

محاضرات في الإحصاء 02

مطبوعة دروس موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك
علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير

إعداد:

د/عتروس سيف الدين

- السنة الجامعية: 2026/2025 -

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

<u>الصفحة</u>	<u>العنوان</u>
VII - I	فهرس المحتويات
أ - ب	مقدمة
1	الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات
2	تمهيد
2	1. تعريف المجموعة
3	2. أنواع المجموعات
4	1.2. المجموعة المنتهية
4	2.2. المجموعة غير المنتهية
4	3.2. المجموعة الخالية
5	4.2. المجموعة الكلية
5	5.2. المجموعة الجزئية
5	6.2. المجموعة المتممة (المكملة)
6	3. العمليات على المجموعات
6	1.3. الاتحاد
7	2.3. التقاطع
8	3.3. الفرق بين مجموعتين
9	4.3. الفرق التناظري بين مجموعتين
11	تمارين مقترحة مع الحلول

فهرس المحتويات

18	الفصل الثاني: أساسيات التحليل التوفيقي
18	تمهيد
18	1. مبدأ التحليل التوفيقي
20	2. التبديلة
20	1.2. التبديلة بدون تكرار العناصر
21	2.2. التبديلة مع تكرار العناصر
22	3. الترتيبة
22	1.3. الترتيبة بدون إرجاع
24	2.3. الترتيبة بإرجاع
26	4. التوفيقية
26	1.4. التوفيقية بدون إرجاع
27	2.4. التوفيقية بإرجاع
31	تمارين مقترحة مع الحلول
36	الفصل الثالث: مبادئ نظرية الاحتمالات وقاعدة بايز
36	تمهيد
36	1. التجربة العشوائية
37	2. فضاء العينة (فراغ العينة)
38	3. الحدث
38	1.3. تعريف الحدث
39	2.3. أنواع الأحداث

فهرس المحتويات

39	1.2.3. الحدث البسيط
40	2.2.3. الحدث المركب
40	3.2.3. الحدث الأكيد
40	4.2.3. الحدث المستحيل
41	5.2.3. الحدث المعاكس
41	6.2.3. الأحداث المتنافية
42	7.2.3. الأحداث المستقلة
43	4. الاحتمال
45	5. قواعد حساب الاحتمال
45	1.5. قاعدة الجمع
46	1.1.5. الجمع في حالة حدثين متنافيين
47	2.1.5. الجمع في حالة حدثين متنافيين
48	2.5. قاعدة الضرب
48	1.2.5. الضرب في حالة حدثين مستقلين
49	2.2.5. الضرب في حالة حدثين غير مستقلين
49	6. الاحتمال الشرطي
52	7. قاعدة بايز (احتمال الحدث بعد وقوعه)
52	1.7. قانون الاحتمال الكلي
54	2.7. قانون بايز
56	تمارين مقترحة مع الحلول
64	الفصل الرابع: المتغير العشوائي
64	تمهيد

فهرس المحتويات

64	1. تعريف المتغير العشوائي
64	2. أنواع المتغير العشوائي
64	1.2. المتغير العشوائي المتقطع
65	1.1.2. التوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي المتقطع
69	2.1.2. دالة التوزيع
71	3.1.2. التوقع الرياضي
72	4.1.2. التباين
76	5.1.2. عزوم المتغير العشوائي المتقطع
77	6.1.2. الدالة المولدة للعزوم
77	2.2. المتغير العشوائي المستمر
78	1.2.2. دالة كثافة الاحتمال
81	2.2.2. دالة التوزيع
84	3.2.2. التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر
85	4.2.2. التباين
86	5.2.2. عزوم المتغير العشوائي المستمر
87	6.2.2. الدالة المولدة للعزوم
88	تمارين مقترحة مع الحلول
99	الفصل الخامس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة
99	1. التوزيع المنتظم
99	1.1. قانون الاحتمال
100	2.1. دالة التوزيع
100	3.1. التوقع الرياضي

فهرس المحتويات

101	4.1. التباين
102	5.1. الدالة المولدة للعزوم
103	2. توزيع برنولي
103	1.2. تجربة برنولي
104	2.2. القانون الاحتمالي
104	3.2. دالة التوزيع
105	4.2. التوقع الرياضي
105	5.2. التباين
105	6.2. الدالة المولدة للعزوم
107	3. التوزيع ثنائي الحد
107	1.3. القانون الاحتمالي
108	2.3. دالة التوزيع
108	3.3. التوقع الرياضي
109	4.3. التباين
110	5.3. الدالة المولدة للعزوم
112	4. التوزيع الهندسي
112	1.4. القانون الاحتمالي
112	2.4. دالة التوزيع
112	3.4. التوقع
113	4.4. التباين
114	5.4. الدالة المولدة للعزوم
115	5. توزيع بواسون
116	1.5. القانون الاحتمالي

116	2.5. دالة التوزيع
116	3.5. التوقع
117	4.5. التباين
118	5.5. الدالة المولدة للعزوم
120	6.5. تقريب التوزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون
121	تمارين مقترحة مع الحلول
128	الفصل السادس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة
128	1. التوزيع المنتظم المستمر
128	1.1. دالة كثافة الاحتمال
129	2.1. دالة التوزيع
129	3.1. التوقع
130	4.1. التباين
131	5.1. الدالة المولدة للعزوم
133	2. التوزيع الطبيعي
133	1.2. شكل التوزيع الطبيعي
134	2.2. دالة كثافة الاحتمال
134	3.2. خصائص التوزيع الطبيعي
135	4.2. التوزيع الطبيعي المعياري
136	5.2. حساب الاحتمالات
136	6.2. قراءة الإحتمال من جدول التوزيع الطبيعي المعياري
139	3. توزيع قاما (Gamma)
139	1.3. دالة الكثافة الاحتمالية
140	1.3. التوقع

فهرس المحتويات

141	3.3. التباين
142	4. توزيع بيتا
142	1.4. دالة الكثافة الاحتمالية
144	1.4. التوقع
144	3.4. التباين
145	5. توزيع كاي تربيع
146	1.5. دالة الكثافة الاحتمالية
146	2.5. دالة التوزيع
146	3.5. التوقع
147	4.5. التباين
149	5.5. تقريب توزيع كاي تربيع للتوزيع الطبيعي
149	6. توزيع ستيودنت
151	تمارين مقترحة
153	الخاتمة
155	قائمة المراجع
160	الملاحق

مقدمة

مقدمة:

يعد الإحصاء من بين العلوم التي استطاعت أن تفرض نفسها في العصر الحديث، إذ لا يمكن تصور تطوير المعرفة والعلوم في منأى عن استخدام الإحصاء أسلوباً كان، أو منهجاً، أو تقنية.

فبالرغم من دراسة الإحصاء الوصفي في السداسي الأول من السنة الأولى كمدخل لتطوير المعارف واكتساب المهارات المتعلقة بجمع البيانات وما يترتب عنها من تبويب، وتحليل وحساب مختلف المقاييس التي تساعد على تفسير الظاهرة محل الدراسة، فضلاً عن دراسة الأساليب التي تمكن من التعرف على طبيعة التوزيعات الإحصائية من خلال أشكالها، إلا أن الاكتفاء بالوصف لا يسمح بتعميم النتائج أو تفسير الظواهر المستقبلية، وهنا تبرز أهمية الإحصاء الرياضي (موضوع هذه المطبوعة) الذي يعتمد على نظرية الاحتمالات لتحليل البيانات واستخلاص استنتاجات علمية حول المجتمع الإحصائي انطلاقاً من عينة محدودة. وبذلك فإن الإحصاء الوصفي يزود الطالب بالأدوات الأولية لفهم البيانات، في حين يمكن الإحصاء الرياضي من تفسيرها واتخاذ قرارات اقتصادية قائمة على أسس علمية، مما يجعل الدراستين مكملتين لبعضهما في التكوين الإحصائي للطالب.

وتعد دراسة نظرية المجموعات والتحليل التوفيقي ونظرية الاحتمالات من الركائز الأساسية في التكوين الرياضي لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية، لما لها من دور محوري في فهم الظواهر الاقتصادية التي تتسم بعدم اليقين والمخاطرة. إذ تسمح نظرية المجموعات بتنظيم المعطيات وتحديد الأحداث الاقتصادية الممكنة، بينما يوفر التحليل التوفيقي أدوات دقيقة لحساب عدد الحالات والاختيارات المحتملة، وهو ما يستعمل في تحليل القرارات الاقتصادية وتقييم البدائل المختلفة.

وتساعد نظرية الاحتمالات على قياس درجة عدم التأكد المرتبطة بالظواهر الاقتصادية، مثل تقلب الأسعار، سلوك المستهلك، أو تطور الأسواق المالية. كما يمكن الاحتمال الشرطي الطلبة من

فهم كيفية تغير احتمال حدوث ظاهرة اقتصادية عند توفر معلومات جديدة، وهو أمر أساسي في تحليل المخاطر واتخاذ القرار الاقتصادي.

كما تبرز نظرية بايز كأداة فعالة لتحديث التوقعات الاقتصادية اعتماداً على المعطيات المتجددة، مما يجعلها ذات أهمية كبيرة في مجالات التنبؤ الاقتصادي، دراسات السوق، والتمويل. أما التوزيعات الاحتمالية، فهي تمثل الأساس في توصيف المتغيرات الاقتصادية العشوائية، مثل الدخل، الطلب، أو مدة الانتظار، وتساعد على فهم خصائصها وتحليلها إحصائياً.

وبناء على ما سبق، فإن دراسة هذه المفاهيم تمكن طالب السنة الأولى علوم اقتصادية من اكتساب أدوات تحليلية ضرورية لفهم الإحصاء والاقتصاد القياسي في المراحل اللاحقة، كما تعزز قدرته على تفسير البيانات الاقتصادية واتخاذ قرارات مبنية على أسس علمية.

الفصل الأول:

مبادئ نظرية المجموعات

- تعريف المجموعة
- أنواع المجموعات
- العمليات على المجموعات

الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات

تمهيد:

يعد التعرف على المفاهيم الأساسية للمجموعات مدخلا ضروريا لفهم نظرية الاحتمالات، إذ يتعين على الطالب اكتساب هذه المفاهيم والتدرب عليها حتى يتمكن فيما بعد من التعمق أكثر في هذا المقياس. وسيتم في هذا الفصل التطرق إلى مفهوم المجموعة، واستعراض أنواعها وأهم العمليات التي تطبق عليها. لنختم الفصل بمجموعة من التمارين التي تدعم المفاهيم السابقة وترسخها في ذهن الطالب.

1. تعريف المجموعة:

يشكل مفهوم المجموعات فرعاً من فروع الرياضيات عموماً، والإحصاء بشكل خاص، حيث تعرف على أنها تجمع يضم أشياء معرفة تعريفاً تاماً، حيث يطلق على الأشياء المكونة للمجموعة "عناصر" (Elements)¹.

فالمجموعة هي شيء قائم بذاته وتتكون من أشياء متميزة عن بعضها البعض، فإذا تم تقسيم مفردات ظاهرة معينة إلى أقسام فإن كل قسم يتميز بخصائص معينة ويطلق عليه: مجموعة.²

مما سبق يمكن تعريف المجموعة على أنها تجمع لعدد من العناصر والأشياء التي تشترك في صفة معينة. ويرمز للمجموعات بالحروف اللاتينية الكبيرة: A، B، C،..... إلخ، فيما يرمز لعناصر المجموعة بالحروف الصغيرة: a، b، c،..... إلخ.

ومن أمثلة المجموعات: مجموعة طلبة السنة الأولى علوم اقتصادية، مجموعة الأعداد الحقيقية، مجموعة المباني التابعة لمؤسسة ما، مجموعة العمال المعنيين بالزيادة في الأجور.... إلخ.

وتكتب المجموعة بطريقتين هما: طريقة القائمة وطريقة القاعدة.³

1- أمطير مفتاح عثمان، حساب الاحتمالات، مركز الكتاب الأكاديمي، عمان، 2020، ص 7.

2- سليمان عثمان أبوصبحا، الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية، شركة دار الأكاديميون للنشر والتوزيع، عمان، 2014، ص 11.

3- المرجع نفسه، ص ص 12، 13.

الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات

- **طريقة القائمة:** إذا كان عدد عناصر المجموعة محددا فإنها تكتب داخل قوسين أو حاضنتين، مع إهمال الترتيب. مثال: مجموعة الأرقام الفردية الأقل من 10 تكتب:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

- **طريقة القاعدة:** تستخدم هذه الطريقة إذا كان عدد العناصر كبيرا جدا أو غير محدود، حيث يتعذر في هذه الحالة كتابة جميع العناصر فلجأ للتعبير عن صفة معينة تعبر عن العناصر المعنية. مثل: إذا أردنا التعبير عن مجموعة الأعداد الحقيقية نكتب:

$$A = \{x : x \text{ is real numbers}\}$$

✓ الرموز المستخدمة لوصف المجموعات:

تستخدم الرموز الرياضية التالية للتعبير عن عمليات معينة في المجموعة:

nA	للتعبير عن عدد عناصر المجموعة A .
U	للتعبير عن اتحاد مجموعتين أو أكثر.
$\cap$	للتعبير عن تقاطع مجموعتين أو أكثر.
$\emptyset$ أو $\{\}$	للتعبير عن المجموعة الخالية.
$\in$	للتعبير عن انتماء مجموعة لمجموعة أخرى.
$\notin$	للتعبير عن عدم انتماء مجموعة لمجموعة أخرى.
$\subset$	للتعبير عن احتواء مجموعة لمجموعة أخرى.

2. أنواع المجموعات:

تنقسم المجموعات حسب العناصر المنتمية إليها، إلى ستة أنواع هي: المجموعة المنتهية، المجموعة غير المنتهية، المجموعة الخالية، المجموعة الكلية، المجموعة الجزئية، والمجموعة المكمل (المتمة).

الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات

1.2. المجموعة المنتهية (المحدودة):

المجموعة المنتهية هي المجموعة التي تضم عددا نهائيا من العناصر (n) ، حيث أن هذه العناصر يمكن عدّها وترقيمها من العنصر الأول إلى العنصر n .

مثال:

B: هي مجموعة الأعداد الطبيعية من 1 إلى 5. هي مجموعة منتهية لأن عدد عناصرها محدد بخمسة عناصر ونكتب:

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2.2. المجموعة غير المنتهية:

المجموعة غير المنتهية هي التي لا يمكن حصر وتحديد عدد عناصرها، حيث تكون لها بداية وليس لها نهاية.

مثال:

C: هي مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة. هي مجموعة غير منتهية لأن عدد عناصرها لا يمكن حصره وعده ونكتب:

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$$

3.2. المجموعة الخالية:

يطلق على المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر بالمجموعة الخالية.

مثال:

مجموعة السلع المجانية ذات تكلفة الانتاج الموجبة هي مجموعة خالية عدد عناصرها 0، ونكتب:

$$A = \{ \} \text{ و } \phi$$

الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات

4.2. المجموعة الكلية (الأساسية):

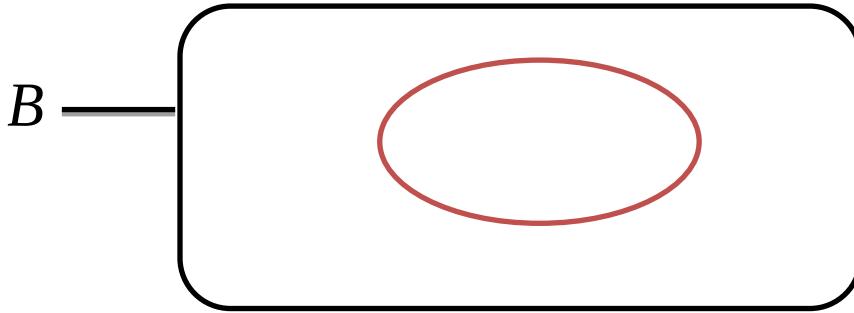
عند دراسة ظاهرة معينة فإن المجموعة الأساسية تضم جميع العناصر التي تنتمي إلى هذه الدراسة. ويرمز لها بالرمز Ω .

مثال: عند دراسة مدى توفر السلع في السوق، فإن المجموعة الأساسية هي كل السلع الموجودة، و A هي مجموعة جزئية تضم السلع الغذائية.

كما يمكن اعتبار طلبة كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير كمجموعة أساسية، تتفرع منها مجموعات تمثل المستويات والتخصصات الموجودة داخل الكلية.

5.2. المجموعة الجزئية:

إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة A ينتمي إلى المجموعة B ، نقول أن A مجموعة جزئية من B ، ونقول أيضا أن A محتواة في B .¹ ونكتب: $A \subset B$



استنتاج:

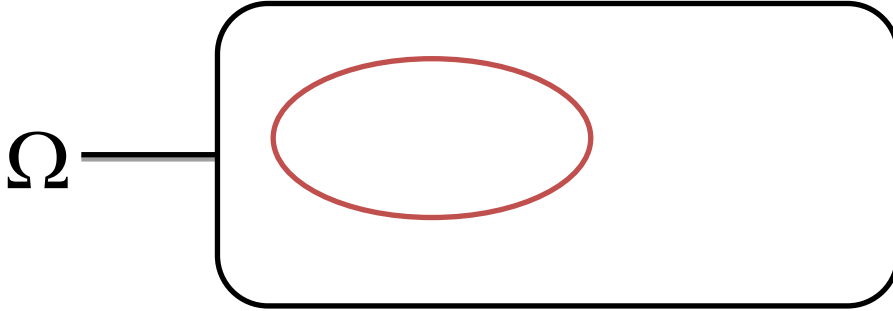
- كل مجموعة هي مجموعة جزئية لنفسها.
- المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية لأي مجموعة.

6.2. المجموعة المتممة (المكملة):

إذا كانت Ω مجموعة أساسية و A مجموعة جزئية منها، فإن المجموعة المتممة لـ A هي العناصر التي تنتمي لـ Ω ولا تنتمي لـ A . ويرمز للمجموعة المتممة بالرمز: $\bar{A}$ ونكتب:

1- سليمان عثمان أبوصبحا، مرجع سابق، ص 13.

$$\bar{A} = \{x : x \in \Omega \text{ et } x \notin A\}$$



مثال:

أراد أحد المتاجر دراسة سلوك المستهلكين. المجموعة الكلية في هذه الحالة تضم كل سكان المدينة، وباعتبار أن المجموعة A هي الأشخاص الذين يشترون من المتجر، فإن المجموعة المتممة لها تضم الأشخاص الذين لا يشترون منه.

مثال 2: بافتراض أن فوجاً من الطلبة يحتوي 30 طالباً، منهم 20 طالبة و 10 طلبة. حيث نكتب:

$$n\Omega = 30$$

$$nA = 20$$

$$n\bar{A} = 10$$

3. العمليات على المجموعات:

يقصد بالعمليات على المجموعات تلك الطرق والأساليب التي تطبق على مجموعتين أو أكثر لاستحداث مجموعة جديدة، وهي تشبه في مفهومها عمليات الجمع والطرح، إلا أنها تتعامل مع عناصر المجموعة وليس مع الأعداد.

1.3. الاتحاد (U):

إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين من Ω ، فإن اتحاد A و B هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو B أو كليهما. أو نقول هي العناصر التي تنتمي لإحدى المجموعتين على الأقل.¹

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\} \text{ ونكتب:}$$

1- Kolman, B., Busby, R. C., & Ross, S, **Discrete Mathematical Structures**, 3rd ed, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2004, p 6.

مثال:

إذا كان: $A=\{0,1,2,3,4\}$ و $B=\{2,4,5,6\}$ فإن: $A \cup B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

ملاحظة: العناصر المشتركة بين المجموعتين تحتسب مرة واحدة في الاتحاد.

• بعض خواص الاتحاد:

- اتحاد المجموعة مع نفسها يعطي نفس المجموعة: $A \cup A = A$
- اتحاد المجموعة مع المجموعة المتممة لها يعطي المجموعة الأساسية: $A \cup \bar{A} = \Omega$
- اتحاد المجموعة مع المجموعة الأساسية يعطي المجموعة الأساسية: $A \cup \Omega = \Omega$
- اتحاد المجموعة مع المجموعة الخالية يعطي نفسها: $A \cup \phi = A$
- خاصية التبديل: $A \cup B = B \cup A$
- خاصية التجميع: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

ملاحظة:

$$(A \cup B) = A + B - (A \cap B)$$
$$(A \cup B \cup C) = A + B + C - (A \cap B) - (A \cap C) - (B \cap C) + (A \cap B \cap C)$$

2.3. التقاطع ($\cap$):

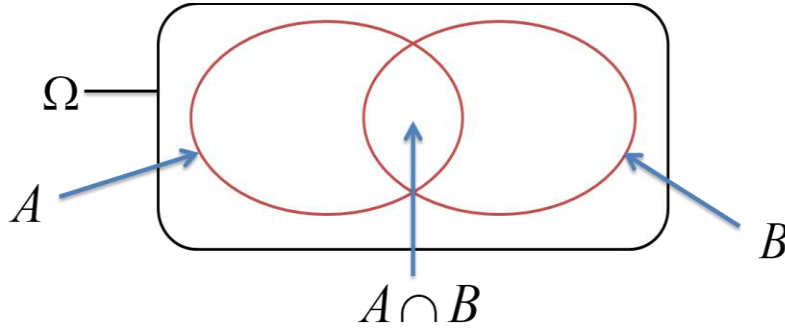
إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين من Ω ، فإن تقاطع A و B هي مجموعة العناصر التي تنتمي

إلى A و B في نفس الوقت. ونكتب: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$ ¹

مثال:

إذا كان: $A=\{0,1,2,3,4\}$ و $B=\{2,4,5,6\}$ فإن: $A \cap B=\{2,4\}$

1 - Al Doerr & Ken Levasseur, **Applied Discrete Structures**. 3rd ed. University of Massachusetts Lowell, 2018, P 4.



• بعض خواص التقاطع:

- تقاطع المجموعة مع نفسها يعطي نفس المجموعة: $A \cap A = A$
- تقاطع المجموعة مع المجموعة المتممة لها يعطي مجموعة خالية: $A \cap \bar{A} = \phi$
- تقاطع المجموعة مع المجموعة الأساسية يعطي المجموعة نفسها: $A \cap \Omega = A$
- اتحاد المجموعة مع المجموعة الخالية يعطي مجموعة خالية: $A \cap \phi = \phi$
- خاصية التبديل: $A \cap B = B \cap A$
- خاصية التجميع: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- خاصية التوزيع:

توزيع الاتحاد على التقاطع: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

توزيع التقاطع على الاتحاد: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

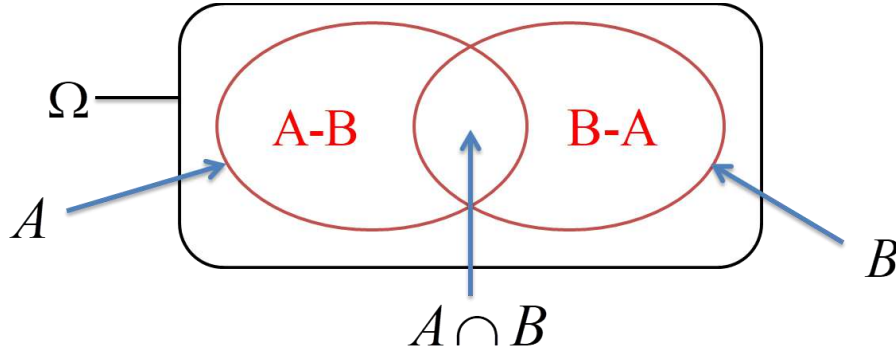
3.3. الفرق بين مجموعتين:

الفرق بين المجموعتين A و B هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B ونكتب: $A - B$ ¹.

مثال:

إذا كان: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ فإن: $A - B = \{0, 1, 3\}$

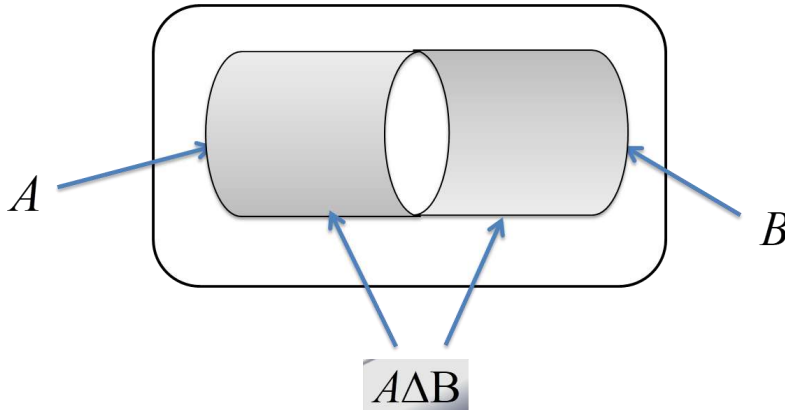
1- Oscar Levin, **Discrete Mathematics: An Open Introduction**, 3rd ed, University of Minnesota: Open Textbook Library, 2021, P 24.



4.3. الفرق التناظري بين مجموعتين:

يعرف الفرق التناظري بين مجموعتين على أنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى اتحاد المجموعتين دون الأخذ بعين الاعتبار العناصر المشتركة ورمزها $A \Delta B$ حيث نكتب:¹

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$



مثال:

إذا كان: $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$ و $B = \{3, 4, 5, 7\}$ فإن: $A - B = \{1, 2, 6, 8\}$ و $B - A = \{3, 5\}$

ومنه فإن: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6, 8\} \cup \{3, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$

• خواص وعلاقات مهمة حول المجموعات:²

$$A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B = A \cap \bar{B} \quad \bullet$$

$$(A \cap B) \cup (A - B) = A \quad \bullet$$

1- روجي إبراهيم الخطيب، الرياضيات المتقطعة، ط1، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، 2014، ص 227.

2- Ted Sundstrom, **Mathematical Reasoning: Writing and Proof**, 2nd ed, Grand Valley State University, 2020, PP 235-238.

بالإضافة إلى العلاقات التالية:¹

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \quad \bullet$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \quad \bullet$$

$$A \cup (B - C) = A \cup B - \bar{A} \cap C \quad \bullet$$

$$A \cap (B - C) = A \cap B - C \quad \bullet$$

$$(A \cap B) - C = (A \cap B) - (A \cap C) \quad \bullet$$

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C) \quad \bullet$$

• قانون دي مورغان: De Morgan's law

ينص قانون دي مورغان للمجموعات على أن المجموعة المتممة لاتحاد مجموعتين هي تقاطع متممتهما، ومتممة تقاطع مجموعتين هي اتحاد متممتهما، ويعطى القانون بالعلاقين

التاليتين:²

$$1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$2) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

1- روجي ابراهيم الخطيب، مرجع سابق، ص 226.

2- Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications. 7th Ed. McGraw-Hill. 2021, P 26.

الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات

تمارين الفصل الأول:

التمرين 01:

لتكن المجموعة الأساسية: $\Omega = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

A و B و C مجموعات جزئية حيث:

$$C = \{4, 6, 7, 9\} \quad B = \{2, 5, 7, 8\} \quad A = \{0, 2, 5\}$$

المطلوب:

1- حدد عناصر المجموعات الآتية:

$$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, A \cap B, A \cup B, A \cap C, B - A$$

2- تأكد من صحة العلاقات التالية: $B - A = B \cap \bar{A}$

$$(\bar{A} \cap \bar{B}) = \Omega - (A \cup B)$$

التمرين 02:

A و B مجموعتان جزئيتان من Ω حيث:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad B = \{3, 6, 9\}$$

المطلوب: تأكد من تحقق علاقتي قانون دي مورغان على المجموعتين A و B؟

التمرين 03:

أجريت دراسة على عينة من 100 مستهلك، للوقوف على تفضيلاتهم في شراء 3 علامات تجارية للهاتف النقال، فتبين ما يلي:

• 40 مستهلكا يفضلون علامة أبل "Apple".

• 50 مستهلكا يفضلون علامة سامسونغ "Samsung".

• 30 مستهلكا يفضلون علامة شاومي "Xiaomi".

• 15 يفضلون أبل وسامسونغ.

• 13 يفضلون أبل و شاومي.

• 10 يفضلون سامسونغ و شاومي.

• 88 يفضلون على الأقل علامة واحدة.

المطلوب:

- 1- أحسب عدد المستهلكين الذين يفضلون العلامات الثلاث.
- 2- مثل معطيات التمرين بيانياً.
- 3- أحسب عدد المستهلكين الذين لا يفضلون أية علامة.
- 4- أحسب عدد الذين يفضلون علامة واحدة فقط.

حلول تمارين الفصل الأول

حل التمرين 01:

- تحديد عناصر المجموعات:

$$\bar{A} = \{4, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\bar{B} = \{0, 4, 6, 9\}$$

$$\bar{C} = \{0, 2, 5, 8\}$$

$$A \cap B = \{2, 5\}$$

$$A \cup B = \{0, 2, 5, 7, 8\}$$

$$A \cap C = \emptyset$$

$$B - A = \{7, 8\}$$

2- التأكد من صحة العلاقة الأولى: لدينا $B - A = \{7, 8\}$

و $B \cap \bar{A} = \{7, 8\}$ إذا العلاقة الأولى محققة

التأكد من صحة العلاقة الثانية: لدينا $\bar{A} \cap \bar{B} = \{4, 6, 9\}$

و $\Omega - (A \cup B) = \{4, 6, 9\}$ إذا العلاقة الثانية محققة

ومنه فإن كلا من العلاقة الأولى والثانية محققتان.

حل التمرين 02:

ينص قانون دي مورغان على تحقق العلاقتين التاليتين:

$$1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$2) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ومن معطيات التمرين نجد:

$$\bar{A} = \{2, 4, 6, 8\} \quad \bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \quad A \cap B = \{3, 9\}$$

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$$

العلاقة الأولى: $1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$$\overline{A \cup B} = \Omega - (A \cup B) = \{2, 4, 8\} \quad \text{لدينا:}$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{2, 4, 8\}$$

ومنه فإن العلاقة الأولى محققة.

$$2) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{العلاقة الثانية:}$$

$$\overline{A \cap B} = \Omega - (A \cap B) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad \text{لدينا:}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

ومنه فإن العلاقة الثانية من قانون دي مورغان محققة.

حل التمرين 3:

باعتبار أن: A: مجموعة الذين يفضلون علامة آبل.

B: مجموعة الذين يفضلون علامة سامسونغ.

C: مجموعة الذين يفضلون علامة شاومي.

لدينا من المعطيات ما يلي:

$$nA = 40 \quad nB = 50 \quad nC = 30 \quad n(A \cap B) = 15 \quad n(A \cap C) = 13$$

$$n(B \cap C) = 10 \quad n(A \cup B \cup C) = 88$$

$$1- \text{ عدد المستهلكين الذين يفضلون العلامات الثلاث هو } n(A \cap B \cap C)?$$

لدينا من خاصية الاتحاد:

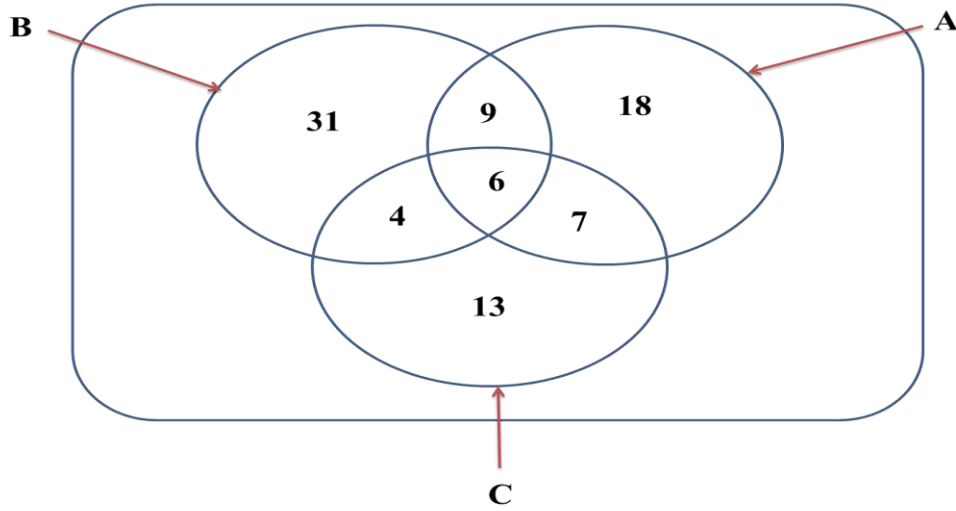
$$n(A \cup B \cup C) = nA + nB + nC - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$88 = 40 + 50 + 30 - 15 - 13 - 10 + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B \cap C) = 88 - 40 - 50 - 30 + 15 + 13 + 10 = 6$$

الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات

2- التمثيل البياني:



- بناء على إجابة السؤال الأول فإن هناك 6 مستهلكين يفضلون العلامات الثلاث (المنطقة المشتركة بين المجموعات الثلاث).
- لدينا 15 يفضلون العلامة الأولى والثانية نطرح منهم 6 فيبقى 9 يفضلون الأولى والثانية فقط ولا يفضلون الثالثة.
- لدينا 13 يفضلون العلامة الأولى والثالثة نطرح منهم 6 فيبقى 7 يفضلون الأولى والثالثة فقط. ولا يفضلون الثانية
- لدينا 10 يفضلون العلامة الثانية والثالثة نطرح منهم 6 فيبقى 4 يفضلون الثانية والثالثة فقط. ولا يفضلون الأولى.
- 40 شخص يفضلون العلامة الأولى، نطرح منها الذين يفضلون معها الثانية والثالثة، فيبقى 18 يفضلون الأولى فقط.
- 50 شخص يفضلون العلامة الثانية، نطرح منها الذين يفضلون معها الأولى والثالثة، فيبقى 31 يفضلون الثانية فقط.
- 30 شخص يفضلون العلامة الثالثة، نطرح منها الذين يفضلون معها الأولى والثانية، فيبقى 13 يفضلون الثالثة فقط.

3- عدد المستهلكين الذين لا يفضلون أية علامة هو مجموع المستهلكين مطروحا منه الذين يفضلون على الأقل إحدى العلامات:

$$100 - n(A \cup B \cup C) = 100 - 88 = 12$$

الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات

4- عدد الذين يفضلون علامة واحدة فقط هم المستهلكون الذين يفضلون إما العلامة الأولى أو الثانية أو الثالثة

من التمثيل البياني نلاحظ أن الذين يفضلون العلامة A فقط عددهم: 18، والذين يفضلون العلامة B فقط عددهم: 31، والذين يفضلون العلامة C فقط عددهم: 13.

أي أن عدد المستهلكين الذين يفضلون علامة واحدة فقط هو: $18+31+13=62$

الفصل الثاني: أساسيات التحليل التوفيقي

➤ مبدأ التحليل التوفيقي

➤ التبديلة

➤ الترتيبية

➤ التوفيقية

تمهيد:

بعد التعرف في الفصل الأول على المفاهيم الأساسية للمجموعات، فإنه يتعين على الطالب قبل الخوض في نظرية الاحتمالات أن يلم بالأساليب الرياضية التي تسمح له بحساب عدد النتائج الممكنة لتجربة معينة. ففي كثير من الأحيان يجد الباحث نفسه أمام حتمية إيجاد المجموعات الجزئية المترتبة عن مجموعة معينة، إذ يصعب عليه حصرها وتحديدها لما تتطلبه العملية من جهد ووقت، فيلجأ إلى حساب عدد الإمكانات المحتملة، وهو الأمر الذي تتيحه أساليب التحليل التوافقي.

1. مبدأ التحليل التوافقي:

يعد التحليل التوافقي من أهم الأساليب الرياضية التي تساعد على إيجاد النتائج الممكنة عند القيام بتجربة معينة، ففي كثير من الحالات التي تكون فيها التجارب متعددة النتائج بشكل يصعب على الباحث حصرها كلها، فيلجأ إلى استخدام طرق العد وخصائص التحليل التوافقي للرجوع إلى حساب عدد النتائج التي تؤدي إليها تجربة معينة.

ويقوم المبدأ الأساسي للتحليل التوافقي على فكرة وجود أكثر من تجربة تنجز بعدة طرق حيث:¹
إذا كانت لدينا تجربة رئيسية تتكون من m تجربة جزئية تجرى الواحدة تلو الأخرى ضمن ترتيب محدد. ونفترض أن التجربة الجزئية الأولى تؤدي إلى n_1 نتيجة، والثانية تؤدي إلى n_2 نتيجة، والتجربة الأخير تؤدي إلى n_n نتيجة. فإن عدد النتائج الخاصة بالتجربة هو حاصل ضرب نتائج التجارب الجزئية:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_m = \text{عدد النتائج}$$

ويمكن الاستعانة بمخطط الشجرة إذا كان عدد النتائج صغيراً، كما هو مبين في المثال التالي:

مثال:

يقدم أحد المطاعم 3 أنواع من السلطة، نوعين من الأطباق الرئيسية، و نوعين من الحلويات.

بكم طريقة يختار الزبون وجبته المكونة من سلطة، وطبق ساخن، وتحلية؟

1- محمد بداوي ومحمد دوة، الإحصاء المطبق في العلوم الاجتماعية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2016، ص 12.

الفصل الثاني: أساسيات التحليل التوفيقي

الجواب:

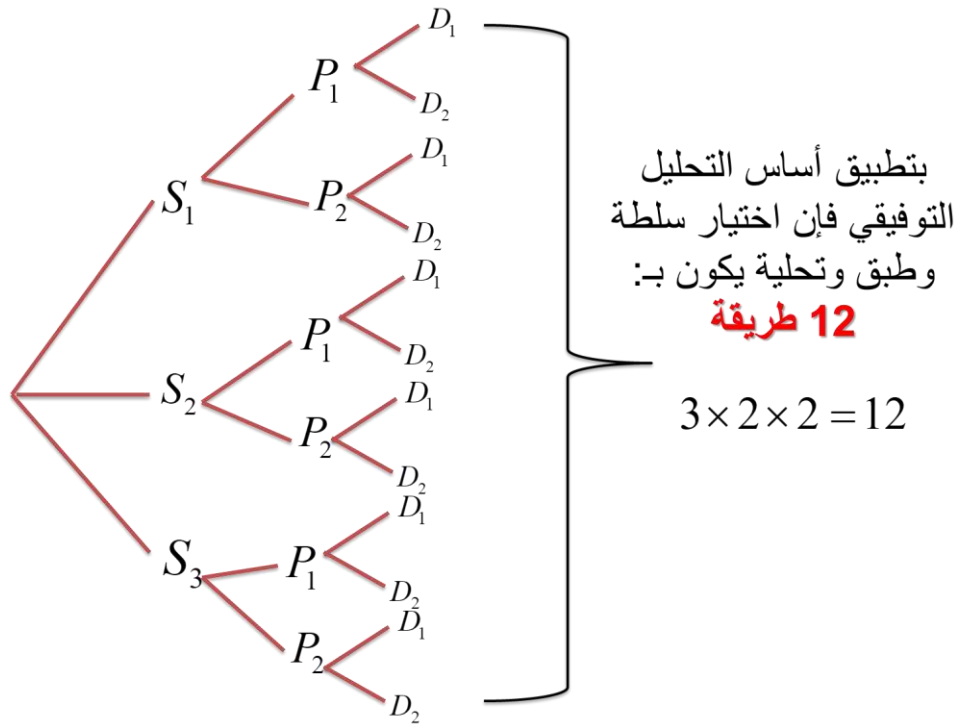
نرمز للسلطة بالرمز: S

نرمز للطبق الرئيسي بالرمز: P

نرمز للتحلية بالرمز: D

فمثلاً إذا تم اختيار النوع الأول من السلطة نكتب: S_1 ونكتب S_2 و S_3 بالنسبة للنوع الثاني والثالث من السلطة على التوالي، وكذلك بالنسبة للأطباق الرئيسية والتحليات.

وبالاعتماد على مخطط الشجرة نتحصل على ما يلي:



يظهر من المخطط أعلاه أن الزبون إذا طلب النوع الأول من السلطة فإن أمامه خيارين من الأطباق

الرئيسية، وأن كل طبق رئيسي يختاره يتفرع منه نوعان من التحلية، فتصبح النتائج كالآتي:

$(S_1 P_1 D_1)$, $(S_1 P_1 D_2)$, $(S_1 P_2 D_1)$, $(S_1 P_2 D_2)$, $(S_2 P_1 D_1)$, $(S_2 P_1 D_2)$,

$(S_2 P_2 D_1)$, $(S_2 P_2 D_2)$, $(S_3 P_1 D_1)$, $(S_3 P_1 D_2)$, $(S_3 P_2 D_1)$, $(S_3 P_2 D_2)$

2. التبديلة:

إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n عنصر وأردنا ترتيبها بجميع الحالات الممكنة. فإن كل إمكانية من الإمكانيات المتاحة تسمى تبديلة.¹

فالتبديلة هي إخضاع كل عناصر المجموعة للترتيب، ونميز بين نوعين من التبديلات، في حالة عدم تكرار العناصر وفي حالة تكرارها.

1.2. التبديلة بدون تكرار العناصر:

إذا كانت العناصر المراد إعادة ترتيبها مختلفة وغير متكررة فإن عدد الطرق التي يمكن من خلالها إعادة ترتيب العناصر يعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n = n!$$

حيث: P_n يمثل عدد التبديلات الممكنة لمجموعة مكونة من n عنصر.

n ! : تقرأ: عاملي وهي العدد n مضروباً في جميع الأعداد التي قبله وصولاً إلى 1 ونكتب:

$$n! = n(n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$0! = 1 \quad \text{حيث:}$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال:

إذا كان لدينا 4 طلبة A B C D و 4 أماكن شاغرة 1 2 3 4. ما هو عدد الطرق الممكنة ليجلس كل طالب في مكانه؟

1 - John A. Gubner, "Permutations, the Parity Theorem, and Determinants" (Unpublished Lecture Notes, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Wisconsin-Madison, November 3, 2023), P2.

الجواب:

نلاحظ من المثال بأننا أمام حالة ترتيب 4 أشخاص بجميع الطرق الممكنة، وبما أن عدد الأماكن الشاغرة يساوي عدد الأشخاص، أي إخضاع كل العناصر للترتيب فإننا أمام تبديلة P_n . كما أنه لا يمكن لطالب أن يجلس في مكانين في الوقت نفسه، وهذا معناه أن التبديلة لا تتكرر فيها العناصر، حيث أن:

المكان 1: يقبل 4 إمكانيات

المكان 2: يقبل 3 إمكانيات بعد جلوس طالب في المكان الأول

المكان 3: يقبل إمكائيتين بعد جلوس طالب في المكان الأول وطالب في المكان الثاني

المكان 4: يقبل إمكانية واحدة بعد جلوس 3 طلبة في 3 أماكن

وبتطبيق مبدأ العد نجد أن عدد الإمكانيات هو: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

ويمكن إيجاد النتيجة نفسها بتطبيق قانون التبديلة بدون تكرار:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

2.2. التبديلة مع تكرار العناصر:

إذا كانت المجموعة A تحتوي على n عنصر، حيث أن بعض عناصر المجموعة تتكرر أكثر من مرة. فإن عدد الحالات الممكنة لإعادة ترتيب عناصر هذه المجموعة تعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

حيث:

n_1 : عدد مرات تكرار العنصر الأول في المجموعة.

n_2 : عدد مرات تكرار العنصر الثاني في المجموعة..... وهكذا وصولاً إلى آخر عنصر.

مثال:

بكم طريقة يمكننا إعادة تشكيل كلمات (معنى الكلمة غير مهم)، من كلمة: RECHERCHE؟

الجواب:

نلاحظ بأن الكلمة تحتوي على 09 حروف ($n=9$) منها ما هو متكرر أكثر من مرة:

- الحرف R: تكرر مرتين $n_1=2 \leq 02$

- الحرف E: تكرر ثلاث مرات $n_2=3 \leq 03$

- الحرف C: تكرر مرتين $n_3=2 \leq 02$

- الحرف H: تكرر مرتين $n_4=2 \leq 02$

فنحن أمام تبديلة بعناصر متكررة، وبالتالي فإن عدد إمكانيات تشكيل كلمات بغض النظر عن المعنى يعطى بالعلاقة:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, n_4} = P_9^{2, 3, 2, 2} = \frac{9!}{2!3!2!2!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 7560$$

أي يمكن إعادة تبديل حروف كلمة RECHERCHE بـ 7560 طريقة.

3. الترتيب:

إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n عنصر وأردنا ترتيب k عنصر منها بجميع الحالات الممكنة، حيث $k \leq n$. فإن كل إمكانية تسمى ترتيبية¹.

فالاختلاف بين الترتيبية والتبديلة هو أن الثانية يتم فيها ترتيب كل العناصر، بينما الترتيبية فهي سحب مجموعة جزئية من المجموعة الكلية وترتيب عناصرها بجميع الطرق الممكنة. حيث نميز بين نوعين من الترتيب:

1.3. الترتيب بدون إرجاع:

يقصد بالترتيب بدون إرجاع عدم ظهور العنصر في أكثر من إمكانية، أي أن العنصر المسحوب لا يتم إرجاعه إلى المجموعة الأصلية ولفهم طريقة إيجاد عدد الترتيبات بدون إرجاع نستعرض المثال التالي:

1- Kenneth H. Rosen, **Discrete Mathematics and Its Applications**, 8th Ed, McGraw-Hill Education, New York 2019, P 430.

الفصل الثاني: أساسيات التحليل التوافقي

مثال:

لدينا 7 طلبة و 4 أماكن شاغرة، نريد أن يجلس الطلبة في الأماكن الشاغرة بجميع الطرق الممكنة، بحيث إذا ظهر طالب في تركيبة معينة فإنه لا يمكن له أن يظهر في أخرى.

الجواب:

نلاحظ من خلال المثال بأن ترتيب 4 عناصر (أشخاص) من أصل 7 بجميع الطرق الممكنة، فنحن إذا أمام ترتيبية. وبما أن الطالب لا يمكنه أن يظهر في أكثر من تركيبة، أي إذا سحب من المجموعة فإنه لا يعود إليها (سحب بدون إرجاع)، فإننا أمام ترتيبية بدون إرجاع حيث:

المكان 1: يمكن أن يشغل بـ 7 طرق ممكنة.

المكان 2: يمكن أن يشغل بـ 6 طرق ممكنة (لأن طالبا من بين 7 طلبة جلس في المكان الأول).

المكان 3: يمكن أن يشغل بـ 5 طرق ممكنة (لأن طالبين من بين 7 طلبة جلسا في المكانين الأول والثاني).

المكان 4: يمكن أن يشغل بـ 4 طرق ممكنة (لأن 3 طلبة من بين 7 طلبة جلسوا في الأماكن الأول والثاني والثالث).

وبتطبيق المبدأ الأساسي للتحليل التوافقي، نتحصل على عدد الإمكانيات كما يلي:

$$\text{عدد الإمكانيات} = 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 840$$

وباعتبار أن مجموع العناصر هو: n وعدد العناصر المعنية بالترتيب هو k ، ورمز الترتيبية هو A يمكن تعميم القانون كما يلي

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)(n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} \quad \text{وبضرب العلاقة وتقسيمها على } (n-k)! \text{ نجد:}$$

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2).....3 \times 2 \times 1}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

الفصل الثاني: أساسيات التحليل التوافيقي

قاعدة:

يتم إيجاد عدد الطرق الممكنة لترتيب مجموعة جزئية سحبت من مجموعة أخرى بدون إرجاع بطريق

العلاقة التالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال:

شارك 8 متسابقين في سباق نهائي. يتم تسجيل المراكز الثلاثة الأولى (المركز الأول، المركز الثاني، والمركز الثالث) فقط. ما هو عدد الإمكانيات المختلفة الممكنة للحصول على المراكز الثلاثة الأولى؟

الجواب:

بما أن التركيز كان على المراكز الثلاثة الأولى فقط من أصل 8 فنحن أمام ترتيبية، وبما أن المتسابق لا يمكنه أن يحتل مركزين في نفس الوقت فنحن أمام ترتيبية بدون إرجاع، ولدينا من المعطيات:

$n=8$ و $k=3$ ، وبتطبيق القانون نجد:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 336$$

توجد 336 إمكانية مختلفة للحصول على المراكز الثلاثة الأولى.

2.3. الترتيبية بإرجاع:

إذا ظهر العنصر المسحوب أكثر من مرة في ترتيبات مختلفة فنحن أمام ترتيبية بإرجاع.¹

ولفهم طريقة إيجاد عدد الترتيبات بإرجاع نستعرض المثال التالي:

مثال:

ما هو عدد الأعداد المكونة من رقمين الممكن تشكيلها من مجموعة الأرقام التالية: 2، 3، 4

مع إمكانية تكرار الرقم أكثر من مرة؟

1- Bruce E. Sagan, **Combinatorics: The Art of Counting**, American Mathematical Society, 2020, P 5.

الفصل الثاني: أساسيات التحليل التوافقي

الجواب:

بما أن المطلوب هو ترتيب مجموعة عناصر جزئية من أصل مجموعة كلية فنحن أمام ترتيبية، وبما أن العنصر يمكنه أن يتكرر فنحن أمام ترتيبية بإرجاع.

باستخدام الأرقام التالية: 2، 3، 4 يمكننا تشكيل الأعداد التالية:

(2 2) (2 3) (2 4) (3 3) (3 2) (3 4) (4 4) (4 2) (4 3)

وباعتبار أن عدد العناصر الموجودة هو $n=3$ ، وعددا العناصر المسحوبة (الجزئية) في كل مرة هو $k=2$ يمكن استنتاج علاقة حساب عدد الترتيبات بإرجاع كما يلي:

$$A_n^k = n^k$$

مثال آخر:

يملك تاجر 5 أنواع من السلع المعروضة للبيع، وتحتوي واجهة متجره على 3 رفوف لعرض 3 أنواع لاستقطاب الزبائن.

بكم طريقة يمكن للتاجر أن يعرض 3 أنواع من السلع المتوفرة مع العلم أنه يمكن أن يعرض نفس السلعة على أكثر من رف؟

الجواب:

بما أن عدد الرفوف أقل من عدد السلع فإن التاجر يمكنه عرض 3 سلع فقط من أصل 5 مع إمكانية التكرار (إرجاع). فنحن هنا أمام ترتيبية بإرجاع حيث:

$$n = 5$$

$$k = 3$$

$$A_n^k = n^k \Rightarrow A_5^3 = 5^3 = 125$$

يمكن للتاجر أن يهيئ واجهة المتجر بـ: 125 طريقة مختلفة.

4. التوفيقية:

تعرف التوفيقية على أنها عدد الحالات الممكنة لاختيار مجموعة جزئية مكونة من k عنصر تسحب من مجموعة كلية مكونة من n عنصر، دون مراعاة الترتيب.¹ ونميز بين نوعين من التوفيقات توفيقية بدون إرجاع وتوفيقية بإرجاع.

1.4. التوفيقية بدون إرجاع:

إذا قمنا باختيار (دون ترتيب) لمجموعة جزئية من العناصر، مع عدم إعادة العناصر المسحوبة في كل مرة، أي أن العنصر لا يمكنه أن يظهر في نفس التوفيقية أكثر من مرة. فإن عدد الإمكانيات المتاحة يعطى بالعلاقة التالية:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

حيث: $k \leq n$

• حالات خاصة لحساب التوفيقات:

- توجد إمكانية واحدة لسحب مجموعة من نفسها: $C_n^n = 1$
- توجد n إمكانية لسحب عنصر واحد من العناصر n : $C_n^1 = n$
- توجد إمكانية واحدة لعدم سحب أي عنصر من مجموعة: $C_n^0 = 1$
- توجد n إمكانية لسحب $n-1$ عنصر من العناصر n : $C_n^{n-1} = n$
- يتساوى عدد الإمكانيات لسحبتين إذا كان مجموع العناصر المسحوبة يساوي n : $C_n^k = C_n^r$ si $k + r = n$

مثال:

لدينا 5 طلبة: A, B, C, D, E، نريد اختيار فريق من 3 طلبة للمشاركة في مسابقة فكرية.

بكم طريقة يمكننا فعل ذلك؟

1- Lahcene Abdallah Bachicoua, **Finite Mathematics, An Arabic text**, 1st Ed, Phillips publishing, 2013, P 96.

الفصل الثاني: أساسيات التحليل التوافيقي

الجواب:

بما أن التجربة هي عملية اختيار مجموعة جزئية (3 عناصر) من مجموعة أخرى (5 عناصر)، وترتيب العناصر المختارة غير مهم. فنحن أمام توفيقية. وبما أن الطالب لا يمكن أن يتم اختياره إلا مرة واحدة، فالتوفيقية هنا تكون بدون إرجاع، ويتم إيجاد عدد الإمكانيات بالعلاقة التالية:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

أي يمكن اختيار الطلبة بـ 10 طرق مختلفة، ويمكن حصر الإمكانيات كما يلي:

(ABC), (ABD), (ABE), (ACD), (ACE), (ADE), (BCD), (BCE), (BDE), (CDE)

2.4. التوفيقية بإرجاع:

إذا قمنا باختيار (دون ترتيب) لمجموعة جزئية من العناصر، مع إعادة العناصر المسحوبة في كل مرة، أي أن العنصر يمكنه أن يظهر في نفس التوفيقية أكثر من مرة. فإن عدد الإمكانيات المتاحة يعطى بالعلاقة التالية:¹

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

مثال:

محل يقدم 03 أنواع من المشروبات: عصير، قهوة، وشاي

يختار الزبون نوعين من المشروبات (مع إمكانية اختيار نفس المشروب أكثر من مرة).

بكم طريقة يمكن للزبون اختيار المشروبين؟

الجواب:

بما أن عملية اختيار المشروبين من طرف الزبون لا يهم فيها الترتيب، بالإضافة إلى إمكانية اختيار نفس المشروب مرتين حسب المعطيات، فنحن هنا أمام توفيقية بإرجاع. وعدد الإمكانيات هو:

1 - Adams, Henry, et al, **Counting Rocks! An Introduction to Combinatorics**, 2021, P 50
<https://arxiv.org/abs/2108.04902> (22/10/2025)

$$n = 3, k = 2 \Rightarrow C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

فالزبون أمامه ست (6) إمكانيات لاختيار مشروبين مع الإرجاع، والإمكانيات هي:

(قهوة، قهوة) (شاي، شاي) (عصير، عصير) (قهوة، عصير) (قهوة، شاي) (عصير، شاي)

تطبيق 1:

إليك الأرقام التالية: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 كم عددا مئويا مكونا من 3 أرقام يمكن تشكيله في حالة:

- 1- إمكانية تكرار الرقم.
- 2- عدم إمكانية تكرار الرقم.
- 3- أن يكون العدد فردي، مع عدم تكرار الأرقام.

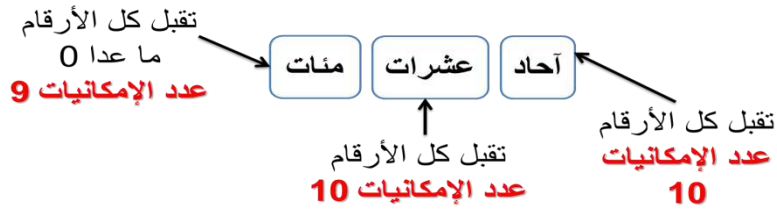
الحل:

يمكن حل هذا التطبيق باستعمال مبدأ الضرب في التحليل التوافقي.

المطلوب هو تشكيل أعداد مكونة من 3 أرقام من الأرقام المقترحة، وللقيام بذلك يجب مراعاة ما يلي:

- 1- حالة إمكانية تكرار الرقم:
 - حتى يكون العدد مئويا يجب أن يستثنى من مرتبة المئات الرقم 0، أي أن مرتبة المئات تقبل كل الأرقام ما عدا 0، فيمكن استغلالها بـ 9 إمكانيات.
 - مرتبة العشرات تقبل كل الأرقام بما فيها الرقم 0، وبما أن التكرار مسموح هنا فإن مرتبة العشرات يمكن استغلالها بـ 10 إمكانيات.
 - مرتبة الآحاد تقبل هي الأخرى كل الأرقام ويمكن استغلالها بـ 10 إمكانيات.

الفصل الثاني: أساسيات التحليل التوافيقي



انطلاقاً مما سبق وبتطبيق المبدأ الأساسي للعد، فإن عدد الأعداد المئوية الممكن تشكيلها مع إمكانية تكرار الرقم هو: $9 \times 10 \times 10 = 900$.

2- عدم إمكانية تكرار الرقم.

في هذه الحالة فإن الرقم الذي يظهر في مرتبة لا يمكنه أن يظهر في مرتبة أخرى (الأعداد: 111، 223، 554، 100..... كلها غير مقبولة).

- مرتبة المئات تقبل 9 إمكانيات لأن الرقم 0 مستثنى.

- مرتبة العشرات تقبل 9 إمكانية لأن الرقم الظاهر في مرتبة المئات لا يمكنه أن يظهر مرة أخرى.

- مرتبة الآحاد تقبل 8 إمكانيات فقط، لأن الرقمين المختارين في المئات والعشرات لا يمكنهما أن يظهر في الآحاد.



وبالتالي فإن عدد الإمكانيات هو: $9 \times 9 \times 8 = 648$.

3 - أن يكون العدد فردياً مع عدم تكرار الأرقام.

- العدد الفردي هو الذي يكون رقم أحاده 1 أو 3 أو 5 أو 7 أو 9، فمرتبة الآحاد تقبل 5 إمكانيات.

- مرتبة المئات تقبل 8 إمكانيات لأن الرقم 0 مستثنى منها، والرقم الظاهر في الآحاد لا يتكرر في مرتبة أخرى.

الفصل الثاني: أساسيات التحليل التوافيقي

- مرتبة العشرات تقبل 8 إمكانيات بعد حذف الرقمين الظاهرين في مرتبتي الآحاد والمئات.



$$\text{عدد الإمكانيات هو: } 8 \times 8 \times 5 = 320$$

تطبيق 2:

بكم طريقة يمكن توزيع أوراق اللعب على 4 لاعبين، مع العلم أن علبة الأوراق بها 52 ورقة ؟ ويتم توزيع 8 أوراق في آن واحد على كل لاعب.؟

الحل:

بما أن التوزيع لا يهم فيه ترتيب الأوراق فإننا سنستعمل التوفيقية.

- اللاعب الأول سيأخذ 8 أوراق من أصل 52، عدد الإمكانيات هو: C_{52}^8

- اللاعب الثاني سيأخذ 8 أوراق من أصل 44 (ما تبقى من الأوراق بعد التوزيع على اللاعب الأول)، عدد الإمكانيات هو: C_{44}^8

- اللاعب الثالث سيأخذ 8 أوراق من أصل 36 (ما تبقى من الأوراق بعد التوزيع على اللاعبين الأول والثاني)، عدد الإمكانيات هو: C_{36}^8

- اللاعب الرابع سيأخذ 8 أوراق من أصل 28 (ما تبقى من الأوراق بعد التوزيع على اللاعبين الأول، الثاني، والثالث)، عدد الإمكانيات هو: C_{28}^8

وبتطبيق المبدأ الأساسي للعد نجد أن عدد الإمكانيات لتوزيع الأوراق على اللاعبين الأربعة هو

$$\text{حاصل جداء الإمكانيات : } C_{52}^8 \times C_{44}^8 \times C_{36}^8 \times C_{28}^8$$

الفصل الثاني: أساسيات التحليل التوافقي

تمارين الفصل الثاني:

التمرين 01:

1- طلب منك إيجاد كلمة سر رباعية (XXXX) لفتح هاتف ذكي، ما هو عدد المحاولات التي تقوم بها لضمان تجريب كل الحالات الممكنة، في كل حالة مما يلي:

أ. في حالة كلمة سر مكونة من الأحرف اللاتينية. (مع عدم تكرار الحرف)

ب. في حالة كلمة سر مكونة من 4 أرقام مع إمكانية تكرار الرقم.

ج. في حالة كلمة سر مكونة فقط من أرقام زوجية، بدون تكرار

2- بكم طريقة يمكنك تشكيل عدد فردي أقل من 600 مع إمكانية تكرار الرقم؟

التمرين 02:

1- كم عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من كلمة: STATISTIQUES ؟ (معنى الكلمة غير مهم)

2- ما هو عدد أرقام الهواتف التابعة لشركة موبيليس الممكن تشكيلها بافتراض أن الرقم يبدأ بـ (066) في حالة:

أ. يمكن أن يتكرر الرقم أكثر من مرة. ب. عدم تكرار الأرقام

التمرين 03: أردنا اختيار 4 طلبة من مجموعة مكونة من 5 طلبة و 8 طالبات، لتشكيل لجنة.

1. ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها؟

2. ما هو عدد اللجان التي تضم الطالبات فقط؟

3. ما هو عدد اللجان التي تضم على الأقل طالب (ذكر) واحد؟

4. ما هو عدد اللجان التي تضم إما طلبة فقط أو طالبات فقط؟

حلول تمارين الفصل الثاني

التمرين 01:

1- أ- في حالة كلمة سر مكونة من الأحرف اللاتينية. (بافتراض عدم تكرار الحرف)
لدينا عدد الحروف اللاتينية 26، وبما أننا سنستعمل 4 مع عدم التكرار فنحن أمام ترتيبية بدون إرجاع:

$$n = 26 \quad k = 4 \implies A_{26}^4 = \frac{26!}{(26-4)!} = 358800$$

ب. في حالة كلمة سر مكونة من 4 أرقام مع إمكانية تكرار الرقم.
الأرقام الممكنة هي: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9، إذا فهي ترتيبية بإرجاع:

$$n = 10 \quad k = 4 \implies A_{10}^4 = 10^4 = 10000$$

ج. في حالة كلمة سر مكونة فقط من أرقام زوجية. بدون تكرار
الأرقام الزوجية: 0,2,4,6,8، عددها 5، فهي ترتيبية بدون إرجاع.

$$n = 5 \quad k = 4 \implies A_5^4 = \frac{5!}{1!} = 120$$

2- بكم طريقة يمكنك تشكيل عدد فردي أقل من 600؟ مع إمكانية تكرار الرقم

رقم المئات يقبل 5 إمكانيات: 1,2,3,4,5

رقم العشرات يقبل 10 إمكانيات: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

رقم الآحاد يقبل 5 إمكانيات: 1,3,5,7,9

إذا يمكن تشكيل عدد فردي أقل من 600 ب: $250 = 5 \times 10 \times 5$ طريقة.

التمرين 02:

1- كلمة: STATISTIQUES تضم حروفاً متكررة، وبالتالي فنحن أما تبديلة بتكرار:

$$n = 12 \implies P_{12}^{3,3,1,2,1,1,1} = \frac{12!}{3!3!1!2!1!1!1!} = 6652800$$

2- نعلم أن رقم الهاتف مكون من 10 أرقام، وبما أن الرقم المطلوب تشكيله من الشكل:

(066XXXXXXX)، فإن هناك 7 مراتب تستبدل بجميع الطرق الممكنة:

الفصل الثاني: أساسيات التحليل التوافيقي

أ. في حالة إمكانية تكرار الرقم: فإن كل رقم يقبل 10 حالات:

وبالتالي عدد الحالات هو: $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

وهي ترتيبية بإرجاع: $n = 10 \quad k = 7 \implies A_{10}^7 = 10^7 = 10000000$

ب. في حالة عدم تكرار الرقم: فإن الرقم الأول يقبل 10 حالات والثاني 9 حالات والثالث 8

والرابع 7 والخامس 6 والسادس 5 والسابع 4:

وبالتالي عدد الحالات هو: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$

وهي ترتيبية بدون إرجاع:

$$n = 10 \quad k = 6 \implies A_{10}^7 = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604800$$

التمرين 03:

لدينا 5 طلبة ذكور و 8 إناث، نريد اختيار 4 بدون ترتيب وبالتالي فهي توفيقية. وبما أن الطالب لا يمكنه

أن يتكرر في اللجنة فهي توفيقية بدون إرجاع.

1- ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها؟

$$C_{13}^4 = \frac{13!}{4!9!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 715$$

2. ما هو عدد اللجان التي تضم الطالبات فقط؟

$$C_8^4 \times C_5^0 = \frac{8!}{4!4!} \times 1 = 70$$

3. ما هو عدد اللجان التي تضم على الأقل طالب (ذكر) واحد؟

إما ظهور طالب واحد ومعه 3 طالبات أو طالبين وطالبتين أو ثلاثة طلبة وطالبة أو 4 ذكور فقط:

$$\begin{aligned} & (C_5^1 \times C_8^3) + (C_5^2 \times C_8^2) + (C_5^3 \times C_8^1) + (C_5^4 \times C_8^0) \\ &= (5 \times \frac{8!}{3!5!}) + (\frac{5!}{2!3!} \times \frac{8!}{2!6!}) + (\frac{5!}{3!2!} \times 8) + (5 \times 1) \\ &= 280 + 280 + 80 + 5 \\ &= 645 \end{aligned}$$

4. ما هو عدد اللجان التي تضم إما طلبة أو طالبات؟

$$(C_5^4 \times C_8^0) + (C_5^0 \times C_8^4) = (5 \times 1) + (1 \times \frac{8!}{4!4!}) = 75$$

الفصل الثالث:

مبادئ نظرية الاحتمالات

وقاعدة بايز

➤ التجربة العشوائية

➤ فضاء العينة

➤ الحدث

➤ الاحتمال

➤ قواعد حساب الاحتمال

➤ الاحتمال الشرطي

➤ قاعدة بايز

تمهيد:

بعد الإلمام بالمفاهيم المتعلقة بالمجموعات وطرق العد، أصبحت الأرضية مهياة للولوج في عالم الاحتمالات، هذا الفرع من فروع الرياضيات الذي أصبح ضروريا لكل العلوم بالنظر إلى قدرته على تفسير وتحليل الظواهر العشوائية والتحكم في قوانينها. لكن وقبل دراسة أساليب وطرق حساب الاحتمالات، كان من الضروري التطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية التي تعد أولى الخطوات لبناء تفكير احتمالي سليم، يمكن الطالب من معالجة المسائل العشوائية وتحليلها بدقة علمية.

1. التجربة العشوائية:

التجربة العشوائية هي كل تجربة لا نستطيع أن نتوقع نتائجها، ويطلق على مجموعة النتائج فضاء الإمكانات.¹ ويطلق على نتائج تجربة معينة بأنها عشوائية إذا لم نستطع التنبؤ بها، وتعود أسباب عدم القدرة على التنبؤ بنتائج التجربة العشوائية إلى عدم توفر المعلومات الكافية حول مسببات التجربة، أو عدم القدرة على الفهم الدقيق لسير النظام.²

فيمكن من خلال ما سبق تعريف التجربة العشوائية على أنها إجراء نقوم به يغلب عليه الطابع العشوائي، نعلم جميع نتائجه الممكنة دون القدرة على تأكيد وقوع أي منها.

مثال:



- في تجربة رمي حجر النرد لدينا ست (06) حالات ممكنة الوقوع وهي:

ظهور أحد الأرقام: 1، 2، 3، 4، 5، 6.

إلا أن معرفة الرقم الذي سيظهر لا تتحقق إلا بعد القيام بالتجربة. ومنه فإن رمي حجر النرد هي تجربة عشوائية.

- تجربة رمي قطعة نقدية هي أيضا تجربة عشوائية لأن القطعة النقدية بها وجهان: رقم وصورة،



إلا أنه لا يمكننا تحديد النتيجة التي ستظهر إلا بعد القيام بالتجربة.

1- Nicolas Nguyen, **Analyse et probabilités**, Ed Ellipses, Paris, 2023, P 594

2- Julian Tugaut, **Les bases indispensables des probabilités et des statistiques cours et exercices corrigés**, Ed Ellipses, Paris, 2025, P 19.

الفصل الثالث: مبادئ نظرية الاحتمالات وقاعدة بايز

- تجربة اختيار عشوائي لـ 03 طلبة من مجموعة مكونة من 5 ذكور و 4 إناث هي أيضا تجربة عشوائية، لأن النتائج الممكنة معلومة منذ البداية وهي: ظهور 3 ذكور، أو 3 إناث، أو ذكر وأنثيين، أو أنثى وذكرين. إلا أن تحديد النتيجة منذ البداية هو أمر مستحيل.

2. فضاء العينة (فراغ العينة):

فضاء العينة هي مجموعة تضم كل الإمكانيات المحتملة عند القيام بتجربة عشوائية،¹ ويرمز له بالرمز Ω (يقرأ أوميغا Omega).

مثال:

- في تجربة رمي حجر النرد، الحالات الممكنة هي الأرقام من 1 إلى 6، وبالتالي فإن فضاء العينة هو: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- في تجربة رمي قطعة نقدية، الحالات الممكنة هي إما رقم (P) أو صورة (F) ونكتب:

$$\Omega = \{P, F\}$$

- في تجربة اختيار عشوائي لـ 03 طلبة من بين 5 ذكور (G) و 4 إناث (F). فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{GGG, FFF, GGF, FFG\}$$

- في تجربة حجر النرد وقطعة نقدية معا فإن فضاء العينة هو:

	1	2	3	4	5	6
F	F1	F2	F3	F4	F5	F6
P	P1	P2	P3	P4	P5	P6

F1: ظهور صورة من القطعة النقدية والرقم 1 من حجر النرد.

1- محمد أبو صالح، مبادئ الإحصاء، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2020، ص 155.

3. الحدث:

1.3. تعريف الحدث:

يعرف الحدث بأنه الحالة أو النتيجة الممكن وقوعها عند القيام بتجربة عشوائية، وهو مجموعة جزئية من فضاء العينة.¹

إذا تحقق الحدث فإن عناصره تكون جزء من عناصر فضاء العينة، وإذا لم يتحقق فإنه لا يضم أي عنصر من عناصر فضاء العينة، يرمز للأحداث بالحروف اللاتينية: A, B, C,

مثال 1:

في تجربة رمي حجر النرد، فضاء العينة هو: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- نسمي الحدث A: حدث ظهور الرقم 1 $A = \{1\}$

- نسمي الحدث B: حدث ظهور رقم فردي $B = \{1,3,5\}$

مثال 2:

قمنا بسحب ثلاث قطع في آن واحد من منتج ما، حيث لاحظنا وجود قطع صالحة للاستعمال وقطع أخرى تالفة.

1 - أوجد جميع الحالات الممكنة لهذه التجربة.

2- أوجد عناصر الحدث A أن تكون جميع القطع صالحة

3- الحدث B هو حدث الحصول على الأكثر على قطعة تالفة.

الجواب:

1 - جميع الحالات الممكنة لهذه التجربة هو فراغ العينة.

نرمز للقطع الصالحة بالرمز: C ونرمز للقطع التالفة بالرمز: D

1- محمود أحمد عبد الفتاح، الاحتمالات والإحصاء التطبيقي، ط2، دار الصفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2022، ص 45.

الفصل الثالث: مبادئ نظرية الاحتمالات وقاعدة بايز

فراغ العينة في هذه الحالة هو: $\Omega = \{(CCC), (DDD), (CDD), (DCC)\}$

(CCC): جميع القطع سالحة.

(DDD): جميع القطع تالفة.

(CDD): قطعة سالحة وقطعتان تالفتان.

(DCC): قطعة تالفة وقطعتان صالحتان.

2- عناصر الحدث A أن تكون جميع القطع سالحة: $A = \{(CCC)\}$ $n_A = 1$

3- B هو حدث الحصول على الأكثر على قطعة تالفة: هذا معناه الحصول إما على قطعة واحدة تالفة أو لا نحصل على أية قطعة تالفة.

$B = \{(CCD), (CCC)\}$ $n_B = 2$

2.3. أنواع الأحداث:

تنقسم الأحداث المترتبة عن التجارب العشوائية حسب العناصر التي تنتمي إليها إلى:

1.2.3. الحدث البسيط:

يعرف الحدث البسيط على أنه الحدث الذي لا يمكن تجزئته، أي أنه يضم عنصرا واحدا من عناصر فضاء العينة.¹

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة: ليكن الحدث A حدث ظهور الرقم 5.

نقول عن الحدث A أنه حدث بسيط لأنه يحتوي على عنصر واحد فقط من عناصر فضاء العينة ونكتب: $A = \{5\}$ $n_A = 1$.

1 -J. Calvin Berry, **Probability and Statistics Book**, July 2024 Edition, University of Louisiana. 2024, P 50.

2.2.3. الحدث المركب:

يعرف الحدث المركب بأنه الحدث الذي يمكن تفكيكه إلى أحداث أبسط منه، أي أنه يحتوي إلى أكثر من عنصر من عناصر فضاء العينة.¹

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة: ليكن الحدث B حدث ظهور رقم زوجي.

الحدث B هو حدث مركب لأنه يضم ثلاثة عناصر من فضاء العينة Ω :

$$B=\{2,4,6\} \rightarrow n_B=3$$

3.2.3. الحدث الأكيد:

الحدث الأكيد هو الحدث الذي يكون وقوعه محقق ومضمون، أي أنه يضم كل العناصر الموجودة في فضاء العينة، وبالتالي فهو تجميع لكل الأحداث البسيطة في التجربة العشوائية.²

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة، ليكن الحدث A حدث ظهور رقم أقل من 7.

الحدث A في هذه التجربة هو حدث أكيد لأنه يضم كل العناصر الموجودة في فضاء العينة، أي أن

الحدث الأكيد هو فضاء العينة: $A=\Omega$

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n_A=6=n_\Omega$$

4.2.3. الحدث المستحيل:

هو الحدث الذي لا يمكن وقوعه في جميع الحالات. ولا يضم أي عنصر من عناصر فضاء

العينة.³ أي أن الحدث المستحيل هو مجموعة خالية: $A=\emptyset$

1- جبار عبد ماضي، الإحصاء والاحتمالات، شركة دار الأكاديميون للنشر والتوزيع، عمان، 2016، ص148.

2- حامد نور الدين، محاضرات وتمارين محلولة في مقياس الاحصاء الوصفي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2019، ص 202.

3- علي ملكاوي، الامتياز في أساسيات الرياضيات، الآن ناشرون وموزعون، عمان، 2018، ص157

مثال:

في تجربة رمي قطعة نقدية مرة واحدة، ليكن الحدث B حدث ظهور الرقم والصورة معا. المعلوم في تجربة رمي قطعة نقدية أن ظهور الوجهين معا في نفس الوقت هو أمر مستحيل، وبالتالي فإن الحدث B هو حدث مستحيل لأن وقوعه غير ممكن، وعدد عناصر 0 :

$$B=\emptyset \rightarrow n_B=0$$

5.2.3. الحدث المعاكس:

إذا كان A حدث لتجربة عشوائية، فإن الحدث المعاكس هو الذي يتحقق إذا لم يتحقق A . ويرمز للحدث المعاكس بالرمز $\bar{A}$ ، فالحدث المعاكس يضم عناصر فضاء العينة Ω التي لا تنتمي إلى A .¹

$$\begin{aligned} \bar{A} \cup A &= \Omega \\ \bar{A} \cap A &= \emptyset \end{aligned}$$

ويتميز الحدث المعاكس بالخصائص التالية:

6.2.3. الأحداث المتنافية:

إذا كان A و B حدثان لتجربة عشوائية، نقول أن A و B متنافيان إذا كان ظهور أحدهما يمنع ظهور الآخر، أي أن وقوعها معا مستحيل، وبالتالي لا تضم مجموعة تقاطع الحدثين أي عنصر من عناصر فضاء العينة:² $A \cap B = \emptyset$

استنتاج: من تعريف الحدثين المتنافيين يمكن القول بأن أي حدثين يمكن أن يقعوا معا في نفس الوقت فهما حدثان غير متنافيين: $A \cap B \neq \emptyset$

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة، لدينا فضاء العينة: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- ليكن الحدث A : ظهور رقم زوجي $A=\{2,4,6\}$

1- Paolo Baldi, **Probability: An Introduction Through Theory and Exercises**, Springer, 2023, pp 45–48

2- قصي حميد السلامي، سيف الدين هاشم قمر، عمر عبد المحسن القيسي، الإحصاء المالي التطبيقي، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2024، ص63

- ليكن الحدث B : ظهور رقم فردي $B=\{1,3,5\}$

- ليكن الحدث C : ظهور رقم أكبر من 4 $C=\{5,6\}$

نقول أن الحدثين A و B متنافيان، لأنه يستحيل أن يكون الرقم الظاهر فرديا وزوجيا في نفس الوقت:
أما الحدثان A و C فهما غير متنافيين، لأن ظهور رقم زوجي وأكبر من 4 في نفس الوقت تتحقق
بظهور الرقم 6: $A \cap B = \{6\}$

7.2.3. الأحداث المستقلة:

إذا كان A و B حدثان لتجربة عشوائية، نقول أن A و B مستقلان إذا كان ظهور أحدهما لا يؤثر ولا يتأثر بظهور الآخر.¹

مثال 1:

في تجربة رمي قطعة نقدية ثلاث مرات: $\Omega=\{PPP,FFF,PPF,PFP,FPP,FFP,FPF,PFF\}$

نسمي A حدث ظهور الرقم في الرمية الأولى و B حدث ظهور صورة في الرمية الثالثة.

نقول أن الحدثين A و B مستقلان لأن ظهور أحدهما لا يؤثر ولا يتأثر بظهور الآخر.

مثال 2:

في تجربة سحب 3 كرات من صندوق يحتوي على كرات مرقمة من 1 إلى 10. على التوالي بإرجاع.

- نسمي الحدث A حدث أن تكون الكرة المسحوبة أولا تحمل رقم 3

- ونسمي الحدث B حدث أن تكون الكرة المسحوبة ثالثا تحمل رقم 3

بما أن السحب بإرجاع، أي أننا نرجع الكرة المسحوبة في كل مرة، فإن الحدثين A و B مستقلان،
لأن نتيجة الحدث B لن تتأثر بنتيجة الحدث A .

1- Barbara Illowsky & Susan Dean, **Introductory Statistics**. 2nd ed, OpenStax, 2023, P173.

الفصل الثالث: مبادئ نظرية الاحتمالات وقاعدة بايز

أما إذا كان السحب بدون إرجاع، فإن الكرة المسحوبة لا يتم إرجاعها إلى الصندوق، وبالتالي فإن الكرة الأولى تسحب من بين 10 كرات، أما الثانية فتسحب من بين 9 كرات،... وبالتالي فإن الأحداث في هذه الحالة غير مستقلة.

4. الاحتمال:

الاحتمال هو إمكانية وقوع حدث ما بعدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها هذا الحدث مقسوماً على العدد الكلي للنتائج الممكنة للتجربة، ويعد هذا التعريف الأقدم للاحتمال.¹

كما يعرف أيضاً بأنه هو أداة رياضية تستخدم لدراسة العشوائية، وتتناول مقياس احتمال وقوع حدث ما (مدى إمكانية حدوثه).²

فالاحتمال هو التعبير الرياضي لوقوع حدث معين عند القيام بتجربة عشوائية، ويعبر عن فرصة وقوع حدث لتجربة عشوائية، يرمز له بالرمز P ويحسب بالعلاقة التالية:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega}$$

حيث:

$P(A)$: احتمال الحدث A .

n_A : عدد الحالات الملائمة للحدث A ، ويقصد بها بكم طريقة يمكن للحدث A أن يتحقق.

n_Ω : عدد الحالات الممكنة، ويقصد بها بكم طريقة يمكن أن تجرى التجربة ككل.

الخصائص الرياضية للاحتمال:

- خاصية عدم السلبية: بما أن الاحتمال عبارة نسبة فهو لا يمكن أن يتعدى الواحد ولا يقبل القيم

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{السالبة}$$

1 - Joseph K. Blitzstein & Jessica Hwang, **Introduction to probability**, 2nd Edition, CRC press, New York, 2019, P 6.

2 - Barbara Illowsky & Susan Dean, Op_cit. P 6.

- احتمال الحدث الأكيد: $P(\Omega) = 1$

- احتمال الحدث المستحيل: $P(\emptyset) = 0$

- احتمال الحدث المعاكس: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

- قانون دي مورغان: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

مثال 1:

مؤسسة تباع 5 أنواع من منتج معين: A، B، C، D، E. حيث أن المنتجات ABC مصنوعة محليا، والمنتجات D و E مستوردة.

نختار عشوائيا منتوجا واحدا، أحسب احتمال أن يكون محلي الصنع؟

الجواب:

لدينا من المعطيات: فضاء العينة لهذه التجربة يضم 5 عناصر تتمثل في المنتجات حيث:

$\Omega = \{A, B, C, D, E\} \rightarrow n_{\Omega} = 5$ أي أن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة يساوي: 5.

نسمي الحدث L حدث الحصول على منتج محلي الصنع، عدد الحالات الملائمة لهذا الحدث هو

عدد المنتجات التي تصنع محليا: $n_L = 3$

الاحتمال المطلوب هو: $P(L) = \frac{n_L}{n_{\Omega}} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$

ملاحظة: يعبر عن الاحتمال أيضا بالنسبة المئوية فنقول:

- احتمال الحصول على منتج مصنع محليا هو 0,6.

- ونعبر عنها أيضا بالنسبة المئوية: 60% أي أننا إذا كررنا التجربة 100 مرة فإننا سنحصل على منتج مصنع محليا في 60 مرة.

مثال 2:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة ليكن:

A: حدث ظهور رقم فردي.

- أحسب احتمال وقوع الحدث A.

الجواب:

- عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو: $n_{\Omega}=6 \rightarrow \Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

- عدد الحالات الملائمة للحدث A هو: $n_A=3 \rightarrow A=\{1,3,5\}$

الاحتمال المطلوب هو:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{3}{6} = 0,5 = 50\%$$

أي أن احتمال ظهور رقم فردي في تجربة حجر النرد مرة واحدة هو: 0,5.

ملاحظة:

في التجارب البسيطة كرمي حجر النرد أو قطعة نقدية فإن عدد الحالات الممكنة هو عدد عناصر المجموعة الأساسية Ω . أما في تجارب السحب فتحسب باستخدام التحليل التوافقي.

5. قواعد حساب الاحتمال:

يخضع الاحتمال إلى مجموعة من القواعد والعمليات التي ترتبط بطبيعة الأحداث وعلاقاتها فيما بينها، وتتمثل تلك القواعد في: قاعدة الجمع، قاعدة الضرب، وقاعدة (نظرية) بايز.

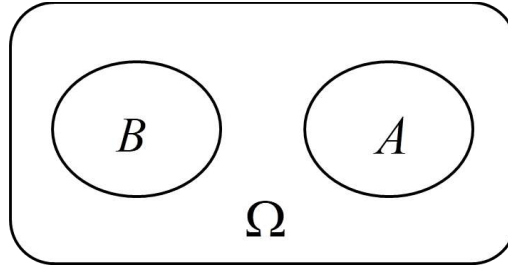
1.5. قاعدة الجمع:

يتم تطبيق قاعدة الجمع في الاحتمالات مع مراعاة ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا.

1.1.5. الجمع في حالة حدثين متنافيين:

إذا كان الحدثان A و B متنافيين ، أي أن وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر، فإن احتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما.¹

فالمجموعتان A و B لا توجد بينهما عناصر مشتركة:



فاحتمال وقوع أحد الحدثين A أو B في حالة التنافي يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

حيث أن رمز الاتحاد (U) في حساب الاحتمالات يقرأ: (أو).

مثال:

توفر لدى طالب مبلغ من المال، فأراد أن يشتري إما جهاز حاسوب أو هاتف ذكي حيث:

A - حدث أن يشتري الطالب حاسوباً. واحتماله: 0,4

B - حدث أن يشتري هاتفاً ذكياً. واحتماله: 0,35

بافتراض أن الطالب لا يمكنه شراء الجهازين معاً، فما احتمال أن يشتري أحدهما.

الجواب:

بما أن الطالب لا يمكنه شراء الجهازين في نفس الوقت فإن الحدثين A و B لا يقعان معاً في

نفس الوقت أي أنهما متنافيان، فاحتمال شراء أحد الجهازين هو أن يشتري الحاسوب أو الهاتف:

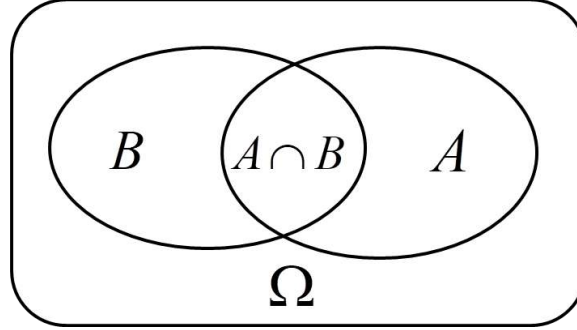
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,4 + 0,35 = 0,75$$

1- أمطير مفتاح عثمان، مرجع سابق، ص 80.

2.1.5. الجمع في حالة حدثين غير متنافيين:

إذا كان الحدثان A و B غير متنافيين ، أي أن وقوع أحدهما لا يمنع وقوع الآخر، فإن احتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحا منه احتمال وقوعهما معا.

حيث توجد عناصر مشتركة بين المجموعتين A و B:



فاحتمال وقوع أحد الحدثين A أو B في حالة عدم التنافي يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة.

- أحسب احتمال الحصول على رقم زوجي أو أكبر من 4.

الجواب:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow n\Omega=6$$

فضاء العينة لهذه التجربة هو:

$$A = \{2,4,6\} \Rightarrow nA=3$$

- ليكن A: حدث ظهور رقم زوجي

$$B = \{5,6\} \Rightarrow nB=2$$

- ليكن B: حدث ظهور رقم أكبر من 4

المطلوب هو إيجاد: $P(A \cup B)$

الحدثان A و B هما حدثان غير متنافيين لأنهما يمكن أن يقعوا في نفس الوقت. أي يمكن أن يكون

الرقم زوجيا وأكبر من 4. وتتوفر هذه الخاصية في الرقم 6 ونكتب: $A \cap B = \{6\}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n_B}{n_\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n_{(A \cap B)}}{n_{\Omega}} = \frac{1}{6}$$
$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = 0,67$$

2.5. قاعدة الضرب:

تطبق قاعدة الضرب في الاحتمالات لحساب احتمال وقوع حدث A وحدث B، إلا أن هذا الحساب يتوقف على مدى استقلالية الحدثين.

1.2.5. الضرب في حالة حدثين مستقلين:

إذا كان A و B حدثين مستقلين، فإن احتمال وقوعهما معا يساوي حاصل ضرب احتماليهما:¹

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

حيث يقرأ رمز التقاطع (∩) في حساب الاحتمالات: (أو).

مثال:

في إطار دراسة سلوك المستهلكين في شركة تسويق إلكتروني، لوحظ أن 40% من الزبائن يطلعون على البريد التسويقي، و 30% يقومون بعملية الشراء.

بافتراض أن قرار الشراء لا يتأثر بالاطلاع على البريد، أحسب احتمال أن يفتح الزبون البريد ويقوم بعملية الشراء.

الجواب:

- نسمي الحدث A حدث اطلاع الزبون على البريد. حيث: $P(A)=0,4$

- نسمي الحدث B حدث قيام الزبون بعملية الشراء. حيث: $P(B)=0,3$

1- حميد عويد مشرف العكلة وآخرون، مبادئ في الإحصاء والاحتمالات، جامعة الملك سعود، (د.س)، ص175. متوفر على: <https://faculty.ksu.edu.sa/> تاريخ الاطلاع: 2025/11/01.

الفصل الثالث: مبادئ نظرية الاحتمالات وقاعدة بايز

نلاحظ أن الحدثين A و B مستقلان لأن قرار الشراء لا يتأثر بالاطلاع على البريد.

احتمال أن يفتح الزبون البريد ويقوم بعملية الشراء هو: $P(A \cap B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$

2.2.5. الضرب في حالة حدثين غير مستقلين:

إذا كان A و B حدثين غير مستقلين (أي أن وقوع أحدهما يتأثر بوقوع الآخر (مشروط))، فإن

احتمال وقوع A و B هو احتمال A مضروب في احتمال B بشرط أن يكون A قد تحقق فعلا.¹

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B / A) \quad \text{ونكتب:}$$

حيث أن: $P(B/A)$ تقرأ: احتمال الحدث B بشرط أن يكون الحدث A قد وقع فعلا، وهو ما

يسمى احتمال الحدث المشروط بحدث آخر أو الاحتمال الشرطي.

6. الاحتمال الشرطي:

إذا كان A و B حدثين غير مستقلين، فإن احتمال وقوع A بشرط أن يكون B قد وقع فعلا هو

الاحتمال الشرطي ونكتب: $P(A/B)$ ، ويعطى الاحتمال الشرطي بالعلاقة التالي:²

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$$

الحدث المطلوب
حساب احتماله

الحدث المعلوم

تطبيق 1:

يحتوي صندوق على 10 كرات مرقمة من 1 إلى 10. نسحب منه كرتين في آن واحد.

1- أحسب عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة

1- Bhimanand Pandurang Gajbhare et al, **Probability and Statistics**, 1st Edition, Rk publications, Coimbatore, 2025, P 30.

2- Francois Cottet-Emard, **Probabilité et tests d'hypothèse**, 1ere édition, De Boeck Supérieur s.a, Bruxelles, 2014, P 58.

الفصل الثالث: مبادئ نظرية الاحتمالات وقاعدة بايز

2- أحسب احتمال أن تحمل الكرتان المسحوبتان أرقاماً أكبر من 2

3- إذا علمت أن الكرتين تحملان أرقاماً زوجية، فما احتمال أن تكون هذه الأرقام أكبر من 5.

الحل:

1- بما أن التجربة هي اختيار بدون ترتيب في آن واحد فإن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة يحسب بالتوفيقات:

$$n_{\Omega} = C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \times 8!} = 45$$

2- نسمي الحدث A أن يكون الرقمان المسحوبان أكبر من 2: $P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}}$

الأرقام الأكبر من 2 داخل الصندوق هي: 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10 عددها: 8

عدد الحالات الملائمة لسحب رقمين أكبر من 2 هو: $n_A = C_8^2 = 28$

$$P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{28}{45} = 0,62 = 62\%$$

3- إذا علمت أن الكرتين تحملان أرقاماً زوجية، فما احتمال أن تكون هذه الأرقام أكبر من 5.

- نسمي الحدث B: أن تكون الأرقام المسحوبة زوجية.

- نسمي الحدث C: أن تكون الأرقام المسحوبة أكبر من 5.

نحن أمام حالة احتمال شرطي: $P(C / B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)}$ العلاقة 1.

$$P(C \cap B) = \frac{n_{(C \cap B)}}{n_{\Omega}} \text{ العلاقة 2.}$$

$n_{(C \cap B)}$: هي عدد الحالات الملائمة لظهور رقمين زوجيين وأكبر من 5 في نفس الوقت.

لدينا: الأرقام الزوجية وأكبر من 5 هي: 6، 8، 10 عددها: 3 أرقام.

$$n_{(C \cap B)} = C_3^2 = 3$$

$$P(C \cap B) = \frac{n_{(C \cap B)}}{n_{\Omega}} = \frac{3}{45} = 0,06$$

من العلاقة 1 نحسب P(B) وهو احتمال ظهور رقمين زوجيين:

الفصل الثالث: مبادئ نظرية الاحتمالات وقاعدة بايز

الأرقام الزوجية هي: 2، 4، 6، 8، 10 عددها: 5.

عدد الحالات الملائمة: $n_B = C_5^2 = 10$

$$P(B) = \frac{n_B}{n_\Omega} = \frac{10}{45} = 0,22$$

وبناء على ما سبق فإن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(C / B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{0,06}{0,22} = 0,27$$

تطبيق 2:

يقدم أحد البنوك خدمة البطاقات المغناطيسية، البطاقة الأولى بطاقة توفير تقوم بعمليات السحب فقط، والبطاقة الثانية بطاقة ما بين البنوك تقوم بالإضافة إلى عمليات السحب، بالدفع الالكتروني. مع العلم أن:

- 50 % من زبائن البنك يملكون البطاقة الأولى.

- 40 % يملكون البطاقة الثانية، 30% يملكون البطاقتين معا

إذا اخترنا أحد الزبائن عشوائيا:

1- أحسب احتمال ألا يملك أي بطاقة.

2- أحسب احتمال أن يملك بطاقة واحدة فقط.

3- أحسب احتمال أن يملك على الأقل بطاقة واحدة.

الحل:

ليكن الحدث: A أن يملك الزبون البطاقة الأولى، وليكن الحدث: B أن يملك الزبون البطاقة الثانية.

لدينا من المعطيات: $P(A) = 0,5$ $P(B) = 0,4$ $P(A \cap B) = 0,3$

1- احتمال ألا يملك أي بطاقة: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$

$$\underbrace{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})}_{\text{قانون دي مورغان}} = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0,5 + 0,4 - 0,3] = 0,4$$

2- احتمال أن يملك بطاقة واحدة فقط: أي إما يملك الأولى ولا يملك الثانية أو يملك الثانية ولا يملك الأولى:

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 + 0,4 - 0,3 = 0,3$$

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0,3$$

3- احتمال أن يملك على الأقل بطاقة واحدة: إما يملك بطاقة واحدة أو بطاقتين

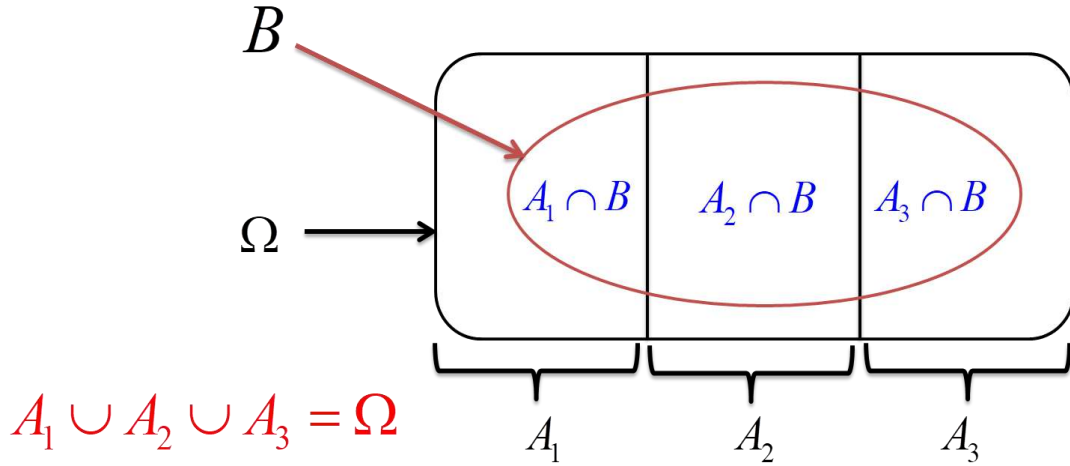
$$\underbrace{P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)}_{\text{بطاقة واحدة}} + \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{بطاقتين}} = 0,3 + 0,3 = 0,6$$

7. قاعدة بايز (احتمال الحدث بعد وقوعه):

تعد نظرية بايز من أهم نظريات الاحتمال التي تساعد على معرفة مصدر حدوث حدث لتجربة عشوائية. وقبل التطرق لنظرية بايز لابد من فهم المبدأ الأساسي لقانون الاحتمال الكلي.

1.7. قانون الاحتمال الكلي:

إذا كان A_1, A_2, A_3 أحداث متنافية فيما بينها مثلى مثلى من فضاء العينة Ω ، وكان الحدث B يحدث إما مع A_1 أو مع A_2 أو مع A_3 كما هو موضح في الشكل التالي:



نلاحظ من الشكل بأن الحدث B يكتب كما يلي:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$$

حيث أن احتماله هو:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

وبتطبيق قانوني الجمع والضرب في الاحتمالات، وباعتبار أن الحدث B غير مستقل عن الأحداث A_1 ، A_2 ، و A_3 فإن احتمال وقوع الحدث B وفق قانون الاحتمال الكلي يعطى بالعلاقة التالية:¹

$$P(B) = P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + P(A_3)P(B / A_3)$$

مثال:

مؤسسة مختصة في بيع العتاد الفلاحي تقتتي نوعا من الجرارات من ثلاثة موزعين بنسب: 35%، 25%، و 40% على الترتيب. مع العلم أن احتمال تأخر الموزع الأول في التسليم هو 0,01 وهو 0,02 و 0,025 بالنسبة للموزع الثاني والثالث على الترتيب.

إذا قامت المؤسسة بشراء جرار واحد:

- ما احتمال أن تستلمه متأخرة؟

1- أمطير مفتاح عثمان، مرجع سابق، ص 88.

الجواب:

نسمي الأحداث:

D1: أن يكون الجرار من الموزع الأول $P(D1)=0,35$

D2: أن يكون الجرار من الموزع الثاني $P(D2)=0,25$

D3: أن يكون الجرار من الموزع الثالث $P(D3)=0,4$

ونسمي الحدث R: التأخر في استلام الجرار، وهو الحدث الذي يقع مع أحد الأحداث الثلاثة السابقة.

- احتمال أن يتأخر الموزع الأول في تسليم الجرار هو $P(R/D1)=0,01$

- احتمال أن يتأخر الموزع الأول في تسليم الجرار هو $P(R/D2)=0,02$

- احتمال أن يتأخر الموزع الأول في تسليم الجرار هو $P(R/D3)=0,025$

ومما سبق فإن احتمال أن تتأخر المؤسسة في استلام الجرار هو:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(D1)P(R/D1) + P(D2)P(R/D2) + P(D3)P(R/D3) \\ &= (0,35 \times 0,01) + (0,25 \times 0,02) + (0,4 \times 0,025) = 0,0185 \end{aligned}$$

احتمال أن تتأخر المؤسسة في استلام الجرار هو: 0,0185.

2.7. قانون بايز:

كما تمت الإشارة إليه سابقاً، فإن قانون بايز يطلق عليه أيضاً احتمال الحدث بعد وقوعه، فهو يحسب احتمال أن يكون حدث A هو مصدر الحدث B، وبالعودة إلى قانون الاحتمال الكلي فإن حساب احتمال أن يكون الحدث A1 هو المتسبب (المصدر) في وقوع الحدث B يكون بالعلاقة التالية:¹

1- Valentin Roussel, **Introduction à l'inférence bayésienne- Cours 2: le théorème de Bayes**. Master, 2020, disponible sur: <https://hal.science/hal-02315971v2/document> consulté le 05/11/2025

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1)P(B / A_1)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + P(A_3)P(B / A_3)}$$

ويمكن تعميم القانون بالعلاقة التالية:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^K P(A_i)P(B / A_i)} = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(B)}$$

مثال:

بالعودة إلى المثال السابق، إذا علمت أن المؤسسة قد استلمت الجرار متأخرة، فما احتمال أن تكون قد اقتنته من الموزع الثاني؟

الجواب:

نلاحظ من خلال السؤال بأن المطلوب هو حساب احتمال الحدث بعد وقوعه، أي احتمال أن يكون حدث الاقتناء من الموزع الثاني هو المتسبب في حدث التأخر، وبالتالي نطبق قانون بايز:

$$\begin{aligned} P(D_2 / R) &= \frac{P(D_2)P(R / D_2)}{P(R)} \\ &= \frac{0,25 \times 0,02}{0,0185} = 0,27 \end{aligned}$$

ملاحظة:

يلاحظ من خلال علاقتي الاحتمال الشرطي وبايز بأن المطلوب في كليهما هو حساب $P(A/B)$ ، وبالرغم من تشابه الرمز في القانونين إلا أن الاختلاف يكمن في العلاقة بين المتغيرين.

ففي الاحتمال الشرطي تكون نتيجة الحدث A مرتبطة بالحدث B أي مشروطا به، بينما في قانون بايز فإن الحدث B يقع في زمن مستقل، ويكون A هو مصدره.

تمارين الفصل الثالث

التمرين 01: يحتوي امتحان مادة الإحصاء على 20 سؤالاً. على الطالب اختيار 3 أسئلة عشوائياً وفي آن واحد والإجابة عنها، إذا علمت أن الطالب بإمكانه الإجابة على 12 سؤالاً من بين الأسئلة المقترحة. فما احتمال:

- 1- الحدث A: أن يجيب الطالب على كل الأسئلة التي يختارها؟
 - 2- الحدث B: أن يجيب على سؤالين على الأقل؟
 - 3- الحدث C: أن يجيب على سؤال واحد على الأكثر؟
 - 4- الحدث D: ألا يجيب على أي سؤال ؟
 - 5- إذا اختار الطالب على التوالي سؤالين، وليكن الحدث E: أن يجيب الطالب على سؤال واحد. أحسب احتمال E في كل حالة: أ. حالة السحب بإرجاع. ب. حالة السحب بدون إرجاع.
- التمرين 02:** في كلية ما يرسب 25% من الطلبة في مقياس الإحصاء، و 10% في الإحصاء والمحاسبة معاً. إذا رسب الطالب في مادة الإحصاء فما احتمال أن يرسب في المحاسبة؟
- التمرين 03:** يتكون فوج من 15 طالبا، منهم 5 ذكور من بينهم 3 أجانب. أما الإناث الجزائريات فعددهن 8.

نختار عشوائياً طالبين في آن واحد:

- 1/ أحسب احتمال A: أن يكونا ذكراًين.
 - 2/ أحسب احتمال B: الحصول على طالبين من جنسية جزائرية.
 - 3/ إذا كان الطالبان ذكراًين فما احتمال أن يكونا جزائريين؟
- تمرين 04:** إذا كان احتمال أن يتأخر طالب عن الحصة الصباحية إذا ذهب إلى الجامعة مشياً هو $\frac{2}{3}$ ، واحتمال أن يتأخر إذا ذهب إلى الجامعة بالحافلة هو $\frac{1}{2}$ ، واحتمال أن يتأخر إذا ذهب إلى الجامعة بالسيارة هو $\frac{1}{4}$.

- 1- أحسب احتمال أن يتأخر الطالب عن الحصة الصباحية إذا اختار وسيلة النقل بطريقة عشوائية؟

- 2- إذا وصل الطالب متأخراً فما احتمال أن يكون قد ذهب إلى الجامعة مشياً؟

تمرين 05:

مصنع لقطع الغيار يحتوي على ثلاث آلات M_1 ، M_2 ، M_3 حيث أن 30% من الإنتاج يصنع بواسطة الآلة M_1 و 30% بواسطة الآلة M_2 و 40% بواسطة الآلة M_3 . كما أن الآلات M_1 ، M_2 ، M_3 تنتج قطعا معيبة بنسبة 1% و 3% و 2% على الترتيب. سحبت قطعة واحدة عشوائيا أحسب ما يلي:

1. احتمال أن تكون القطعة المختارة معيبة؟
إذا كانت القطعة معيبة فما احتمال:
2. أن تكون من إنتاج الآلة M_1 ؟
3. أن تكون من إنتاج الآلة M_2 ؟
4. أن تكون من إنتاج الآلة M_3 ؟

حل تمارين الفصل الثالث

التمرين 01: عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو: $n_{\Omega} = C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = 1140$

1- أن يجيب الطالب على كل الأسئلة التي يختارها، أي أن الأسئلة المختارة يجب أن تسحب من 12:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{220}{1140} = 0,19$$

2- أن يجيب على سؤالين على الأقل، أي أن يسحب سؤالين أو ثلاثة أسئلة من 12

$$P(B) = \frac{C_{12}^2 C_8^1 + C_{12}^3 C_8^0}{C_{20}^3} = \frac{528 + 220}{1140} = 0,656$$

3- أن يجيب على سؤال واحد على الأكثر، أي أن يسحب سؤالاً واحداً من 12 أو يسحبها كلها من 8:

$$P(C) = \frac{C_{12}^1 C_8^2 + C_{12}^0 C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{336 + 56}{1140} = 0,343$$

4- ألا يجيب على أي سؤال، أي أنه يسحب جميع الأسئلة من 8:

$$P(D) = \frac{C_8^3 C_{12}^0}{C_{20}^3} = \frac{56}{1140} = 0,049$$

5- عدد الحالات الممكنة يتغير حسب الحالة:

أ- حالة سحب بإرجاع: $n_{\Omega} = C_{20}^1 C_{20}^1 = 400$

$$P(E) = \frac{n_E}{n_{\Omega}} = \frac{C_{12}^1 C_8^1 + C_8^1 C_{12}^1}{C_{20}^1 C_{20}^1} = \frac{192}{400} = 0,48$$

ب- حالة سحب بدون إرجاع: $n_{\Omega} = C_{20}^1 C_{19}^1 = 380$

$$P(E) = \frac{n_E}{n_{\Omega}} = \frac{C_{12}^1 C_8^1 + C_8^1 C_{12}^1}{C_{20}^1 C_{19}^1} = \frac{192}{380} = 0,5$$

التمرين 02:

الحدث C أن يرسب الطالب في مادة المحاسبة

الحدث S أن يرسب الطالب في مادة الإحصاء

نبحث عن الاحتمال الشرطي:

$$P(C / S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{0,1}{0,25} = 0,4$$

التمرين 03:

عدد الحالات الممكنة للتجربة: $n_{\Omega} = C_{15}^2 = 105$

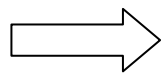
$$P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{10}{105} = 0,095 \quad -1$$

$$P(B) = \frac{n_B}{n_{\Omega}} = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} = \frac{45}{105} = 0,428 \quad -2$$

3-الاحتمال الشرطي:

$$P(B / A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

احتمال أن يكونا ذكراين وجزائريين
في نفس الوقت



$$P(B \cap A) = \frac{C_2^2}{C_{15}^2} = \frac{1}{105} = 0,009$$

$$P(B / A) = \frac{0,009}{0,095} = 0,094$$

التمرين 04:

التجربة تحتوي على 3 أحداث هي:

A: الذهاب إلى الجامعة مشيا

B: الذهاب إلى الجامعة بالحافلة

C: الذهاب إلى الجامعة بالسيارة

الفصل الثالث: مبادئ نظرية الاحتمالات وقاعدة بايز

احتمال اختيار المشي هو $P(A) = \frac{1}{3}$ وهو نفسه بالنسبة للحافلة والسيارة أي

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

الأحداث الثلاثة تحقق الشرطين الآتيين:

أ- أنها متنافية فيما بينها أي لا يمكن أن يختار الطالب وسيلتين في نفس الوقت

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \quad \text{ب-}$$

نرمز بالرمز: R لحدث تأخر الطالب

$$\boxed{\text{احتمال أن يتأخر بالذهاب مشيا}} \leftarrow P(R / A) = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\text{احتمال أن يتأخر بالذهاب بالحافلة}} \leftarrow P(R / B) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{احتمال أن يتأخر بالذهاب بالسيارة}} \leftarrow P(R / C) = \frac{1}{4}$$

1- احتمال أن يتأخر الطالب هو $P(R)$:

$$P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap B) + P(R \cap C)$$

$$\rightarrow = P(A)P(R / A) + P(B)P(R / B) + P(C)P(R / C)$$

$$\rightarrow = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{17}{36} = 0,472$$

2- إذا تأخر الطالب فإن احتمال أن يكون قد ذهب مشيا هو احتمال الحدث بعد وقوعه (نظرية بايز):

$$P(A / R) = \frac{P(A)P(R / A)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{9}}{0,472} = 0,47$$

التمرين 05:

D : حدث أن تكون القطعة معيبة

M1: أن تكون القطعة من صنع الآلة الأولى

M2: أن تكون القطعة من صنع الآلة الثانية

M3: أن تكون القطعة من صنع الآلة الثالثة

- احتمال أن تكون القطعة من صنع الآلة الأولى هو $P(M_1) = 0,3$

- احتمال أن تكون القطعة من صنع الآلة الثانية هو $P(M_2) = 0,3$

- احتمال أن تكون القطعة من صنع الآلة الثالثة هو $P(M_3) = 0,4$

الآلات الثلاث تحقق الشرطين الآتيين:

أ- أنها متنافية فيما بينها أي لا يمكن لقطعة واحدة أن تصنع من آلتين في نفس الوقت

$$P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) = 1 \quad \text{ب-}$$

ولدينا أيضا من المعطيات:

$$P(D / M_1) = 0,01$$

$$P(D / M_2) = 0,03$$

$$P(D / M_3) = 0,02$$

1- احتمال أن تكون القطعة معيبة:

$$P(D) = P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3)$$

$$\rightarrow = P(M_1)P(D / M_1) + P(M_2)P(D / M_2) + P(M_3)P(D / M_3)$$

$$\rightarrow = (0,3 \times 0,01) + (0,3 \times 0,03) + (0,4 \times 0,02) = 0,02$$

2- احتمال أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة M1:

$$P(M_1 / D) = \frac{P(M_1)P(D / M_1)}{P(D)} = \frac{0,3 \times 0,01}{0,02} = 0,15$$

3- احتمال أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة M2:

$$P(M_2 / D) = \frac{P(M_2)P(D / M_2)}{P(D)} = \frac{0,3 \times 0,03}{0,02} = 0,45$$

4- احتمال أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة M3:

$$P(M_3 / D) = \frac{P(M_3)P(D / M_3)}{P(D)} = \frac{0,4 \times 0,02}{0,02} = 0,4$$

الفصل الرابع:

المتغير العشوائي

➤ تعريف المتغير العشوائي

➤ أنواع المتغير العشوائي

تمهيد:

ترتبط نتائج العديد من الظواهر الاقتصادية بعنصري الصدفة وعدم التأكد من النتائج قبل إجرائها، حيث طور المختصون مفهوم المتغير العشوائي الذي يعد أداة رياضية تستخدم لترميز الظواهر العشوائية بأعداد حقيقية أو قيم عددية مرتبة وفق تسلسل منطقي حسب طبيعتها. حيث أن هذا الأجراء يسمح في مراحل لاحقة بدراسة تلك الظواهر وتحليلها باستخدام المعادلات والقوانين الرياضية، الأمر الذي يمكن الباحث من الانتقال من التعامل مع عناصر فضاء العينة إلى معالجة قيم عددية.

1. تعريف المتغير العشوائي:

يعرف المتغير العشوائي بأنه تطبيق رياضي يرفق كل عنصر من عناصر فضاء العينة بقيمة عددية.¹ ويرمز عادة للمتغير العشوائي بالرمز X . فهو مجموعة تضم قيما عدديا يعبر كل واحد منها على عنصر من عناصر فضاء العينة.

2. أنواع المتغير العشوائي:

تنقسم المتغيرات العشوائية إلى نوعين: متغير عشوائي متقطع ومتغير عشوائي مستمر.

1.2. المتغير العشوائي المتقطع:

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ عددا محدودا من القيم، أو عددا غير محدود من القيم ولكن قابل للعد.² مثل: عدد السيارات المنتجة من مؤسسة ما، عدد الأسهم المخصصة للفرد في شركة مساهمة... إلخ.

مثال:

في تجربة رمي قطعة نقدية مرتين متتاليتين. ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الصور الظاهرة. ما هي قيم X ؟

1- جاسم محمد التميمي ووسام مالك داود، الإحصاء الحيوي باستخدام برنامج SPSS، مركز الكتاب الأكاديمي، عمان، 2016، ص 89.

2- Pasquale De Marco, **Statistics Reinvented: A Comprehensive Guide for Modern Data Analysis**. CRC PRESS, 2023, P 29

الجواب:

نلاحظ من معطيات المثال بأن رمي قطعة نقدية مرتين ينتج عنه 4 إمكانيات هي فضاء العينة:

نرمز للرقم بالرمز: P وللصورة بالرمز: F

$$\Omega = \{PP, FF, FP, PF\}$$

وبما أن المتغير العشوائي هو عدد الصور الظاهرة، فإن قيمه هي:

PP: عدد الصور الظاهرة هو: 0

FF: عدد الصور الظاهرة هو: 2

FP: عدد الصور الظاهرة هو: 1

PF: عدد الصور الظاهرة هو: 1

نلاحظ مما سبق أن عدد الصور يأخذ إحدى القيم التالية: 0، 1، أو 2 ومنه فإن قيم X هي:

$$X = \{0, 1, 2\}$$

وهو متغير عشوائي منقطع لأن قيمه محدودة وقابلة للعد.

1.1.2. التوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي المنقطع:

إذا كان X متغير عشوائي منقطع لتجربة عشوائية حيث: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ وكانت

الاحتمالات المقابلة لقيم المتغير العشوائي هي $P(X = x_i)$

فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي هو إرفاق كل قيمة من قيم X بالاحتمال المقابل لها.¹ ويتم

مقابلة قيم المتغير العشوائي والاحتمالات المقابلة في الجدول التالي:

X_i	X_1	X_2		X_n	Σ
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$		$P(X=x_n)$	1

ويجب تحقق شرطين أساسيين في التوزيع الاحتمالي هما:

1- محمد الدويك، المثالي في الرياضيات، دار عالم الثقافة للنشر والتوزيع، عمان، 2016، ص 328.

الفصل الرابع: المتغير العشوائي

الشرط الأول: كل الاحتمالات تكون موجبة $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$

الشرط الثاني: مجموع الاحتمال يساوي الواحد. $\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرتين. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي حاصل الفرق بين الرقمين الظاهرين (طرح الرقم الظاهر في الرمية الثانية من الرقم الظاهر في الرمية الأولى).

1- ما هي قيم X ؟ وما نوعه؟

2- كون جدول التوزيع الاحتمالي لـ X ؟

الجواب:

لتحديد قيم المتغير العشوائي X يجب أولاً تحديد عناصر فضاء العينة. وبما أن التجربة هي رمي حجر النرد مرتين، فإن الرمية الأولى تقبل 6 حالات وهي الأرقام من 1 إلى 6، وكذلك الحال بالنسبة للرمية الثانية.

عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو $n_\Omega = 6^2 = 36$

فقيم المتغير العشوائي هي نتيجة طرح نتيجة الرمية الثانية من نتيجة الرمية الأولى، كما هو مبين

في الجدول التالي:



رمية 1	1	2	3	4	5	6
رمية 2	0	-1	-2	-3	-4	-5
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

الفصل الرابع: المتغير العشوائي

1- من الجدول السابق فإن قيم المتغير العشوائي هي:

$$X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

وهو متغير عشوائي متقطع لأن قيمه محدودة وقابلة للعد.

2- جدول التوزيع الاحتمالي:

لتشكيل جدول التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يجب حساب الاحتمالات المقابلة لقيمه، فمثلا القيمة 0

$$\text{ظهرت 6 مرات من بين 36 حالة ممكنة، أي أن الاحتمال المقابل لها هو: } \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

وبتطبيق نفس الطريقة مع جميع القيم نتحصل على جدول التوزيع الاحتمال كما يلي:

X_i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	Σ
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

نلاحظ من خلال قيم الجدول أن شرطي التوزيع الاحتمال محققان وهما:

- كل قيمة للاحتمال محصورة بين 0 و 1.

- مجموع الاحتمالات يساوي: 1

♦ التمثيل البياني للتوزيع الاحتمال المتقطع:

يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع بأعمدة متقطعة ترسم على معلم بمحورين، حيث توضع على المحور الأفقي قيم المتغير العشوائي، وعلى المحور العمودي توضع قيم الاحتمالات المقابلة.¹

مثال:

في رمي قطعة نقدية مرتين. المطلوب هو تمثيل التوزيع الاحتمالي لعدد الصور الظاهرة بيانيا.

1- Allan G . Bluman, **Elementary Statistics: A Step By Step Approach**, 9th Edition, McGraw-Hill Education, New York, 2014, P 260.

الجواب:

نعلم بأن رمي قطعة نقدية مرتين يؤدي إلى وقوع 8 حالات ممكنة، يعرفها فضاء العينة كما يلي:

$$\Omega = \{PP, FF, PF, FP\}$$

قيم X هي: $X = \{0, 1, 2\}$ ، والاحتمالات المقابلة لها هي:

لما $X=0$ ، هذا معناه عدم ظهور أية صورة (PP)، الاحتمال المقابل هو: $P(X=0) = \frac{1}{4}$

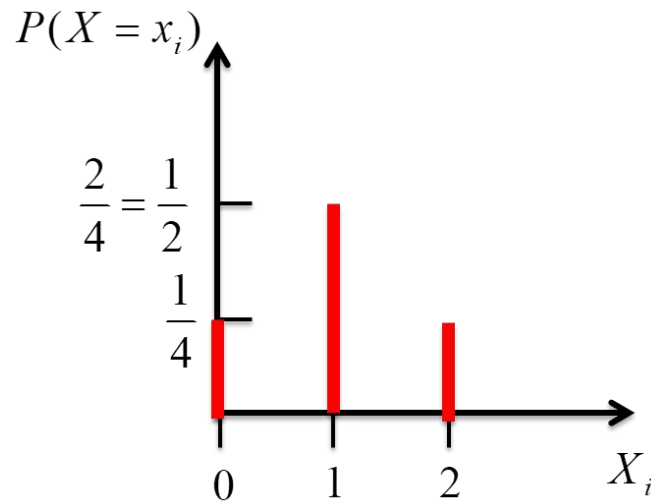
لما $X=1$ ، هذا معناه ظهور صورة واحدة (FP و PF)، الاحتمال المقابل هو: $P(X=1) = \frac{2}{4}$

لما $X=2$ ، هذا معناه ظهور صورتين (FF)، الاحتمال المقابل هو: $P(X=2) = \frac{1}{4}$

أي أن التوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي يكون كما هو موضح في الجدول التالي:

$X=x_i$	0	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

التمثيل البياني لهذا التوزيع يكون كما يلي:



2.1.2. دالة التوزيع:

تستخدم دالة التوزيع لحساب احتمالات مجموعة من القيم، ويطلق عليها أيضا دالة التوزيع التراكمي، ذلك أن الغاية الأساسية من حسابها هي التعرف على قيمة الاحتمالات المتجمعة إلى غاية قيمة معينة من قيم المتغير العشوائي.¹

فإذا كان X المتغير العشوائي المعروف على فضاء العينة لتجربة عشوائية، فإن دالة التوزيع $F(X)$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$F(xi) = P(X \leq xi) = \sum_{X=x_1}^{X=xi} P(X = xi)$$

ملاحظة 1: في حالة المتغير العشوائي المنقطع فإن قيم X لا تقبل الأعداد العشرية، حيث:

$$P(X < xi) = P(X \leq x_{(i-1)}) = F(x_{(i-1)})$$

$$\text{مثل: } P(X < 2) = P(X \leq 1) = F(1)$$

ملاحظة 2: إذا طلب منا حساب احتمال أن تكون قيمة X أكبر من قيمة معينة، نكتبها بدلالة دالة التوزيع وفق العلاقة التالي:

$$P(X > xi) = 1 - P(X \leq xi) = 1 - F(xi)$$

$$\text{مثل: } P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2)$$

ملاحظة 3: إذا طلب منا حساب احتمال أن تكون قيمة X تنتمي لمجال معين من القيم، فإنها تكتب بدلالة دالة التوزيع كما يلي:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

$$\text{مثل: } P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = F(6) - F(3)$$

الفصل الرابع: المتغير العشوائي

مثال:

إليك التوزيع الاحتمال الذي يمثل عدد الزبائن الذين يشترون منتجاً من مؤسسة A في اليوم.

$X=x_i$	0	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2	1

- أوجد قيم دالة التوزيع لهذا التغير.

الجواب:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{X=x_1}^{X=x_i} P(X = x_i) \quad \text{لإيجاد قيم دالة التوزيع نطبق العلاقة التالية:}$$

- نحسب قيم دالة التوزيع لكل قيمة من قيم X :

$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = 0,1$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,1 + 0,3 = 0,4$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,3 + 0,4 = 0,8$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,1 + 0,3 + 0,4 + 0,2 = 1$$

تفسر القيمة: $F(1)$ بأن 40% من المبيعات اليومية لا تتجاوز زبون واحد.

♦ التمثيل البياني لدالة التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع:

تمثل قيم دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع بقطع أفقية متقطعة ترسم على معلم بمحورين، حيث توضع على المحور الأفقي قيم المتغير العشوائي، وعلى المحور العمودي توضع قيم دالة التوزيع المقابلة.

مثال:

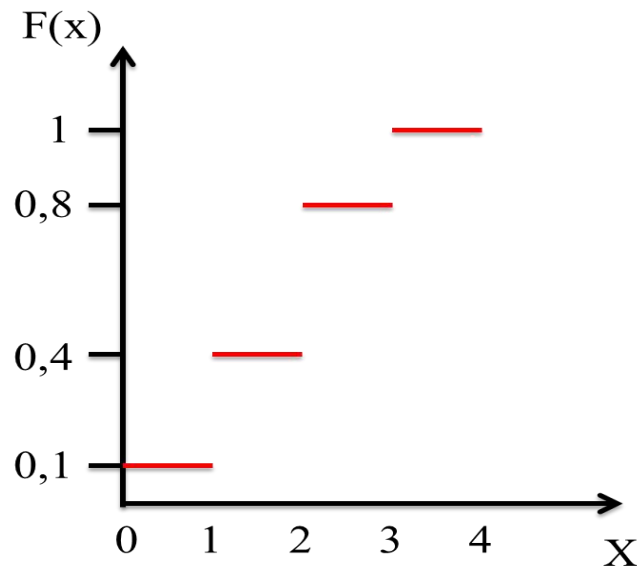
مثل بياناً قيم دالة التوزيع للمثال السابق.

الفصل الرابع: المتغير العشوائي

الجواب: لدينا من المثال:

$X=x_i$	0	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2	1
$F(X)$	0,1	0,4	0,8	1	

التمثيل البياني لهذا التوزيع يكون كما يلي:



3.1.2. التوقع الرياضي:

يعبر التوقع الرياضي عن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي، ويمثل الوسط الحسابي لقيم X موزونة باحتمالاتها، حيث يعرف بالعلاقة التالية:¹

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i P_i = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n$$

حيث: $E(x)$: الأمل الرياضي

X_i : قيم المتغير العشوائي

P_i : الاحتمال المقابل لقيمة المتغير العشوائي

1- مبارك أسير ديب، مبادئ في الاحتمالات والاحصاء، اللانقية: كلية العلوم، جامعة تشرين، 2009/2008، ص

خواص التوقع الرياضي:

يتميز التوقع بمجموعة من الخصائص الرياضية، نلخصها في ما يلي:

♦ التوقع الرياضي لقيمة ثابتة يساوي القيمة الثابتة نفسها: $E(a) = a$

$$E(a) = \sum_{i=1}^n aP_i = a \sum_{i=1}^n P_i = a \times 1 = a \quad \text{الإثبات:}$$

♦ إذا أضيفت أو طرحت قيمة ثابتة a من قيم المتغير X فإن التوقع الرياضي للقيم الجديدة يساوي

توقع القيم الأصلية مضافا إليه (أو مطروحا منه) الثابت a : $E(X \pm a) = E(X) \pm a$

$$E(X + a) = \sum_{i=1}^n (X + a)P_i = \sum_{i=1}^n XP_i + \sum_{i=1}^n aP_i = E(X) + a \quad \text{الإثبات:}$$

♦ إذا ضربت أو قسمت قيم المتغير X في (على) قيمة ثابتة a فإن الأمل الرياضي للقيم الجديدة

يساوي التوقع الأصلي مضروبا في (أو مقسوما على) الثابت a : $E(aX) = aE(X)$

$$E(aX) = \sum_{i=1}^n (aX)P_i = a \sum_{i=1}^n XP_i = aE(X) \quad \text{الإثبات:}$$

♦ إذا كان a و b عددين حقيقيين فإن: $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$

الإثبات:

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^n (aX + b)P_i = \sum_{i=1}^n aXP_i + \sum_{i=1}^n bP_i = a \sum_{i=1}^n XP_i + b \sum_{i=1}^n P_i = aE(X) + b$$

♦ التوقع الرياضي لمجموع (أو فرق) متغيرين عشوائيين يساوي مجموع (أو فرق) توقعيهما.

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^n (X + Y)P_i = \sum_{i=1}^n XP_i + \sum_{i=1}^n YP_i = E(X) + E(Y) \quad \text{الإثبات:}$$

4.1.2. التباين:

يقيس التباين مدى تشتت التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي، فكلما كانت قيمته صغيرة كلما كان

التوزيع الاحتمالي متمركز حول قيمة التوقع، ويعرف تباين المتغير العشوائي المتقطع بأنه مجموع مربعات

فروقات قيم المتغير العشوائي عن توقعها الرياضي، ويعطى بالعلاقة الآتية:¹

1 - Louis Houde, **MODULE 6 Variable aléatoire : Analyse quantitative de probleme de gestion**, Université du Québec à Trois-Rivières.

<https://oraprdnt.uqtr.quebec.ca/Gscdepot/paf1010/12/M6.pdf> récupéré le :13/11/2025.

$$V(X) = \sum_{i=1}^n [X_i - E(X)]^2 \times P_i$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad \text{أو:}$$

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] \quad \text{أو}$$

ملاحظة: الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين: $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

خواص التباين:

♦ تباين القيمة الثابتة a يساوي الصفر: $V(a) = 0$

$$V(a) = E(a^2) - [E(a)]^2 = a^2 - a^2 = 0 \quad \text{الإثبات:}$$

♦ إذا أضيفت أو طرحت قيمة ثابتة a من قيم المتغير X فإن تباين القيم الجديدة يساوي تباين القيم

$$V(X \pm a) = V(X) \quad \text{الأصلية نفسها.}$$

$$V(X + a) = E[((X + a) - E(X + a))^2] \quad \text{الإثبات:}$$

$$= E[((X + a) - (E(X) + a))^2]$$

$$= E[(X + a - E(X) - a)^2]$$

$$= E[(X - E(X))^2]$$

$$= V(X)$$

♦ إذا كان a و b عددين حقيقيين فإن: $V(aX + b) = a^2 V(X)$

$$V(aX + b) = E[((aX + b) - E(aX + b))^2] \quad \text{الإثبات:}$$

$$= E[(aX + b - aE(X) - b)^2]$$

$$= E[(aX - aE(X))^2] = E[(a(X - E(X)))^2]$$

$$= a^2 E[(X - E(X))^2] = a^2 V(X)$$

♦ إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين فإن: $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

الإثبات:

$$\begin{aligned}
 V(X + Y) &= E \left[((X + Y) - E(X + Y))^2 \right] \\
 &= E \left[((X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2 \right] \\
 &= E \left[(X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2(X - E(X))(Y - E(Y)) \right] \\
 &= E \left[(X - E(X))^2 \right] + E \left[(Y - E(Y))^2 \right] + 2E \left[(X - E(X))(Y - E(Y)) \right] \\
 &= V(X) + V(Y)
 \end{aligned}$$

تطبيق:

نريد اختيار طالبين عشوائيا وفي آن واحد من مجموعة مكونة من 3 ذكور وأنثيين. ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الذكور المتحصل عليه.

1- كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

2- ما هو عدد الذكور المتوقع الحصول عليه.

3- أحسب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي.

الحل:

لدينا تجربة سحب في آن واحد، نرمز للذكور بالرمز G وللإناث بالرمز F .

فضاء العينة لهذه التجربة هو: $\Omega = \{GG, FF, GF\}$

ملاحظة: العنصر GF هو ظهور ذكر وأنثى، وبما أن السحب في آن واحد أي أن الترتيب غير مهم يظهر مرة واحدة في فضاء العينة. وأما في حالة السحب على التوالي فإن ظهور ذكر وأنثى يكتب بعنصرين هما: GF (ذكر ثم أنثى) و FG (أنثى ثم ذكر).

1- لتكوين جدول التوزيع الاحتمالي نحدد قيم المتغير ونحسب الاحتمالات المقابلة.

من فضاء العينة يتبين أن قيم X (عدد الذكور) هي: $X = \{0, 1, 2\}$.

$X=0$: عدم ظهور أي ذكر

$$P(X = 0) = \frac{n_{x=0}}{n_{\Omega}} = \frac{C_3^0 C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$X=1$: ظهور ذكر واحد

$$P(X = 1) = \frac{n_{x=1}}{n_{\Omega}} = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$X=2$: ظهور ذكرين

$$P(X = 2) = \frac{n_{x=2}}{n_{\Omega}} = \frac{C_3^2 C_2^0}{C_5^2} = \frac{3}{10} = 0,3$$

جدول التوزيع الاحتمال يكون كما يلي:

$X=x_i$	0	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	0,1	0,6	0,3	1

2- عدد الذكور المتوقع الحصول عليه هو التوقع الرياضي للمتغير العشوائي، يحسب بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i P_i = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n$$

العدد المتوقع الحصول عليه من الذكور في هذه التجربة هو ذكر واحد. (يتم تقريب النتيجة)
ملاحظة: يتميز التوقع الرياضي بتأثره بأوزان القيم، شأنه في ذلك شأن الوسط الحسابي، أي قيمة التوقع غالبا تدور حول قيمة X التي يقابلها أكبر احتمال.

3- لإيجاد قيمة الانحراف المعياري نحسب قيمة التباين بالعلاقة التالية:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$[E(X)]^2 = 1,2^2 = 1,44 \quad \text{لدينا:}$$

القيمة $E(X^2)$ هي قيمة التوقع الرياضي لمربعات القيم نحسبها من الجدول كما يلي:

الفصل الرابع: المتغير العشوائي

$X=x_i$	0	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	0,1	0,6	0,3	1
X^2	0	1	4	
$X^2 \cdot P_i$	0	0,6	1,2	1,8

نعوض قيمة $E(X^2)=1,8$ في علاقة حساب التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1,8 - 1,44 = 0,36$$

الانحراف المعياري هو:

5.1.2. عزوم المتغير العشوائي المنقطع:

تستخدم العزوم في الإحصاء ونظرية الاحتمالات لتقديم وصف شامل وموجز حول خصائص التوزيعات الاحتمالية أو مجموعة بيانات. فهي بمثابة المقاييس التي تحدد شكل التوزيع وموقعه وتشتته. وتنقسم العزوم إلى عزوم مركزية وعزوم لا مركزية:¹

1.5.1.2. العزوم المركزية:

إذا كان X متغير عشوائي متقطع بتوقع رياضي $E(X)$ فإن المتغير Z حيث: $Z=X-E(X)$ ، يسمى متغيراً عشوائياً مركزياً، حيث أن العزم المركزي من الدرجة r هو التوقع الرياضي للمتغير Z^r ونكتب:

$$M_r = E[X - E(X)]^r = \sum_{i=1}^n [X - E(X)]^r P(X = x_i)$$

ومن علاقة العزم المركزي يمكن استنتاج ما يلي:

لما $r=0$:

$$M_0 = E[X - E(X)]^0 = 1$$

لما $r=1$: وبتطبيق خاصية الطرح على التوقع نجد: $M_1 = E[X - E(X)]^1 = E(X) - E(X) = 0$

لما $r=2$: فإن قيمة العزم المركزي من الدرجة 2 هي نفسها قيمة التباين:

$$M_2 = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = V(X)$$

1- Laurent SMOCH, Mesures Et Analyses Statistiques De Données Probabilites, Université du Littoral- Côte d'Opale, La Citadelle, 2012, P 30. <http://www-lmpa.univ-littoral.fr/~smoch/documents/M1-GSI/probas-Master1-GSI-chapitre3.pdf> (Récupéré le 14/11/2025)

2.5.1.2. العزوم اللامركزية:

تعد العزوم اللامركزية من أهم الأدوات التي تستعمل في وصف المتغير العشوائي، ويعرف العزم اللامركزي من الدرجة r بالعلاقة التالية:

$$m_r = E(X^r) = \sum_{i=1}^n X_i^r P(X = xi)$$

ويتبين من علاقة العزم اللامركزي ما يلي:

$$m_0 = E(X^0) = 1 \quad \text{لما } r=0 \text{ فإن العزم يساوي 1}$$

$$m_1 = E(X^1) = E(X) \quad \text{لما } r=1 \text{ فإن العزم يساوي التوقع}$$

لما $r=2$ نتحصل على: $m_2 = E(X^2)$ وهي علاقة تستخدم في حساب التباين.

❖ علاقة العزوم اللامركزية بالعزوم المركزية:

العزم المركزي الثاني (التباين) يساوي الفرق بين العزم اللامركزي الثاني ومربع العزم اللامركزي الأول:

$$M_2 = m_2 - m_1^2$$

6.1.2. الدالة المولدة للعزوم:

الدالة المولدة للعزوم هي أداة مهمة تساعد على حساب العزوم لمختلف الرتب، وتستخدم أيضا في تحديد التوزيعات واختبار مدى التقارب. فإذا كان X متغير عشوائي منقطع، وكان $M_x(t) = e^{tx}$ حيث t متغير عشوائي حقيقي، فإن:

للمتغير X ، وتعطى في حالة المتغير المنقطع بالعلاقة التالي:¹

$$M_x(t) = \sum_{i=1}^n e^{tx_i} P(X = xi)$$

2.2. المتغير العشوائي المستمر:

يعرف المتغير العشوائي المستمر بأنه المتغير الذي يأخذ عددا لانهائيا من القيم داخل مجال معين، مثل: دخل الأسر، الوقت المستغرق لإنتاج وحدة من منتج معين، أوزان مجموعة من الطلبة..... إلخ.

الفصل الرابع: المتغير العشوائي

وبما أن عدد القيم الممكنة لـ X غير محدود فإن توزيعه الاحتمالي يختلف عن توزيع المتغير العشوائي المنقطع، كما أن إيجاد احتمال قيمة واحدة للمتغير المستمر هو أمر مستحيل $P(X=x_i)=0$ ، لذا يستعمل هذا النوع من التوزيعات لحساب احتمال أن تنتمي قيمة X إلى مجال معين من القيم.

1.2.2. دالة كثافة الاحتمال:

يعبر عن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر بدالة غير سالبة تسمى دالة كثافة الاحتمال. حيث يمكن من خلال هذه الدالة إيجاد احتمالات الأحداث المعبر عنها بقيم المتغير العشوائي.

يرمز لهذه الدالة بالرمز $f(x)$ وتتميز بخاصيتين أساسيتين:¹

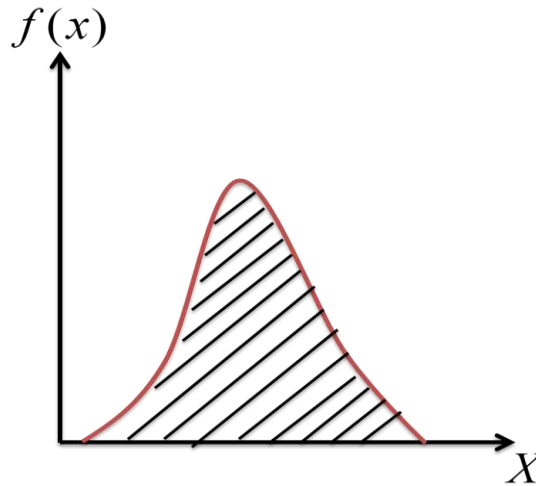
$$1) f(x) \geq 0$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

حيث تشير الخاصية الأولى إلى أن دالة الكثافة تكون دائماً موجبة، وتشير الثانية إلى أن إجمالي

المساحة تحت منحنى الدالة يساوي 1.

وتمثل دالة الكثافة الإحصائية للمتغير المستمر بمنحنى متصل يأخذ الشكل التالي:



حيث أن المساحة المحصورة بين خط المنحنى ومحور الفواصل تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية

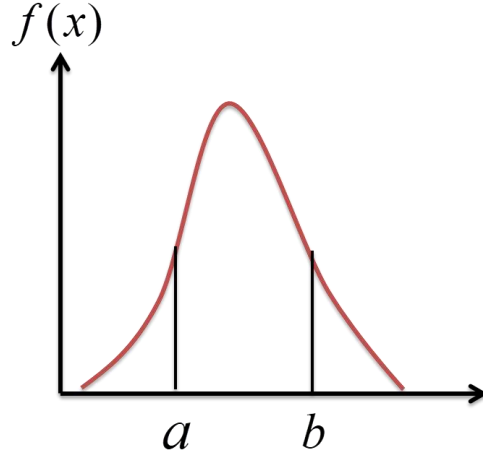
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \text{ والتي تساوي الواحد الصحيح.}$$

1 - Douglas C.Montgomery, George C.Runger, **Applied statistics and probability for engineers**, 7th Edition, Wiley, Hoboken New Jersey, 2018, P68.

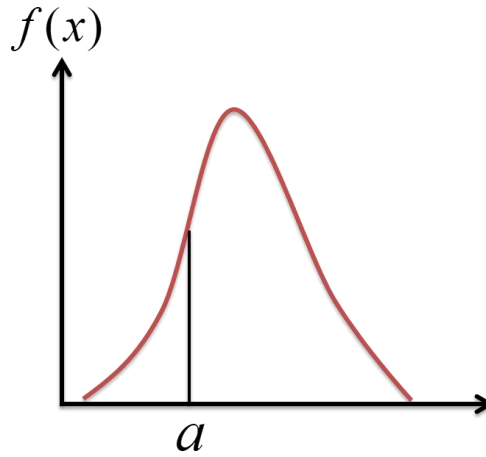
الفصل الرابع: المتغير العشوائي

وانطلاقاً من منحنى دالة كثافة الاحتمال، فإن حساب أي احتمال لقيم X يكون بحساب التكامل الرياضي للدالة $f(x)$:

$$P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx -$$



$$P(x \leq a) = P(x < a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx -$$



ملاحظة 1:

لا تتأثر قيمة الاحتمال بغلق أو فتح المجال، أي أن الإشارة ($\leq$) تعطي نفس الاحتمال الذي تعطيه الإشارة ($<$)، لأن القيم متصلة ولا يوجد فرق جوهري بين القيمة والتي قبلها أو التي بعدها.

$$P(x \geq a) = P(x > a) \quad \text{و} \quad P(x \leq a) = P(x < a) \quad \text{أي أن:}$$

ملاحظة 2:

يتم حساب الاحتمال بإجراء التكامل لدالة كثافة الاحتمال كما يلي:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

حيث أن $g(x)$ هي الدالة الأصلية لدالة الكثافة $f(x)$ ، فإذا كانت دالة الكثافة من الشكل: $f(x) = x^n$

$$g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

فإن الدالة الأصلية لها هي:

مثال:

لتكن دالة كثافة الاحتمال المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1- أوجد قيمة الثابت c .

2- أحسب $P(1 \leq x \leq 2)$

الإجابة:

1- حتى تكون الدالة السابقة دالة كثافة إحتمال يجب توفر الشرطين:

$$1) f(x) \geq 0$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

الشرط الأول: محقق لأن الدالة موجبة مهما كانت قيمة المتغير x .

الشرط الثاني: نجري التكامل الرياضي لدالة الكثافة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx + \int_3^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^3 cx^2dx + \int_3^{+\infty} 0dx = c \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = c \left(\frac{27}{3} - 0 \right) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

لتصبح الصيغة النهائية لدالة كثافة الاحتمال هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2- حساب الاحتمال:

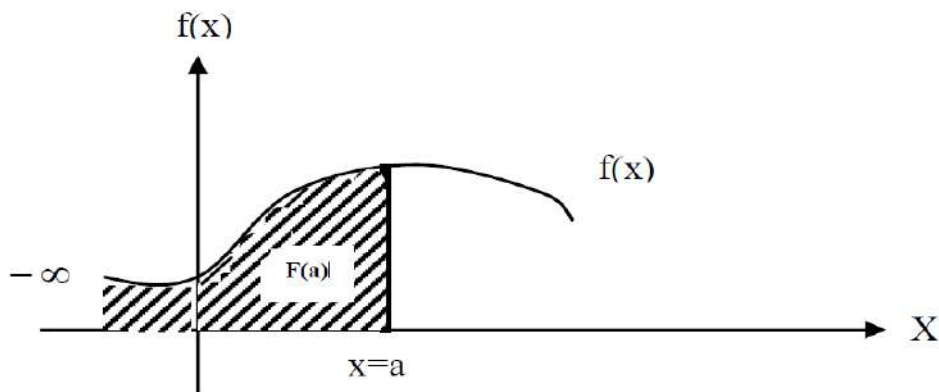
$$\begin{aligned} P(1 \leq x \leq 2) &= \int_1^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{9} \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right] = \frac{7}{27} \end{aligned}$$

2.2.2. دالة التوزيع:

تقيس دالة التوزيع الاحتمالات المتراكمة لمجموعة من قيم المتغير X ، ويرمز لها بالرمز $F(X)$ ،

حيث تعطى بالعلاقة التالية:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$



ملاحظة:

تساعد دالة التوزيع على حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير العشوائي تنتمي إلى مجال معين،

حيث:

$$P(x \leq a) = P(x < a) = F(a)$$

$$P(x > a) = P(x \geq a) = 1 - F(a)$$

$$P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b) = F(b) - F(a)$$

مثال:

انطلاقاً من دالة كثافة الاحتمال للمثال السابق، أوجد دالة التوزيع ومثلها بيانياً ثم أحسب:

$$P(1 < X < 2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

لدينا من تعريف دالة التوزيع:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

نبحث عن قيم دالة التوزيع حسب مجالات تعريف دالة الكثافة الاحتمالية:

- لما $X < 0$:

$$F(x_i) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$$

- لما $0 \leq X \leq 3$:

$$\begin{aligned} F(x_i) &= \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \frac{1}{9} x^2 dx \\ &= 0 + \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^x = \frac{x^3}{27} \end{aligned}$$

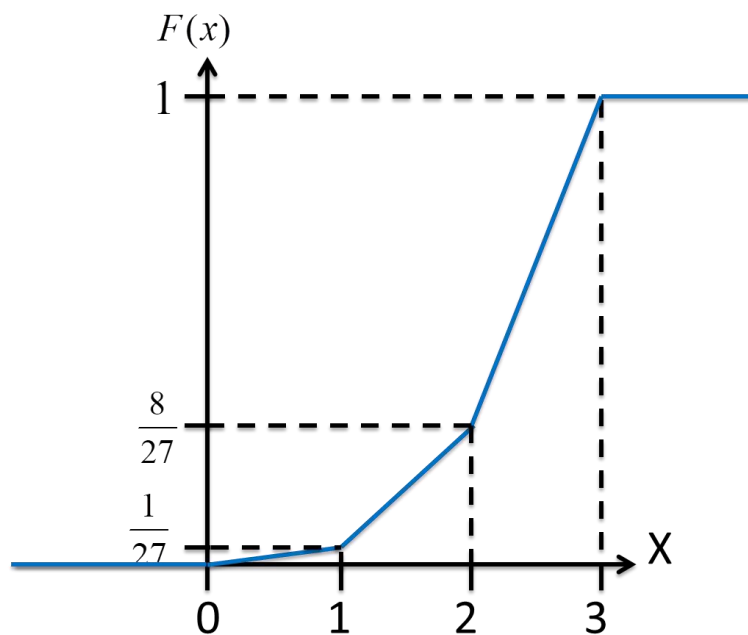
- لما: $X > 3$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^3 \frac{1}{9} x^2 dx + \int_3^1 0 dx \\ &= 0 + \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 + 0 \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{27}{3} - \frac{0}{3} \right] = 1 \end{aligned}$$

ومنه فإن الصيغة النهائية لدالة التوزيع هي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{x^3}{27} & 0 \leq X \leq 3 \\ 1 & X > 3 \end{cases}$$

* التمثيل البياني لدالة التوزيع: $F(X)$



$P(1 \leq x \leq 2) = ?$ بما المجال المطلوب حساب يقع بين 0 و 3، نعوض القيم في دالة التوزيع:

$$P(1 \leq x \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27}$$

3.2.2. التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر:

إذا كان X متغير عشوائي مستمر معرف بدالة كثافة احتمال $f(x)$ ، فإن توقعه الرياضي يعطى

بالعلاقة التالية:¹

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

مثال: أحسب توقع المتغير العشوائي للمثال السابق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

لدينا علاقة التوقع:

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ E(x) &= \int_{-\infty}^0 x(0) dx + \int_0^3 x\left(\frac{x^2}{9}\right) dx + \int_3^{+\infty} x(0) dx \\ &= 0 + \int_0^3 x\left(\frac{x^2}{9}\right) dx + 0 \\ &= \left[\frac{x^4}{36} \right]_0^3 = \left[\frac{3^4}{36} - 0 \right] = 2,25 \end{aligned}$$

1- Sheldon M. Ross, **Introduction to Probability Models**, 11 th Edition, Academic Press, Oxford, 2014, P 37.

4.2.2. التباين:

إذا كان X متغير عشوائي مستمر معرف بدالة كثافة احتمالية $f(x)$ فإن تباينه يعطى بالعلاقة

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^2 f(x) dx \quad \text{التالية:}^1$$

حيث تبسط العلاقة إلى الصيغة التالية:

$$\begin{aligned} V(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [E(x)]^2 \end{aligned}$$

مثال:

أحسب التباين والانحراف المعياري في المثال السابق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

قانون حساب التباين:

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [E(x)]^2 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 x^2 (0) dx + \int_0^3 x^2 \left(\frac{x^2}{9}\right) dx + \int_3^{+\infty} x^2 (0) dx \\ &= 0 + \left[\frac{x^5}{45} \right]_0^3 + 0 = \left[\frac{243}{45} - 0 \right] = 5,4 \end{aligned}$$

$$V(x) = 5,4 - [E(x)]^2 = 5,4 - (2,25)^2 = 0,38$$

1- Jason Arevaya, **Probability and statistics for economics and business an Introduction using R**, MIT Press, Cambridge, 2025,P 294.

الانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,38} = 0,62$$

5.2.2. عزوم المتغير العشوائي المستمر:

إذا كان X متغير عشوائي مستمر معرف بدالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ، فإن القيم المتوقعة لبعض الدوال بدلالة هذا المتغير تسمى عزوماً.

وتنقسم عزوم المتغير العشوائي المستمر إلى عزوم مركزية وعزوم لا مركزية:

1.5.2.2. العزوم المركزية:

إذا كان X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته الاحتمالية هي $f(x)$ ، فإن العزم المركزي من الدرجة r لهذا المتغير يعطى بالعلاقة التالية:¹

$$M_r = E[X - E(X)]^r = \int_{-\infty}^{+\infty} [X - E(X)]^r f(x) dx$$

ومن علاقة العزم المركزي يمكن استنتاج ما يلي:

لما $r=0$:

$$M_0 = E[X - E(X)]^0 = 1$$

لما $r=1$: وبتطبيق خاصية الطرح على التوقع نجد: $M_1 = E[X - E(X)]^1 = E(X) - E(X) = 0$

لما $r=2$: فإن قيمة العزم المركزي من الدرجة 2 هي نفسها قيمة التباين:

$$M_2 = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = V(X)$$

2.5.2.2. العزوم اللامركزية:

يعرف العزم اللامركزي من الدرجة r للمتغير العشوائي المستمر بالعلاقة التالية:

$$m_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^r f(x) dx$$

ويتبين من علاقة العزم اللامركزي ما يلي:

لما $r=0$ فإن العزم يساوي 1: $m_0 = E(X^0) = 1$

$$m_1 = E(X^1) = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

1- Jean-François Le Gall, **Measure Theory, Probability, and Stochastic Processes**, Springer, 2022, P 152.

لما $r=1$ فإن العزم يساوي التوقع:

لما $r=2$ نتحصل على: $m_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ وهي علاقة تستخدم في حساب التباين.

❖ علاقة العزوم اللامركزية بالعزوم المركزية:

العزم المركزي الثاني (التباين) يساوي الفرق بين العزم اللامركزي الثاني ومربع العزم اللامركزي الأول:

$$M_2 = m_2 - m_1^2$$

6.2.2. الدالة المولدة للعزوم:

في حالة المتغير العشوائي المستمر فإن الدالة المولدة للعزوم تعطى بالعلاقة التالية:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

الفصل الرابع: المتغير العشوائي

تمارين الفصل الرابع

التمرين 01:

- مؤسسة تصنع نوعين من قطع الغيار. النوع الأول هو الأفضل ومدة حياته تفوق 05 سنوات، أما النوع الثاني فتقل مدة حياته عن خمس سنوات.
- تقدم أحد الزبائن بطلبية لاقتناء 15 قطعة، فتبين بعد إتمام الصفقة وجود 8 قطع من النوع الثاني.
- 1- إذا استعمل الزبون 4 قطع في نفس الوقت:
- 1-1 أحسب احتمال الحدث A: أن تتلف القطع الأربع بعد أكثر من 5 سنوات.
- 2-1 أحسب احتمال الحدث B: أن تدوم على الأقل قطعة واحدة أكثر من 5 سنوات.
- 2- ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد القطع ذات النوعية الرفيعة المجربة من طرف الزبون.
- 1-2 أوجد التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي.
- 2-2 أوجد قيم دالة التوزيع F(X). وأحسب: $P(X \leq 3)$ $P(X > 2)$
- 3-2 أحسب عدد القطع ذات النوعية الجيدة المتوقع تجربتها من طرف الزبون.

التمرين 02:

- ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الذكور المتحصل عليه عند اختيار طالبين (02) عشوائيا على التوالي بدون إرجاع من مجموعة مكونة من 7 إناث و 5 ذكور.
- 1- أوجد التوزيع الإحتمالي لـ X.
- 2 - أحسب عدد الذكور المتوقع الحصول عليه والانحراف المعياري.

التمرين 03:

ليكن X المتغير العشوائي المعروف بدالة الكثافة الإحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} k(30-x) & 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases} \quad k \geq 0$$

- 1- أوجد قيمة الثابت K. حيث
- 2- أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي X.
- 3- أحسب الإحتمالات التالية:
- $P(X < 12)$

- $P(10 \leq X \leq 20)$

- $P(X > 15)$

4- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي.

التمرين 04:

إليك دالة الكثافة الاحتمالية المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{200} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad a \geq 0$$

1- أوجد قيمة العدد a .

2- أوجد دالة التوزيع $F(X)$.

3- أحسب التوقع والتباين.

حل تمارين الفصل الرابع

التمرين 01:

1- إذا استعمل الزبون 4 قطع في نفس الوقت:

1-1 احتمال أن تتلف القطع الأربع بعد أكثر من 5 سنوات:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{C_7^4}{C_{15}^4} = \frac{35}{1365} = 0,025$$

1-2 احتمال أن تدوم على الأقل قطعة واحدة أكثر من 5 سنوات:

$$P(B) = \frac{n_B}{n_\Omega} = \frac{C_7^1 C_8^3 + C_7^2 C_8^2 + C_7^3 C_8^1 + C_7^4 C_8^0}{C_{15}^4}$$

$$= \frac{7 \times 56 + 21 \times 28 + 35 \times 8 + 35 \times 1}{1365} = \frac{1295}{1365} = 0,948$$

2- قيم هي: $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

2-1 التوزيع الاحتمالي: لإعداد جدول التوزيع الاحتمال يجب حساب الاحتمالات المقابلة لقيم X:

$$P(X = 0) = \frac{n_{X=0}}{n_\Omega} = \frac{C_7^0 C_8^4}{C_{15}^4} = \frac{1 \times 70}{1365} = 0,051$$

$$P(X = 1) = \frac{n_{X=1}}{n_\Omega} = \frac{C_7^1 C_8^3}{C_{15}^4} = \frac{7 \times 56}{1365} = 0,287$$

$$P(X = 2) = \frac{n_{X=2}}{n_\Omega} = \frac{C_7^2 C_8^2}{C_{15}^4} = \frac{21 \times 28}{1365} = 0,43$$

$$P(X = 3) = \frac{n_{X=3}}{n_\Omega} = \frac{C_7^3 C_8^1}{C_{15}^4} = \frac{35 \times 8}{1365} = 0,2$$

$$P(X = 4) = \frac{n_{X=4}}{n_\Omega} = \frac{C_7^4 C_8^0}{C_{15}^4} = \frac{35 \times 1}{1365} = 0,025$$

X_i	0	1	2	3	4	Σ
$P(X=x_i)$	0,051	0,287	0,43	0,2	0,025	1

2-2- دالة التوزيع:

X_i	0	1	2	3	4	Σ
$P(X=x_i)$	0,051	0,287	0,43	0,2	0,025	1
$F(X)$	0,051	0,338	0,768	0,968	1	

$$P(X \leq 3) = F(3) = 0,968$$

$$P(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - 0,768 = 0,232$$

2-3- العدد المتوقع: $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X = x_i)$$

X_i	0	1	2	3	4	Σ
$P(X=x_i)$	0,051	0,287	0,43	0,2	0,025	1
$X_i \cdot P(X=x_i)$	0	0,287	0,86	0,6	0,1	1,847

عدد القطع ذات النوعية الجيدة المتوقع تجربتها من طرف الزبون هو 2 (قطعتان).

التمرين 02:

اختيار طالبين (02) عشوائياً على التوالي بدون إرجاع من مجموعة مكونة من 7 إناث و 5 ذكور.

قيم X هي: $X = \{0, 1, 2\}$

1- التوزيع الاحتمالي

$$P(X = 0) = \frac{n_{X=0}}{n_{\Omega}} = \frac{C_7^1 C_6^1}{C_{12}^1 C_{11}^1} = \frac{7 \times 6}{132} = 0,318$$

$$P(X = 1) = \frac{n_{X=1}}{n_{\Omega}} = \frac{C_5^1 C_7^1 + C_7^1 C_5^1}{C_{12}^1 C_{11}^1} = \frac{5 \times 7 + 7 \times 5}{132} = 0,53$$

$$P(X = 2) = \frac{n_{X=2}}{n_{\Omega}} = \frac{C_5^1 C_4^1}{C_{12}^1 C_{11}^1} = \frac{5 \times 4}{132} = 0,151$$

X_i	0	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	0,318	0,53	0,151	1

1- عدد الذكور المتوقع الحصول عليه هو: $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X = x_i)$$

X_i	0	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	0,318	0,53	0,151	1
$X_i \cdot P(X=x_i)$	0	0,53	0,302	0,832

يتوقع الحصول على ذكر واحد (1).

الانحراف المعياري: لدينا

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$$

X_i	0	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	0,318	0,53	0,151	1
X^2	0	1	4	
$X^2 \cdot P(X=x_i)$	0	0,53	0,604	1,134

$$E(X^2) = 1,134$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,134 - [0,832]^2} = 0,66$$

الانحراف المعياري هو 0,66

التمرين 03:

$$f(x) = \begin{cases} k(30-x) & 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases} \quad k \geq 0$$

1- حتى تكون الدالة السابقة دالة كثافة احتمال يجب تحقق الشرطين:

$$1) f(x) \geq 0$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

الشرط الأول محقق لأن الدالة موجبة مهما كانت قيمة x .

الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{30} k(30-x)dx + \int_{30}^{+\infty} 0dx$$

$$= 0 + K \left[30x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{30} + 0$$

$$= K(900 - 450)$$

$$= 450k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{450}$$

يصبح شكل الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{450}(30-x) & 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

2- دالة التوزيع: $F(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

$$\bullet X < 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^x 0dx = 0$$

$$0 \leq X \leq 30 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^x \frac{1}{450}(30-x)dx$$

$$= 0 + \frac{1}{450} \left[30x - \frac{x^2}{2} \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{450} (30x - \frac{x^2}{2})$$

$$\bullet X > 30 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{30} \frac{1}{450}(30-x)dx + \int_{30}^x 0dx$$

$$= 0 + \frac{1}{450} \left[30x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{30} + 0$$

$$= 1$$

الصيغة النهائية لدالة التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{450} (30x - \frac{x^2}{2}) & 0 \leq x \leq 30 \\ 1 & X > 30 \end{cases}$$

3- حساب الاحتمالات

$$P(x < 12) = P(x \leq 12) = F(12) = \frac{1}{450} (30 \times 12 - \frac{12^2}{2}) = 0,64$$

$$P(10 \leq x \leq 20) = F(20) - F(10)$$

$$\Rightarrow F(20) = \frac{1}{450} (30 \times 20 - \frac{20^2}{2}) = 0,88$$

$$\Rightarrow F(10) = \frac{1}{450} (30 \times 10 - \frac{10^2}{2}) = 0,55$$

$$\Rightarrow P(10 \leq x \leq 20) = F(20) - F(10) = 0,88 - 0,55 = 0,33$$

$$\begin{aligned} P(x > 15) &= 1 - F(15) = 1 - \left[\frac{1}{450} (30 \times 15 - \frac{15^2}{2}) \right] \\ &= 1 - 0,75 = 0,25 \end{aligned}$$

4- التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

التوقع الرياضي:

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{30} x \cdot \frac{1}{450} (30 - x) dx + \int_{30}^{+\infty} x \cdot 0 dx \\ &= 0 + \frac{1}{450} \left[15x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{30} + 0 \end{aligned}$$

$$E(x) = 10$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{V(x)}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^{30} x^2 \cdot \frac{1}{450} (30 - x) dx + \int_{30}^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx \\ &= 0 + \frac{1}{450} \left[10x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^{30} + 0 \end{aligned}$$

$$E(x^2) = 150$$

$$[E(x)]^2 = 10^2 = 100 \Rightarrow V(x) = 150 - 100 = 50$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{50} = 7,07$$

التمرين 04:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{200} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

1- حتى تكون الدالة السابقة دالة كثافة احتمال يجب تحقق الشرطين:

$$1) f(x) \geq 0$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

الشرط الأول محقق لأن الدالة موجبة مهما كانت قيمة x .

الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^a \frac{x}{200} dx + \int_a^{+\infty} 0dx \\
 &= 0 + \left[\frac{x^2}{400} \right]_0^a + 0 \\
 &= \frac{a^2}{400} = 1 \Rightarrow a = 20
 \end{aligned}$$

يصبح شكل الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{200} & 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & x > 20 \end{cases}$$

-2 دالة التوزيع: $F(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

$$X < 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^x 0dx = 0$$

$$\begin{aligned}
 0 \leq X \leq 20 \Rightarrow F(x) &= \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^x \frac{x}{200} dx \\
 &= 0 + \left[\frac{x^2}{400} \right]_0^x \\
 &= \frac{x^2}{400}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X > 20 \Rightarrow F(x) &= \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{20} \frac{x}{200} dx + \int_{20}^x 0dx \\
 &= 0 + \left[\frac{x^2}{400} \right]_0^{20} + 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

الصيغة النهائية لدالة التوزيع هي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{400} & 0 \leq x \leq 20 \\ 1 & x > 20 \end{cases}$$

3- التوقع والتباين:

- التوقع الرياضي:

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{20} x \cdot \frac{x}{400} dx + \int_{20}^{+\infty} x \cdot 0 dx \\ &= 0 + \left[\frac{x^3}{1200} \right]_0^{20} + 0 \\ E(x) &= 6,67 \end{aligned}$$

- التباين:

$$\begin{aligned} V(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\ E(x^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^{20} x^2 \cdot \frac{x}{400} dx + \int_{20}^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx \\ &= 0 + \left[\frac{x^4}{1600} \right]_0^{20} + 0 \\ E(x^2) &= 100 \end{aligned}$$

$$[E(x)]^2 = 6,66^2 = 44,48$$

$$\Rightarrow V(x) = 100 - 44,48 = 55,52$$

الفصل الخامس:

قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

➤ التوزيع المنتظم

➤ توزيع برنولي

➤ التوزيع ثنائي الحد

➤ التوزيع الهندسي

➤ توزيع بواسون

تمهيد:

بعد التطرق للمتغيرات العشوائية في الفصل السابق، والتعرف على خصائص المتغير العشوائي المنقطع، ونظرا لوجود عدد لا نهائي من المتغيرات، أصبح من الضروري إيجاد تطبيقات تساعد على تسهيل الحسابات المرتبطة بها. حيث سيناقدش هذا الفصل بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المنقطع، من خلال التعرف على الشروط الواجب توفرها لاستخدام توزيع دون غيره، وكذا الصيغ الرياضية التي تسمح بحساب الاحتمالات، بالإضافة إلى خصائص كل توزيع (التوقع الرياضي والتباين).

1. التوزيع المنتظم:

يرتبط التوزيع المنتظم بالتجارب العشوائية التي تكون احتمالات النتائج فيها متساوية، وتمثل تجربة رمي حجر نرد غير مزيف أحسن مثال لتطبيق التوزيع المنتظم.

1.1. قانون الاحتمال:

انطلاقا من تعريف التوزيع المنتظم فإن التوزيع الاحتمالي يعطى بالعلاقة التالية:¹

$$X = x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n \Rightarrow P(X = x_i) = \frac{1}{N}$$

حيث N: عدد القيم الممكنة للمتغير X.

مثال:

طرحت مؤسسة مختصة في بيع الأجهزة الالكترونية عرضا ترويجيا لفائدة زبائنها الجدد، حيث تضمن العرض نسب تخفيض مختلفة: 5%، 10%، 15%، و20%. حيث حرصت المؤسسة على أن يكون لكل زبون نفس الاحتمال في الحصول على التخفيض، وعدم التمييز بين الزبائن.

نلاحظ من خلال معطيات المثال أن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي أربع قيم:

$$X = \{5, 10, 15, 20\}$$

الفصل الخامس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

التوزيع هنا هو توزيع منتظم متقطع، حيث أن قيمة الاحتمال هي:

$$P(X = xi) = \frac{1}{4}$$

حيث أن قيم الاحتمالات الممكنة هي:

$$P(X = 5) = 0,25$$

$$P(X = 10) = 0,25$$

$$P(X = 15) = 0,25$$

$$P(X = 20) = 0,25$$

2.1. دالة التوزيع:

تعطى دالة التوزيع المنتظم للمتغير العشوائي المتقطع بالعلاقة التالية:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x}{N} & \text{si } x = 1, 2, \dots, N \\ 1 & \text{si } x \geq N \end{cases}$$

3.1. التوقع الرياضي:

انطلاقاً من تعريف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع يمكن استنتاج علاقة إيجاد توقع

التوزيع المنتظم كما يلي:¹

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n X_i P(X = xi) = 1 \times \frac{1}{N} + 2 \times \frac{1}{N} + \dots + N \times \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{N} (1 + 2 + \dots + N) = \frac{1}{N} \times \frac{N(N+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{N+1}{2}$$

1- Yvan Monka, **Lois Discrètes**, Académie de Strasbourg,
<https://www.maths-et-tiques.fr/telech/20LoisDisTC1.pdf> (récupéré le: 26/11/2025)

4.1. التباين:

إذا كان X متغير عشوائي متقطع يتبع التوزيع المنتظم، فإن تباين هذا المتغير يعطى بالعلاقة التالية:

$$V(X) = \frac{N^2 - 1}{12}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad \text{البرهان:}$$

لدينا:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 P(X = xi) = \sum_{i=1}^n X_i^2 \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

وبتطبيق قاعدة مجموع مربعات الأعداد الصحيحة المتتالية نجد:

$$E(X^2) = \frac{1}{N} \left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

بتعويض العلاقة السابقة وعلاقة التوقع الرياضي في علاقة التباين نجد:

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} \\ &= \frac{2(N+1)(2N+1)}{12} - \frac{3(N+1)^2}{12} \end{aligned}$$

نبسّط العلاقة باستخراج $(N+1)$ كعامل مشترك:

$$V(X) = \frac{(N+1)[2(2N+1) - 3(N+1)]}{12}$$

$$V(X) = \frac{(N+1)[4N+2-3N-3]}{12} = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{N^2 - 1}{12}$$

5.1. الدالة المولدة للعزوم:

تعطى الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي المتقطع الذي يتبع التوزيع المنتظم بالعلاقة التالية:

$$M_x(t) = \sum_{x=a}^b e^{tx} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{x=a}^b (e^t)^x$$

حيث يمثل هذا المجموع متتالية هندسية حدها الأول $(e^t)^a$ ، ونتحصل بعد التبسيط والتعويض بعلاقة المجموع للمتتالية الهندسية على العلاقة النهائية التالية:

$$M_x(t) = \frac{1}{N} \left[\frac{e^t(1 - e^{Nt})}{1 - e^t} \right] = \frac{e^t(1 - e^{Nt})}{N(1 - e^t)}$$

مثال:

يريد محلل مالي تقييم سعر سهم شركة ناشئة (Startup) خلال الأسبوع القادم. ونظرا لعدم وجود بيانات تاريخية كافية، افترض المحلل 5 مستويات أسعار متساوية في الاحتمال: 10،11،12،13،14.

- أوجد قانون الاحتمال لهذا المتغير.

- أوجد صيغة دالة التوزيع.

- أحسب القيمة المتوقعة والتباين.

الجواب:

بما أن الاحتمالات متساوية فإن هذا المتغير يتبع التوزيع المنتظم، وقيمه هي:

$$X = \{10, 11, 12, 13, 14\} \Rightarrow N = 5$$

- قانون الاحتمال:

$$P(X = xi) = \frac{1}{N} = \frac{1}{5} = 0,2$$

- دالة التوزيع: الصيغة العامة لدالة التوزيع هي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{X}{5} & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 1 & \text{si } X \geq 6 \end{cases}$$

- التوقع الرياضي:

$$E(X) = \frac{N+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$$

- التباين:

$$V(X) = \frac{N^2-1}{12} = \frac{36-1}{12} = 2.92$$

2. توزيع برنولي:

يعد توزيع برنولي من أبسط التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع، حيث يتطلب تطبيقه وجود تجربة عشوائية يطلق عليها تجربة برنولي.

1.2. تجربة برنولي:

نسمي تجربة برنولي كل تجربة عشوائية تقبل نتيجتين متنافيتين، تسمى الأولى نتيجة النجاح والثانية نتيجة الفشل، حيث أن احتمال النجاح يرمز له بالرمز: P ، ويرمز لاحتمال الفشل بالرمز: q . مع العلم

$$P = 1 - q$$

ومن أمثلة تجارب برنولي:

- تجربة رمي قطعة نقود (صورة أو رقم)

- تجربة رصد نتيجة الطالب في أحد المقاييس (ناجح أو راسب)

- تجربة رصد نتيجة تحليل الإصابة بمرض معين (مصاب أو غير مصاب)

2.2. القانون الاحتمالي:

إذا أجريت تجربة برنولي مرة واحدة، وباعتبار X المتغير العشوائي الذي يعرف بأنه عدد مرات النجاح عند إجراء تجربة برنولي، وبما أن التجربة تجرى مرة واحدة فإن قيم X هي: 0 في حالة الفشل، و1 في حالة النجاح. حيث يعطى التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير بالعلاقة التالية:

$$P(X = x_i) = \begin{cases} p & \text{si } X = 1 \\ 1 - p & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

ونكتب:

$$X \sim \beta(1, p)$$

حيث نقرأ العلاقة السابقة: X متغير عشوائي يتبع توزيع برنولي لتجربة تجرى مرة واحدة باحتمال نجاح P .

3.2. دالة التوزيع:

انطلاقاً من تعريف دالة التوزيع والمتمثل في التالية:

$$F(X) = P(X \leq xi)$$

- لما $X < 0$: بما أنه لا توجد قيم X أقل من 0، فإن قيمة دالة التوزيع تساوي 0:

$$X < 0 \Rightarrow P(X \leq xi) = 0$$

- لما $0 \leq X < 1$: القيمة الوحيدة ضمن هذا المجال هي 0، وبالتالي فإن قيم دالة التوزيع هي

احتمال الفشل:

$$0 \leq X < 1 \Rightarrow P(X \leq xi) = q = 1 - p$$

- لما $X \geq 1$: قيمة دالة التوزيع ضمن هذا المجال هي احتمال النجاح P مضافاً إليه احتمال

الفشل q :

$$X \geq 1 \Rightarrow P(X \leq xi) = p + q = 1$$

الفصل الخامس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

حيث أن الصيغة النهائية لدالة التوزيع برنولي تعطى بالعلاقة التالية:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq X < 1 \\ p+q=1 & \text{si } X \geq 1 \end{cases}$$

4.2. التوقع الرياضي:

يتم إيجاد علاقة التوقع الرياضي لتوزيع برنولي كما يلي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i P(X = x_i) = 0.(1-p) + 1.p$$

$$E(X) = p$$

5.2. التباين:

تباين المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع برنولي يعطى بالعلاقة التالية:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n X^2 P(X = x_i) = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$V(X) = pq$$

6.2. الدالة المولدة للعزوم:

تعطى الدالة المولدة للعزوم لتوزيع برنولي بالعلاقة التالية:

$$m_x(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} P_i$$

نعوض X بقيمه الممكنة وهي 0 و 1 في حالة توزيع برنولي:

$$m_x(t) = e^{t \cdot 1} p + e^{t \cdot 0} (1-p)$$

نحصل على الصيغة النهائية للدالة المولدة للعزوم كما يلي:

$$m_x(t) = (1-p) + e^t p$$

الفصل الخامس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

مثال:

اعتمدت إحدى المؤسسات على الإيميل لتسويق منتجها، حيث أرسلت رسالة إيميل إلى أحد الزبائن، ولكن احتمال أن يشتري الزبون المنتج بعد قراءة الإيميل هو 0,15.

- أكتب صيغة القانون الاحتمالي.

- أحسب قيمة التوقع $E(X)$.

- أحسب التباين.

الجواب:

التجربة هي تجربة برنولي لأنها تقبل نتيجتين، حيث يعتبر حدث شراء المنتج بعد قراءة الرسالة هو نتيجة النجاح، وحدث عدم الشراء هو الفشل، وذلك حسب المتغيرات التالية:

$$p = 0,15 \quad q = 1 - p = 0,85$$

- قانون الاحتمال:

$$P(X = x_i) = \begin{cases} 0,15 & \text{si } X = 1 \\ 0,85 & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

- قيمة التوقع:

$$E(X) = p = 0,15$$

وتفسر هذه القيمة أن 15% من الزبائن على المدى الطويل سيشترون المنتج فور تلقيهم الإيميل.

- التباين:

$$V(X) = pq = 0,15 \times 0,85 = 0,128$$

3. التوزيع ثنائي الحد:

بافتراض وجود تجربة برنولي تتكرر n مرة، حيث أن كل محاولة مستقلة عن الأخرى، وأن لكل محاولة احتمال نجاح p ثابتة لكل المحاولات، فإن المتغير X الذي يمثل عدد النجاحات هو متغير عشوائي يتبع التوزيع ثنائي الحد. قيمه هي: $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

1.3. القانون الاحتمالي:

يعطى القانون الاحتمال بالعلاقة التالية:¹

$$X \sim \beta(n, p)$$

$$P(X = xi) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

حيث:

n : عدد مرات تكرار التجربة.

x : قيمة المتغير العشوائي المراد حساب احتمالها.

p : احتمال نجاح التجربة في كل مرة.

q : احتمال فشل التجربة في كل مرة.

ولتطبيق القانون ثنائي الحد يجب توفر الشروط التالية:

- وجود احتمالين فقط لكل محاولة (تجربة): نجاح أو فشل.
- احتمال نجاح كل تجربة ثابت بالنسبة للتجارب الأخرى.
- عدد الإختبارات (المحاولات) n محدود.
- أن تكون المحاولات مستقلة: أي أن احتمال وقوع الحدث في محاولة ما لا يتأثر بنتيجة محاولة أخرى.

2.3. دالة التوزيع:

تعطى دالة التوزيع للمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع ثنائي الحد بالعلاقة التالية:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 1 \\ \sum_{i=1}^n C_n^x p^x q^{n-x} & \text{si } 1 \leq X < n \\ 1 & \text{si } X \geq n \end{cases}$$

3.3. التوقع الرياضي:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع ثنائي الحد، فإن التوقع الرياضي لهذا المتغير يعطى بالعلاقة

التالية:¹

$$E(X) = np$$

الإثبات:

لدينا علاقة حساب التوقع:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i P(X = x_i)$$

بتعويض علاقة قانون الاحتمال للتوزيع ثنائي الحد:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n x C_n^x p^x q^{n-x} = \sum_{i=1}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{n-x} \end{aligned}$$

نجعل np عامل مشترك ونعوض $(x-1)$ بـ z :

1- Dennis D. Wackerly & William Mendenhall III & Richard L. Scheaffer, **Mathematical Statistics with Applications**, Thomson Brooks/Cole, Belmont, 2008, P 107.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= np \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} \\
 &= np \sum_{z=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{z!(n-1-z)!} p^z q^{n-1-z} \\
 &= np \sum_{z=0}^{n-1} C_{n-1}^z p^z q^{n-1-z}
 \end{aligned}$$

تمثل العلاقة التالية: $C_{n-1}^z p^z q^{n-1-z}$ القانون الاحتمالي لمتغير Z يتبع التوزيع ثنائي الحد، حيث تتكرر التجربة $n-1$ مرة، وبالتالي فإن مجموعها يساوي الواحد: $\sum_{i=1}^n C_{n-1}^z p^z q^{n-1-z} = 1$

$$E(X) = np \quad \text{فتصبح قيمة التوقع:}$$

4.3. التباين:

إذا كان X متغير عشوائي منقطع يتبع توزيع ثنائي الحد، فإن تباينه يعطى بالعلاقة التالية:¹

$$V(X) = npq$$

الإثبات:

- يمكن كتابة المتغير العشوائي X في شكل مجموع متغيرات برنولة مستقلة بعضها عن بعض:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

- بتطبيق خاصية التباين التي تنص على أن تباين مجموع متغيرات مستقلة يساوي مجموع تبايناتها:

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

- لدينا تباين متغير برنولي معطى بالعلاقة التالية:

$$V(X) = pq$$

- نتحصل على تباين المجموع كمايلي:

$$V(X) = npq$$

1- François Cottet-Emard, **Probabilités et tests d'hypothèse**, 1ere Edition, De Boeck Supérieur S.A, Bruxelles, 2014, P 177.

5.3. الدالة المولدة للعزوم:

تعطى الدالة المولدة للعزوم للتوزيع ثنائي الحد كما يلي:

$$m_x(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

يمكن إثبات الصيغة السابقة بالاعتماد على صيغة الدالة الخاصة بتوزيع برنولي، وخاصية الدالة المولدة للعزوم في حالة متغيرات مستقلة كما يلي:

- بما أن المتغير ثنائي الحد هو عبارة عن مجموع متغيرات برنولي:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

- الدالة المولدة للعزوم لمجموع متغيرات مستقلة هو:

$$m_x(t) = m_{x_1}(t) m_{x_2}(t) \dots m_{x_n}(t)$$

- ولدينا صيغة الدالة المولدة للعزوم لتوزيع برنولي هي:

$$m_{x_i}(t) = (1 - p) + e^t p$$

- بتعويضها في العلاقة السابقة نتحصل على الصيغة النهائية للدالة المولدة للعزوم لتوزيع ثنائي الحد كما يلي:

$$m_x(t) = [(1 - p) + e^t p]^n$$

مثال:

إذا كان احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم هو $4/3$ ، تم اختيار 3 دول:

1- اكتب صيغة التوزيع الاحتمالي لعدد الدول التي يرتفع مؤشر سوق الأسهم فيها؟

2- أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري لهذا المتغير.

3- أحسب احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم لدولتين.

الجواب:

لدينا:

تجربة برنولي تقبل نتيجتين هما:

– النجاح: ارتفاع مؤشر سوق الأسهم والفشل: عدم ارتفاع مؤشر سوق الأسهم، كما أن هذه التجربة تكررت 3 مرات (عدد الدول)، وبالتالي فهو التوزيع ثنائي الحد.

1- صيغة قانون الاحتمال:

$$P(X = xi) = C_n^x P^x q^{n-x}$$

لدينا: $n=3$ ، $p=3/4$ ، $q=1/4$

$$P(X = xi) = C_3^x \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$$

2- التوقع والتباين والانحراف المعياري:

$$E(X) = np = 3 \times \frac{3}{4} = 2,25 \quad \text{التوقع}$$

$$V(X) = npq = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 0,56 \quad \text{التباين}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,56} = 0,75 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

3- احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم لدولتين: $P(X = 2) = ?$

نعوض قيمة X في علاقة قانون الاحتمال:

$$P(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = 0,42$$

4. التوزيع الهندسي:

يعد التوزيع الهندسي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة، حيث يعنى بدراسة عدد مرات الفشل المتتالية قبل الحصول على نجاح تجربة برنولي، أي أنه وفق هذا التوزيع فإن تجربة برنولي يتم تكرارها إلى أن يتم الحصول على أول نجاح، ثم تنتهي التجربة. ومن بين استخدامات التوزيع الهندسي: تحليل التكلفة والعائد لتقدير الفوائد المالية واتخاذ القرار المناسب.

1.4. القانون الاحتمالي:

يعطى القانون الاحتمالي للتوزيع الهندسي بالعلاقة التالية:¹

$$X \sim G(p) \Rightarrow P(X = xi) = pq^{x-1}$$

2.4. دالة التوزيع:

دالة التوزيع للمتغير الذي يتبع التوزيع الهندسي هي احتمال أن يأخذ المتغير X قيمة أقل أو تساوي قيمة معينة، حيث تعطى بالعلاقة التالية:

$$F(X) = P(X \leq xi) = 1 - q^x$$

3.4. التوقع:

يمكن استنتاج صيغة التوقع الرياضي للمتغير الهندسي انطلاقاً من العلاقة التالية:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i P(X = xi)$$

نعوض صيغة القانون الاحتمالي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i pq^{x-1}$$

$$= p \sum_{i=1}^n X_i q^{x-1}$$

$$\sum_{i=1}^n X_i q^{x-1} = \frac{1}{1-q^2} \quad \text{بتطبيق علاقة مجموع المتتالية الهندسية والاشتقاق نجد:}$$

- نعوض في العلاقة السابقة للتوقع:

$$E(X) = p \sum_{i=1}^n X_i q^{x-1} = p \frac{1}{1-q^2}$$

لدينا من تعريف تجربة برنولي: $p=1-q$ ، وبالتعويض نجد:

$$E(X) = p \frac{1}{p^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

وبناء على ما سبق فإن الصيغة النهائية للتوقع تعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

4.4. التباين:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الهندسي، فإن تباينه يعطى بالعلاقة التالية:

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

الإثبات:

لدينا علاقة حساب التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) \dots \dots (1)$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{i=1}^n X(X-1) p q^{x-1} \quad \text{مع العلم أن:}$$

$$= p \sum_{i=1}^n X(X-1) q^{x-1}$$

نستخرج المشتقة الثانية بالنسبة لـ q :

$$\sum_{i=2}^n X(X-1) q^{x-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

نضرب الطرفين في q^2 :

$$\sum_{i=2}^n X(X-1)q^x = \frac{2q^2}{(1-q)^3}$$

ولدينا أيضا:

$$\sum_{i=1}^n X(X-1)q^{x-1} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n X(X-1)q^x = \frac{2q}{(1-q)^3}$$

$$E[X(X-1)] = p \frac{2q}{(1-q)^3} = p \frac{2q}{p^3} = \frac{2q}{p^2}$$

وبالتالي فإن:

تصبح العلاقة رقم 1 كما يلي:

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2} = \frac{2(1-p)+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

نعوض في علاقة التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

أي أن علاقة التباين النهائية هي:

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

5.4. الدالة المولدة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الهندسي كما يلي:

$$m_x(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

مثال:

يقدم أحد البنوك خدمة جديدة، حيث يتم الاتصال بالزبائن وعرض الخدمة الجديدة عليهم، فقدر احتمال أن يقبل الزبون بالانخراط في الخدمة هو: 0,25.

بافتراض أن البنك يستمر في الاتصال بالزبائن إلى أن يتحصل على أول موافقة من زبون.

نلاحظ من المثال أن المتغير العشوائي هنا هو عدد الاتصالات إلى غاية الحصول على أول موافقة، كما أن التجربة تقبل نتيجتين هما: قبول الزبون للعرض (النجاح) ورفضه (الفشل)، كما أن احتمال النجاح من المعطيات هو: $p=0,25$.

التوقع:

حيث تفسر هذه القيمة بأن البنك يتوقع أن يجري 4 اتصالات حتى يحصل على أول موافقة. $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,25} = 4$

التباين:

$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,75}{(0,25)^2} = 12$$

تفسير القيمة: هناك تفاوت متوسط بين عدد الاتصالات اللازمة بين زبون وآخر.

5. توزيع بواسون:

يعد توزيع بواسون من أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة، ويستخدم على نطاق واسع في الإحصاء التطبيقي والاقتصاد والعلوم الاجتماعية. ويهتم توزيع بواسون بدراسة عدد مرات وقوع حدث معين خلال فترة زمنية أو حيز مكاني محدد، عندما تقع الأحداث بشكل عشوائي ومستقل، وبمعدل متوسط ثابت.

ويتميز توزيع بواسون بقدرته على نمذجة الظواهر التي تتسم بالندرة النسبية، مثل عدد الزبائن الوافدين إلى مؤسسة خلال ساعة، أو عدد الطلبات المقدمة إلى إدارة عمومية خلال يوم، أو عدد الأعطاب التي تصيب آلة إنتاجية خلال فترة زمنية معينة. في مثل هذه الحالات، لا يكون من المجدي التعرف على توقيت وقوع الحدث، وإنما على عدد مرات حدوثه.

الفصل الخامس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1.5. القانون الاحتمالي:

يعطى القانون الاحتمال للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون بالعلاقة التالية:

$$X \sim P(\lambda)$$

$$P(X = xi) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

حيث λ هو معامل **موجب** يعبر عن متوسط احتمال نجاح التجربة، وعادة ما يكون هذا المعامل مرتبطا بحيز زمني أو مكاني.

2.5. دالة التوزيع:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون، فإن دالة التوزيع لهذا المتغير تعطى بالعلاقة التالية:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3.5. التوقع:

تعبّر قيمة التوقع عن متوسط عدد النجاحات، وبالتالي فإن قيمة التوقع بالنسبة لتوزيع بواسون هي

$$E(X) = \lambda \quad \text{قيمة معلمة التوزيع نفسها ونكتب:}$$

الإثبات:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} X \cdot P(X = xi) = \sum_{x=0}^{\infty} X \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{لدينا من علاقة التوقع}$$

$$X \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \quad \text{ولدينا أيضا:}$$

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \quad \text{ومنه يمكن كتابة التوقع كما يلي:}$$

وبوضع $j=x-1$ وبتعريف الدالة الأسية نجد:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$$

بالتعويض في علاقة التوقع نجد:

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$\Rightarrow E(X) = \lambda$$

4.5. التباين:

يعد توزيع بواسون ونظرا لكون قيم X لا نهائية من بين التوزيعات الاحتمالية التي يتساوى فيها التوقع

مع التباين، حيث تعطى علاقة التباين كما يلي: $V(X) = \lambda$

الإثبات:

لدينا علاقة التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

ولدينا أيضا: $E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X)$

نحسب: $E[X(X-1)]$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=1}^{\infty} X(X-1) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{X!}$$

ولدينا: $\frac{X(X-1)}{X!} = \frac{1}{(X-2)!}$ نعوض في العلاقة السابقة:

$$E[X(X-1)] = e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(X-2)!}$$

نضع $j=X-2$:

$$E[X(X-1)] = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$$

وقد علمنا سابقا أن: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$

نعوض في العلاقة السابقة فنجد:

$$E[X(X-1)] = e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = \lambda^2 + \lambda$$

ومنه:

فالعلاقة النهائية للتباين تصبح:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

وهو ما يثبت أن تبيان توزيع بواسون يساوي قيمة المعلمة:

$$V(X) = \lambda$$

5.5. الدالة المولدة للعزوم:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون، فإن الدالة المولدة للعزوم تستخرج كما يلي:

$$\begin{aligned} m_x(t) &= \sum_{i=1}^n e^{tx} P(X = xi) = \sum_{i=1}^n e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{X!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{X!} \end{aligned}$$

نعلم أن:

$$\sum \frac{k^x}{X!} = e^x$$

أي أن العلاقة السابقة يمكن كتابتها كما يلي:

$$m_x(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

فالصيغة النهائية للدالة المولدة للعزوم لتوزيع بواسون تكتب كما يلي:

$$m_x(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

مثال:

بلغ متوسط عدد طلبات الحصول على قروض المراجعة في إحدى البنوك 5 طلبات في اليوم الواحد.

الفصل الخامس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1- أوجد صيغة القانون الاحتمالي.

2- أحسب احتمال أن يتلقى البنك طلبا واحدا في اليوم؟

3- أحسب احتمال ألا يقل عدد الطلبات عن طلبين 02 في اليوم؟

4- أحسب التوقع والتباين؟

الجواب:

المتغير العشوائي هو عدد طلبات القروض التي تصل إلى البنك في اليوم الواحد، وهو متغير متقطع يتبع توزيع بواسون حيث: $\lambda = 5$

1- قانون الاحتمال:

$$X \sim P(5)$$

$$P(X = xi) = \frac{5^x e^{-5}}{x!}$$

2- احتمال أن يتلقى البنك طلبا واحدا في اليوم:

$$P(X = 1) = \frac{5^1 e^{-5}}{1!} = 0,0336$$

3- احتمال ألا يقل عدد الطلبات عن طلبين 02 في اليوم: $P(X \geq 2) = ?$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - \left[\frac{5^0 e^{-5}}{0!} + \frac{5^1 e^{-5}}{1!} \right]$$

$$= 1 - [0,0067 + 0,0336] = 0,9597$$

4- التوقع والتباين:

لدينا في توزيع بواسون:

$$E(X) = V(X) = \lambda = 5$$

6.5. تقريب التوزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون:

توجد العديد من الدراسات التي يستعصى على الباحث فيها حساب الاحتمالات باستخدام التوزيع ثنائي الحد، خاصة تلك التي يكون فيها عدد التجارب كبيرا واحتمال النجاح في كل تجربة صغيرا جدا، الأمر الذي يجعل حساب الاحتمال أمرا معقدا. فيتم في هذه الحالة اللجوء إلى توزيع بواسون الذي يعتبر خيارا عمليا وفعالاً.

وتقوم فكرة التقريب على أن عدد النجاحات المتوقعة يبقى محدودا رغم زيادة عدد التجارب، كما أن التقريب يتم وفق شروط محددة هي:

- أن يكون عدد التجارب (المحاولات) كبيرا جدا: $n \geq 50$
 - أن يكون احتمال النجاح في كل محاولة صغيرا جدا: $p \leq 0,1$
 - حاصل ضرب عدد المحاولات في احتمال النجاح هو معدل توزيع بواسون ويجب ألا يتجاوز 5:
- $$np \leq 5 \quad np = \lambda$$

فإذا تحققت الشروط السابقة يمكن تقريب التوزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون ونكتب:

$$P(X = xi) = C_n^x p^x q^{n-x} \cong \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{X!}$$

مثال:

تنتج إحدى المؤسسة 10000 قطعة من منتج معين، وقد بين التجارب أن احتمال أن تكون القطعة معيبة هو 0,0004. وليكن X هو عدد القطع المعيبة في اليوم.

نلاحظ في هذا المثال بأن التجربة تخضع للقانون ثنائي الحد باحتمال نجاح $p=0,0004$ وعدد المحاولات $n=10000$ ، وبما أن n كبير جدا، و p صغير جدا يمكن تقريب هذا التوزيع إلى توزيع بواسون حيث:

$$n = 10000 > 50$$

$$p = 0,0004 < 0,1$$

$$\lambda = np = 10000 \times 0,0004 = 4$$

$$P(X = xi) = \frac{e^{-4} 4^x}{X!}$$

الفصل الخامس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

تمارين الفصل الخامس

التمرين 01:

نرمي قطعة نقدية متكافئة (ظهور الرقم له نفس احتمال ظهور الصورة) مرة واحدة، ولكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الصور الظاهرة.

1- أكتب صيغة قانون الاحتمال؟

2- أوجد صيغة دالة التوزيع؟

3- أحسب التوقع والتباين؟

التمرين 02:

يراقب أحد العمال بواسطة جهاز خاص قطر قطعة الغيار المصنوعة في وحدته، ومن خلال بعض المعطيات لوحظ أن الوحدة تنتج 40% من القطع المعيبة من عينة بها 5 قطع. ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد القطع المعيبة. أحسب:

1- احتمال وجود قطعتين معيبتين.

2- احتمال وجود أكثر من قطعتين معيبتين.

3- العدد المتوقع من القطع المعيبة.

4- أحسب التباين والانحراف المعياري.

التمرين 3:

بينت إحدى الدراسات أن 3 من بين 5 مستهلكين يتأثرون بعلامة السلعة عند شرائها. قامت مديرة التسويق بأحد المتاجر باستجواب 10 مستهلكين تم اختيارهم عشوائياً. ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد المستهلكين المتأثرين بعلامة السلعة. أحسب:

1- احتمال أن يصرح 5 مستهلكين بتأثرهم بالعلامة؟

2- ما هو العدد المتوقع للمستهلكين المتأثرين بعلامة السلعة؟

التمرين 04:

- إذا كان متوسط عدد مستعملي الصراف الآلي لأحد البنوك هو 5 أفراد كل نصف ساعة. ولنفرض أن المتغير العشوائي X هو عدد مستعملي الصراف الآلي خلال نصف ساعة، أحسب الإحتمالات التالية:
- 1- أن يستعمل 10 أفراد الصراف كل نصف ساعة.
 - 2- أن يقل عدد مستعملي الصراف عن 3 أفراد خلال نصف ساعة.
 - 3- العدد المتوقع لمستعملي الصراف الآلي خلال نصف ساعة.

التمرين 05:

- تبين من خلال سجلات إحدى المصحات الطبية أن معدل وصول الحالات الطارئة إلى قسم الاستعجالات هو 3 حالات في الساعة الواحدة. بافتراض أن عدد الحالات الوافدة يتبع توزيع بواسون، أحسب ما يلي:

- 1- احتمال وصول حالتين خلال ساعة معينة.
- 2- احتمال عدم وصول أي حالة خلال نصف ساعة.
- 3- احتمال وصول حالتين على الأقل خلال ساعتين.

حلول تمارين الفصل الخامس

حل التمرين 01:

التجربة هي تجربة رمي قطعة نقدية، تقبل نتيجتين هما: ظهور الرقم وظهور الصورة، وبما أن القطعة النقدية متكافئة والتجربة أجريت مرة مرة واحد، فالتوزيع المناسب هو توزيع برنولي.

المتغير العشوائي هو عدد الصور الظاهرة قيمه: $X=\{0,1\}$.

1- قانون الاحتمال:

- نجاح التجربة يكون بظهور الصورة وفشلها بظهور الرقم، أي أن احتمال النجاح $p=0,5$ ، حيث يكتب قانون الاحتمال كما يلي:

$$X \sim \beta(1, 0.5)$$
$$P(X = x_i) = \begin{cases} 0,5 & \text{si } X = 1 \\ 0,5 & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

2- دالة التوزيع:

تكتب دالة التوزيع لهذا المتغير وفق الصيغة التالية:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ 0,5 & \text{si } 0 \leq X < 1 \\ 1 & \text{si } X \geq 1 \end{cases}$$

3- التوقع والتباين:

التوقع: توقع توزيع برنولي هو احتمال النجاح: $E(X) = p = 0,5$

التباين: نتحصل على التباين في هذه الحالة بضرب احتمال النجاح في احتمال الفشل:

$$V(X) = pq = 0,5 \times 0,5 = 0,25$$

حل التمرين 02:

نلاحظ من المعطيات أن لدينا تجربة برنولي تقبل نتيجتين هما: أن تكون القطع معيبة (نجاح)، أو تكون غير معيبة (فشل)، وقد تكررت هذه التجربة خمس مرات، وبالتالي فإن التوزيع المناسب هو التوزيع ثنائي الحد، حيث أن قانونه الاحتمالي يكون كما يلي:

$$X \sim \beta(5, 0.4)$$

$$P(X = xi) = C_n^x p^x q^{n-x} = C_5^x (0,4)^x (0,6)^{5-x}$$

1- احتمال وجود قطعتين معيبتين:

$$P(X = 2) = C_5^2 0,4^2 0,6^3 = 0,3456$$

2- احتمال وجود أكثر من قطعتين معيبتين:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = C_5^0 0,4^0 0,6^5 = 0,077$$

$$P(X = 1) = C_5^1 0,4^1 0,6^4 = 0,2592$$

$$P(X \leq 2) = 0,077 + 0,2592 + 0,3456 = 0,6818$$

$$P(X > 2) = 1 - 0,6818 = 0,3182$$

3- العدد المتوقع من القطع المعيبة.

$$E(X) = nP = 5 \times 0,4 = 2$$

4- التباين والانحراف المعياري:

$$V(X) = nPq = 5 \times 0,4 \times 0,6 = 1,2$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,2} = 1,095$$

حل التمرين 03:

التوزيع تتوفر فيه شروط التوزيع صنائي الحد، وبالتالي فإن قانون الاحتمال يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(X = xi) = C_n^x P^x q^{n-x} = C_{10}^x \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{10-x}$$

1- احتمال أن يصرح 5 مستهلكين بتأثرهم بالعلامة:

$$P(X = 5) = C_{10}^5 \frac{3^5}{5} \frac{2^5}{5} = 0,2$$

2- العدد المتوقع للمستهلكين المتأثرين بعلامة السلعة:

$$E(X) = nP = 10 \times \frac{3}{5} = 6$$

حل التمرين 04:

بما أن المتغير العشوائي ارتبط بحير زمني (نصف ساعة)، فإن المتغير يتبع توزيع بواسون، حيث

تمثل القيمة 5 هي معامل التوزيع، ويكتب القانون الاحتمالي كما يلي:

$$P(X = xi) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{X!} = \frac{e^{-5} 5^x}{X!}$$

1- احتمال أن يستعمل 10 أفراد الصراف كل نصف ساعة:

$$P(X = 10) = \frac{e^{-5} 5^{10}}{10!} = 0,18$$

2- احتمال أن يقل عدد مستعملي الصراف عن 3 أفراد خلال نصف ساعة:

$$P(X < 3) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5} 5^0}{0!} = 0,0067$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-5} 5^1}{1!} = 0,0034$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-5} 5^2}{2!} = 0,0842$$

$$P(X < 3) = 0,0842 + 0,0067 + 0,0034 = 0,0943$$

3- العدد المتوقع لمستعملي الصراف الآلي خلال نصف ساعة:

$$E(X) = \lambda = 5$$

حل التمرين 05:

لدينا من المعطيات $\lambda = 3$ في ساعة واحدة

1- احتمال وصول حالتين خلال ساعة معينة:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-3} 3^2}{2!} = 0,224$$

2- احتمال عدم وصول أي حالة خلال نصف ساعة:

نعدل المعامل ليتوافق مع مدة نصف ساعة حيث أن المعامل الجديد يصبح 1,5.

$$P(X = 0) = \frac{e^{-1,5} (1,5)^0}{0!} = 0,223$$

3- احتمال وصول حالتين على الأقل خلال ساعتين:

نعدل المعامل ليتوافق مع مدة ساعتين حيث أن المعامل الجديد يصبح 6.

$$P(X \geq 2) = 1 - F(1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-6} 6^0}{0!} + \frac{e^{-6} 6^1}{1!} \right] = 1 - 0,0173 = 0,9827$$

الفصل السادس:

قوانين التوزيعات الاحتمالية

المستمرة

- التوزيع المنتظم
- توزيع برنولي
- التوزيع ثنائي الحد
- التوزيع الهندسي
- توزيع بواسون

تمهيد:

انطلاقاً من تعريف المتغير العشوائي المستمر الذي يقبل عدداً لا نهائياً من القيم، فإن حساب الاحتمال يكون معقداً كلما كانت دالة الكثافة الاحتمالية أكثر تعقيداً، لذا تم استحداث مجموعة من القوانين الاحتمالية التي تسهل هذه العملية. حيث سيسلط هذا الفصل الضوء على أشهر هذه التوزيعات الاحتمالية والمتمثلة في: التوزيع المنتظم المستمر، التوزيع الطبيعي، توزيع بيتا وقاما، توزيع كاي تربيع، وتوزيع ستيودنت.

1. التوزيع المنتظم المستمر:

نقول عن متغير عشوائي مستمر X بأنه يتبع التوزيع المنتظم ضمن مجال من القيم إذا كتب كما يلي:

$$X \sim U(a, b)$$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي يأخذ جميع القيم الممكنة بين a و b باحتمال متساو.

1.1. دالة كثافة الاحتمال:

إذا كان X متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم، فإن دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير تعطى بالعلاقة التالية:¹

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

مع ضرورة تحقق الشرطين التاليين:

$$1) f(x) \geq 0$$

$$2) \int_a^b f(x) = 1$$

1- Ken Black, **Business Statistics : For Contemporary Decision Making**, Sixth Edition, USA, 2010, P 180

2.1. دالة التوزيع:

انطلاقاً من صيغة دالة كثافة الاحتمال، فإن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر المنتظم تعطى بالعلاقة التالية:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

3.1. التوقع:

يعطى توقع التوزيع المنتظم المستمر بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

الإثبات:

لدينا قانون التوقع للمتغير العشوائي المستمر:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

بما أن قيمة دالة الكثافة معدومة خارج المجال (a,b) فإن قيمة التوقع تصبح:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx$$

لدينا:

$$E(X) = \int_a^b x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2}$$

فتصبح قيمة التوقع كما يلي:

$$E(X) = \left(\frac{1}{b-a} \right) \left(\frac{(b-a)(b+a)}{2} \right)$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

4.1. التباين:

إذا كان X يتبع التوزيع المنتظم المستمر، فإن تباينه يكون كما يلي:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

الإثبات:

لدينا علاقة التباين العامة: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

نحسب $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx$$

حيث أن:

$$\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3}$$

ومنه:

$$E(X^2) = \left(\frac{1}{b-a} \right) \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3}$$

$$E(X^2) = \frac{(b^2 + ab + a^2)}{3}$$

ولدينا أيضا:

$$[E(X)]^2 = \left[\frac{b+a}{2} \right]^2 = \frac{b^2 + a^2 + 2ab}{4}$$

وبالتعويض في علاقة التباين نجد:

$$V(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + a^2 + 2ab}{4}$$

$$V(X) = \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3b^2 - 3a^2 - 6ab}{12}$$

$$V(X) = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

5.1 الدالة المولدة للعزوم:

إذا كان X متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم فإن الدالة المولدة للعزوم لهذا المتغير تعطى

بالعلاقة التالية:

$$m_x(t) = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx$$

$$m_x(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx \dots \dots \dots (1)$$

حيث أن:

$$\int_a^b e^{tx} dx = \left[\frac{1}{t} e^{tx} \right]_a^b = \left[\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t} \right]$$

نعوض في العلاقة (1):

$$m_x(t) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t} \right]$$

$$m_x(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

مثال:

بافتراض أن مشتريات زبون من أحد المتاجر (الوحدة: ألف دج) تتبع التوزيع المنتظم، وهي محصورة بين ألفين وستة آلاف دينار جزائري.

1- أكتب صيغة دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع.

2- أوجد دالة التوزيع. وأحسب $P(X < 4)$.

3- أحسب التوقع والتباين.

الجواب:

1- دالة كثافة الاحتمال:

$$X \sim U(2, 6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2- دالة التوزيع:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{x-2}{4} & \text{si } 2 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

$$P(X < 4) = F(4) = \frac{4-2}{4} = 0,5$$

تفسير القيمة: 50% من الزبائن يقل إنفاقهم في هذا المتجر عن 4000 دج.

3- التوقع والتباين.

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(6-2)^2}{12} = 1,33$$

2. التوزيع الطبيعي:

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر وأكثرها استخداماً، وهو يشكل الدعامة الأساسية لمعظم النظريات الإحصائية وأساليب التحليل الإحصائي. وقد اشتق اسم التوزيع الطبيعي من أن معظم التوزيعات (في حالتها الطبيعية) تأخذ شكلاً قريباً منه.

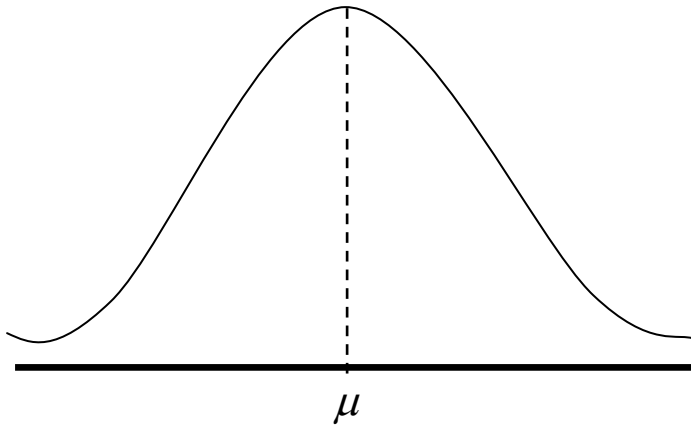
ويعتمد التوزيع الطبيعي على معلمتين هما: المتوسط (الوسط الحسابي) (μ) والانحراف المعياري (σ) حيث نكتب:

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

1.2. شكل التوزيع الطبيعي:

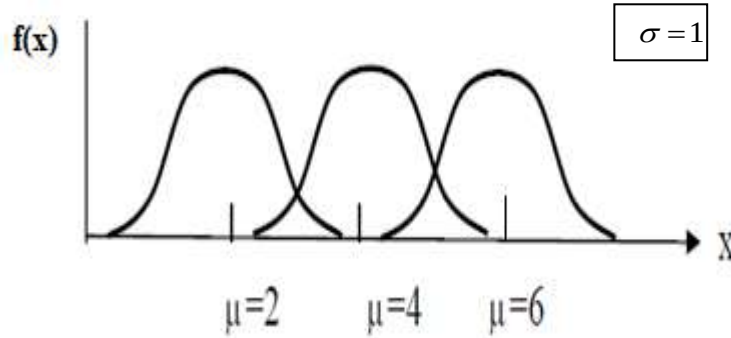
يتميز المنحنى الطبيعي بشكله الجرسى المتماثل حول خط عمودي يمر بقيمة الوسط الحسابي الذي يساوي بسبب التماثل كلا من الوسيط والمنوال $\mu = Me = Mo$. ويمتد طرفا المنحنى الطبيعي إلى ما لانهاية يميناً ويساراً دون ملامسة الخط الأفقي وتساوي المساحة الكلية للحيز المحصور بين المنحنى ومحور الفواصل قيمة الواحد.

شكل التوزيع الطبيعي

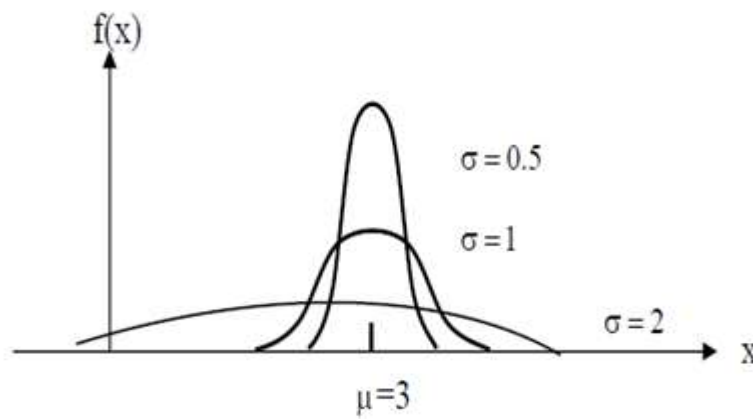


وتختلف أشكال التوزيعات الطبيعية عن بعضها البعض باختلاف قيمتي المتوسط والانحراف المعياري كما هو مبين في الشكلين الآتيين:

الحالة 1: توزيعات طبيعية لها نفس الانحراف المعياري وتختلف متوسطاتها:



الحالة 2: توزيعات طبيعية تختلف انحرافات المعيارية وتتساوى متوسطاتها:



2.2. دالة كثافة الاحتمال:

بما أن المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي هو متغير مستمر يقبل عددا لانهاثيا من القيم، فإن حساب الاحتمال يكون من خلال إجراء التكامل الرياضي لدالة كثافة الاحتمال التي تعطى بالعلاقة التالية:¹

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

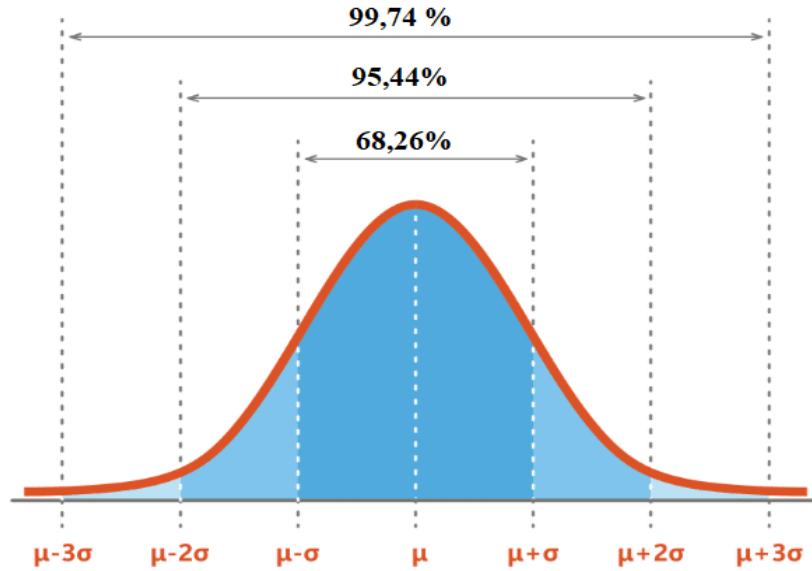
3.2. خصائص التوزيع الطبيعي:

يتميز التوزيع الطبيعي بمجموعة من الخصائص تميزه عن باقي التوزيعات الاحتمالية الأخرى هي:

1- Benjamin Benzon, **The normal distribution, an epistemological view**, St Open, 2021, DOI: 10.48188/so.2.6.

الفصل السادس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة

- ✓ منحنى التوزيع الطبيعي يكون متماثلاً حول قيمة المتوسط μ
 - ✓ طرفا المنحنى لا يلامسان محور الفواصل وإنما يمتدان إلى ما لا نهاية
 - ✓ إجمالي المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد.
 - ✓ تتوزع المساحة الكلية للمنحنى على جانبي قيمة المتوسط كما يلي:¹
- | | |
|---|---------------|
| من المساحة الإجمالية للمنحنى محصورة بين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$ | 68,26% |
| من المساحة الإجمالية للمنحنى محصورة بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$ | 95,46% |
| من المساحة الإجمالية للمنحنى محصورة بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ | 99,74% |



4.2. التوزيع الطبيعي المعياري:

نظراً لصعوبة حساب الاحتمالات بإجراء التكامل الرياضي لدالة الكثافة الاحتمالية، فقد تم إيجاد صيغة رياضية تمكن من تحويل المتغير العشوائي الطبيعي X إلى متغير عشوائي طبيعي معياري يرمز له بـ: Z .

المتغير المعياري Z هو عبارة عن متغير عشوائي طبيعي متوسطه معدوم وانحرافه المعياري يساوي

1، أي أنه من بين التوزيعات الطبيعية اللانهائية يوجد توزيع وحيد يكون متوسطه $\mu = 0$ وانحرافه

المعياري $\sigma = 1$ هو التوزيع الطبيعي المعياري ونكتب: $Z \sim N(0;1)$

1- Peter Bruce, Andrew Bruce & Peter Gedeck, **Practical Statistics for Data Scientists**, Second Edition, O'Reilly Media, Sebastopol, 2020, P 70.

ويمكن إيجاد قيمة المتغير Z بالعلاقة الآتية:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

5.2. حساب الاحتمالات:

لحساب الاحتمالات باستخدام التوزيع الطبيعي نقوم بتحويل المتغير X إلى متغير معياري Z ، حيث قام المختصون بإعداد جدول يضم كل القيم الممكنة للمتغير المعياري Z والاحتمالات المقابلة لها ويطلق على هذا الجدول "جدول التوزيع الطبيعي المعياري" (أنظر الملحق رقم 01)

ولاستخدام الجدول المذكور أعلاه يجب أن تكون قيمة المتغير المعياري Z موجبة، وأن يكون الإحتمال من الشكل: $P(Z \leq a)$ أو $P(Z < a)$ حيث $a \geq 0$.

وفي بعض الحالات يكون الاحتمال المطلوب حسابه من الشكل $P(Z \geq a)$ أو تكون a قيمة سالبة، فيتوجب علينا في هذه الحالة تحويل العلاقة قبل قراءة الاحتمال من الجدول.

وفيما يلي أهم العلاقات والصيغ التي نستخدمها لتحويل الاحتمالات:

(بافتراض a و b عدداً موجبان حيث $b > a$)

- 1) $P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a)$
- 2) $P(Z \geq -a) = P(Z \leq a)$
- 3) $P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$
- 4) $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$
- 5) $P(-a \leq Z \leq b) = P(Z \leq a) + P(Z \leq b) - 1$
- 6) $P(-b \leq Z \leq -a) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$

6.2. قراءة الإحتمال من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

يتكون جدول التوزيع الطبيعي المعياري من مصفوفة قيم حيث يمثل كل من السطر الأول والعمود الأول (المشار إليهما باللون الأحمر) في الصورة التالية قيم المتغير Z :

الفصل السادس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389

وتدل القيم الواقعة في السطر الأول على الرقم الثاني بعد الفاصلة من قيمة Z، أما القيم الواقعة في العمود الأول فتمثل الرقمين الصحيح والعشري من قيمة Z.

أما القيم الواقعة داخل المصفوفة فهي قيم الاحتمالات الموافقة لقيمة Z المطلوبة.

فمثلاً لحساب الاحتمال التالي: $P(Z \leq 0,8) = ?$

نبحث عن القيمة 0,8 في الجدول، ونلاحظ أن الرقم الثاني بعد الفاصلة هو 0 لأن القيمة أصلها 0,80، وبالتالي فإن القيمة المطلوبة في السطر الأول هي 0,00 والقيمة المطلوبة في العمود الأول هي 0,8 وتقاطع هاتين القيمتين يساوي الاحتمال المطلوب كما هو مبين في الشكل:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319

فالاحتمال المطلوب هو: $P(Z \leq 0,8) = 0,7881$

مثال:

ليكن X متغير عشوائي طبيعي حيث: $X \sim N(15; 2)$

أحسب الاحتمالات الآتية:

$$P(13,5 \leq X \leq 18) \quad P(X \geq 13) \quad P(X \leq 17)$$

الجواب:

$$P(X \leq 17) = ? \quad (1)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

نقوم بتحويل القيمة الطبيعية X إلى قيمة معيارية Z وفق العلاقة:

القيمة المراد تحويلها هي 17 ولدينا: $\mu = 15$ و $\sigma = 2$

$$P(X \leq 17) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{17 - 15}{2}\right) = P(Z \leq 1)$$

ومنه يصبح الاحتمال المطلوب إيجاداه هو:

$P(Z \leq 1) = ?$ أي أن القيمة المعيارية التي سنبحث عنها في الجدول هي: 1,00 وبالتالي يصبح الاحتمال:

$$P(Z \leq 1) = 0,8413$$

$$P(X \geq 13) = ? \quad (2)$$

$$P(X \geq 13) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{13 - 15}{2}\right) = P(Z \geq -1)$$

نلاحظ أن القيمة المعيارية المتحصل عليها لا تستجيب لمتطلبات استخدام الجدول، وبالتالي نقوم بتحويلها باستخدام العلاقة رقم (2) (أنظر الصفحة 4)، فتصبح النتيجة كما يلي:

$$P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0,8413$$

$$P(13,5 \leq X \leq 18) \quad (3)$$

$$P(13,5 \leq X \leq 18) = P\left(\frac{13,5 - 15}{2} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{18 - 15}{2}\right) = P(-0,75 \leq Z \leq 1,5)$$

نحول صيغة الاحتمال وفق العلاقة رقم (5) (أنظر الصفحة 4) فتصبح النتيجة كما يلي:

$$P(-0,75 \leq Z \leq 1,5) = P(Z \leq 0,75) + P(Z \leq 1,5) - 1$$

ولدينا من الجدول:

$$P(Z \leq 0,75) = 0,7734$$

$$P(Z \leq 1,5) = 0,9332$$

أي أن النتيجة النهائية هي:

$$P(-0,75 \leq Z \leq 1,5) = 0,7734 + 0,9332 - 1 = 0,7066$$

3. توزيع قاما (Gamma):

تمت الإشارة سابقا إلى أن الرسم البياني دالة كثافة الاحتمال الطبيعية يأخذ شكل الجرس ويكون متماثلا. إلا أن التجارب أثبتت أنه في العديد من الحالات العملية يتبع المتغير المدروس توزيعا غير متماثل.

وتعد عائلة توزيعات غاما من عائلات دوال الكثافة الاحتمالية التي تتيح مجموعة واسعة من الأشكال التوزيعية غير المتماثلة. ولتعريف توزيع غاما، نحتاج أولا إلى تقديم دالة تلعب دورا مهما في العديد من فروع الرياضيات.

1.3. دالة الكثافة الاحتمالية:

قبل التطرق لدالة كثافة توزيع قاما نقدم الدالة الرياضية قاما حسب العلاقة التالية:¹

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} X^{\alpha-1} e^{-X} dx \quad \alpha > 0$$

ومن بين خصائص دالة قاما:

$$\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

أما توزيع قاما فإنه يعطى بالعلاقة التالية:²

1- Jay L. Devore, Kenneth N. Berk, **Modern Mathematical Statistics with Applications**, Second Edition, Springer, New York, 2012, P 195.

2- محمد بداوي ومحمد دوة، مرجع سابق، ص 57.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{sinon} \\ 0 & \end{cases}$$

حيث تمثل كل من α و β معلمتا هذا التوزيع.

2.3. التوقع:

يمكن الحصول على قيمة التوقع الرياضي لتوزيع قاما كما يلي:

- لدينا من تعريف التوقع:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx$$

$$E(X) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

نضع:

$$u = \frac{x}{\beta} \Rightarrow x = \beta u, \quad dx = \beta du$$

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد:

$$E(X) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha+1} \int_0^{\infty} u^\alpha e^{-u} du$$

ونعلم من تعريف دالة قاما أن:

$$\int_0^{\infty} u^\alpha e^{-u} du = \Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

فنحصل على قيمة التوقع كما يلي:

$$E(X) = \frac{\beta^{\alpha+1} \alpha \Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}$$

$$E(X) = \alpha\beta$$

3.3. التباين:

يعطى تباين توزيع قاما بالعلاقة التالية:

$$V(X) = \alpha\beta^2$$

الإثبات:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

لدينا:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \end{aligned}$$

وبوضع:

$$u = \frac{x}{\beta} \Rightarrow x = \beta u, \quad dx = \beta du$$

نجد:

$$E(X^2) = \frac{\beta^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha+1} e^{-u} du$$

مع العلم أن:

$$\int_0^{\infty} u^{\alpha+1} e^{-u} du = \Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$$

فإن:

$$E(X^2) = \beta^2 \alpha(\alpha + 1)$$

نعوض في علاقة التباين فنجد:

$$V(X) = \beta^2 \alpha(\alpha + 1) - [\alpha\beta]^2 = \alpha\beta^2$$

4. توزيع بيتا:

يعد توزيع بيتا من أشهر التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر، حيث يكتب التوزيع بالصيغة التالية:

$$X \sim B(\alpha, \beta)$$

وقب التطرق لدالة الكثافة الاحتمالية نستعرض فيما يأتي الدالة الرياضية بيتا:

1.4. دالة الكثافة الاحتمالية:

قبل التطرق إلى دالة الكثافة الاحتمالية، كان لزاماً أن نعرض على صيغة دالة بيتا الرياضية التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

كما يمكن كتابة هذه الدالة بدلالة دالة غاما الرياضية كما يلي:¹

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

أما دالة كثافة الاحتمال لتوزيع بيتا فتعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

2.4. التوقع:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع بيتا، فإن التوقع يعطى بالعلاقة التالية:

1- Mezbahur Rahman & Md Iftikhar Amin, A note on parameter estimation in Beta distribution, Far East Journal of Theoretical Statistics, 68(2), Prayagraj, 2024, P 257.

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

الإثبات:

لدينا من علاقة التوقع:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

ومن دالة الكثافة نجد أن:

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

$$E(X) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx$$

ولدينا من تعريف دالة الكثافة لتوزيع بيتا:

$$\int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx = B(\alpha+1, \beta)$$

نعوض في علاقة التوقع:

$$E(X) = \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \dots\dots\dots(1)$$

وباستخدام دالة غاما لدينا:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

نعوض في العلاقة 1 نجد:

$$E(X) = \frac{\frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)}}{\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}}$$

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} \dots\dots\dots(2)$$

وبتعريف دالة غاما لدينا:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(\alpha + 1 + \beta) = (\alpha + \beta) \Gamma(\alpha + \beta)$$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

3.4. التباين:

يعطى تباين توزيع بيتا بالعلاقة التالية:

$$V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

الإثبات:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad \text{لدينا علاقة التباين:}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) dx \quad \text{نحسب:}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta-1} dx \dots (1)$$

ولدينا من تعريف دالة الكثافة لتوزيع بيتا:

$$\int_0^1 x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta-1} dx = B(\alpha + 2, \beta)$$

نعوض في العلاقة (1) نجد:

$$E(X^2) = \frac{B(\alpha + 2, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \dots (2)$$

وبالعودة إلى دالة غاما والتعويض في العلاقة (2) نجد:

$$E(X^2) = \frac{\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}}{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}$$

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

وبتعريف دالة غاما لدينا:

$$\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1) \cdot \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+2) = (\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$$

ومنه فإن:

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

نعوض في علاقة التباين فنجد:

$$V(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^2$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

5. توزيع كاي تربيع:

يعد توزيع كاي مربع أحد أهم التوزيعات الاحتمالية في الإحصاء الاستدلالي، وهو في الأصل حالة خاصة من توزيع قاما، ويستخدم بشكل واسع في اختبار الفرضيات وتقدير فترات الثقة. يرمز له بالرمز: χ^2 ، وتقوم فكرة توزيع كاي مربع على وجود عدد k من المتغيرات (Z) التي تتبع التوزيع الطبيعي المعياري (متوسطها 0 وتباينها 1)، حيث أن مجموع مربعات هذه المتغيرات يتبع توزيع كاي مربع بدرجات حرية تساوي k .

1.5. دالة الكثافة الاحتمالية:

تعطى دالة كثافة الاحتمال لتوزيع كاي مربع بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} X^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{X}{2}}$$

حيث:

X: هو المتغير العشوائي الذي يأخذ دائما قيما موجبة.

K: درجات الحرية.

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right): \text{دالة قاما عند القيمة } \frac{k}{2}$$

2.5. دالة التوزيع:

بناء على تعريف دالة التوزيع، فإن علاقتها في حالة توزيع كاي مربع هي كما يلي:

$$F(X) = \int_0^x \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} X^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{X}{2}}$$

3.5. التوقع:

يعطى توقع توزيع كاي مربع بالعلاقة التالية:

- التوقع يساوي قيمة درجات الحرية :

$$E(X) = k$$

الإثبات:

لدينا علاقة التوقع:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$E(X) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{+\infty} X^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{X}{2}} dx$$

نضع: $u = \frac{X}{2}$ ، فتصبح العلاقة:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{+\infty} (2u)^{\frac{k}{2}} e^{-u} 2du \\ &= \frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{+\infty} u^{\frac{k}{2}} e^{-u} du \end{aligned}$$

وبما أن:

$$\int_0^{+\infty} u^{\frac{k}{2}} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

فإن:

$$E(X) = \frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{2^{\frac{k}{2}}} \cdot \frac{k}{2} = k$$

$$\Rightarrow E(X) = k$$

4.5. التباين:

يساوي تباين توزيع كاي مربع ضعف قيمة درجات الحرية:

$$V(X) = 2k$$

الإثبات:

لدينا علاقة التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

نحسب: $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{+\infty} X^{\frac{k}{2}+1} e^{-\frac{X}{2}} dx$$

نضع: $u = \frac{X}{2}$ ، فتصبح العلاقة:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{2^{\frac{k}{2}+2}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{+\infty} u^{\frac{k}{2}+1} e^{-u} du \\ &= 4 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 2\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \end{aligned}$$

حيث أن:

$$\Gamma\left(\frac{k}{2} + 2\right) = \left(\frac{k}{2} + 2\right) \frac{k}{2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$$

فإن:

$$E(X^2) = 4\left(\frac{k}{2} + 1\right) \frac{k}{2} = k(k + 2)$$

لتصبح العلاقة النهائية للتباين:

$$\begin{aligned} V(X) &= k(k + 2) - k^2 = 2k \\ \Rightarrow V(X) &= 2k \end{aligned}$$

ملاحظة: يتم حساب قيم الاحتمالات من خلال جدول القيم (أنظر الملحق رقم 02) وذلك بالاعتماد على درجات الحرية k .

5.5. تقريب توزيع كاي تربيع للتوزيع الطبيعي:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع كاي تربيع بدرجات حرية k ، وكانت قيمة k كبيرة فإنه يمكن تقريبه إلى التوزيع الطبيعي المعياري بمتغير معياري Z حيث:¹

$$Z = \frac{\chi_n^2 - k}{\sqrt{2k}}$$

وتعطى دالة التوزيع في هذه الحالة بالعلاقة التالية:

$$F_{\chi_n^2}(X) \cong F_n\left(\frac{X - k}{\sqrt{2k}}\right)$$

6. توزيع ستودنت:

توزيع ستودنت هو توزيع احتمالي مستمر يستعمل في الإحصاء الاستدلالي لدراسة متوسط مجتمع طبيعي عندما يكون التباين مجهولاً وحجم العينة صغيراً. حيث يقترب توزيع ستودنت من التوزيع الطبيعي المعياري كلما زاد عدد درجات الحرية.

ونقول عن متغير عشوائي T أنه يتبع توزيع ستودنت بدرجات حرية n حيث:

$$T \sim t(n)$$

وتعطى قيمة المتغير T بالعلاقة التالية:²

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$$

حيث: Z : المتغير الطبيعي المعياري.

U متغير عشوائي يتبع توزيع كاي تربيع.

مع افتراض أن كلا من Z و U هما متغيران مستقلان.

1- Frédéric Ouimet, **Refined normal approximations for the central and noncentral chi-square distributions and some applications**, Statistics, Volume 56 - Issue 4, 2022, PP 935-956.

2 - DeGroot Morris H & Mark J. Schervish, **Probability and Statistics**, 5th ed, Pearson, 2021.

الفصل السادس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة

وتعطى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستيودنت بالعلاقة التالية:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

حيث:

Γ : دالة غاما

n : درجات الحرية (عدد صحيح موجب)

π : قيمة ثابتة: 3,1416

ملاحظة:

- يشبه شكل توزيع ستيودنت إلى حد بعيد التوزيع الطبيعي وهو متماثل حيث: $f(t) = f(-t)$

- كلما زادت قيمة t كلما اقتربت قيمة الدالة من الصفر.

- نتحصل على قيم الاحتمالات من خلال جدول قيم t (أنظر الملحق رقم 03).

الفصل السادس: قوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة

تمارين الفصل السادس:

تمرين 01:

- إذا علمت أن أجور العمال في إحدى المؤسسات تتبع توزيعاً طبيعياً، وأن الأجر المتوسط في هذه المؤسسة هو 28500 دج، بانحراف معياري 5500 دج.
- إذا اخترنا عاملاً من هذه المؤسسة بطريقة عشوائية:
1. أحسب احتمال أن يكون أجره محصوراً بين 23000 دج و 34000 دج. (بدون استعمال جدول قيم Z).
 2. أوجد حدود المجال الذي يحصر أجور 95,44% من العمال.

تمرين 02:

- أشارت إحدى الدراسات التي أجريت على العائلات المكونة من 4 أفراد أن الاستهلاك الشهري المتوسط من مادة الحليب هو 20 لتر بانحراف 6 لتر. إذا علمت أن استهلاك العائلات لهذه المادة يتبع توزيعاً طبيعياً أحسب ما يلي:
- نسبة العائلات التي تستهلك أكثر من 30 لتر ونسبة العائلات التي تستهلك أقل من 10 لتر).
 - علق على النتيجة؟
 - أقل كمية يستهلكها 75% من العائلات؟
 - ما هي الكمية التي يستهلك ثلث المجتمع كمية أكبر منها؟

تمرين 03:

ليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل مدة تشغيل آلة (بالساعات)، ويتبع توزيع قاما بمعلمتين:

$$\alpha = 2$$

$$\beta = 3$$

$$X \sim \Gamma(2, 3)$$

1- أكتب صيغة دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع

2- أحسب قيمتي التوقع والتباين

الخاتمة

الخاتمة:

ختاماً، لقد تناولت هذه المطبوعة البيداغوجية مجموعة من المفاهيم الأساسية لمقياس الإحصاء 2، والتي تمحورت حول مفاهيم المجموعات والتحليل التوفيقي كمدخل لنظرية الاحتمالات، إضافة إلى المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها الاحتمالية. وقد تم الحرص على تقديم المحتوى وعرضه بأسلوب منهجي مبسط مدعم بالأمثلة والتمارين التطبيقية، الأمر الذي من شأنه أن يساهم في ترسيخ الفهم النظري وتنمية المهارات التحليلية لدى الطلبة.

وقد استهدفت هذه المطبوعة طلبة الجذع المشترك علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير، لمساعدتهم على استيعاب الأسس الإحصائية الضرورية التي سيستغلها الطالب كقاعدة لمقاييس أكثر تخصصاً في مساره الأكاديمي، ويوظفها كأداة لفهم الظواهر الاقتصادية وتحليل المعطيات.

وقد تمثلت الغاية الأساسية من هذه المطبوعة في توفير سند بيداغوجي متاح للطلبة ويساهم في نجاحهم وتفوقهم، مع التأكيد على أن الإحصاء علم تطبيقي يحصله الطالب بالممارسة المستمرة والتدريب المتواصل.

قائمة

المراجع

قائمة المراجع

1. المراجع باللغة العربية

- (1) أمطير مفتاح عثمان، حساب الاحتمالات، مركز الكتاب الأكاديمي، عمان، 2020.
- (2) سليمان عثمان أبوصبحا، الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية، شركة دار الأكاديميون للنشر والتوزيع، عمان، 2014.
- (3) روجي ابراهيم الخطيب، الرياضيات المتقطعة، ط1، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، 2014.
- (4) محمد بداوي ومحمد دوة، الإحصاء المطبق في العلوم الاجتماعية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2016.
- (5) محمد أبو صالح، مبادئ الإحصاء، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2020.
- (6) محمود أحمد عبد الفتاح، الاحتمالات والإحصاء التطبيقي، ط2، دار الصفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2022.
- (7) جبار عبد ماضي، الإحصاء والاحتمالات، شركة دار الأكاديميون للنشر والتوزيع، عمان، 2016.
- (8) حامد نور الدين، محاضرات وتمارين محلولة في مقياس الإحصاء الوصفي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، 2019.
- (9) علي ملكاوي، الامتياز في أساسيات الرياضيات، الآن ناشرون وموزعون، عمان، 2018.
- (10) قصي حميد السلامي، سيف الدين هاشم قمر، عمر عبد المحسن القيسي، الإحصاء المالي التطبيقي، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2024.
- (11) حميد عويد مشرف العكلة وآخرون، مبادئ الإحصاء والاحتمالات، جامعة الملك سعود، (د.س)، متوفر على: <https://faculty.ksu.edu.sa/> تاريخ الاطلاع: 2025/11/01.
- (12) جاسم محمد التميمي ووسام مالك داود، الإحصاء الحيوي باستخدام برنامج SPSS، مركز الكتاب الأكاديمي، عمان، 2016.
- (13) محمد الدويك، المثالي في الرياضيات، دار عالم الثقافة للنشر والتوزيع، عمان، 2016.
- (14) ديفيد جيه هاند، علم الإحصاء، ط1، مؤسسة هنداوي للتعليم والثقافة، القاهرة، 2016.
- (15) مبارك أسير ديب، مبادئ الاحتمالات والإحصاء، اللاذقية: كلية العلوم، جامعة تشرين، 2009/2008.

2. المراجع باللغات الأجنبية:

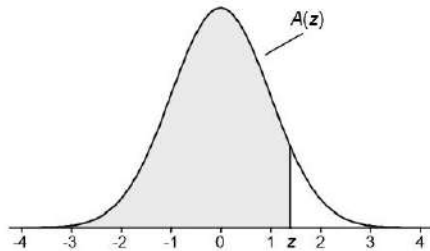
- 16) Kolman, B., Busby, R. C., & Ross, S, **Discrete Mathematical Structures**, 3rd ed, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2004.
- 17) Al Doerr & Ken Levasseur, **Applied Discrete Structures**. 3rd ed. University of Massachusetts Lowell, 2018.
- 18) Oscar Levin, **Discrete Mathematics: An Open Introduction**, 3rd ed, University of Minnesota: Open Textbook Library, 2021.
- 19) Ted Sundstrom, **Mathematical Reasoning: Writing and Proof**, 2nd ed, Grand Valley State University, 2020.
- 20) Kenneth H. Rosen, **Discrete Mathematics and Its Applications**. 7th Ed. McGraw-Hill. 2021.
- 21) John A. Gubner, **"Permutations, the Parity Theorem, and Determinants"** (Unpublished Lecture Notes, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Wisconsin-Madison, November 3, 2023).
- 22) Kenneth H. Rosen, **Discrete Mathematics and Its Applications**, 8th Ed, McGraw-Hill Education, New York 2019.
- 23) Bruce E. Sagan, **Combinatorics: The Art of Counting**, American Mathematical Society, 2020.
- 24) Lahcene Abdallah Bachicoua, **Finite Mathematics, An Arabic text**, 1st Ed, Phillips publishing, 2013.
- 25) Adams, Henry, et al, **Counting Rocks! An Introduction to Combinatorics**, 2021, <https://arxiv.org/abs/2108.04902> (22/10/2025)
- 26) Nicolas Nguyen, **Analyse et probabilités**, Ed Ellipses, Paris, 2023.
- 27) Julian Tugaut, **Les bases indispensables des probabilités et des statistiques cours et exercices corrigés**, Ed Ellipses, Paris, 2025
- 28) J. Calvin Berry, **Probability and Statistics Book**, July 2024 Edition, University of Louisiana. 2024.
- 29) Paolo Baldi, **Probability: An Introduction Through Theory and Exercises**, Springer, 2023.
- 30) Barbara Illowsky & Susan Dean, **Introductory Statistics**. 2nd ed, OpenStax, 2023.
- 31) Joseph K. Blitzstein & Jessica Hwang, **Introduction to probability**, 2nd Edition, CRC press, New York, 2019.
- 32) Bhimanand Pandurang Gajbhare et al, **Probability and Statistics**, 1st Edition, Rk publications, Coimbatore, 2025.
- 33) Francois Cottet-Emard, **Probabilité et tests d'hypothèse**, 1ere édition, De Boeck Supérieur s.a, Bruxelles, 2014.

- 34) Valentin Roussel, **Introduction à l'inférence bayésienne- Cours 2: le théorème de Bayes**. Master, 2020, disponible sur: <https://hal.science/hal-02315971v2/document> consulté le 05/11/2025.
- 35) Pasquale De Marco, **Statistics Reinvented: A Comprehensive Guide for Modern Data Analysis**. CRC PRESS, 2023.
- 36) Allan G . Bluman, **Elementary Statistics: A Step By Step Approach**, 9th Edition, McGraw-Hill Education, New York, 2014.
- 37) Louis Houde, **MODULE 6 Variable aléatoire : Analyse quantitative de probleme de gestion**, Université du Québec à Trois-Rivières. <https://oraprdnt.uqtr.quebec.ca/Gscdepot/paf1010/12/M6.pdf> récupéré le :13/11/2025.
- 38) Laurent SMOCH, **Mesures Et Analyses Statistiques De Données Probabilites**, Université du Littoral- Côte d'Opale, La Citadelle, 2012, P 30.<http://www-lmpa.univ-littoral.fr/~smoch/documents/M1-GSI/probas-Master1-GSI-chapitre3.pdf> (Récupéré le 14/11/2025).
- 39) Douglas C.Montgomery, George C.Runger, **Applied statistics and probability for engineers**, 7th Edition, Wiley, Hoboken New Jersey, 2018.
- 40) Sheldon M. Ross, **Introduction to Probability Models**, 11 th Edition, Academic Press, Oxford, 2014.
- 41) Jason Arevaya, **Probability and statistics for economics and busness an Introduction using R**, MIT Press, Cambridge, 2025.
- 42) Jean-François Le Gall, **Measure Theory, Probability, and Stochastic Processes**, Springer, 2022.
- 43) Yvan Monka, Lois Discrètes, Académie de Strasbourg, <https://www.maths-et-tiques.fr/telech/20LoisDisTC1.pdf>(récupéré le: 26/11/2025).
- 44) Dennis D. Wackerly & William Mendenhall III & Richard L. Scheaffer, **Mathematical Statistics with Applications**, Thomson Brooks/Cole, Belmont, 2008.
- 45) François Cottet-Emard, **Probabilités et tests d-hypothèse**, 1ere Edition, De Boeck Supérieur S.A, Bruxelles, 2014.
- 46) Dwaipayan Sethi, **Introduction to Business Analytics**, Educohack press, Delhi, 2025.
- 47) Ken Black, **Business Statistics : For Contemporary Decision Making**, Sixth Edition, USA, 2010.
- 48) Benjamin Benzon, **The normal distribution, an epistemological view**, St Open, 2021, DOI: 10.48188/so.2.6.
- 49) Peter Bruce, Andrew Bruce & Peter Gedeck, **Practical Statistics for Data Scientists**, Second Edition, O'Reilly Media, Sebastopol, 2020.
- 50) Jay L. Devore, Kenneth N. Berk, **Modern Mathematical Statistics with Applications**, Second Edition, Springer, New York, 2012.

- 51) Mezbahur Rahman & Md Iftikhar Amin, **A note on parameter estimation in Beta distribution**, Far East Journal of Theoretical Statistics, 68(2), Prayagraj, 2024.
- 52) Frédéric Ouimet, **Refined normal approximations for the central and noncentral chi-square distributions and some applications**, Statistics, Volume 56 - Issue 4, 2022, PP 935-956.
- 53) DeGroot Morris H & Mark J. Schervish, **Probability and Statistics**, 5th ed, Pearson, 2021.

الملاحق

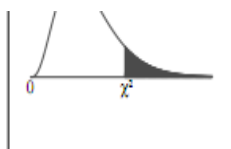
Cumulative Standardized Normal Distribution



$A(z)$ is the integral of the standardized normal distribution from $-\infty$ to z (in other words, the area under the curve to the left of z). It gives the probability of a normal random variable not being more than z standard deviations above its mean. Values of z of particular importance:

z	$A(z)$	
1.645	0.9500	Lower limit of right 5% tail
1.960	0.9750	Lower limit of right 2.5% tail
2.326	0.9900	Lower limit of right 1% tail
2.576	0.9950	Lower limit of right 0.5% tail
3.090	0.9990	Lower limit of right 0.1% tail
3.291	0.9995	Lower limit of right 0.05% tail

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999							



ملحق رقم 02: جدول توزيع كاي تربيع

The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_{\alpha}$.

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.800}$	$\chi^2_{.700}$	$\chi^2_{.600}$	$\chi^2_{.500}$	$\chi^2_{.400}$	$\chi^2_{.300}$	$\chi^2_{.200}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879							
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597							
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838							
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860							
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750							
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548							
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278							
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955							
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589							
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188							
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757							
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300							
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819							
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319							
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801							
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267							
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718							
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156							
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582							
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997							
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401							
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796							
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181							
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559							
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928							
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290							
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645							
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993							
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336							
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672							
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766							
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490							
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952							
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215							
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321							
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299							
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169							

ملحق رقم 03: جدول توزيع ستودنت

LOI DE STUDENT AVEC k DEGRÉS DE LIBERTÉ
QUANTILES D'ORDRE $1 - \gamma$

k	γ										
	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0025	0.0010	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291