



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف  
Université Chadli Bendjedid – El Tarf  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
قسم الرياضيات  
Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Spécialité:** Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

### Thème

# Inégalité de Lyapunov pour un problème aux limites fractionnaire d'ordre supérieure

Présentée par:

**BENACHOUR Hala**

Devant le Jury :

<b>Dr. Mecheri Halima</b>	<b>MCB</b>	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
<b>Dr. Kouachi Samia</b>	<b>MCA</b>	Univ Badji Mokhtar Annaba	Rapporteur
<b>Dr. Bouhadjera Hakima</b>	<b>PROF</b>	Univ Badji Mokhtar Annaba	Examineur

**Année Universitaire 2023-2024**

# Remerciements

*Avant tout, je remercie le bon Dieu qui a illuminé mon chemin et qui j'ai armés le courage et de bonne volonté pour réaliser ce travail. je tenu exprimer mes plus profond remerciement à mes chers parents et toute la famille pour leur amour, leur aide et leur présence au quotidien.*

*Je tenu à remercier vivement Mme KOUACHI SAMIA, pour m'avoir proposée le sujet de ce mémoire, pour m' avoir honorée par son encadrement.*

*Je tiens également à exprimer ma gratitude au présidente du jury Mme MECHERI HALIMA j'avoir acceptée de présider le jury.*

*Je remercie très chaleureusement Mme BOUHADEJRA HAKIMA d'avoir accepté d'examiner mon travail*

*J'adresse également des remerciements à tous les enseignants de la faculté de l'université de Chadli Benjdid. Ainsi que tous les membres du département de Mathématique, pour toute l'aide qui m'été accordée.*

# Dédicace

*Avec ma gratitude et tout mon amour je dédie ce modeste travail :*

*À l'être la plus chère de ma vie ma mère FOUZIA, tu trouves toujours les mots qui m'encourageaient et qui me poussaient à aller de l'avant, quoi que je fasse ou je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit.*

*À mon très cher père SALAH, pour son soutien, son affection et la confiance qu'il m'a accordé.*

*À mon très cher frère : BADR EL DINE que je souhaite réussite dans ta vie.*

*À mon mari Mondre MOHAMED pour tout son aide, son soutien et ses encouragements.*

*À tous les membres de ma famille.*

# Résumé

Le calcul fractionnaire est devenu de plus en plus un important axe de recherche en mathématiques et ce, en raison de son utilisation extensive dans différents domaines de sciences.

Dans ce travail on a établi une nouvelle inégalité de Lyapunov pour un problème aux limites fractionnaire d'ordre supérieur.

En transformant le problème initial en un problème auxiliaire et en utilisant les propriétés de la fonction de Green, le résultat voulu est obtenu.

# Abstract

Fractional computing has become an increasingly important research area in mathematics due to its extensive use in different fields of science.

In this work a new Lyapunov inequality was established for a higher order fractional boundary problem.

By transforming the initial problem into an auxiliary problem and using the properties of the green function, the desired result is obtained.

# ملخص

أصبحت الحوسبة الجزئية مجالاً بحثياً متزايد الأهمية في الرياضيات نظراً لاستخدامها على نطاق واسع في مجالات العلوم المختلفة. في هذا العمل، تم إنشاء عدم مساواة ليابونوف جديد لمشكلة الحدود الجزئية ذات الرتبة الأعلى.

من خلال تحويل المشكلة الأولية إلى مشكلة مساعدة واستخدام خصائص الدالة قرين، يتم الحصول على النتيجة المرجوة.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>9</b>
1.1 Éléments du calcul fractionnaire . . . . .	9
1.1.1 Un aperçu historique . . . . .	9
1.1.2 Fonctions spéciales . . . . .	10
1.1.3 Intégration fractionnaire . . . . .	11
1.1.4 Dérivation fractionnaire . . . . .	13
<b>2 La fonction de Green</b>	<b>23</b>
2.1 Bref Historique . . . . .	23
2.2 Définition de la fonction de Green . . . . .	23
2.2.1 L'existence et unicité de la fonction de Green . . . . .	24
2.2.2 Méthode de Calcul la fonction de Green . . . . .	24
2.2.3 Existence et unicité d'une solution : . . . . .	25
2.2.4 Exemples . . . . .	26
2.3 Réduction d'un problème aux limites à une équation intégrale	27
<b>3 Inégalité de Lyapunov pour un problème aux limites frac-</b>	
<b>tionnaire d'ordre supérieur</b>	<b>29</b>
3.1 Inégalité de Lyapunov . . . . .	29
<b>Conclusion générale</b>	<b>34</b>
<b>Bibliography</b>	<b>35</b>

# Introduction

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par là même introduire la dérivée seconde. Puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opération inverse de la dérivée, peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre "moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordres successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire. Selon une thèse d'histoire des mathématiques récente [17], la dérivation numérique d'ordre fractionnaire remonte à diverses correspondances entre Gried Leibniz, Guillaume de L'Hospital et Johann Bernoulli à la fin du 17ème siècle. Mais ces grands pionniers se heurtent à un paradoxe.

On pourrait penser que cette recherche de dérivation fractionnaire est une question de mathématiques "pures" sans intérêt pour l'ingénieur. Pourtant un exemple simple de mécanique des fluides montre comment la dérivée d'ordre un demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un ux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne. La dérivée d'ordre un demi étant introduite, on doit être vigilant quant à sa définition précise dans les situations les plus générales. Il en est de même pour la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha$ , où  $\alpha$  est typiquement un nombre réel entre zéro et un. Pendant longtemps plusieurs définitions, suite aux travaux de Joseph Liouville et Bernhard Riemann au milieu du 19ème siècle, ont coexisté sans qu'il y ait une parfaite compatibilité entre elles.

Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommés et des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement, autrement dit les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elle partage avec plusieurs matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour les quelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand développement. L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaires dans la construction des modèles matériels simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique. Tout en utilisant un algorithme de discrétisation des dérivées non entières on doit tenir compte de sa structure non locale qui signifie en général un haut stockage d'information et une grande complexité de l'algorithme.

Les équations différentielles d'ordre fractionnaire peuvent également être

utilisées pour décrire la propriété héréditaire de divers matériaux et procédés qui ne sont pas possibles via les équations différentielles d'ordre entier. Avec cette particularité, les modèles d'ordre fractionnaires correspondent à une situation plus réaliste et pratique [1, 2, 3, 33, 34].

L'étude des systèmes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire a également eu un grand intérêt, de tels systèmes apparaissent dans une grande variété de problèmes d'application, en particulier en biosciences [4, 5, 6].

Dans la plus part des cas, ces systèmes sont associés à des perturbations aléatoires ce qui rend leurs étude un peu moins évidente. Cette problématique a été bien traitée par le calcul stochastique fractionnaire. Notons que, les équations différentielles stochastiques fractionnaires (FEDS fractionnaires en abrégé) permettent de écrire aussi des phénomènes avec eet mémoire. Motivés par les application de ces équations (FEDS), les propriétés de la solution ont été largement étudiées [7, 13, 14].

Dans ce travail, on s'intéresse aux inégalités de Lyapunov pour les équations différentielles d'ordre non entier. L'inégalité de Lyapunov et ses généralisations ont de nombreuses applications dans différents domaines tels que la théorie des oscillations, le comportement qualitatif des solutions des équations différentielles, comme la stabilité et les propriétés spectrales. De plus, en appliquant ces inégalités, on peut estimer le nombre maximum de zéros pour les solutions non triviales de problèmes considérés et la distance entre les zéros consécutifs des solutions oscillatoires [21 – 29, 32, 36, 37, 39, 40].

Notre travail est réparti sur trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, un aperçu historique et quelques concepts préliminaires seront introduit.

Dans le deuxième chapitre : on présente quelques notions de base concernant les questions d'existence et d'unicité de la fonction de Green.

Dans le dernier chapitre, on obtient une nouvelle inégalité de Lyapunov pour un problème aux limites fractionnaire d'ordre supérieur en transformant le problème initiale en une equation intégrale équivalente.

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^\alpha u(t) + q(t)u(t) = 0, & a \leq t \leq b, \\ u(a) = u'(a) = u'''(a) = u''(b) = 0. \end{cases}$$

Où  $3 < \alpha \leq 4$ ,  $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et  ${}^c D_{0+}^\alpha$  est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Éléments du calcul fractionnaire

#### 1.1.1 Un aperçu historique

Le calcul fractionnaire est un domaine de l'analyse mathématique qui traite la notion d'intégration et dérivation d'ordre fractionnaire.

Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et pourtant il est actuel. Ces origines remontent à la fin du 17-ième siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégrale.

Quand Leibniz a introduit le symbole  $\frac{d^n f}{dx^n}$  pour désigner la dérivée n-ième d'une fonction  $f$  dans ses publications, l'Hopital lui a écrit une lettre pour poser la question : "Que signifie  $\frac{d^n f}{dx^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$ ". Dans sa réponse, datée du 30 septembre 1695, Leibniz réponds qu'il s'agit d'un paradoxe, mais qu'un jour, il en découlera de très utiles conséquences. Aujourd'hui, on sait que c'est la vérité. Cette lettre de l'Hopital, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce qu'on appelle la dérivation fractionnaire.

Ensuite, Leibniz a continué à écrire sur les dérivées d'ordre général et en 1730, Euler a étudié un résultat de la dérivée lorsque l'ordre  $n$  est une fraction. Mais, seulement en 1819, avec Lacroix, apparut la première définition de dérivée fractionnaire. En considérant la fonction  $f(x) = x^m$ , ( $m$  est un entier positif) ;Lacroix a développé la dérivée n-ième

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n,$$

et en utilisant la définition de la fonction Gamma qui généralise la factorielle, il a obtenu

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

Il a étudié l'exemple suivant, pour  $m = 1$  et  $n = \frac{1}{2}$  :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Depuis lors, de nombreux mathématiciens, comme Fourier, Abel, Riemann, Liouville, parmi d'autres, ont contribué au développement de ce sujet.

Différentes formes d'opérateurs fractionnaires ont été introduites au fil du temps, comme **Riemann-Liouville**, **Grunwald-Letnikov**, **Weyl**, **Caputo**, **Hadamard** et récemment **Caputo-Fabrizio** [12, 30, 35, 38].

Pendant trois siècles, le calcul fractionnaire a été développé comme un pur sujet théorique de mathématiques, mais c'est récemment qu'il a connu un grand intérêt en raison de ses applications dans divers domaines, non seulement en mathématiques, mais aussi en physique, mécanique, ingénierie, chimie, biologie, finance et autres domaines scientifiques [27, 33].

Les dérivées fractionnaires sont des opérateurs non locaux, contrairement aux dérivées habituelles, elles possèdent un effet mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères.

Les opérateurs fractionnaires les plus courants considérés dans la littérature prennent en compte le passé du processus. Ils sont généralement appelés opérateurs fractionnaires à gauche. Mais dans certains cas, nous pouvons également nous intéresser à l'avenir du processus. Dans ce cas, les dérivés fractionnaires à droite sont alors considérés.

### 1.1.2 Fonctions spéciales

Dans cette sous-section, on présente les deux fonctions, les plus utilisées dans le calcul non entier. Il s'agit de Gamma et Bêta d'Euler. Ces fonctions jouent un rôle crucial dans le calcul fractionnaire.

#### Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler  $\Gamma(z)$ , elle prolonge la factorielle aux nombres réels et même complexes.

**Définition 1.1.1.** On définit la fonction Gamma d'Euler  $\Gamma(z)$  par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.1)$$

**Quelques propriétés de la fonction Gamma**

1. La fonction Gamma est continue sur  $]0, +\infty[$ .
2. Pour tout  $z \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (1.2)$$

3. En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\Gamma(n) = (n - 1)!. \quad (1.3)$$

**Fonction Bêta**

**Définition 1.1.2.** La fonction Bêta où la fonction Bêta d'Euler est définie par

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1 - t)^{q-1} dt, \quad (1.4)$$

avec  $\operatorname{Re}(p) > 0$  et  $\operatorname{Re}(q) > 0$ .

**Remarque 1.1.1.** La fonction Gamma et Bêta sont liées par la relation suivante :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}. \quad (1.5)$$

**1.1.3 Intégration fractionnaire**

L'intégrale d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégrale d'ordre entier.

Vu sa grande utilisation dans la plus part des travaux scientifiques, on a choisi l'approche de **Riemann-Liouville** pour l'intégration fractionnaire. On va exposer sa définition, ses propriétés, ainsi que quelques exemples d'applications. Soit  $\Omega = [a, b]$ ,  $(-\infty < a < b < +\infty)$  un intervalle fini de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction continue sur  $\Omega$ .

En commençant par la formule de Cauchy pour une intégrale itérée n fois, donnée par

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n \quad (1.6)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (1.7)$$

où  $n \in \mathbb{N}$ , Riemann et Liouville ont défini l'intégration fractionnaire en généralisant l'équation (1.7) à des valeurs non entières de  $n$  (ou même complexe) et en utilisant la définition de la fonction Gamma.

**Définition 1.1.3.** [30, 38] *Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville  $I_{a+}^\alpha$  et  $I_{b-}^\alpha$  d'ordre réel  $\alpha > 0$  (ou  $\alpha \in \mathbb{C}$ , tel que  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ ) de  $f$  sont définies par*

$$(I_{a+}^\alpha f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (1.8)$$

$$(I_{b-}^\alpha f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (1.9)$$

où  $I_{a+}^\alpha f$  s'appelle *intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha$  à gauche* et  $I_{b-}^\alpha f$  s'appelle *intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha$  à droite*.

Dans la suite on travaille qu'avec l'intégrale à gauche  $I_{a+}^\alpha$ .

**Proposition 1.1.4.** [30, 38] *Si  $f \in C([a, b])$  alors pour  $\alpha, \beta$  ; complexes tels que  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  et  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$  on a*

$$I_{a+}^\alpha (I_{a+}^\beta f) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f \quad (1.10)$$

*Démonstration.* En utilisant la définition (1.8) ; on trouve

$$\begin{aligned} [I_{a+}^\alpha (I_{a+}^\beta f)](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (I_{a+}^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[ \int_t^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \right] dt, \end{aligned}$$

et par le changement de variable  $s = t + (x-t)\tau$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds &= (x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\ &= (x-t)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Donc

$$[I_{a+}^\alpha (I_{a+}^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt.$$

□

**Exemple 1.1.5.** Calcul de l'intégrale fractionnaire de la fonction  $f(x) = (x - a)^\beta$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $\beta > -1$ .

En utilisant la formule (1.8), on trouve

$$I_{a+}^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt, \quad (1.11)$$

et par le changement de variable  $t = a + (x - a)^\beta \tau$ , il en découle

$$I_{a+}^\alpha (x - a)^\beta = \frac{(x - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} (x - a)^{\beta+\alpha}. \quad (1.12)$$

Si on pose  $a = 0$ , on obtient

$$I_{0+}^\alpha (x)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} (x)^{\beta+\alpha}. \quad (1.13)$$

**Exemple 1.1.6.** Calcul de l'intégrale fractionnaire de la fonction constante  $f(x) = C$ .

D'après la formule (1.8), on a

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} C dt \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{C}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left[ -(x - t)^\alpha \right]_a^x \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (x - a)^\alpha \end{aligned} \quad (1.14)$$

### 1.1.4 Dérivation fractionnaire

Pareil au concept de l'intégration, la notion de la dérivation fractionnaire est une généralisation de la différentiation d'ordre entier.

Les trois définitions les plus fréquemment utilisées pour la dérivation fractionnaire sont celles de Grunwald-Letnikov, de Riemann-Liouville et de Caputo [30, 38].

D'autres définitions ont été introduites par d'autres mathématiciens, comme par exemple Weyl, Fourier, Cauchy et Abel.

### Dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov

Grunwald et Letnikov, respectivement en 1867 et 1868, sont revenus à la source originale et ont commencé la formulation par la définition fondamentale d'une dérivée, comme une limite,

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (1.15)$$

et en considérant la dérivée n-ième de  $f$

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh). \quad (1.16)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

La définition de la dérivée fractionnaire de **Grunwald -Letnikov** consiste à la généralisation de la formule (1.16) à un ordre arbitraire  $\alpha$ .

**Définition 1.1.7.** [30, 38] *Soit  $\alpha \in ]m; m+1[$  ( $m$  entier). Les dérivées fractionnaires de **Grunwald -Letnikov**  ${}^{GL}D_{a+}^{\alpha} f$  et  ${}^{GL}D_{b-}^{\alpha} f$  d'ordre  $\alpha$  sont données par*

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_{a+}^{\alpha} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.17)$$

et

$${}^{GL}D_{b-}^{\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh)$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(b)(b-t)^{k-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_t^b (\tau-t)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (1.18)$$

où  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)}$ ,  $t-a = mh$  (respectivement  $b-t = mh$ ) et les fonctions  $f^{(k)}(t)$ , ( $k = 1, 2, \dots, m+1$ ) sont supposées continues sur l'intervalle  $[a, t]$ .

${}^{GL}D_{a+}^{\alpha}f$  s'appelle dérivée fractionnaire de **Grunwald-Letnikov** d'ordre  $\alpha$  à gauche et  ${}^{GL}D_{b-}^{\alpha}f$  s'appelle dérivée fractionnaire de **Grunwald-Letnikov** d'ordre  $\alpha$  à droite.

Dans la suite on ne considère que la dérivée à gauche  ${}^{GL}D_{a+}^{\alpha}f$ .

**Exemple 1.1.8.** Calcul de la dérivée fractionnaire de la fonction  $f(t) = (t-a)^{\beta}$

au sens de **Grunwald-Letnikov** ( $\alpha \in ]m, m+1[$  et  $\beta > m$ ).

Par la formule (1.17), on a

$${}^{GL}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} \frac{d^{m+1}}{d\tau^{m+1}} (\tau-a)^{\beta} d\tau.$$

En tenant compte que

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1}}{d\tau^{m+1}} (\tau-a)^{\beta} &= \beta(\beta-1) \cdots (\beta-m) (\tau-a)^{\beta-m-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\beta-m} (\tau-a)^{\beta-m-1}, \end{aligned}$$

et par le changement de variable  $\tau = a + s(t-a)$ , il en découle que

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m)\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} (\tau-a)^{\beta-m-1} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(-\alpha+m+1, \beta-m)}{\Gamma(\beta-m)\Gamma(-\alpha+m+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

**Exemple 1.1.9.** Calcul de la dérivée fractionnaire de la fonction  $f(t) = C$  au sens de **Grunwald-Letnikov**.

Par l'application de la formule (1.17), on trouve directement

$$\begin{aligned}
{}^{GL}D_{a+}^{\alpha}f(t) &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} + \sum_{k=1}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (1.20)
\end{aligned}$$

En prenant en considération que  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 1, 2, \dots, m+1$  il en résulte que

$${}^{GL}D_{a+}^{\alpha}f(t) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}. \quad (1.21)$$

**•Composition de dérivées fractionnaires au sens de Grunwald-Letnikov avec les dérivées d'ordre entier**

**Proposition 1.1.10.** [38] *Pour  $n$  entier positif et  $\alpha$  non entier, on a*

$$\frac{d^n}{dt^n}({}^{GL}D_{a+}^{\alpha}f(t)) = {}^{GL}D_{a+}^{n+\alpha}f(t), \quad (1.22)$$

et

$${}^{GL}D_{a+}^{\alpha} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}^{GL}D_{a+}^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-n+k}}{\Gamma(-\alpha-n+k+1)}. \quad (1.23)$$

**Remarque 1.1.2.** *L'opérateur de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov et  $\frac{d^n}{dt^n}$  commutent entre eux seulement si la condition  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , est vérifiée.*

**• Composition avec les dérivées fractionnaires :**

**Proposition 1.1.11.** *Si  $0 \leq m < q < m+1$  et  $0 \leq n < p < n+1$  alors*

$${}^{GL}D_{a+}^p({}^{GL}D_{a+}^q f(t)) = {}^{GL}D_{a+}^q({}^{GL}D_{a+}^p f(t)) = {}^{GL}D_{a+}^{p+q} f(t), \quad (1.24)$$

seulement si  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, r-1$  où  $r = \max(n, m)$ .

**Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville**

Ce sont des dérivées d'ordres non entiers, définit à travers l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

**Définition 1.1.12.** *Soit  $\alpha \in ]m-1, m[$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$ . Les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann - Liouville  ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f$  et  ${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}f$  sont définies par*

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f)(t) = \left( \frac{d}{dt} \right)^m \left[ (I_{a+}^{m-\alpha} f)(t) \right] \quad (1.25)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t (t - s)^{m - \alpha - 1} f(s) ds$$

et

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D_{b-}^\alpha f)(t) &= \left( -\frac{d}{dt} \right)^m \left[ (I_{b-}^{m-\alpha} f)(t) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \left( -\frac{d}{dt} \right)^m \int_t^b (s - t)^{m - \alpha - 1} f(s) ds. \end{aligned} \quad (1.26)$$

${}^{RL}D_{a+}^\alpha f$  s'appelle dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  à gauche et  ${}^{RL}D_{b-}^\alpha f$  s'appelle dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  à droite.

Dans la suite on ne considère que la dérivée à gauche  ${}^{RL}D_{a+}^\alpha f$ .

**Exemple 1.1.13.** Reprenons l'exemple de la fonction  $f(x) = (t - a)^\beta$  avec  $\beta > -1$ .

On aura

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^\alpha (t - a)^\beta &= \left( \frac{d}{dt} \right)^m \left[ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} (t - a)^{\beta + m - \alpha} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} \frac{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Pour  $\alpha = 1$ , la formule (1.27) se réduit à

$${}^{RL}D_{a+}^1 (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta)} (t - a)^{\beta - 1} = \beta (t - a)^{\beta - 1} = \frac{d}{dt} (t - a)^\beta \quad (1.28)$$

Pour

$\beta = 0$  on obtient

$${}^{RL}D_{a+}^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha} \quad (1.29)$$

c'est - à - dire que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann - Liouville d'une constante n'est pas nulle.

**Proposition 1.1.14.** [17] Soit  $\alpha \in ]m - 1, m[$  et  $f$  une fonction vérifiant  ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f = 0$ .

Alors

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (t-a)^{j+\alpha-m} \quad (1.30)$$

où les  $c_j$  sont des constantes quelconque.

**Proposition 1.1.15.** [30, 38] L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville possède les propriétés suivantes :

1.

$$\lim_{\alpha \rightarrow m-1} {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f = f^{(m-1)} \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow m} {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f = f^{(m)}. \quad (1.31)$$

2.

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} + oI_{a+}^{\alpha} = id. \quad (1.32)$$

3.

$$I_{a+}^{\alpha} + o{}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^m \left[ {}^{RL}D_{a+}^{\alpha-j} f(t) \right]_{t=0} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \quad (1.33)$$

• **Composition de dérivées fractionnaires au sens de Riemann - Liouville avec les dérivées d'ordre entier**

**Proposition 1.1.16.** Pour  $n$  entier positif et  $\alpha$  non entier, on a

$$\frac{d^n}{dt^n} \left( {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(t) \right) = {}^{RL}D_{a+}^{n+\alpha} f(t), \quad (1.34)$$

et

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}^{RL}D_{a+}^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-n+k}}{\Gamma(-\alpha-n+k+1)}. \quad (1.35)$$

**Remarque 1.1.3.** Pareil à l'opérateur de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov celui de Riemann - Liouville aussi commute avec  $\frac{d^n}{dt^n}$  seulement si la condition  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , est vérifiée.

• **Composition avec les dérivées fractionnaires**

**Proposition 1.1.17.** [17] Si  $0 \leq m < q < m + 1$  et  $0 \leq n < p < n + 1$ , alors

$${}^{RL}D_{a+}^p \left( {}^{RL}D_{a+}^q f(t) \right) = {}^{RL}D_{a+}^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^m \left[ {}^{RL}D_{a+}^{q-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(-p-j+1)}, \quad (1.36)$$

$${}^{RL}D_{a+}^q \left( {}^{RL}D_{a+}^p f(t) \right) = {}^{RL}D_{a+}^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^n \left[ {}^{RL}D_{a+}^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(-q-j+1)}. \quad (1.37)$$

**Remarque 1.1.4.**

$${}^{RL}D_{a+}^p \left( {}^{RL}D_{a+}^q f(t) \right) = {}^{RL}D_{a+}^q \left( {}^{RL}D_{a+}^p f(t) \right) = {}^{RL}D_{a+}^{p+q} f(t), \quad (1.38)$$

seulement si

$$\left[ {}^{RL}D_{a+}^{p-j} f(t) \right]_{t=a} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

et

$$\left[ {}^{RL}D_{a+}^{q-j} f(t) \right]_{t=a} = 0 \quad j = 1, \dots, m.$$

• **Lien entre les approches de Riemann-Liouville et Grunwald-Letnikov**

Si  $f(t) \in C^{n-1}([a, T])$  et  $f^{(n)}(t)$  est intégrable sur l'intervalle  $[a, T]$ . Alors, pour tout  $p$  ( $0 < p < n$ ) les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Grunwald-Letnikov coïncident et si  $0 \leq m - 1 \leq p < m \leq n$ , on a

$${}^{RL}D_{a+}^p (f(t)) = {}^{GL}D_{a+}^p (f(t)) = - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(s)}{(t-s)^{p-m+1}} ds. \quad (1.39)$$

**Dérivée fractionnaire au sens de Caputo**

La dérivation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et des intégrales fractionnaires en raison de leurs applications dans les mathématiques pures.

Cependant, la technologie moderne exige une certaine révision de l'approche mathématique pure. De nombreux travaux sont apparus, en particulier sur la théorie de viscoélasticité et la mécanique du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une meilleure description des propriétés des matériaux.

Les problèmes appliqués demandent des définitions des dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent  $f(a)$ ,  $f'(a)$ ,  $\dots$  etc.

Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville conduit à des conditions initiales contenant les valeurs limites de la dérivée fractionnaire à la borne inférieure  $t = a$ , par exemple

$$\lim_{x \rightarrow a}^{RL} D_{a+}^{\alpha-j} f(x) = b_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus avec succès mathématiquement, leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a pas d'interprétation physique connue pour de tels types des conditions initiales.

Une certaine solution à ce conflit a été proposée par M. Caputo dans son article [10] et deux ans plus tard dans son livre [11], et récemment dans les espaces de Banach par El-Sayed [19, 20].

On a déjà vu que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \in ]m - 1, m[$  s'obtient par une application de l'opérateur intégrale fractionnaire suivie d'une dérivation classique d'ordre  $m$ . La dérivée de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

**Définition 1.1.18.** Soit  $\alpha \in ]m - 1, m[$  et  $f \in C^m([a, b])$ . Les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$  de  $f$  au sens de Caputo  ${}^C D_{a+}^{\alpha} f$  et  ${}^C D_{b-}^{\alpha} f$  sont définies par

$$\left( {}^C D_{a+}^{\alpha} f \right) (t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds, \quad (1.40)$$

et

$$\left( {}^C D_{b-}^{\alpha} f \right) (t) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m - \alpha)} \int_t^b (s - t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds, \quad (1.41)$$

${}^C D_{a+}^{\alpha} f$  s'appelle dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha$  à gauche et  ${}^C D_{b-}^{\alpha} f$  s'appelle dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha$  à droite.

Dans la suite on ne considère que la dérivée à gauche  ${}^C D_{a+}^{\alpha} f$ .

**Exemple 1.1.19.** Reprenons l'exemple de la fonction  $f(t) = (t - a)^\beta$ . On aura

$${}^C D_{a+}^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \quad (1.42)$$

En effet,

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^m (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - m)} (t - a)^{\beta - m}. \quad (1.43)$$

et

$$I_{a+}^{m-\alpha} (t - a)^{\beta - m} = \frac{\Gamma(\beta + 1 - m)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \quad (1.44)$$

**Exemple 1.1.20.** Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une constante. Si  $A$  est une constante, alors par la définition on trouve directement que

$${}^C D_{a+}^\alpha A = 0 \quad (1.45)$$

**Lemme 1.1.1.**

$${}^C D^\alpha t^{\lambda-1} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda - \alpha)} t^{\lambda - \alpha - 1}, \lambda > [\alpha] \text{ et } {}^C D^\alpha t^{\lambda-1} = 0, \lambda < [\alpha]. \quad (1.46)$$

**Proposition 1.1.21.** [30, 38]

L'opérateur de dérivation de Caputo possède les propriétés suivantes :

1.

$${}^C D_{a+}^\alpha [I_{a+}^\alpha f] = f. \quad (1.47)$$

2.

$$\text{Si } {}^C D_{a+}^\alpha f = 0 \text{ alors } f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x - a)^j. \quad (1.48)$$

3.

$$I_{a+}^\alpha [{}^C D_{a+}^\alpha f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x - a)^j}{j} f^{(j)}(a). \quad (1.49)$$

4.

$$\lim_{\alpha \rightarrow m-1} {}^C D_{a+}^\alpha f \neq f^{(m-1)} \text{ mais } \lim_{\alpha \rightarrow m-1} {}^C D_{a+}^\alpha f = f^{(m)}. \quad (1.50)$$

**Corollaire 1.1.22.** Si  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta < 1$  et  $f$  de classe  $C^1$  alors

$$(I_{a+}^\alpha + {}^R D_{a+}^\alpha) f = f$$

et

$$({}^C D_{a+}^\alpha + oI_{a+}^\alpha)f = f.$$

C'est-à-dire que les dérivations au sens de Riemann - Liouville et de Caputo respectivement constituent l'inverse à droite et à gauche de l'opérateur intégrale de Riemann - Liouville.

**Corollaire 1.1.23.** Si  $0 < \alpha, \beta < 1$  avec  $\alpha + \beta \leq 1$  et  $f$  de classe  $C^1$  alors

$$({}^C D_{a+}^\alpha + o{}^C D_{a+}^\beta) = {}^C D_{a+}^{\alpha+\beta} f = ({}^C D_{a+}^\beta + o{}^C D_{a+}^\alpha)f. \quad (1.51)$$

**Proposition 1.1.24.** Si  $\alpha > \beta > 0$  et si  $f \in C[a, b]$  alors

$$({}^C D_{a+}^\beta + oI_{a+}^\alpha)f = I_{a+}^{\alpha-\beta} f. \quad (1.52)$$

- **Lien entre les approches de Caputo et Riemann-Liouville**

$$({}^{RL} D_{a+}^\alpha f)(x) = ({}^C D_{a+}^\alpha f)(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a). \quad (1.53)$$

Cette relation peut aussi s'écrire sous la forme suivante

$${}^C D_{a+}^\alpha f = {}^{RL} D_{a+}^\alpha \left[ f - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right]. \quad (1.54)$$

**Remarque 1.1.5.** Si  $f^{(j)}(a) = 0, j = 0, 1, 2, \dots, m-1$  alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo coïncident.

- **La linéarité des opérateurs de dérivation fractionnaire** La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D_{a+}^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D_{a+}^\alpha f(t) + \mu D_{a+}^\alpha g(t). \quad (1.55)$$

où  $D^\alpha$  désigne toute les dérivées fractionnaires considérées dans cette section.

# Chapitre 2

## La fonction de Green

### 2.1 Bref Historique

La fonction de **Green** est une solution (également appelée solution élémentaire ou solution fondamentale ) d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants.

Ces fonctions de Green, qui se trouvent être le plus souvent des distributions, ont été introduites par George Green en 1828 pour les besoins de l'électromagnétisme. Le mémoire de Green restera confidentiel jus-qu'à sa republication en trois parties, à partir de 1850. Les fonctions de Green, qui seront dénommés ainsi par Riemann en 1869, seront alors abondamment utilisées, notamment par Neumann en 1877 pour sa théorie du potentiel Newtonien dans un espace à deux dimensions, puis en 1882 par Kirchhoff pour l'équation de propagation des ondes dans un espace à trois dimensions et enfin par Helmholtz en acoustique.

### 2.2 Définition de la fonction de Green

Soit  $p, q, f \in C([a, b])$  où  $p \in C^1([a, b])$ ,  $a < b$  et  $(\alpha_i, \beta_i) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  tels que pour tout  $i = 1, 2$  :

$|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ . On considère les équation différentielles ordinaires :

$$(H)(py')' + qy = 0,$$

$$(NH)(py')' + qy = f.$$

ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta. \end{cases}$$

**Définition 2.2.1.** On appelle fonction de **Green** associé au problème homogène  $(H) - (CB)_h$  une fonction  $G : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les propriétés :

- (a)  $G$  est continue sur  $[a, b] \times [a, b]$ .
- (b)  $G$  est symétrique :  $G(t, s) = G(s, t), \forall (t, s) \in [a, b]^2$ .
- (c)  $\frac{\partial G}{\partial t}(t, s)$  est continue pour tout  $t \neq s$ .
- (d) La fonction partielle  $t \rightarrow G(t, s)$  est solution de l'équation  $(H)$  pour tout  $t \neq s$ .
- (e) La fonction partielle  $t \rightarrow G(t, s)$  vérifie les condition  $(CH)$  pour tout  $s \in [a, b]$ .

### 2.2.1 L'existence et unicité de la fonction de Green

**Théorème 2.2.2.** Supposons que le problème homogène  $(H) - (CB)_h$  n'admet pas de solution non triviale. Alors, il existe une (et une seule) fonction  $G$  ne dépendant pas de  $f$ , et dite fonction de Green telle que, pour toute fonction  $f$ , la solution  $y$  de problème non homogène  $(NH) - (CB)_h$  s'écrit de manière unique sous la forme :

$$y(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds.$$

**Démonstration :** Voir [18](mémoire 2)

### 2.2.2 Méthode de Calcul la fonction de Green

Soit  $\phi_1$  et  $\phi_2$  les solutions respectives des problèmes à conditions initiales :

$$(H) + \begin{cases} \phi_1(a) = \alpha_2, \\ \phi_1'(a) = -\alpha_1. \end{cases}$$

et

$$(H) + \begin{cases} \phi_2(b) = \beta_2, \\ \phi_2'(b) = \beta_1. \end{cases}$$

Alors,  $\phi_1, \phi_2 \neq 0$  sont linéairement indépendantes car sinon  $\phi_1$  (et aussi  $\phi_2$ ) serait solution du problème  $(P_0) := (H) + (CB)_h$  contredisant l'hypothèse. Soit donc  $W \neq 0$  leur Wronskien et  $G$  la fonction de Green définie par :

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{\phi_1(t)\phi_2(s)}{p(t)W(s)}, & a \leq t \leq s, \\ \frac{\phi_1(s)\phi_2(t)}{p(s)W(t)}, & s \leq t \leq b. \end{cases}$$

Remarquons que le produit  $pW$  est constant.

### 2.2.3 Existence et unicité d'une solution :

1. La fonction  $F$  définie par :

$$F(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds = \frac{\phi_2(t)}{pW} \int_a^t \phi_1(s)ds + \frac{\phi_1(t)}{pW} \int_t^b \phi_2(s)ds,$$

est solution du problème  $(NH) + (CB)_h$ .

2. La fonction  $H$  définie par :

$$H(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds = \frac{\phi_2(t)}{pW} \int_a^t \phi_1(s)ds + \frac{\phi_1(t)}{pW} \int_t^b \phi_2(s)ds + \psi_1(t) + \psi_2(t),$$

est solution du problème  $(NH) + (CB)_{(nh)}$ , où  $\psi_1(t)$  et  $\psi_2(t)$  les uniques solutions des problèmes :

$$(H) + \begin{cases} \alpha_1\psi_1(a) + \alpha_2\psi_1'(a) = \gamma. \\ \beta_1\psi_1(b) - \beta_2\psi_1'(b) = 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad (H) + \begin{cases} \alpha_1\psi_2(a) + \alpha_2\psi_2'(a) = 0. \\ \beta_1\psi_2(b) - \beta_2\psi_2'(b) = \delta. \end{cases}$$

## 2.2.4 Exemples

**Exemple 2.2.3.** La fonction de Green du problème :

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = y(\frac{\pi}{2}), \end{cases}$$

s'écrit

$$G(x, y) \begin{cases} -\cos y \sin x, & \text{si } x \leq y, \\ -\cos x \sin y, & \text{si } x \geq y. \end{cases}$$

**Exemple 2.2.4.** Considère le problème à deux points sur un intervalle  $[a, b]$  :

$$\begin{cases} y'' = f(x), & a < x < b, \\ y(a) = 0, & y(b) = 0, \end{cases}$$

construisons les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  solutions des problèmes de Cauchy :

$$\begin{cases} \varphi_1'' = 0, \\ \varphi_1(a) = 0, \\ \varphi_1'(a) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_2'' = 0, \\ \varphi_2(b) = 0, \\ \varphi_2'(b) = -1 \end{cases}$$

Alors,  $\varphi_1(x) = (a-x)$ ,  $\varphi_2(x) = (b-x)$  et  $W(\varphi_1, \varphi_2) = b-a$ . D'où la fonction de Green :

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-a)(y-b)}{(b-a)}, & \text{si } x \leq y, \\ \frac{(y-a)(x-b)}{(b-a)}, & \text{si } x \geq y. \end{cases}$$

La solution unique du problème (1,4) est donc donnée par :

$$y(x) = \int_a^b G(x, y)f(y)dy = \frac{x-b}{b-a} \int_a^b (y-a)f(y)dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (y-b)f(y)dy.$$

## 2.3 Réduction d'un problème aux limites à une équation intégrale

Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'un problème aux limites à la résolution d'une équation intégrale.

Dans ce qui suit on va expliquer par deux exemples comment un problème aux limites peut s'écrire, via une fonction de Green, comme une équation intégrale. C'est pourquoi, la question de prouver l'existence des solutions d'un problème aux limites se réduit à prouver l'existence de solution d'une équation intégrale. Pour cette raison, on peut utiliser le théorème de point fixe pour montrer l'existence des solutions des équations intégrales.

**Exemple 2.3.1.** *Considérons le problème de Dirichlet suivant :*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y(x)), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

*La fonction de Green du problème homogène :*

$$\begin{cases} y'' = 0, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

*est la forme*

$$G(t, s) = \begin{cases} (s-1)t, & 0 \leq t \leq s. \\ (t-1)s, & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

*La résolution du problème aux limites (2.1) se ramène à une équation intégrale non linéaire du type Hammerstein à noyau fonction de Green :*

$$y(t) = \int_a^b G(t, s) f(s, y(s)) ds.$$

**Exemple 2.3.2.** *Considérons le problème :*

$$\begin{cases} y'' = f(t), & a < t < b. \\ y(a) = \gamma, & y(b) = \delta. \end{cases} \quad (2.2)$$

Construisons les fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$  solutions des problèmes :

$$\begin{cases} \phi_1''(t) = 0, \\ \phi_1(a) = 0, \\ \phi_1'(a) = -1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi_2''(t) = 0. \\ \phi_2(b) = 0. \\ \phi_2'(b) = -1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Alors  $\phi_1(t) = (a - t)$ ,  $\phi_2(t) = (b - t)$  et  $W(\phi_1, \phi_2) = b - a$ .  
D'où la fonction de Green :

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t - a)(s - b)}{b - a}, & a \leq t \leq s, \\ \frac{(s - a)(t - b)}{b - a}, & s \leq t \leq b. \end{cases}$$

La solution unique du problème (2.2) est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^b G(t, s) f(s) ds = \frac{\phi_2(t)}{pW} \int_a^t \phi_1(s) f(s) ds + \frac{\phi_1(t)}{pW} \int_t^b \phi_2(s) f(s) ds + \psi_1(t) \psi_2(t) \\ &= \frac{s - b}{b - a} \int_a^t (s - a) f(s) ds + \frac{s - a}{b - a} \int_t^b f(s) ds + \delta \frac{s - a}{b - a} + \gamma \frac{b - s}{b - a}. \end{aligned}$$

# Chapitre 3

## Inégalité de Lyapunov pour un problème aux limites fractionnaire d'ordre supérieur

Dans ce chapitre, on obtient une nouvelle inégalité de Lyapunov pour un problème aux limites fractionnaire d'ordre supérieur en transformant le problème initiale en une equation intégrale équivalente.

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^\alpha u(t) + q(t)u(t) = 0, & a \leq t \leq b, \\ u(a) = u'(a) = u'''(a) = u''(b) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  $3 < \alpha \leq 4$ ,  $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et  ${}^c D_{0+}^\alpha$  est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

### 3.1 Inégalité de Lyapunov

Nous transformons le problème (3.1) en une équation intégrale équivalente.

**Lemme 3.1.1.** *Supposons que  $3 < \alpha \leq 4$ , la fonction  $u$  est une solution au problème aux limites (3.1) si et seulement si  $u$  satisfait l'équation intégrale*

$$u(t) = \int_a^b G(t, s)q(s)u(s)ds \quad (3.2)$$

où la fonction  $G(t, s)$  est définie par

$$G(t, s) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} = \begin{cases} (\alpha - 1)(\alpha - 2)(t - a)^2(b - s)^{\alpha-3} - 2(t - s)^{\alpha-1}, & a \leq s \leq t \leq b \\ (\alpha - 1)(\alpha - 2)(t - a)^2(b - s)^{\alpha-3}, & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases} \quad (3.3)$$

*Démonstration.* En utilisant les propriétés du calcul fractionnaire,  $u$  est la solution de (3.1) si et seulement si elle satisfait à l'équation suivante

$$u(t) = c_0 + c_1(t - a) + c_2(t - a)^2 + c_3(t - a)^3 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-1} q(s) u(s) ds. \quad (3.4)$$

Apartir, des conditions initiales  $u(a) = u'(a) = u''(a) = 0$ , on obtient  $c_0 = c_1 = c_3 = 0$ . La condition  $u''(b) = 0$ , donne

$$c_2 = \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b - s)^{\alpha-3} q(s) u(s) ds.$$

Remplaçant  $c_0, c_1, c_2$  et  $c_3$  par leurs valeurs dans (3.4), on obtient

$$u(t) = \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)(t - a)^2}{2\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b - s)^{\alpha-3} q(s) u(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-1} q(s) u(s) ds, \quad (3.5)$$

alors

$$u(t) = \int_a^b G(t, s) q(s) u(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Où  $G(t, s)$  est donnée dans (3.3). □

Avec

$$G(t, s) = \begin{cases} g_1(t, s), & a \leq s \leq t \leq b \\ g_2(t, s), & a \leq t \leq s \leq b \end{cases} \quad (3.6)$$

**Lemme 3.1.2.** *La fonction de Green  $G$  satisfait*

1.  $G(t, s) \geq 0$  pour tout  $a \leq t, s \leq b$ .

2.  $\max_{t \in [a, b]} G(t, s) = G(b, s), s \in [a, b]$ .

3.  $G(b, s)$  a un maximum unique donné par

$$\max_{t \in [a, b]} G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{(\alpha - 3)^{\frac{1}{2}} (\alpha - 2)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^{\alpha-3} (b - a)^{\alpha-1}. \quad (3.7)$$

*Démonstration.* La fonction  $g_1(t, s)$  est positive et non décroissante. En effet, pour  $a \leq s \leq t \leq b$ ,

$$\begin{aligned} g_1(t, s) &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} [(\alpha - 1)(\alpha - 2)(t - a)^2(b - s)^{\alpha-3} - 2(t - s)^{\alpha-1}] \\ &\geq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} [(\alpha - 1)(\alpha - 2)(t - s)^2(t - s)^{\alpha-3} - 2(t - s)^{\alpha-1}] \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} [\alpha(\alpha - 3)(t - s)^{\alpha-1}] \geq 0. \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(t, s)}{\partial t} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(\alpha - 1)(\alpha - 2)(t - a)(b - s)^{\alpha-3} - (\alpha - 1)(t - s)^{\alpha-2}] \\ &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(\alpha - 1)(\alpha - 2)(t - s)(t - s)^{\alpha-3} - (\alpha - 1)(t - s)^{\alpha-2}] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(\alpha - 1)(\alpha - 3)(t - s)^{\alpha-2}] \geq 0. \end{aligned}$$

par conséquent

$$\max_{t,s \in [a,b]} g_1(t, s) = \max_{t,s \in [a,b]} g_1(b, s).$$

En vue de (3.3) et (3.4),  $g_1(b, s)$  est défini par

$$g_1(b, s) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} [(\alpha - 1)(\alpha - 2(b - a)^2)(b - s)^{\alpha-3} - 2(b - s)^{\alpha-1}].$$

Sa dérivée en ce qui concerne  $s$  prend la forme

$$\frac{\partial g_1(b, s)}{\partial s} = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} (\alpha - 1)(b - s)^{\alpha-4} [ -(-\alpha - 3)(\alpha - 2)(b - a)^2 + 2(b - s)^2 ],$$

alors

$$\frac{\partial g_1(b, s)}{\partial s} = 0 \text{ pour } s = s^* = b - \left( \frac{(\alpha - 3)(\alpha - 2)}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (b - a).$$

Donc

$$\max_{s \in [a,b]} g_1(b, s) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} [(\alpha - 1)(\alpha - 2)(b - a)^2(b - s^*)^{\alpha-3} - 2(b - s^*)^{\alpha-1}],$$

par calcul on obtien

$$\max_{s \in [a,b]} g_1(b, s) = g_1(b, s^*) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{(\alpha - 3)^{\frac{1}{2}}(\alpha - 2)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^{\alpha-3} (b - a)^{\alpha-1}.$$

Maintenant si  $a \leq t \leq s \leq b$ , alors

$$g_2(t, s) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} [(\alpha - 1)(\alpha - 2)(t - a)^2(b - s)^{\alpha-3}] \geq 0$$

et

$$\frac{\partial g_2(t, s)}{\partial t} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(\alpha - 1)(\alpha - 2)(t - a)(b - s)^{\alpha-3}] \geq 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} \max_{s \in [a, b]} g_2(t, s) &= \max_{s \in [a, b]} g_2(b, s) = g_2(s, s) = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} [(\alpha - 1)(\alpha - 2)(s - a)^2(b - s)^{\alpha-3}], \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial g_2(s, s)}{\partial s} = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} (\alpha - 1)(\alpha - 2)(s - a)(b - s)^{\alpha-4} [2b + \alpha a - 3a - s(\alpha - 1)].$$

On a

$$\frac{\partial g_2(s, s)}{\partial s} = 0 \text{ pour } s = s^* = \frac{2b + \alpha a - 3a - s}{(\alpha - 1)}.$$

D'où

$$\max_{s \in [a, b]} g_2(s, s) = g_2(s^*, s^*) = \frac{2(\alpha - 2)}{\Gamma(\alpha)(\alpha - 1)} \left( \frac{\alpha - 3}{\alpha - 1} \right)^{\alpha-3} (b - a)^{\alpha-1}.$$

Maintenant, on comparé  $g_1(b, s^*)$  et  $g_2(s^*, s^*)$ . On a

$$g_1(b, s^*) \geq g_2(s^*, s^*)$$

alors

$$\max_{s \in [a, b]} G(b, s) = g_1(b, s^*) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{(\alpha - 3)^{\frac{1}{2}}(\alpha - 2)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^{\alpha-3} (b - a)^{\alpha-1}.$$

□

Maintenant, on peut donner l'inégalité de type Lyapunov pour le problème (3.1).

**Théorème 3.1.1.** *Soit  $q$  une fonction continue réelle. Si problème aux limite fractionnaire suivent*

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^\alpha u(t) + q(t)u(t) = 0, & a \leq t \leq b, \\ u(a) = u'(a) = u'''(a) = u''(b) = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

$a$  une solution continue non triviale,

$$\int_a^b |q(t)| ds > \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha-1}} \left( \frac{2}{(\alpha-3)^{\frac{1}{2}}(\alpha-2)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\alpha-3}. \quad (3.9)$$

*Démonstration.* Soit  $X = C[a, b]$  l'espace de Banach avec la norme  $\|u(t)\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)|$ . on a

$$u(t) = \int_a^b G(t, s)q(s)u(s)ds \quad t \in [a, b],$$

donc

$$\|u\| \leq \int_a^b \max_{t,s \in [a,b]} |G(t, s)| |q(s)| ds \|u(s)\|.$$

En vue du Lemme 3.1.2, on obtient

$$1 \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{(\alpha-3)^{\frac{1}{2}}(\alpha-2)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^{\alpha-3} (b-a)^{\alpha-1} \int_a^b |q(s)| ds,$$

dont découle l'inégalité de (3.9) □

### **Application à un problème de valeurs propres fractionnaire**

On présente une application des résultats obtenus aux problèmes de valeurs propres.

**Corollaire 3.1.2.** *Supposons que  $3 < \alpha \leq 4$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre au problème aux limites fractionnaires (3.1), alors*

$$|\lambda| \geq \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha-1}} \left( \frac{2}{(\alpha-3)^{\frac{1}{2}}(\alpha-2)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\alpha-3}.$$

## Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a abordé l'étude d'une nouvelle inégalité de Lyapunov pour un problème aux limites fractionnaire d'ordre supérieur.

Pour une meilleure assimilation, la première partie de ce travail a été dévoué aux rappels concernant le calcul fractionnaire, la deuxième partie est consacrée à quelques notions de base concernant les questions d'existence et d'unicité de la fonction de Green.

Ensuite la dernière partie est consacré à la résolution du problème aux limites comment se réduit via une fonction de Green à la résolution d'une équation intégrale.

# Bibliographie

- [1] Agarwal, R.P., O'Regan, D., Stanek, S. : Positive solutions for mixed problems of singular fractional differential equations. *Math. Nachr.* 285, 27 – 41(2012).
- [2] Ahmad, B., Ntouyas, S.K. : A four-point nonlocal integral boundary value problem for fractional differential equations of arbitrary order. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2011(22), 15(2011).
- [3] Ahmad, B., Ntouyas, S.K. : Nonlocal fractional boundary value problems with slit-strips boundary conditions. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 18, 261 – 280(2015).
- [4] Ahmad, B., Ntouyas, S.K., Alsaedi, A. : On nonlinear neutral Liouville-Caputo type fractional differential equations with Riemann-Louville integral boundary conditions. *J. Appl. Anal.* (2019).
- [5] Ahmad, B., Nieto, J.J., Alsaedi, A. et al. A Coupled System of Caputo-Type Sequential Fractional Differential Equations with Coupled (Periodic/Anti-periodic Type) Boundary Conditions. *Mediterr. J. Math.* 14, 227(2017).
- [6] Ahmad, B., Nieto, J.J. : Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions. *Comput. Math. Appl.* 58, 1838 – 1843(2009).
- [7] H. Bao and J. Cao, Existence of solutions for fractional stochastic impulsive neutral functional differential equations with infinite delay, *Adv. Differ. Equ.* 2017(1)(2017).
- [8] R.C. BROWN, B.D. HINTON : Lyapunov inequalities and their applications, Rassias, T.M. (ed.) *Survey on Classical Inequalities*. *Math. Appl.*, 517(2000), 1 – 25.
- [9] D. CAKMAK : Lyapunov-type integral inequalities for certain higher order differential equations, *Appl. Math. Comput.* 216(2010), 368 – 373.

- [10] Caputo, M. : Linear model of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent- II, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, vol.13, 1967, *pp.*529539.
- [11] Caputo, M. : *Elasticità e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna, 1969.
- [12] Caputo, M. and Fabrizio, M. : A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2015), 73 – 85.
- [13] A. Chadha and D.N. Pandey, Existence results for an impulsive neutral stochastic fractional integro-differential equation with infinite delay, *Nonlinear Anal.* 128(2015), *pp.*149 – 175.
- [14] J. Cui and L. Yan, Existence result for fractional neutral stochastic integro-differential equations with infinite delay, *J. Phys. A Math. Theor.*44(33)(2011), *p.*335201.
- [15] R.S. DAHIYA, B. SINGH : A Lyapunov inequality and nonoscillation theorem for a second order nonlinear differential- difference equations, *J. Math. Phys. Sci.*7(1973), 163 – 170.
- [16] S. DHAR, Q. KONG, M. MCCABE : Fractional boundary value problems and Lyapunov-type inequalities with fractional integral boundary conditions, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 43(2016), 1 – 16.
- [17] S. Dugowson. *Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*. PhD thesis, Université Paris 13, Villetaneuse, France, 1994.
- [18] S. Djebali, *Problèmes aux limites non linéaire associés aux EDO du second ordre*, Cours de magister, Département de Mathématiques, ENS-Kouba, Alger, (2001 – 2002).
- [19] El-Sayed, A. M. A. : Multivalued fractional differential equations, *Appl. Math. and Comput.*, vol. 80, 1994, *pp.*1 – 11.
- [20] El-Sayed, A. M. A. : Fractional order evolution equations, *J. of Frac. Calculus*, vol.7, May 1995, *pp.*89 – 100.
- [21] R.A.C. FERREIRA : A Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 16(4)(2013), 978 – 984.
- [22] R.A.C. FERREIRA : On a Lyapunov-type inequality and the zeros of a certain Mittag-Leffler function, *J. Math. Anal. Appl.* 412(2014), 1058 – 1063.
- [23] A. GUEZANE-LAKOUD, R. KHALDI, D.F.M. TORRES : Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem with natural conditions, *SeMA* 75(2018), 157 – 162.

- [24] P. HARTMAN, A. WINTNER : On an oscillation criterion of Liapounoff, Amer. J. Math. 73(1951), 885 – 890.
- [25] X. HE. XH. TANG : Lyapunov-type inequalities for even order differential equations, Commun. Pure Appl. Anal. 11(2012), 465 – 473.
- [26] Henderson, J., Ouahab, A. : A Filippov’s theorem, some existence results and the compactness of solution sets of impulsive fractional order differential inclusions. Mediterr. J. Math.9, 453 – 485(2012).
- [27] Hilfer, R. : Applications of fractional calculus in physics. World Scientific Publishing, River Edge, NJ, (2000).
- [28] M. JLELI, B. SAMET : Lyapunov-type inequalities for a fractional differential equation with mixed boundary conditions, Math. Inequal. Appl. 18(2)(2015), 443 – 451.
- [29] M. JLELI, J. JUAN NIETO, B.SAMET : Lyapunov-type inequalities for a higher order fractional differential equation with fractional integral boundary conditions, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 16(2017), 1 – 17.
- [30] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo J.J. : Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam (2006).
- [31] S. Kouachi. , A. Guezane-Lakoud : A Lyapunov-type inequality for a higher order fractional boundary value p.
- [32] AM. LYAPUNOV : Problème général de la stabilité du mouvement, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 2(1907), 203 – 407.
- [33] Mainardi, F. : Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. Imperial college press, London (2010).
- [34] Miller, K.S., Ross, B. : An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York (1993)
- [35] Oldham, K.B. and Spanier, J. : The fractional calculus. Academic Press, New York, (1974).
- [36] D. O’REGAN, B. SAMET : Lyapunov-type inequalities for a class of fractional differential equations, J. Inequal. Appl. 247(2015), 2015 : 247, 10pp.
- [37] B.G. PACHPATTE : Lyapunov type integral inequalities for certain differential equations, Georgian Math. J. 4(1997), 139 – 148.
- [38] I. PODLUBNY : Fractional Differential Equations, Vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.

- [39] J. RONG, C BAI : Lyapunov-type inequality for a fractional differential equation with fractional boundary conditions, . Adv. Differ.Equ. 2015(2015), art. no. 82.
- [40] X. YANG : On Lyapunov-type inequality for certain higher-order differential equations, Appl. Math. Comput. 134(2003), 307 – 317.