alpha| \leq h}} (1 + |x|^2)^h |D^\alpha \varphi(x)| \quad (1.16)$$

Alors on note par $S(\Omega)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide qui est donné par

$$S(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid \forall h = 1, 2, \dots, q_h(\varphi) < \infty \} \quad (1.17)$$

L'espace des distributions (de Schwartz) est noté par $\mathfrak{D}'(\Omega)$ et correspond à l'espace dual de $\mathfrak{D}(\Omega)$ i.e l'espace des formes linéaires continues sur $\mathfrak{D}(\Omega)$.

La fonction de Dirac

La fonction de Dirac s'annule partout sauf à l'origine, où sa valeur est infinie, et de sorte que son intégrale a une valeur d'une. Elle est donc définie par

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

et la propriété

$$\int_{\Omega} \delta(x) dx = 1 \quad \text{si } 0 \in \Omega \quad (1.19)$$

Il n'existe aucune fonction avec ces propriétés. Cependant, la fonction de Dirac est bien définie comme distribution. Dans ce cas elle associe à chaque fonction test φ sa valeur à l'origine.

1.1.4 Transformation de Fourier

Définition 1.2 Nous définissons la transformée de Fourier directe $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ d'une fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ comme

$$\hat{f}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \exp^{-ix\tau} dx \quad \tau \in \mathbb{R}^N \quad (1.20)$$

et son transformée de Fourier inverse $\hat{f} = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}$ par

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\tau) \exp^{ix\tau} d\tau \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (1.21)$$

Les transformées de Fourier (1.20) et (1.21) peuvent être utilisées aussi pour une classe plus générale des fonctions f , comme des fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ ou même pour des distributions tempérées dans l'espace $S(\mathbb{R}^N)$, le dual de l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide

$$S(\mathbb{R}^N) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid x^\beta D^\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N \} \quad (1.22)$$

ou $x^\beta = (x_1^{\beta_1}, x_2^{\beta_2}, \dots, x_N^{\beta_N})$ pour un multi-indice $\beta \in \mathbb{N}_0^N$.

On vérifie facilement que

$$\begin{cases} F[D^\alpha u] := (i\tau)^\alpha F[u] & , \quad u \in S \quad , \quad \forall \alpha \\ D^\alpha F[u] := F[(-ix)^\alpha u] & , \quad u \in S \quad , \quad \forall \alpha \end{cases} \quad (1.23)$$

1.1.5 Théorème de Lax-Milgram

Soit une forme bilinéaire $a(u, v)$ de $H \times H \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors on dit que $a(., .)$ est :

i) continue s'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \text{pour tout } u, v \text{ dans } H \quad (1.24)$$

ii) coercive ou elliptique s'il existe un $\alpha > 0$ tel que :

$$|a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad , \quad \forall u \in H \quad (1.25)$$

Ennonçons maintenant le résultat suivant :

Théorème 1.2 (de Lax-Milgram) *Soit H un espace hilbertien réel et $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H . Alors, pour toute fonctionnelle linéaire, continue $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ sur H , il existe un u et un seul dans H tel que :*

$$a(u, v) = L(v) \quad , \quad v \in H \quad (1.26)$$

1.2 Fonctions de Green et solutions élémentaires

1.2.1 La fonction de Green

On appelle fonction de Green d'un opérateur différentiel partiel $\mathcal{L}_y$ avec des conditions de frontières homogènes, linéaires, avec des coefficient constants, par rapport à y , et défini sur l'espace des distributions $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N)$, est une distribution G tel que

$$\mathcal{L}_y \{ G(x, y) = \delta_x(y) \} \quad \text{dans } \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N) \quad (1.27)$$

où δ_x est la fonction de Dirac avec la masse de Dirac centrée au point de source x , c'est à dire, $\delta_x(y) = \delta(y - x)$, étant donc le noyau de l'opérateur inverse de $\mathcal{L}_y$, noté par $\mathcal{L}_y^{-1}$, qui correspond à un opérateur intégral, et

$$G(x, y) = \mathcal{L}_y^{-1} \{ \delta_x(y) \} \quad (1.28)$$

La solution du problème aux limites non homogène

$$\mathcal{L}_x \{ u(x) \} = f(x) \quad \text{dans } \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N) \quad (1.29)$$

est donné par $u(x) = G(x, y) * f(y)$, si la convolution a un sens

où G est la fonction de Green de l'opérateur $\mathcal{L}_x$, qui est symétrique, c'est à dire,

$$G(x, y) = G(y, x) \quad (1.30)$$

Comme dans la solution élémentaire, nous prenons

$$\mathcal{L}_x \{ u(x) \} = \mathcal{L}_x \{ G(x, y) * f(y) \} = \delta_x(y) * f(y) = f(x) \quad (1.31)$$

Nous observons que la fonction de Green de l'espace libre ou de tout l'espace, c'est à dire, sans conditions de frontière, est liée à la solution élémentaire par la relation

$$G(x, y) = E(x - y) = E(y - x) \quad (1.32)$$

Théorème 1.3 (Formules de Green)

soit Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe par morceaux, on a les formules suivantes,

$$1) \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} u \cdot v \cdot \eta_i d\sigma, 1 \leq i \leq n, u, v \in H^1(\Omega) \quad (1.33)$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \eta_i$ sur Γ , avec η est le vecteur normal unitaire sur Γ .

$$2) \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot v d\sigma, u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega) \quad (1.34)$$

$$3) \int_{\Omega} (\Delta u \cdot v - \Delta v \cdot u) dx = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot v - \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot u \right) d\sigma, u, v \in H^2(\Omega) \quad (1.35)$$

Dans les deux dernières formules, on suppose Ω ouvert borné de frontière Γ de classe C^2 .

1.2.2 La solution élémentaire

Techniquement, une solution élémentaire pour un opérateur différentiel $\mathcal{L}$, linéaire, avec des coefficients constants, et défini sur l'espace des distributions $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N)$, est une distribution E qui satisfait

$$\mathcal{L} E = \delta \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N) \quad (1.36)$$

Où δ est la fonction de Dirac, centrée à l'origine. L'intérêt principal d'une telle solution élémentaire se situe dans le fait que si la convolution a un sens, alors la solution de

$$\mathcal{L} u = f \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N) \quad (1.37)$$

pour une fonction donné f , est donnée par

$$u = E * f \quad (1.38)$$

En fait, en raison de la linéarité de $\mathcal{L}$, puisque E est une solution élémentaire, et puisque δ est l'élément neutre de la convolution, nous avons

$$\mathcal{L} u = \mathcal{L}\{ E * f \} = \mathcal{L} E * f = \delta * f = f \quad (1.39)$$

Nous remarquons aussi qu'à partir de la solution élémentaire E , d'autres solutions peuvent être construites, dans le sens des distributions , quand les dérivées de la fonction de Dirac δ apparaissent sur le coté droit. Par exemple, la solution de

$$\mathcal{L} F = \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N) \quad (1.40)$$

est donné par

$$F = E * \frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \frac{\partial E}{\partial x_i} * \delta = \frac{\partial E}{\partial x_i} \quad (1.41)$$

1.3 Equations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles linéaire (**E.D.P Linéaire**) d'ordre m dans $\mathbb{R}^N$ est une équation de la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha = 0 \quad (1.42)$$

où les fonctions a_α sont les coefficients de $a_\alpha(x) D^\alpha$.

On désigne par $A(x, D)$ l'opérateur aux dérivées partielles linéaire d'expression.

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \quad (1.43)$$

L'équation caractéristique, quant à elle, est donnée par

$$A_m(x, \tau) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \tau^\alpha \neq 0. \quad (1.44)$$

On dit que $A(x, D)$ est elliptique dans Ω , si pour tout $x_0 \in \Omega$, on a

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \tau^\alpha \geq 0, \text{ pour tout } \tau \neq 0 \quad (1.45)$$

Il est fortement elliptique, s'il existe une constante C telle que

$$\left| \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \tau^\alpha \right| \geq C |\tau|^{2K}, \text{ pour tout } x_0 \in \Omega, K > 0. \quad (1.46)$$

1.4 Opérateurs intégraux

Définition 1.3 (d'un opérateur) On appelle opérateur sur Ω toute application linéaire continu de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

D'après le Théorème des **noyaux de Schwartz**, étant donné T un opérateur "agissant" sur Ω il existe une unique distribution $K \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ telle que

$$\langle Tu, v \rangle = \langle K, v \times u \rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (1.47)$$

On dit que K est le noyau distributionnel de T ou bien T est l'opérateur de noyau K .

Définition 1.4 (d'un opérateur intégrale) Un opérateur T sur Ω est dit intégral si son noyau K est la distribution associée à une fonction $K \in L^1_{loc}(\Omega, \Omega)$. On dit que K

est le noyau de l'opérateur intégral T .

La théorie des opérateurs intégraux s'identifie à celle de l'intégral. Etant donné $K \in L^1_{loc}(\Omega, \Omega)$, on peut définir par application du Théorème de **Fubini** la fonction $Tu \in L^1_{loc}$ par

$$Tu(x) = \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy \quad (1.48)$$

Définition 1.5 (d'un opérateur de Fredholm)

- i) Un opérateur linéaire, continu de E dans F , est appelé opérateur de **Fredholm**, si la dimension de son noyau et la codimension de son image sont finies.
- ii) Le nombre $\text{ind } T = \dim \text{Ker } T - \dim \text{co ker } T$ est appelé l'indice de T .

Théorème 1.4 Soit T un opérateur linéaire continu de E dans F . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) T est un opérateur de Fredholm et $\text{ind } T = 0$.
- ii) Il y a un opérateur K , linéaire, continue de E dans F , compact tel que $T + K$ est inversible.

Preuve. voir [2] ■

1.4.1 Noyaux intégraux

Comme on l'a mentionné auparavant, plusieurs problèmes de la physique mathématique peuvent-être décrits par dans en équation intégrales. Généralement, les équations intégrales obtenues sont de différents types. Le caractère d'une équation intégrale est déterminé essentiellement par les propriétés de son noyau. En effet, si :

Le noyau $K(x, t)$ est continue dans Ω ou, au moins, si les discontinuités du noyau sont telles que :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |K^2(x, t)| dx dt < \infty \quad (1.49)$$

alors les équations données par :

$$Tu(x) = \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy = f(x) \quad (1.50)$$

où u est l'inconnue et $f(x)$, $K(x, y)$ des fonctions données, sont dites équations de type de Fredholm. Plus précisément, (1.50) est une équation de Fredholm de première espèce, contrairement à l'équation de Fredholm de deuxième espèce définie par :

$$u(x) - \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy = f(x) \quad (1.51)$$

- Si le noyau $K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|^\alpha}$ où $H(x, y)$ est borné et α une constante telle que $0 < \alpha < 1$, alors (1.50) et (1.51) sont des équations intégrales avec une singularité faible.
- Si le noyau $K(x, y) = \frac{A(x, y)}{|x - y|}$ où $A(x, y)$ est une équation différentiable en x et y , alors

$$\int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy \quad \text{diverge} \quad (1.52)$$

1.4.2 Opérateur différentiel

Un opérateur différentiel linéaire d'ordre m s'écrit comme

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \quad (1.53)$$

où les $a_\alpha(x)$ appelées coefficients de l'opérateur D , sont des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

1.4.3 Opérateur pseudo-différentiel

Les opérateurs pseudo-différentiels peuvent-être considérés comme une généralisation des opérateurs différentiels. En effet, soit l'opérateur différentiel (1.53), linéaire dans $\mathbb{R}^n$, à coefficients C^∞ , $A(x, D)$.

Exprimons le, en fonction de la transformée de Fourier et de son inverse $\mathcal{F}^{-1}$:

$$\begin{aligned} A(x, D)u(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = \mathcal{F}^{-1} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \tau^\alpha \mathcal{F}[u] \\ &= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \exp i x \tau a(x, \tau) \mathcal{F}[u](\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.54)$$

avec $a(x, \tau) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \tau^\alpha$, $\tau \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, un élément de la classe des symboles, que nous allons définir :

Définition 1.6 On appelle $S^m(\Omega)$, l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ à valeurs complexes telles que, pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout multi-indice α, β , il existe une constante C telle que

$$|D_x^\beta D_\tau^\alpha a(x, \tau)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\tau|)^{m - |\alpha|}, \quad x \in K, \text{ tout } \tau \in \mathbb{R}^n \quad (1.55)$$

Les éléments dans $S^m(\Omega)$, sont appelés les fonctions amplitude d'ordre m .
L'espace $S^m(\Omega)$ est un espace de Fréchet muni du système des semi-normes :

$$P_{\alpha, \beta, K}^{(m)}(a) = \sup_{\substack{x \in K \\ \tau \in \mathbb{R}^n}} (1 + |\tau|)^{|\alpha| - m} |D_x^\beta D_\tau^\alpha a(x, \tau)| \quad (1.56)$$

On pose

$$S^\infty = \cup_{m \in \mathbb{R}} S^m, \quad S^{-\infty} = \cap_{m \in \mathbb{R}} S^m$$

Le résultat suivant, concerne le développement asymptotique des éléments de $S^m(\Omega)$. Ceci revient à donner un sens à une série formelle d'éléments a_j d'ordre m_j , tendant vers $-\infty$.

Un résultat fondamental, qui est un outil adéquat utilisé dans la démonstration de l'ellipticité forte pour les problèmes aux limites, à savoir **l'inégalité de Garding**.

Théorème 1.5 (*Inégalité de Garding*) Soit $P \in L^m(\Omega)$. Supposons que $\operatorname{Re} p(x, \tau)$ pour τ large et $c \succ 0$. Alors pour chaque s réel, et pour chaque compact fixé K et pour tout $u \in D(K)$ on a

$$\operatorname{Re}\langle Pu, u \rangle \geq c_1 \|u\|_{H^{m/2}}^2 - c_2 \|u\|_{H^s}^2$$

avec c_1, c_2 indépendants de u .

1.5 Alternative de Fredholm

Théorème 1.6 Ou bien l'équation linéaire non homogène de second espèce (1.51) admet une solution unique quelle soit $f(x)$ (appartenant à une classe suffisamment vaste), ou bien l'équation homogène correspondante

$$u(x) - \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy = 0 \quad (1.57)$$

a au moins une solution non triviale, i.e. non identiquement nulle.

Théorème 1.7 Le premier cas de l'alternative a également lieu pour l'équation adjoint de (1.51)

$$v(x) - \int_{\Omega} K(x, y) v(y) dy = g(x), \quad (1.58)$$

et le nombre de solutions linéairement indépendantes de l'équation intégrale homogène (1.57) et de l'équation adjointe

$$v(x) - \int_{\Omega} K(x, y) v(y) dy = 0 \quad (1.59)$$

est fini et le même pour les deux équations.

Remarque 1.1 Si les fonctions $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ sont solutions de l'équation homogène (1.57), il en est également de leur combinaison linéaire

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(x),$$

où c_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des constantes arbitraires.

Théorème 1.8 Dans le second cas de l'alternative, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation non homogène (1.51) admette une solution $u(x)$ est que le second membre de cette équation, i.e. la fonction $f(x)$, soit orthogonal à toute solution $v(x)$ de l'équation homogène (1.59) adjointe de (1.57) :

$$\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = 0. \quad (1.60)$$

Remarque 1.2 Dans la condition (1.60), l'équation (1.51) possède une infinité de solutions puisqu'elle vérifie toute fonction de la forme $u(x) + \tilde{u}(x)$ avec $u(x)$ une solution de (1.51) et $\tilde{u}(x)$ toute solution de l'équation homogène correspondante (1.57). De plus, si l'équation (1.51) est satisfaite par les fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$, l'équation étant linéaire, la différence $u_1(x) - u_2(x)$ est solution de l'équation (1.57). Dans la pratique, l'alternative de Fredholm est le plus important de ces théorèmes. Au lieu de démontrer que l'équation intégrale donnée (1.51) a une solution, on démontre parfois plus facilement que l'équation homogène correspondante (1.57) ou son adjointe (1.59) n'ont pas d'autres solutions que les solutions triviales. Il en résulte, en vertu de l'alternative, que l'équation (1.51) admet bien une solution.

Remarque 1.3 Si le noyau $K(x, y)$ de l'équation intégrale (1.51) est symétrique, i.e. $K(x, y) \equiv K(y, x)$, l'équation adjointe (1.59) coïncide avec l'équation homogène (1.57) associée à (1.51).

Cette classification est incomplète. La théorie de Fredholm est valable uniquement pour

les équations du type de Fredholm. Elle ne s'applique pas pour les équations singulières et pour d'autres intégrales à noyau non intégrable.

1.6 Théorie du potentiel

La méthode des équations intégrales consiste à remplacer un problème aux limites par une équation intégrale posée sur le bord Γ .

Définition 1.7 Soit $\varphi \in C(\Gamma)$ une fonction donnée, $E(x, y)$ noyau de Green, les fonctions

$$S(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot E(x, y) \, d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^2/\Gamma \quad (1.61)$$

et

$$V(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot \frac{\partial E(x, y)}{\partial n(y)} \, d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^2/\Gamma \quad (1.62)$$

sont appelées, respectivement, potentiel simple-couche et double-couche avec la densité φ .

Remarque 1.4 On pose $f(x, y) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot E(x, y)$ ou $f(x, y) = \varphi(y) \cdot \frac{\partial E(x, y)}{\partial n(y)}$; $x \notin \Gamma$, $y \in \Gamma$.

f est continue sur Γ , donc elle est intégrable.

Lemme 1.1 Si $f : D \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue si $x \neq y$ et satisfait

$$|f(x, y)| \leq \frac{c}{|x - y|^\lambda}; \quad 0 < \lambda < 1$$

alors la fonction $g(x) = \int_{\Gamma} f(x, y) \, d\Gamma_y$ est continue sur D .

Preuve. voir [3] ■

Proposition 1.2 Soit $v \in C^2(\bar{D})$ est harmonique ($\Delta v = 0$) dans D . Alors

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (1.63)$$

Preuve. On utilise la 1^{ère} formule de Green

$$\int_D u \Delta v + \nabla u \nabla v = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma$$

on prend $u = 1$ et comme $\Delta v = 0$, alors

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma = 0$$

■

Théorème 1.9 Soit Γ de classe C^2 et $\varphi \in C(\Gamma)$. Alors le potentiel simple-couche S avec la densité φ est continue. Sur la frontière nous avons

$$S(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot E(x, y) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma$$

où l'intégrale existe

Théorème 1.10 Le potentiel simple couche $S(x)$ est continu sur $\mathbb{R}^2$ i.e. prolongeable par continuité de $\mathbb{R}^2/\Gamma$ à $\mathbb{R}^2$.

Si $\int_{\Gamma} \varphi(y) d\Gamma_y = 0$, alors $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.

Preuve. a) On a

$$S(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot E(x, y) d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^2/\Gamma$$

On prend

$$f(x, y) = \varphi(y) \cdot E(x, y)$$

avec

$$E(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log |x - y|$$

donc

$$|f(x, y)| \leq c \cdot \frac{\|\varphi\|_\infty}{|x - y|}$$

D'après le lemme (7.1) $\lim_{x \rightarrow z \in \Gamma} S(x)$ existe et ne dépend pas de la direction.

Alors S est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Supposons que $\int_{\Gamma} \varphi(y) d\Gamma_y = 0$. On a

$$S(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot E(x, y) d\Gamma_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot \log |x - y| d\Gamma_y$$

d'où

$$|S(x)| \leq \frac{c}{|x|} \text{mes}(\Gamma) \cdot \|\varphi\|_\infty = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

donc

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} S(x) = 0$$

■

Examinons maintenant la trace du potentiel de double couche

$$V(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot \frac{\partial E(x, y)}{\partial n(y)} d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^2/\Gamma, \quad \varphi \in C(\Gamma)$$

Lemme 1.2 Soit Γ de classe C^2 . Alors il existe une constante positive L telle que

1. $|\langle x - y, n(x) \rangle| \leq L |x - y|^2; \quad x, y \in \Gamma$
2. $|n(x) - n(y)| \leq L |x - y|; \quad x, y \in \Gamma$

Preuve. voir [3] ■

Lemme 1.3

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial E(x, y)}{\partial n(y)} d\Gamma_y = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in D \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x \in \Gamma \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases} \quad (1.64)$$

Pour la preuve de ce lemme on a besoin de la proposition (7.1).

Preuve.

1) $x \notin D$ ($x \in \mathbb{R}^2 / \bar{D}$)

d'après (1.63), on prend

$$v = E(\Delta E = 0) \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\partial E}{\partial n} d\Gamma = 0$$

2) $x \in D$ on utilise la représentation

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) \cdot E(x, y) - u(y) \frac{\partial E}{\partial n} \right) d\Gamma_y$$

en prenant $u = 1$

$$1 = \int_{\Gamma} -\frac{\partial E(x, y)}{\partial n} d\Gamma_y$$

alors

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial E(x, y)}{\partial n} d\Gamma_y = -1$$

3) $x \in \Gamma$, $\Omega(x, \varepsilon)$ est un sphère de centre x et de rayon ε .

Soit $H(x, \varepsilon) = \Omega(x, \varepsilon) \cap D$

On applique la formule (1.63) $\left(v = E, \int_{\Gamma} \frac{\partial E}{\partial n} = 0 \right)$.

$$\int_{\{y \in \Gamma : |y-x| \geq \varepsilon\}} \frac{\partial E}{\partial n} d\Gamma_y + \int_{H(x, \varepsilon)} \frac{\partial E}{\partial n} d\Gamma_y = 0$$

on a
$$\int_{\{y \in \Gamma : |y-x| \geq \varepsilon\}} \frac{\partial E(x, y)}{\partial n} d\Gamma_y = 0 \quad (x \notin D)$$

$$\int_{H(x, \varepsilon)} \frac{\partial E(x, y)}{\partial n_y} d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{H(x, \varepsilon)} \frac{\partial E(x, y)}{\partial n_y} d\Gamma_y = -\frac{1}{2}.$$

■

Théorème 1.11 Soit $\Gamma \in C^2$, le potentiel double couche $V(x)$ avec la densité $\varphi \in C(\Gamma)$ est prolongeable par la continuité de D à $\bar{D}$ et de $\mathbb{R}^2/\bar{D}$ à $\mathbb{R}^2/D$ avec les limites

$$V \pm (x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot \frac{\partial E(x, y)}{\partial n(y)} d\Gamma_y \pm \frac{1}{2} \varphi(x); \quad x \in \Gamma \quad (1.65)$$

où

$$V \pm = \lim_{h \rightarrow 0} V(x \pm h \cdot n(x))$$

où l'intégrale existe.

Preuve. voir [3] ■

Théorème 1.12 Soit $\Gamma \in C^2$. Alors pour le potentiel simple couche $S(x)$ avec la densité $\varphi \in C(\Gamma)$ satisfait

$$\frac{\partial S \pm}{\partial n}(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot \frac{\partial E(x, y)}{\partial n(y)} d\Gamma_y \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \Gamma \quad (1.66)$$

où

$$\frac{\partial S \pm}{\partial n}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} n(x) \cdot \nabla S(x \pm h n(x))$$

où l'intégrale existe.

Preuve. voir [3] ■

1.7 Méthode des opérateurs monotones

Soient X un espace normé séparable réel, X^* le dual de X , $A : X \rightarrow X^*$ un opérateur non linéaire, $D(A) = X$, $R(A) \subset X^*$.

On dit que l'opérateur A est monotone si

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in X \quad (1.67)$$

Si cette inégalité devient stricte pour $x \neq y$, on dit que A est strictement monotone. S'il existe une fonction $c(t)$ continue et positive pour $t \geq 0$ telle que $c(0) = 0$, $c(t) > 0$ pour $t > 0$, $c(t) > 1$ pour $t \rightarrow \infty$ et telle que

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq c \|x - y\| \|x - y\| \quad (1.68)$$

On dit que A est fortement monotone. L'opérateur A est dit coercif s'il existe une fonction $\gamma(t)$ définie pour $t \geq 0$, qui tend vers $+\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ et qui pour tout $x \in X$ vérifie l'inégalité

$$\langle A(x), x \rangle \geq \gamma \|x\| \|x\| \quad (1.69)$$

On dit que A est demi continu en $x_0 \in X$ si la convergence de x_n vers x_0 pour la norme de X implique $A(x_n) \rightarrow A(x_0)$ ($n \rightarrow \infty$) faiblement, c'est-à-dire

$$\langle A(x_n), x \rangle \rightarrow \langle A(x_0), x \rangle \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall x \in X \quad (1.70)$$

Théorème 1.13 (*Théorème de Browder et Minty*)

Soit un opérateur A qui applique un espace de Banach séparable réel X dans l'espace X^ . Supposons que A soit fortement monotone et demi continue. Alors l'équation $A(x) = y$ a une solution x et une seule pour tout $y \in X^*$.*

Chapitre 2

Problème du Bi-Laplacien dans un domaine régulier dans le plan

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on applique la méthode des équations intégrales pour le Bi-Laplacien avec les conditions de Dirichlet et Neumann dans un domaine ouvert et borné. L'objectif est d'établir un système d'équations intégrales en appliquant la formule de Green. On montre alors que ce système est fortement elliptique à l'aide de l'inégalité de Garding.

2.2 Formulation du problème

Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ simplement connexe, de frontière $\Gamma \in C^\infty$. On aura besoin des espaces de Sobolev.

Pour une fonction $u \in H^2(\Omega)$.

Ici, on cherche la solution de l'équation de Bi-laplacien avec des conditions linéaires de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta^2 u & = & 0 \quad , \quad x \in \Omega \\ u(x) & = & f(x) \quad , \quad x \in \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) & = & g(x) \quad , \quad x \in \Gamma \end{array} \right. \quad (P_1)$$

où Δ^2 est l'opérateur de Bi-Laplacien défini par

$$\Delta^2 = \Delta(\Delta) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Les fonctions f et g sont définies sur Γ . On suppose que $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Le problème (P_1) modélise entre autre l'étude de flexion d'une plaque mince par laquelle l'hypothèse de Kirchoff est supposée satisfaite.

2.3 Etude variationnelle

L'espace dans lequel nous cherchons la solution du problème (P_1) est défini par :

$$H^2(\Omega, \Delta^2) := \{u \in L^2(\Omega) \quad \text{Tq} \quad \Delta^2 u = 0\}$$

Supposons que $u \in H^2(\Omega, \Delta^2)$ est solution du problème (P_1) avec

$$(u|_{\Gamma} = f, \quad \partial_n u|_{\Gamma} = g) \in (H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

Prenons comme espace V , l'espace des fonctions de $H^2(\Omega)$ qui satisfont au sens des traces à des conditions aux limites essentielles homogènes correspondantes, c'est-à-dire :

$$V = \{u \in H^2(\Omega) \quad : \quad u|_{\Gamma} = \partial_n u|_{\Gamma} = 0\} = H_0^2(\Omega)$$

Cet espace est fermé dans $H^2(\Omega)$.

Considérons la forme bilinéaire $a(u, v)$ associée à $\Delta^2 u = 0$. Cette forme est donnée par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

$a(u, v)$ est continue et coercive sur $H_0^2(\Omega)$. Alors, d'après le Théorème de Lax-Milgram, la solution faible du problème (P_1) existe et elle est unique.

Preuve. Soit $v \in H_0^2(\Omega)$.

Multiplions v par le problème (P_1) , utilisons successivement deux fois la formule de Green 1.34, et on intégrons sur Ω

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v dx = \int_{\Omega} \Delta (\Delta u) \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla (\Delta u) \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial (\Delta u)}{\partial n} \cdot v d\sigma \quad (2.1)$$

$$= \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - \int_{\Gamma} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma + \int_{\Gamma} \frac{\partial (\Delta u)}{\partial n} \cdot v d\sigma \quad (2.2)$$

En prenant les conditions aux limites du (P_1) .

Posons

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx \quad \text{et} \quad L(v) = 0 \quad \text{car } v \in H_0^2(\Omega)$$

Finalement, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^2(\Omega) \text{ solution de} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

Pour etudier l'existence et l'unicite de la solution faible du problème (P_1) :

On considère la norme dans l'espace fonctionnel $H_0^2(\Omega)$

$$\|v\|_{H_0^2(\Omega)} = \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

1) La bilinéarité de $a(u, v)$ est évidente et $L(v)$ est une forme linéaire continue est évident.

2) La continuité de $a(u, v)$

soit $v \in H^2(\Omega)$

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz)

En conséquence, on a :

$$\left| \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx \right| \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^2(\Omega)}$$

Alors la forme bilinéaire $a(., .)$ est continue.

3) La coercivité de $a(., .)$

soit $v \in H^2(\Omega)$

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \Delta v \Delta v dx = \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v\|_{H^2(\Omega)}^2$$

Alors la forme bilinéaire $a(., .)$ est coercive.

Par conséquence, on a alors :

la forme bilinéaire $a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx$ est continue sur $V \times V$ et de plus elle est V-elliptique (coercive).

D'après le Théorème de Lax-Milgram, le problème variationnel (P_1) admet une solution unique $u \in H_0^2(\Omega)$. ■

2.4 Formules de représentation et équation intégrale

La solution fondamentale associée au Bi-laplacien donnée par :

$$E(x, y) := \frac{1}{8\pi} |x - y|^2 \log |x - y| \quad (2.3)$$

Définition 2.1 Soit $u \in C^\infty(\Gamma)$. Nous définissons les opérateurs suivants :

$$A_\Omega u(x) : = 2 \int_\Gamma u(y) \partial_n \Delta E(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega \quad (2.4)$$

$$B_\Omega u(x) : = -2 \int_\Gamma u(y) \Delta E(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega$$

$$C_\Omega u(x) : = 2 \int_\Gamma u(y) \partial_n E(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega$$

$$D_\Omega u(x) : = 2 \int_\Gamma u(y) E(x, y) ds_y, \quad x \in \Omega \quad (2.5)$$

Ces mêmes définitions restent valables pour une distribution arbitraire u sur Γ puisque pour $x \notin \Gamma$, les noyaux des opérateurs (2.4) sont des fonctions sur Γ .

Les opérateurs dans (2.4) donnent la formule représentative suivante :

Lemme 2.1 pour $u \in H^2(\Omega)$ avec $(v, w, \Phi, \Psi) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$ nous avons :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2} [A_\Omega v(x) + B_\Omega w(x) + C_\Omega \Psi(x) + D_\Omega \Phi(x)], \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{1}{2} [\partial_{nx} A_\Omega v(x) - A_\Omega^* w(x) + \partial_{nx} C_\Omega \Psi(x) + C_\Omega^* \Phi(x)], \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec $A_\Omega^* w(x) = -\partial_{nx} B_\Omega w(x)$ et $C_\Omega^* \Psi(x) = \partial_{nx} D_\Omega \Phi(x)$.

Preuve. La formule de Green pour l'opérateur bi-harmonique appliquée à la solution élémentaire nous donne :

$$\int_{\Omega_-} (\Delta^2 u E - u \Delta^2 E) dx = \int_{\Gamma} (E \partial_n \Delta u - \partial_n E \Delta u + \partial_n u \Delta E - u \partial_n \Delta E) ds \quad (2.7)$$

avec $\Delta^2 E = \delta$ (la mesure de Direc) et $\int_{\Omega} u \Delta^2 E dy = u(x)$.

De plus, on a $\Delta^2 u = 0$ dans Ω , en remplaçant (2.7), on obtient la première formule représentative de $v = u|_{\Gamma}, w = \partial_n u|_{\Gamma}, \Psi = \Delta u|_{\Gamma}, \Phi = -\partial_n \Delta u|_{\Gamma}$. Ces fonctions sont régulières car les opérateurs dans (2.4) ont des noyaux C^∞ . Ceci nous donne la première formule représentative dans (2.6). Et par dérivation, on obtient la deuxième formule représentative.

A présent, afin de formuler les équations intégrales, nous définissons les opérateurs au bord suivants. ■

Définition 2.2 Soit $u \in C^\infty(\Gamma)$. Nous définissons les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} Au(x) &: = 2 \int_{\Gamma} u(y) \partial_n \Delta E(x, y) ds_y & , x \in \Gamma \\ Bu(x) &: = -2 \int_{\Gamma} u(y) \Delta E(x, y) ds_y & , x \in \Gamma \\ Cu(x) &: = 2 \int_{\Gamma} u(y) \partial_n E(x, y) ds_y & , x \in \Gamma \\ Du(x) &: = 2 \int_{\Gamma} u(y) E(x, y) ds_y & , x \in \Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ku(x) &: = -\partial_{nx}Au(x) \\
(A_\Omega^*u)(x) &: = 2 \int_\Gamma u(y) \partial_{nx} \Delta E(x, y) ds_y \\
Vu(x) &: = \partial_{nx}Cu(x) \\
C^*u(x) &: = 2 \int_\Gamma u(y) \partial_n E(x, y) ds_y
\end{aligned}$$

Pour une distribution u , nous définissons Au , Bu , Cu et Du en approximant u par des fonctions régulières. A^*u , C^*u sont définis par dualité :

$$\begin{cases} \langle A^*u, \psi \rangle_\Gamma = \langle u, A\psi \rangle \\ \langle C^*u, \psi_\Gamma \rangle = \langle u, C\psi \rangle \end{cases}, \forall \psi \in C^\infty(\Gamma)$$

l'extension aux distributions a un sens puisque les opérateurs définis ci-dessus sont des opérateurs pseudo-différentiels.

Lemme 2.2 *Les opérateurs A, B, C et D sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre: $0, -1, -2, -3$ respectivement et nous avons :*

$$\begin{aligned}
A &: H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \quad , \quad C : H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \\
B &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \quad , \quad D : H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}
\partial_{nx}A &: H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad , \quad A^* : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\
\partial_{nx}C &: H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad , \quad C^* : H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

sont continues.

Preuve. Nous donnons explicitement le mode de calcul du symbole principal de l'un des opérateurs intégraux au bord et pour les autres une simple esquisse. Pour D , nous avons :

$$Du(x) := 2 \int_{\Gamma} u(y) E(x, y) ds_y = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} |x - y|^2 \log |x - y| u(y) ds_y$$

Γ est une courbe qui peut être donnée par une représentation paramétrique régulière :

$$x = x(t), \quad y = x(t_0)$$

D'après la formule de Taylor, nous pouvons écrire :

$$|x - y|^2 \log |x - y| = \tau^2 \log |\tau| + R_1 \tau^2 \log |\tau| + \frac{1}{2} \tau^2 (1 + R_1) (R_1 - \frac{1}{2} R_1^2 + \dots)$$

avec $\tau = t_0 - t$, $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 1$ et $|R_1| \leq c |\tau| \leq 1$.

Soit $\chi(|\tau|) = 1$ dans le voisinage de zéro. Alors,

$$Du(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \chi(|\tau|) \tau^2 \log |\tau| u(t_0) dt_0 + Ru(t)$$

où $Ru(t)$ est un opérateur de noyau C^∞ . Donc d'ordre $(-\infty)$

Soit la transformée de Fourier de $u(t_0)$:

$$u(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it_0 y) F[u(y)] dy$$

remplaçons cette représentation de $u(t_0)$ dans $Du(t_0)$ nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_D(t, y) \exp(it_0 y) F[u(y)] dy + Ru(t)$$

où

$$P_D(t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it_0 y) \chi(|\tau|) \tau^2 \log |\tau| d\tau$$

De plus nous avons :

$$\chi(|\tau|) = \chi(0) + \tau \chi'(0) + \frac{\tau^2}{2} \chi''(0) + \dots + o(\tau^n)$$

Donc le symbole principal sera vu comme la transformée de Fourier de

$$\chi(0) \tau^2 \log |\tau|$$

C'est-à-dire :

$$\sigma_D(t, y) = \frac{1}{4\pi} F [\tau^2 \log |\tau|] = \frac{1}{2} |y|^{-3}$$

d'où $Du(x)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre (-3) sur Γ .

La partie principale de l'opérateur B est du type convolution . De la même manière, nous démontrons que B est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre (-1) et de symbole principal

$$\sigma_B(t, y) = |y|^{-1}$$

$Ku = -\partial_{nx} Au$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre (1) et de symbole principal

$$\sigma_K(t, y) = |y|$$

Tandis que les opérateurs A, A^* sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 infinitésimal ainsi ils sont d'ordre (-1) . Enfin pour les opérateurs V, C et C^* , nous utilisons les résultats de [4]. Ainsi

$$\partial_{nx}^j \int_{\Gamma+(y)} \partial_{ny}^k E(x, y) u(y) ds_y$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $j + k - 3$ et de symbole principal σ_{jk} .
Nous avons en particulier

$$\sigma_{11} = \sigma_v(t, \varepsilon) = \frac{1}{2} |\varepsilon|^{-1}$$

tandis que les opérateurs C et C^* ont un symbole d'ordre (-2) infinitésimal ce qui fait qu'ils sont d'ordre (-3) . Nous savons qu'un opérateur pseudo-différentiel est continu de :

$$H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-2\alpha}(\Gamma)$$

ou bien de :

$$H^{s+\alpha}(\Gamma) \rightarrow H^{s-\alpha}(\Gamma)$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$. 2α est l'ordre de l'opérateur ce qui donne (2.8). Pour démontrer (2.9) nous avons : $-\partial_{nx}A$ est composé de l'application continue

$$A : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^2(\Omega)$$

et de

$$-\partial_{nx}|_{\Gamma} : H^2(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

De même $\partial_{nx}C$ est composé de l'application continue

$$C : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^2(\Omega)$$

et

$$-\partial_{nx}|_{\Gamma} : H^2(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

on décompose A^* et C^* par dualité.

Revenons maintenant à la définition 4.2 et citons la deuxième formule représentative suivante ■

Lemme 2.3 Soient $(v, w, \Phi, \Psi) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$ Alors :

1. Les opérateur $A_\Omega v, B_\Omega w, C_\Omega \Psi, D_\Omega \Phi \in H^2(\Omega)$.

2. nous avons pour $x \rightarrow \Gamma$

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2} [(I + A)u(x) + B\partial_n u(x) + C\Delta u(x) + D\partial_n \Delta u(x)] \\ \frac{\partial u}{\partial_n} &= \frac{1}{2} [\partial_{nx} A u(x) + (I - A^*)\partial_n u(x) + \partial_{nx} C\Delta u(x) + \partial_{nx} D\partial_n \Delta u(x)] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Preuve. Les opérateurs $A_\Omega, B_\Omega, C_\Omega$ et D_Ω satisfont dans Ω , l'équation différentielle de problèmes auxiliaires à savoir $\Delta^2 u = 0$ car pour $x \in \Omega$, les noyaux de ces opérateurs sont égaux à zéro. De plus, $A_\Omega, B_\Omega, C_\Omega$ et D_Ω appliquent continuellement $H^s(\Gamma)$ dans $H^2(\Omega)$ avec $s =$ respectivement. Pour montrer (2.10) nous considérons le procédé aux limites dans (2.6) dans lequel x approche de l'intérieur dans le sous domaine Ω , un point arbitraire x sur le bord Γ , et avec la continuité du potentiel de simple cauche S_Ω , et la discontinuité de la double cauche D_Ω . En suivant la même méthode dans [6, 9] nous avons pour $x \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} C(x) u(x) &= \int_\Gamma [u(y)\partial_{ny}\Delta E - \partial_{ny}u(y)\Delta E + \Delta u(y)\partial_{ny}E - \partial_{ny}\Delta u(y)E] ds \\ C'(x) \partial_{nx} u(x) &= \int_\Gamma [u\partial_{nx}\partial_{ny}\Delta E - \partial_{ny}u\partial_{nx}\Delta E + \Delta u\partial_{nx}\partial_{ny}E - \partial_{ny}\Delta u\partial_{nx}E] ds \end{aligned}$$

où le coefficient $c(x)$ dépend seulement de la propriété géométrique du bord au point x . Nous le calculons par la formule :

$$C'(x) = C(x) = 1 + \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\Gamma_y} -\partial_{ny}\Delta E d\Gamma_y$$

Γ_y est le cercle de centre x et de rayon y . Pour un bord régulier, $c(x) = \frac{1}{2}$.

Nous pouvons écrire le système des équations intégrales sur le bord Γ dans (2.10) et pour l'équation intégrale sur le bord, on considère la deuxième équation dans (2.6) et on suit la même démarche pour aboutir au résultat. ■

2.5 Système des équations intégrales

Nous considérons $u \in H^2(\Omega)$ satisfaisant les conditions aux limites du problème (P) où $(f, g) \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sont données.

Dans le lemme 4.2 nous avons pu extraire les équations intégrales au bord Γ suivantes :

$$\begin{cases} C\Delta u(x) - D\partial_n\Delta u(x) = (I - A)u(x) - B\partial_n u(x) \\ V\Delta u(x) - C^*\partial_n\Delta u(x) = Ku(x) + (I + A^*)\partial_n u(x) \end{cases} \quad (2.11)$$

Si nous introduisons maintenant dans le système (2.11) les fonctions données sur Γ :

$$\begin{cases} u(x) = f(x), & x \in \Gamma \\ \partial_n u(x) = g(x), & x \in \Gamma \end{cases}$$

et les fonctions inconnues sur Γ Φ, Ψ :

$$\begin{cases} -\partial_n\Delta u(x) = \Phi(x), & x \in \Gamma \\ \Delta u(x) = \Psi(x), & x \in \Gamma \end{cases}$$

On a alors le bord Γ :

$$\begin{cases} C\Psi(x) + D\Phi(x) = (I - A)f(x) - Bg(x) \\ V\Psi(x) + C^*\Phi(x) = Kf(x) + (I + A^*)g(x) \end{cases}$$

Ce qui donne sous forme matriciel l'équation :

$$\begin{bmatrix} D & C \\ C^* & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(x) \\ \Psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - A) & -B \\ K & (I + A^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

pour $x \in \Gamma$. Que l'on écrit :

$$\begin{cases} MU = LG \text{ sur } \Gamma \\ U = (\Phi, \Psi) \end{cases} \quad (2.13)$$

Maintenant nous allons décrire la solvabilité du système ci dessus, on donne en premier les résultats concernant les propriétés des opérateurs :

A, A^*, B, D, C, C^*, V et K

Nous voulons utiliser le fait que les opérateurs définis par (2.12) sont des opérateurs pseudo-différentiels.

Lemme 2.4 *Les applications suivantes sont continues pour chaque réel s .*

$$\begin{aligned} A & : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+1}(\Gamma), & C & : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+3}(\Gamma) \\ B & : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+1}(\Gamma), & D & : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+3}(\Gamma) \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} K & : H^{s+1}(\Gamma) \rightarrow H^s(\Gamma), & A^* & : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+1}(\Gamma) \\ V & : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+1}(\Gamma), & C^* & : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+3}(\Gamma) \end{aligned}$$

Preuve. Considérons par exemple l'opérateur pseudo-différentiel D qui a pour symbol principal

$$\sigma_D(t, \varepsilon) = \frac{1}{2} |\varepsilon|^{-3}$$

Cet opérateur est continu de

$$H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s+3}(\Gamma)$$

En effet, on a par définition

$$|\sigma_D(t, \varepsilon)| \leq c(1 + |\varepsilon|^2)^{-3}$$

ce qui fait que

$$\| D\Phi \|_{H^{s+3}(\Gamma)}^2 \leq c_0 (1 + |\varepsilon|^2)^s \| F[\Phi(\varepsilon)] \|^2 d\varepsilon = c_0 \| \Phi \|_{H^s(\Gamma)}^2$$

Les autres sont montrés de la même manière ■

Soit le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Soient M, L définis dans (2.13) alors les applications :*

$$\begin{aligned} M & : H^{s-3}(\Gamma) \times H^{s-2}(\Gamma) \rightarrow H^s(\Gamma) \times H^{s-1}(\Gamma) \\ L & : H^s(\Gamma) \times H^{s-1}(\Gamma) \rightarrow H^{s-1}(\Gamma) \times H^s(\Gamma) \end{aligned}$$

sont continues pour chaque réel s .

Preuve. M, L sont des applications continues comme conséquence du lemme 4.3. ■

Théorème 2.2 *Le système (2.12) est fortement elliptique.*

M est une matrice d'opérateurs pseudo-différentiel de symbole principal :

$$\sigma_M(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} |\varepsilon|^{-3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} |\varepsilon|^{-1} \end{bmatrix}$$

Soit

$$\Theta(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ceci implique que

$$\tau^t \Theta(x) \sigma_M(x, \varepsilon) \bar{\tau} = \frac{1}{2} |\tau_1|^2 + \frac{1}{2} |\tau_2|^2; |\varepsilon| = 1$$

d'où

$$\operatorname{Re} \left\{ \tau^t \Theta(x) \sigma_M(x, \varepsilon) \bar{\tau} \geq \frac{1}{2} |\tau|^2 \right\}$$

d'où le résultat pour tout $x \in \Gamma$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ avec $|\varepsilon| = 1$ et pour $\tau \in \mathbb{C}^2$.

Notons que M est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 2α tel que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2})$, ici $2\alpha_1, 2\alpha_2$ sont les ordres respectives des opérateurs D, V . Nous avons alors le :

Théorème 2.3 *l'opérateur*

$$M : H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est continues.

Preuve. La démonstration est pareille que celle déjà vu au (Théorème 5.1). ■

Définition 2.3 Soit $U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix}$ et $U' = \begin{pmatrix} \Phi' \\ \Psi' \end{pmatrix}$ appartenant à $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
Nous avons la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} a(U, U') & : = \langle MU, U' \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ & = \langle D\Phi + C\Psi, \Phi' \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle C^*\Phi + V\Psi, \Psi' \rangle_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

D'après le Théorème 5.3, cette forme bilinéaire est continue.

$$\leq \gamma \|U\|_{H^\beta(\Gamma)} \|U'\|_{H^\beta(\Gamma)}$$

où

$$\|U\|_{H^\beta(\Gamma)} := \|\Phi\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} + \|\Psi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

Montrons à présent un résultat de compacité.

Lemme 2.5 *Les opérateurs :*

$$\begin{aligned} C &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ C^* &: H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \end{aligned}$$

sont compacts.

Preuve. Le résultat découle du Théorème de l'injection de Rellich. ■

Notre forme bilinéaire satisfait une inégalité de coercivité à savoir l'inégalité de Garding.

Théorème 2.4 *Il existe une constante $\gamma > 0$, telle que pour tout*

$U = (\Phi, \Psi) \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) := H^\beta(\Gamma)$ on a :

$$\langle MU, U \rangle_0 \geq \gamma \|U\|_{H^\beta(\Gamma)}^2 - \langle TU, U \rangle \quad (2.14)$$

avec

$$\|U\|_{H^\beta(\Gamma)}^2 := \|\Phi\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)}^2 + \|\Psi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$$

et

$$T : H^\beta(\Gamma) \longrightarrow H^{-\beta}(\Gamma)$$

Preuve. Démontrer (2.14) revient à la décomposition de l'opérateur M de la manière suivante :

$$M = \overline{M} + T$$

$\overline{M}$ est un opérateur défini positif et

$$T : H^\beta(\Gamma) \longrightarrow H^{-\beta}(\Gamma)$$

est un opérateur compact.

Ainsi pour $(\Phi, \Psi) \in H^{-\beta}(\Gamma)$ nous utilisons sur le bord Γ la transformée de Fourier. On

réduit la situation au cas $\Gamma = \mathbb{R}$.

D'après l'équation de Parseval nous avons :

$$\begin{aligned}(D\Phi, \Phi)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int \frac{1}{2} |\zeta|^{-3} |F[\Phi]|^2 d\zeta \\ (V\Psi, \Psi)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int \frac{1}{2} |\zeta|^{-1} |F[\Psi]|^2 d\zeta\end{aligned}$$

Soient $\overline{D}$ et $\overline{V}$ des opérateurs pseudo-différentiels de symbole principal :

$$\begin{aligned}\sigma_{\overline{D}}(x, \zeta) &= \frac{1}{2} \left(1 + |\zeta|^{-\frac{3}{2}}\right)^{-2} \\ \sigma_{\overline{V}}(x, \zeta) &= \frac{1}{2} \left(1 + |\zeta|^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}\end{aligned}$$

respectivement. Nous avons alors,

$$\begin{aligned}D &= \overline{D} - \overline{D} + D = \overline{D} + \overline{\overline{D}} \\ V &= \overline{V} - \overline{V} + V = \overline{V} + \overline{\overline{V}}\end{aligned}$$

où $\overline{\overline{V}}$ et $\overline{\overline{D}}$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre -6 , -2 respectivement, Ainsi ils sont compacts.

$$\begin{aligned}\overline{\overline{D}} &= H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ \overline{\overline{V}} &= H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\end{aligned}$$

et $\overline{D}, \overline{V}$ sont définis positifs. On a alors :

$$\begin{aligned}\langle D\Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Gamma)} &\geq \gamma_1 \|\Phi\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)}^2 - \langle \overline{\overline{D}}\Phi, \Phi \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ \langle V\Psi, \Psi \rangle_{L^2(\Gamma)} &\geq \gamma_2 \|\Psi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 - \langle \overline{\overline{V}}\Psi, \Psi \rangle_{L^2(\Gamma)}\end{aligned}$$

Les opérateurs D et V créent une perturbation compacte T_1 . D'autre part, les opérateurs du lemme précédent créent une seconde perturbation compacte T_2 . Regroupons T_1 et T_2 on obtient

$$T = T_1 + T_2 : H^\beta(\Gamma) \longrightarrow H^{-\beta}(\Gamma)$$

compact. D'où le résultat. ■

2.6 Existence et Unicité

A présent, suivant les idées de [6, 9] nous déduisons l'unicité de la solution du système des équations intégrales aux bords.

Théorème 2.5 *Soit $U = (\Phi, \Psi) \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. La seule solution de l'équation homogène $MU = 0$ est $U = 0$.*

Preuve. pour la preuve de l'injection de M , on a $MU = 0$ sur Γ équivaut à dire

$$\begin{bmatrix} D & C \\ C^* & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = 0$$

Ceci implique d'après (2.11)

$$\begin{cases} \Delta u|_\Gamma = 0 = \Psi \\ -\partial_n \Delta u|_\Gamma = 0 = \Phi \end{cases}$$

pour plus de détail voir [6] ■

A présent on peut utiliser l'unicité et la coercivité pour prouver la bijectivité de notre système.

Théorème 2.6 *L'opérateur*

$$M : H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

est bijectif.

Preuve. Il suffit de reproduire la démonstration du (Théorème 4.5) et (Théorème 6.1) pour obtenir la bijection de l'opérateur M .

■

Chapitre 3

Problème du Bi-Laplacien avec des conditions non linéaires dans un domaine régulier

3.1 Introduction

Les problèmes concernant des non linéairités forment une base des modèles mathématiques de différents phénomènes et processus dans la mécanique et la physique appliquée. Les équations bi-harmoniques forment une classe importante des équations dans la physique et science de l'ingénieur. Beaucoup de problèmes dans l'élasticité peuvent être aussi formulés en terme d'équation bi-harmonique où les quantités fondamentales physiques telles que les équations de déplacement et de trace, toutes satisfont l'équation bi-harmonique. Elles ont des activités extensives de recherche sur le bi-harmonique dans la théorie et la pratique.

Dans ce chapitre, nous étudions la méthode des équations intégrales pour l'équation bi-harmonique avec des conditions non linéaires au bord dans un domaine Ω régulier de $\mathbb{R}^2$. Nous obtenons un système non linéaire des équations intégrales. Le Théorème de Browder

et Minty sur les opérateurs monotones, garantie un résultat d'existence et d'unicité de la solution.

3.2 Formulation du problème

Nous considérons ici le problème intérieur aux limites non linéaire.

Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\Gamma \in C^\infty$. Pour une fonction $u \in H^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, & x \in \Omega \\ Mu + f(x, u, \frac{\partial u}{\partial n}) = f_0(x), & x \in \Gamma \\ Nu + g(x, u, \frac{\partial u}{\partial n}) = g_0(x), & x \in \Gamma \end{cases} \quad (\text{P}_2)$$

Les fonctions $f_0 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $g_0 \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et

$$f : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad g : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$$

sont définies sur Γ . et $Mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $Nu \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$

$$\Delta^2 u := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)$$

et

$$Mu : = \nu \Delta u + (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} n_1^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 n_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} n_2^2 \right] \quad (3.1)$$

$$Nu : = -\frac{\partial}{\partial n} \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) n_1 n_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (n_1^2 - n_2^2) \right\} \quad (3.2)$$

Telle que la constante ν est dite coefficient de ratio $0 \leq \nu < 1$, qu'on rencontre dans la théorie de l'élasticité nous avons. Les dérivées normale et tangentielle sont définies par :

$$\frac{\partial}{\partial n} := n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial s} := -n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Nous allons écrire la première formule de Green dans Ω , pour x dans Ω . On obtient :

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx = a(u, v) - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial v}{\partial n} M u + v N u \right\} ds, \quad x \in \Omega \quad (3.3)$$

Telle que la forme bilinéaire $a(u, v)$ est définie par :

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \left\{ v \Delta u \Delta v + (1 - v) \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right\} dx$$

L'espace dans lequel nous cherchons la solution du problème est défini par :

$$H^2(\Omega, \Delta^2) := \left\{ u \in H^2(\Omega), \quad \Delta^2 u \in \tilde{H}^{-2}(\Omega) \right\}$$

3.3 Méthode des équations intégrales sur la frontière

La solution fondamentale du bi-harmonique est donnée par :

$$E(x, y) := \frac{1}{8\pi} |x - y|^2 \log |x - y|$$

On obtient donc la formule de représentation de la solution du problème (P₂) :

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_{\Gamma} \left\{ E(x, y) N u(y) + \left(\frac{\partial E}{\partial n_y}(x, y) M u(y) \right) \right\} ds_y \\ & - \int_{\Gamma} \left\{ (M_y E(x, y)) \frac{\partial u}{\partial n}(y) + (N_y E(x, y)) u(y) \right\} ds_y, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} = & \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial E(x, y)}{\partial n_x} N u(y) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial n_x \partial n_y}(x, y) M u(y) \right) \right\} ds_y \\ & - \int_{\Gamma} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial n_x} M_y E(x, y) \right) \frac{\partial u}{\partial n_y} + \left(\frac{\partial}{\partial n_x} N_y E(x, y) \right) u(y) \right\} ds_y \end{aligned} \quad (3.5)$$

Par passage à la limite, $x \longrightarrow \Gamma$

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_{\Gamma} \left\{ E(x, y) N u(y) + \left(\frac{\partial E}{\partial n_y}(x, y) M u(y) \right) \right\} ds_y + \frac{1}{2} u(x) \\ & - \int_{\Gamma} \left\{ (M_y E(x, y)) \frac{\partial u}{\partial n}(y) + (N_y E(x, y)) u(y) \right\} ds_y \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} = & \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial E(x, y)}{\partial n_x} N u(y) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial n_x \partial n_y}(x, y) M u(y) \right) \right\} ds_y + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \\ & - \int_{\Gamma} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial n_x} M_y E(x, y) \right) \frac{\partial u}{\partial n_y} + \left(\frac{\partial}{\partial n_x} N_y E(x, y) \right) u(y) \right\} ds_y \end{aligned} \quad (3.7)$$

$u(x)$ peut être écrite sous la forme suivante

$$u(x) = V(Mu, Nu) - W(u, \frac{\partial u}{\partial n}) \quad , x \in \Omega \quad (3.8)$$

de terme potontiel de simple couche et double couche :

$$V : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^2(\Omega) \quad \text{et} \quad W : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^2(\Omega)$$

sont des opérateurs continus et définis par :

$$V(Mu, Nu)(x) = \int_{\Gamma} \left\{ E(x, y)Nu(y) + \frac{\partial E}{\partial n_y}(x, y)Mu(y) \right\} ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \quad (3.9)$$

$$W(u, \frac{\partial u}{\partial n})(x) = \int_{\Gamma} \left\{ M_y E(x, y) \frac{\partial u}{\partial n_y} + N_y E(x, y)u(y) \right\} ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \quad (3.10)$$

A présent, pour construire les équations intégrales, nous définissons les opérateurs aux bords.

Définition 3.1 Soit $u \in C^\infty(\Gamma)$. Nous définissons les opérateurs suivants tels que pour tout $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned} K_{11}u(x) &= \int_{\Gamma} N_y E(x, y)u(y)ds_y \\ V_{12}\partial_n u(x) &= - \int_{\Gamma} M_y E(x, y) \frac{\partial u}{\partial n_y} ds_y \\ D_{21}u(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} N_y E(x, y)u(y)ds_y \\ K_{22}\partial_n u(x) &= \partial_n V_{12}\partial_n u(x) \\ V_{13}Mu(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial E}{\partial n_y}(x, y)Mu(y)ds_y \\ V_{14}Nu(x) &= \int_{\Gamma} E(x, y)Nu(y)ds_y \\ V_{23}Mu(x) &= \partial_n V_{13}Mu(x) \\ V_{24}Nu(x) &= \partial_n V_{14}Nu(x) \end{aligned}$$

Lemme 3.1 Les opérateurs suivants ainsi définis sont continus pour chaque réel s :
[3, 7, 15, 16]

$$\begin{aligned} K_{11} &: H^s(\Gamma) \rightarrow H^s(\Gamma), & V_{12} &: H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+1}(\Gamma) \\ D_{21} &: H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-1}(\Gamma), & V_{13} &: H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+3}(\Gamma) \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} V_{14} & : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+3}(\Gamma), & V_{24} & : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+3}(\Gamma) \\ V_{23} & : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+1}(\Gamma), & K_{22} & : H^s(\Gamma) \rightarrow H^s(\Gamma) \end{aligned}$$

Preuve. Considérons par exemple l'opérateur pseudo-différentiel V_{13} qui a pour symbol

principal

$$\sigma_{V_{13}}(t, \varepsilon) = \frac{1}{2} |\varepsilon|^{-3}$$

Cet opérateur est continu de

$$V_{13} : H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s+3}(\Gamma)$$

En effet, on a par définition

$$|\sigma_{V_{13}}(t, \varepsilon)| \leq c(1 + |\varepsilon|)^{-3}$$

ce qui fait que

$$\|V_{13}\Phi\|_{H^{s+3}(\Gamma)}^2 \leq c_0(1 + |\varepsilon|^2)^s |F[\Phi(\varepsilon)]|^2 d\varepsilon = c_0 \|\Phi\|_{H^s(\Gamma)}^2$$

Les autres sont montrés de la même façon. ■

Lemme 3.2 Soient $(u, v, Mu, Nu) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma)$ Alors :

$$1 \cdot K_{11}u, V_{12}\partial_n u, V_{13}Mu, V_{14}Nu \in H^2(\Omega).$$

2. nous avons pour $x \rightarrow \Gamma$.

$$\begin{aligned} u(x) &= \left[\left(\frac{1}{2}I - K_{11}\right)u(x) + V_{12}\partial_n u(x) + V_{14}Nu(x) + V_{13}Mu(x) \right] \\ \partial_n u(x) &= \left[D_{21}u(x) + \left(\frac{1}{2}I + K_{22}\right)\partial_n u(x) + V_{24}Nu(x) + V_{23}Mu(x) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dans le lemme 3.2 , nous avons pu extraire les équations intégrales au bord Γ suivantes :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}I + K_{11}\right)u(x) - V_{12}\partial_n u(x) = V_{14}Nu(x) + V_{13}Mu(x) \\ -D_{21}u(x) + \left(\frac{1}{2}I - K_{22}\right)\partial_n u(x) = V_{24}Nu(x) + V_{23}Mu(x) \end{cases} \quad (3.12)$$

Si nous introduisons maintenant dans le système (3.12) les fonctions inconnues sur Γ définies par :

$$\begin{cases} u(x) = v(x), & x \in \Gamma \\ \partial_n u(x) = w(x), & x \in \Gamma \end{cases}$$

Ce qui donne sous forme matricielle l'équation :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I + K_{11} & -V_{12} \\ -D_{21} & \frac{1}{2}I - K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(x) \\ w(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{14} & V_{13} \\ V_{24} & V_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Nu(x) \\ Mu(x) \end{bmatrix}$$

et les fonctions données sur Γ :

$$\begin{cases} Mu(x) + f(x, u, \frac{\partial u}{\partial n}) = f_0(x) , & x \in \Gamma \\ Nu(x) + g(x, u, \frac{\partial u}{\partial n}) = g_0(x) , & x \in \Gamma \end{cases}$$

On a alors sur le bord Γ :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}I + K_{11}\right)v(x) - V_{12}w(x) = V_{14}(-g(x, v, w) + g_0(x)) + V_{13}(-f(x, v, w) + f_0(x)) \\ -D_{21}v(x) + \left(\frac{1}{2}I - K_{22}\right)w(x) = V_{24}(-g(x, v, w) + g_0(x)) + V_{23}(-f(x, v, w) + f_0(x)) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}I + K_{11})v(x) - V_{12}w(x) + V_{14}g(x, v, w) + V_{13}f(x, v, w) = V_{14}g_0(x) + V_{13}f_0(x) \\ -D_{21}v(x) + (\frac{1}{2}I - K_{22})w(x) + V_{24}g(x, v, w) + V_{23}f(x, v, w) = V_{24}g_0(x) + V_{23}f_0(x) \end{cases}$$

Ce qui donne sous forme matricielle l'équation :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I + K_{11} & -V_{12} \\ -D_{21} & \frac{1}{2}I - K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(x) \\ w(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{14} & V_{13} \\ V_{24} & V_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(x, v, w) \\ f(x, v, w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{14} & V_{13} \\ V_{24} & V_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0(x) \\ f_0(x) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

pour $x \in \Gamma$. Que l'on écrit :

$$L(U) + V(F(U)) = V(F_0) \text{ sur } \Gamma \quad (3.14)$$

Telle que :

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I + K_{11} & -V_{12} \\ -D_{21} & \frac{1}{2}I - K_{22} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} V_{14} & V_{13} \\ V_{24} & V_{23} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} g(x, v, w) \\ f(x, v, w) \end{bmatrix}$$

et

$$U = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, F_0 = \begin{bmatrix} g_0 \\ f_0 \end{bmatrix}$$

3.4 Solvabilité du système d'équation intégrale (3.14) au bord

Pour étudier la solvabilité de système intégrale non linéaire (3.14), on a besoin des hypothèses suivantes :

(H1) $f, g : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions carathéodory c'est -a- dire :

$f(., v, w)$ et $g(., v, w) : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables $\forall (v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f(x, ., .)$ et $g(x, ., .) : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues $\forall x \in \Gamma$

(H2) Les fonctions $f(., v, w)$ et $g(., v, w)$ admettent partout des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}$ et que pour tout $(v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 < \alpha \leq \frac{\partial f}{\partial v} \leq l_1 < +\infty, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial w} \right| \leq \beta \\ 0 < \alpha \leq \frac{\partial g}{\partial w} \leq l_2 < +\infty, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial v} \right| \leq \beta \end{aligned}$$

où α, β, l_1, l_2 et sont des constantes positives telles que : $\alpha > \beta$

Les hypothèses sur f et g nous assure que l'opérateur $F^{(f(.,v,w), g(.,v,w))}$ matriciel est fortement monotone et lipschitzienne continu.

Remarque 3.1 1) *Compte tenu de la formule des accroissement finis de Lagrange, il existe ζ_1, ζ_2 tels que :*

$$\begin{aligned} (f(v, w) - f(v', w')) &= (f(v, w) - f(v', w)) + (f(v', w) - f(v', w')) \\ &= \frac{\partial f(\zeta_1, w)}{\partial v}(v - v') + \frac{\partial f(v', \zeta_2)}{\partial w}(w - w') \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} ((v - v'), f(v, w) - f(v', w')) &= \frac{\partial f(\zeta_1, w)}{\partial v}(v - v')^2 + \frac{\partial f(v', \zeta_2)}{\partial w}(w - w')(v - v') \\ &\geq \alpha |v - v'|^2 - \beta |v - v'| |w - w'| \\ &\geq \alpha |v - v'|^2 - \frac{1}{2}\beta |v - v'|^2 - \frac{1}{2}\beta |w - w'|^2 \end{aligned}$$

De même :

$$(w - w', g(v, w) - g(v', w')) \geq -\frac{1}{2}\beta |w - w'|^2 - \frac{1}{2}\beta |v - v'|^2 + \alpha |w - w'|^2$$

Additionnant ces inégalités, on obtient par intégration sur le bord Γ :

$$\begin{aligned}
(U - U', F(U) - F(U')) &= ((v - v'), f(v, w) - f(v', w')) + ((w - w'), g(v, w) - g(v', w')) \\
&\geq (\alpha - \beta) \left(|v - v'|^2 + |w - w'|^2 \right) \\
&\geq (\alpha - \beta) \|U - U'\|_0
\end{aligned}$$

Telle que : $U = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, U' = \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. Nous avons donc montré que l'opérateur $F(U)$ est fortement monotone.

2)

$$\begin{aligned}
|f(v, w) - f(v', w')| &= |f(v, w) - f(v', w) + (f(v', w) - f(v', w'))| \\
&= \left| \frac{\partial f(\zeta_1, w)}{\partial v} (v - v') + \frac{\partial f(v', \zeta_2)}{\partial w} (w - w') \right| \\
&\leq l_1 |v - v'| + \beta |w - w'| \\
&\leq \text{Max}(l_1, \beta) (|v - v'| + |w - w'|) \\
&\leq l_1 (|v - v'| + |w - w'|)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|f(U) - f(U')| &\leq l_1 |U - U'| \\
|f(U) - f(U')|^2 &\leq l_1^2 |U - U'|^2 \\
\int_{\Gamma} |f(U) - f(U')|^2 ds &\leq l_1^2 \int_{\Gamma} |U - U'|^2 \\
\left(\int_{\Gamma} |f(U) - f(U')|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(l_1^2 \int_{\Gamma} |U - U'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds \\
\|f(U) - f(U')\| &\leq l_1 \|U - U'\|_0
\end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\|g(U) - g(U')\| \leq l_2 \|U - U'\|_0$$

En additionnant ces inégalités, on a

$$\|F(U) - F(U')\| \leq (l_1 + l_2) \|U - U'\|_0$$

Telle que : $U = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, U' = \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ Nous avons donc montré que l'opérateur F est lipschitzien continu.

Ce qui permet de considérer la solvabilité de (3.14).

Théorème 3.1 $\forall F_0 = (f_0, g_0) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$, il existe une unique solution $U = (v, w) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tq :

$$L(U) + V(F(U)) = V(F_0) \text{ sur } \Gamma \quad (3.15)$$

Preuve. On applique le Théorème de Browder et Minty sur les opérateurs monotone voir [5, 18], l'opérateur :

$$V : H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est un isomorphisme, alors l'étude de l'existence et l'unicité de la solution (3.15) revient à l'étude de l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$T(U) = V^{-1}L(U) + F(U) = F_0 \text{ sur } \Gamma$$

Il faut montrer que l'opérateur

$$T : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est continu et fortement monotone

La continuité de V et L est évidente

De même

$$V^{-1}L : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est continu en vertu de l'hypothèse (H_2) .

L'opérateur

$$F : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est aussi continu

Par conséquent l'opérateur intégral au bord

$$T : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est continu.

Soit $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ définie par :

$$\Psi(x) := V^{-1}LU(x) \quad , \quad \forall U = (v, w) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (3.16)$$

Pour tout (v, w) et $(M\varphi, N\varphi)$ d'une fonction biharmonique d'expression :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= V(M\varphi(x), N\varphi(x)) - W(\varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial n}) \\ &= V\Psi(x) - WU(x) \end{aligned}$$

$\forall x \in \Omega$, il est facile de voir que $\varphi(x)$ satisfait au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 \varphi(x) = 0 \quad , \quad x \in \Omega \\ \varphi(x) = v \quad , \quad x \in \Gamma \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) = w \quad , \quad x \in \Gamma \end{array} \right.$$

D'après la formule de Green :

$$\begin{aligned}
\langle V^{-1}LU, U \rangle &= \int_{\Gamma} \Psi_1 v ds + \int_{\Gamma} \Psi_2 w ds \\
&= \int_{\Gamma} N \varphi \varphi ds + \int_{\Gamma} M \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \\
&= a(\varphi, \varphi)
\end{aligned}$$

donc

$$a(\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} \left\{ \nu (\Delta \varphi)^2 + (1 - \nu) \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right\} dx$$

Pour $U, U' \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle V^{-1}L(U - U'), U - U' \rangle &= \int_{\Omega} \left\{ \nu (\Delta(\varphi - \varphi'))^2 + (1 - \nu) \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial^2(\varphi - \varphi')}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right\} dx \\
&= a(\varphi - \varphi', \varphi - \varphi')
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons :

$$\|\varphi - \varphi'\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|U - U'\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c \|U - U'\|_0$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\langle TU - TU', U - U' \rangle &= \langle FU - FU', U - U' \rangle + \langle V^{-1}L(U - U'), U - U' \rangle \\
&\geq (\alpha - \beta) \|U - U'\|_0^2 + a(\varphi - \varphi', \varphi - \varphi') \\
&\geq (\alpha - \beta) \|U - U'\|_0^2 \\
&\geq \frac{1}{c^2} (\alpha - \beta) \|\varphi - \varphi'\|_{H^2(\Omega)}^2 \\
&\geq \frac{1}{c^2} (\alpha - \beta) \|U - U'\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2
\end{aligned}$$

d'après le Théorème de trace [3, 15], D'ou le résultat. ■

Conclusion

Dans ce mémoire on a montré que la méthode des équations intégrales au bord est concluante, pour étudier l'équation de Bi-Laplace avec des conditions non linéaires sur le bord. L'objectif de ce mémoire est d'examiner si on peut étendre les techniques d'approche vu au [14, 27, 33], au équation intégrale non linéaire à un système d'équations intégrales. Le système obtenu admet une solution unique garantie par le Théorème de Browder et Minty pour les opérateurs monotones. Nous envisageons d'appliquer cette technique pour résoudre numériquement un système non linéaire.

L'application à d'autres opérateurs elliptiques (par exemple Helmholtz, p -Laplacien, ...) et avec des conditions aux limites plus générales, peut être réalisée.

Bibliographie

- [1] K. Atkinson, The Numerical Solution of Integral Equations of the second kind, Published by Cambridge University Press, 1997.
- [2] A.K. AZIZ, I. BABUSKA : Mathematical foundation of the finite element method with applications to partial differential equations, Academic Press, New York (1972). Adams, R.A : Sobolev Spaces. New York : Academic Press 1975.
- [3] C.A. Brebbia. J. C. F. Telles . L. C. Wrobel, Boundary Element Techniques. Springer. Verlag, Berlin (1984).
- [4] H. BREZIS : Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson Paris, (1983).
- [5] F.E Browder, Nonlinear elliptic boundary value problems . I. Bull. Am. Math. Soc. 69(1963),862-875.
- [6] M. Boutefnouchet. L'analyse des éléments aux bords pour le problème aux limites mixte biharmonique. Demonstration Mathematica, XXV, 1992.
- [7] F. Cakoni, G. C. Hsiao, W. Wendland, On the Boundary element method for a mixed boundary value problem of the biharmonic equation, Complex Variables, **50** (2005) 681-696.
- [8] M. Costabel : Boundary integral operators on lipschitz domains : Elementary results. Siam J.Math.Anal, Vol 19, N°3, 1988.
- [9] M. Costabel, E. Stephan, and, W.L. Wendland. On the boundary integral equations of the first for the bilaplacien in polygonal plane domain. Ann. Sciola Norm.Sup.Psa, 19(IV), 1983.

- [10] M. Costabel, W.L.Wendland : Strong ellipticity of boundary integral operators, J. Reine Angew. Math. 372, 1986. 39-63.
- [11] FENIZRI.F , Méthode des équations intégrales pour l'opérateur de Helmholtz dans le plan, Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER de l'Ecole Doctorale de Mathématiques, Université de Badji mokhtar, Annaba 2012.
- [12] J. Giroire, J.C.Nedelec : Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential. Math. Comp. 32, 1978.
- [13] HAMDOUCHE. R, Etude De Certaines Equations Intégrales Non Linéaires Sur Le Bord, Thèse de Doctorat, à l'université de Badji Mokhtar, Annaba, (2016/2017).
- [14] Hsiao, G.C.Wendland , W.L : A finite element method for some integral equations of the first Kind. J. Math. Anal. Appl. 58, 449-481(1977).
- [15] G. Hsiao, W.L. Wendland, Boundary integral equations. App. Math. Sciences, Springer 164 (2008).
- [16] J.Kohn and L.Nirenberg : On the algebra of pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 18 (1968).
- [17] O.D.KELLOGG : foundation of Potential theory. Springer-Verlag, Berlin, (1967).
- [18] G. Minty, Monotone operators in Hilbert spaces, Duke Math. J, **29** (1962), 341-346.
- [19] Minty, G : Monotone (nonlinear) operators in Hilbert Spaces. Duke Math. J.29.341-346 (1962).
- [20] Minty, G : On a monotonicity method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces. Proc. Natl. Acad. Sci.50,1041-1083(1964).
- [21] Minty, G : On the solvability of nonlinear functional equation of monotonic type. Pacific J. Math 14,249-255(1964).
- [22] G. Minty, Method Operators in Hilbert Spaces. Duke MJ.J.Khon, L.Nirenberg : On the algebra of pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 18, 1965..

- [23] J.C.Nedelec : Approximation des équations intégrales en mécanique et physique, Palaiseau, 1977.
- [24] Necas, J : Remark on the Fredholm alternative for nonlinear operators with application to nonlinear integrale equations of generalized Hammerstein type. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 13,109-120(1972).
- [25] B.E.PETERSEN : Introduction to the fourier transforme and pseudo-differential operators, Pitman, Boston, (1983).
- [26] K. Ruotsalainen and W. Wendland, On the boundary element method for some nonlinear boundary value problems, Numerische. Mathematik, **53** (1988), 299-314.
- [27] H.Saker. H. Bouguerne, The Boundary integral method for the Laplacien equation with mixed and oblique conditions. Adv. Studies Contemp . Math. 23(2013) , NO.3. 483-490.
- [28] H.Saker, On the Harmonic problem with boundary integral conditions, International Journal of Analy-sis (2014), ID 976520.
- [29] H.Saker : L'analyse des éléments des frontières pour le Laplacien dans le plan, Institut de Mathématiques, University Badji Mokhtar, Annaba.
- [30] H.Saker.N.Bouselsal : The boundary integral method for the Laplace equation with nonlinear boundary conditions. ASCM , Vol.24, NO. 4 , October (2014).
- [31] H.Saker.N.Bouselsal : « On the Bi-Laplacian Problem with nonlinear Boundary Conditions. Indian J. Pure Appl. Math., 47(3) : 425-435, September 2016.
- [32] P.Stephan : Boundary integral equations for mixed boundary value problems, screen and transmission problems in $\mathbb{R}^3$, Habilitationsschrift, Darmstadt, 1983.
- [33] W.L.Wendland.E.Stephan,G.Hsiao, On the integral equation methode for the plane mixed boundary value problem of Laplacien , Math. Method Appl . Sci. 1(1979), 265-321.