



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Propagation des ondes acoustiques

Présentée par:

Zaidi Karima

Devant le Jury :

| | | | |
|----------------------------|------------|-------------------------------|--------------|
| Dr. BOUSELSAL Naila | MCA | Univ Chadli Bendjedid El Tarf | Présidente |
| Dr. BOUSSAHA Hanène | MCA | Univ Chadli Bendjedid El Tarf | Rapporteur |
| Dr. ZAHANI Nadjela | MCA | Univ Chadli Bendjedid El Tarf | Examinatrice |

Année Universitaire 2024-2025

Remerciement:

C'est avec une profonde émotion que je rends grâce au bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage d'achever ce travail que j'ai tant attendu et espéré.

Je remercie le directeur de mon mémoire, docteur **BOUSSAHA HANENE** pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour sa disponibilité et sa patience, de ses qualités humaines et scientifiques. Je ne pourrai jamais oublier son esprit de recherche et ses commentaires utiles. Un grand merci de m'avoir donné la chance de réaliser ce travail. Il était plus qu'un encadreur.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation LMD.

Je tiens à remercier **Dr BOUSELSAL NAILA** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Je remercie **Dr ZEHANI NADJELA** d'avoir bien voulu accepter de faire partie du jury.

Merci à **mes parents, mes frères, mon fiancé et mes amis** pour l'appui moral qu'ils m'ont témoigné, à qui je souhaite une vie pleine de bonheur, de santé et de prospérité.

A tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ce que cette thèse soit réalisée se dirigent ma gratitude et mes pensées.

Résumé

Ce mémoire est traitant la propagation et la diffraction des ondes acoustiques dans un milieu homogène contenant un obstacle, modélisée par l'équation de Helmholtz avec des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, selon la nature de l'obstacle.

L'étude se concentre sur l'analyse de l'existence et de l'unicité de la solution en utilisant la méthode des équations intégrales, notamment les équations de Fredholm de deuxième espèce. Elle aborde également des notions fondamentales telles que la fonction de Green, la théorie du potentiel et la condition de radiation de Sommerfeld. Cette étude a été traitée dans [4], [5], [7], [11], [12].

Mots clés: Diffraction des ondes acoustiques, Equation de Helmholtz, Equation intégrales, Fonction de Green, Théorie de potentiel.

Abstract

This thesis deals with the propagation and diffraction of acoustic waves in a homogeneous medium containing an obstacle. modeled by the Helmholtz equation with Dirichlet or Neumann boundary conditions, depending on the nature of the obstacle.

The study focuses on analyzing the existence and uniqueness of the solution using the method of integral equation, notably the Fredholm equations of the second kind. It also addresses fundamental notions such as the Green's function, potential theory and the Sommerfeld radiation condition. This study has been covered in [4], [5], [7], [11],[12]

Key words: Diffraction of acoustic waves, Helmholtz equation, Integral equation, Green's function, Potential theory.

Notations

$\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega^-$: désigne le domaine extérieur à l'obstacle.

$\Gamma = \partial\Omega^+$: est le bord de l'obstacle supposé régulier.

κ : est le nombre d'onde et est déterminé par la fréquence temporelle de l'onde incidente et la vitesse de propagation du milieu.

u : est le champ diffracté, c'est-à-dire la perturbation de la pression acoustique due à la présence de l'obstacle,

f : est une donnée déterminée par l'onde incidente.

β : un opérateur différentiel lié à la nature physique de l'obstacle i.e Dirichlet pour les obstacles dits rigides, Neumann pour les obstacles dits mous.

$\partial\Omega$: La frontière de Ω .

$\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$: Espace extérieur où se propage l'onde.

$\partial\Omega_i$: La frontière de Ω_i ($i \in \mathbb{N}$).

Δ : Opérateur de Laplace (Laplacien)

Δu : Laplacien de u

∇ : Opérateur gradient.

$\frac{\partial u}{\partial n}$: la dérivée normale extérieure par rapport à u .

$G(x, y)$: Fonction de Green de l'équation de Helmholtz.

ρ : la masse volumique du milieu.

P : désigne la pression.

V : la vitesse

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 1 |
| 1 Préliminaires et Notions fondamentales | 3 |
| 1.1 Opérateur borné compact | 4 |
| 1.1.1 Opérateur intégral | 5 |
| 1.1.2 Opérateur adjoint | 6 |
| 1.2 Equations intégrales de Fredholm du second espèce | 7 |
| 1.2.1 Existence et unicité de solution | 7 |
| 1.2.2 La théorie de Riesz Fredholm | 8 |
| 1.2.3 Formules de Green | 11 |
| 2 Onde acoustique et Théorie du potentiel | 12 |
| 2.1 Modélisation d'une onde acoustique | 12 |
| 2.2 Solution particulière | 14 |
| 2.2.1 Les ondes radiales | 14 |
| 2.2.2 Solutions fondamentales | 15 |
| 2.2.3 La condition de radiation de Sommerfeld | 17 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3 | Théorie du potentiel et Application | 19 |
| 3.1 | Problèmes aux limites | 19 |
| 3.1.1 | Problème de Dirichlet intérieur: | 19 |
| 3.1.2 | Problème de Neumann intérieur : | 19 |
| 3.1.3 | Problème de Dirichlet extérieur : | 20 |
| 3.1.4 | Problème de Neumann extérieur : | 20 |
| 3.2 | Unicité de la solution | 20 |
| 3.3 | Méthodes d'équations intégrales | 23 |
| 3.3.1 | Formule de représentation intégrale dans un domaine borné | 23 |
| 3.3.2 | Formule de représentation intégrale à l'extérieur d'un domaine borné | 25 |
| 3.4 | Potentiel simple et double couche | 26 |
| 3.5 | Existence des solutions | 28 |
| 3.6 | Application | 31 |
| 3.6.1 | Résolution par équation intégrales | 32 |
| 3.6.2 | Diffraction par la sonde 3D | 34 |
| 3.7 | Conclusion | 36 |

Introduction générale

La propagation des ondes acoustiques est un phénomène physique fondamental que l'on retrouve dans de nombreuses situations pratiques, telles que la transmission de la voix, le fonctionnement des sonores, ou encore l'acoustique architecturale. Lorsqu'une onde sonore se propage dans un milieu homogène isotrope et rencontre un obstacle, elle subit des phénomènes complexes comme la réflexion, la réfraction, l'absorption et la diffraction. Par exemple, lorsqu'un haut-parleur diffuse un son dans une pièce, les ondes se propagent, interagissent avec les murs, les objets et les ouvertures, créant une distribution de pression acoustique qui dépend fortement de la géométrie et des propriétés physique du milieu. D'un point de vue mathématique, la modélisation de ces phénomènes repose sur l'équation des ondes. Cette équation peut être transformée via la transformée de Fourier en temps, donnant lieu à l'équation de Helmholtz avec des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann qui représente par le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + \kappa^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \beta u = f & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (0.0.1)$$

où u est le champ diffracté, c'est à dire la perturbation de la pression acoustique due à la présence de l'obstacle et k est le nombre d'onde, lié à la fréquence et à la vitesse de propagation du son dans le milieu. L'opérateur de Helmholtz, défini comme

$$\Delta + \kappa^2, \quad (0.0.2)$$

est donc central dans l'étude des ondes stationnaires. Il intervient dans la formulation mathématique de nombreux problèmes acoustiques, en particulier lorsqu'on considère

des milieux comportant un ou plusieurs obstacles. La présence de ces obstacles impose des conditions aux limites complexes, rendant l'analyse mathématique plus délicate. Pour résoudre ces problèmes, notamment en domaine non borné, il est souvent avantageux de recourir à la méthode des équations intégrales, qui reformule le problème aux dérivées partielles en une équation intégrale sur le bord de l'obstacle. Cette approche, utilisant des opérateurs de potentiel simple et double, permet de réduire la dimension du problème et de mieux gérer les conditions aux limites à l'infini (condition de rayonnement de Sommerfeld).

Problème Extérieur : on est présence d'un problème aux limites posé en domaine non borné. Il faudra en particulier compléter le problème aux limites (0.0.1) par une condition de rayonnement (condition à l'infini) bien choisit pour assurer l'unicité de la solution.

Pour l'existence de la solution, on utilise la méthode des équations intégrales qui consiste à chercher la solution ce forme d'un potentiel avec une densité inconnue sur le bord de l'obstacle. Ainsi, on obtient une équation intégrale de type Fredholm e. i l'unicité entraîne l'existence.

Ce travail présenté contient trois chapitre. Le premier chapitre, on rappelle quelque notions de bases de la théorie des opérateurs compacts.

-Le deuxième chapitre est étude de l'opérateur de Helmholtz à travers la méthode des équations intégrales, application aux problèmes intérieurs et extérieurs.

-Le dernier chapitre présente la théorie du potentiel et l'étude de l'unicité et l'existence de la solution des problèmes aux limites et une application numérique. Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à utiliser l'opérateur de Helmholtz, on cite en exemple, les travaux **Rainer Kress** [4], **Wolfgang Hackbusch** [5], **Giroire&Nedelec** [7] dans les cas continu. Dans le cas discret, voir les travaux de **Koopman&Brenner**[11], **Coste&Patra** [12] et les références là dedans.

Préliminaires et Notions fondamentales

Lorsqu'une onde acoustique se propageant dans un milieu homogène rencontre un obstacle, elle subit une perturbation. On dit que l'onde incidente est diffractée (ou réfléchi) par l'obstacle. Résoudre un problème de diffraction consiste à déterminer cette perturbation à partir de la nature et de la géométrie de l'obstacle. Ce type de problématique se rencontre dans un grand nombre d'applications liées à l'acoustique : détection pétrolière, l'imagerie médicale, ... Mais on peut également citer d'autres application associées à d'autres types d'ondes : diffraction d'une onde sismique par une construction, la diffraction d'ondes radar (électromagnétiques) par un avion, ...

Nous nous intéresserons exclusivement aux ondes acoustiques et nous nous placerons en régime périodique en temps (on parle également de régime harmonique).

Considérons un milieu de propagation homogène contenant un obstacle diffractant occupant un domaine borné Ω^- simplement connexe \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 Dans ce cadre, l'onde diffractée recherchée résout le problème aux limites extérieur suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + \kappa^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \beta u = f & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.0.1)$$

1.1 Opérateur borné compact

Définition 1.1.1 Soit X un espace normé. Un opérateur linéaire $K : X \rightarrow X$ est dit borné s'il existe une constante positive $C \geq 0$ telle que :

$$\|Kx\|_X \leq C\|x\|_X$$

Pour tout $x \in X$.

On note par $L(X)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de X dans X muni de la norme

$$\|K\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Kx\|_X}{\|x\|_X}$$

Théorème 1.1.1 Soient X, Y et Z des espaces normés et $K : X \rightarrow Y, S : Y \rightarrow Z$ sont des opérateurs linéaires bornés alors le produit $KS : X \rightarrow Z$ définit par

$$(KS)(\varphi) = K(S\varphi)$$

pour tous $\varphi \in X$, KS est un opérateur linéaire borné avec

$$\|KS\| \leq \|K\| \cdot \|S\|$$

Définition 1.1.2 Un opérateur linéaire $K : X \rightarrow Y$ entre deux espaces normés est dit compact si l'image de la boule unité B_X de X est relativement compacte i.e si $\overline{K(B_X)}$ est compact. Ceci est équivalent à dire que pour toute suite bornée (φ_n) dans X , la suite $(K\varphi_n)$ contient une sous suite convergente dans Y .

Théorème 1.1.2 Les opérateurs linéaires compacts sont bornés.

Théorème 1.1.3 Toute combinaison linéaire des opérateurs compacts est compacte.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On définit l'espace $C(D)$ espace des fonctions continues sur D telle que $\overline{\Omega} = D$. Le principal intérêt de l'espace $C(D)$ est de disposer d'un produit scalaire:

$$\forall (f, g) \in C(D)^2, (f, g) = \int_D f(x) g(x) dx$$

Ce produit scalaire permet de définir la notion d'orthogonalité, ainsi que celle d'adjoint.

1.1.1 Opérateur intégral

Soit $k : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'opérateur linéaire $K : C(D) \rightarrow C(D)$ définit par :

$$(Kf)(x) := \int_D k(x, y) f(y) dy, x \in D$$

est dit un opérateur intégral avec un noyau continue k et de norme

$$\|K\|_\infty = \max \int_D |k(x, y)| dy.$$

Théorème 1.1.4 *L'opérateur intégral K avec noyau continu est un opérateur compact sur $C(D)$.*

Définition 1.1.3 *$k : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ est continu sur $D \times D$ sauf sur la diagonale*

$$\Delta = \{(x, y); y = x\}$$

Il existe deux constantes positives M et $\alpha \in (0, n)$, ($D \subset \mathbb{R}^n$) tel que :

$$|k(x, y)| \leq M|x - y|^{\alpha-n}, \forall x \neq y, 0 < \alpha \leq n,$$

est un noyau faiblement singulier.

Théorème 1.1.5 *L'opérateur intégral K avec un noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $C(D)$.*

Théorème 1.1.6 (*arzelasco*) *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact. Un ensemble $B \subset C(M)$ est relativement compact si et seulement si il est borné et équicontinu.*

1.1.2 Opérateur adjoint

Définition 1.1.4 On dit que $K : C(D) \rightarrow C(D)$ et $K^* : C(D) \rightarrow C(D)$ sont adjoints s'ils vérifient :

$$\forall (f, g) \in C(D)^2, (Kf, g) = (f, K^*g)$$

et on a

$$\|K\| = \|K^*\|$$

Définition 1.1.5 K symétrique ou auto-adjoint $\Leftrightarrow K = K^*$ et $D(K) = D(K^*)$.

Remarque 1.1.1 Si un opérateur $K : C(D) \rightarrow C(D)$ admet un adjoint K^* , alors cet adjoint est unique et K et K^* sont linéaires.

Définition 1.1.6 Soit un opérateur $K : C(D) \rightarrow C(D)$. Le noyau de K est le sous-espace défini par:

$$\text{Ker}(K) = \{f \in C(D) \mid Kf = 0\}$$

et l'image définit par :

$$\text{Im}(K) = \{\exists f \in C(D), Kf = g\}.$$

Proposition 1.1.1 soit $K \in L(C(D), C(D))$ un opérateur borné, alors

$$\begin{aligned} \text{Ker}(K) &= \text{Im}(K^*)^\perp \\ \text{Ker}(K^*) &= \text{Im}(K)^\perp \\ \overline{\text{Im}(K)} &= \text{Ker}(K^*)^\perp \\ \overline{\text{Im}(K^*)} &\subset \text{Ker}(K)^\perp \end{aligned}$$

Théorème 1.1.7 On considère un opérateur à noyau k continu sur $D \times D$ par la formule :

$$(K\varphi)(x) = \int_D k(x, y) \varphi(y) dy, \forall x \in D$$

alors l'opérateur K admet un unique opérateur adjoint K^* pour le produit scalaire usuel de L^2 , défini par :

$$(K^*\psi)(x) = \int_D k(y, x) \psi(y) dy, \forall x \in D.$$

1.2 Equations intégrales de Fredholm du second espèce

L'équation qui va nous intéresser est une équation de Fredholm du second espèce. Pour $f \in C(D)$ et K un opérateur à noyau continu, trouver $\varphi \in C(D)$ tel que:

$$\varphi(x) - K\varphi(x) = f(x) \tag{1.2.1}$$

1.2.1 Existence et unicité de solution

L'existence et l'unicité de φ (solution de 1.2.1) peuvent être établies par la série de Neumann.

Théorème 1.2.1 *Soit $K : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach X avec $\|K\| < 1$ et $I : X \rightarrow X$ l'opérateur identité. Alors $(I - K)$ possède un opérateur inverse borné sur X qui est donné par la série de Neumann*

$$(I - K)^{-1} = \sum_{n \geq 0} K^n$$

et qui satisfait

$$\|(I - K)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|K\|}$$

Preuve. On a $\|K^n\| \leq \|K\|^n$, depuis $\|K\| < 1$ nous avons la convergence absolue

$$\sum_{n \geq 0} \|K^n\| \leq \sum_{n \geq 0} \|K\|^n = \frac{1}{1 - \|K\|}$$

dans l'espace de Banach $L(X, X)$ on note :

$$S = \sum_{n \geq 0} K^n$$

Avec $\|S\| \leq (1 - \|K\|)^{-1}$. S l'inverse de $(I - K)$ $(I - K)S = (I - K)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N K^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N K^n (I - K) = \lim_{N \rightarrow \infty} (I - K^{N+1}) = I$$

car on a

$$\|K^{N+1}\| \leq \|K\|^{N+1} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

Donc la solution de l'équation (1.2.1) est sous la forme suivante :

$$\varphi(x) = (I - K)^{-1} f(x), \forall x \in D$$

■

1.2.2 La théorie de Riesz Fredholm

Maintenant, nous présentons la théorie Riesz Fredholm pour l'équation d'opérateur de deuxième espèce

$$\varphi - K\varphi = f$$

Nous supposons que X est un espace normé, $K : X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire compact et L défini par:

$$L = I - K$$

Théorème 1.2.2 *soit $K : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire compact et $I - K$ est injective. Alors l'opérateur inverse $(I - K)^{-1}$ existe et borné.*

Théorème 1.2.3 *Si l'opérateur étudié dans le cadre des équations intégrales est*

$$L = (I - K)$$

Alors il a les propriétés suivantes :

-Ker (L) est de dimension finie.

-Im (L) est un sous espace fermé de co-dimension finie, et plus précisément

$$\text{Im}(L) = \text{Ker}(L^*)^\perp$$

où L^ est l'opérateur adjoint de L .*

-Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur K tel que :

$$\{0\} = \text{Ker}(L^0) \not\subset \text{Ker}(L^1) \not\subset \dots \not\subset \text{Ker}(L^r) = \text{Ker}(L^{r+1}) = \dots$$

$$X = \text{Im}(L^0) \not\supset \text{Im}(L^1) \not\supset \dots \not\supset \text{Im}(L^r) = \text{Im}(L^{r+1}) = \dots$$

et on a la somme directe:

$$X = \text{Ker}(L^r) \oplus \text{Im}(L^r)$$

Corollaire 1.2.1 *Soit $K : X \rightarrow X$ un opérateur compact continu. Pour $f \in X$, on considère les problèmes :*

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{ tel que } \varphi - K\varphi = 0 \tag{1.2.2}$$

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{ tel que } \varphi - K\varphi = f \tag{1.2.3}$$

on a alors l'alternative:

Corollaire 1.2.2 *Si l'équation (1.2.2) n'a que la solution triviale $\varphi = 0$, alors pour tout $f \in X$, l'équation (1.2.3) a une unique solution φ . De plus cette solution dépend continument de f .*

-Si l'équation(1.2.2) a une solution non triviale, alors elle admet un nombre fini $m \in \mathbb{N}$ de solutions $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ linéairement indépendantes. Dans ce cas, la solution de (1.2.3) s'écrit sous la forme:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n$$

où $\tilde{\varphi}$ est une solution particulière de (1.2.3) et $f \in \text{Ker}(L^*)^\perp$, i.e f doit satisfaire m conditions d'orthogonalité.

Théorème 1.2.4 On considère les deux équations intégrales homogènes avec noyau continu $k : D \times D \rightarrow D$:

$$\text{trouver } \varphi \in C(D) \text{ telle que : } \varphi - \int_D k(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (1.2.4)$$

$$\text{trouver } \psi \in C(D) \text{ telle que : } \psi - \int_D k(y, x) \psi(y) dy = 0 \quad (1.2.5)$$

on considère, pour $f \in C(D)$ et $g \in C(D)$ les équations intégrales avec seconds membres

$$\text{trouver } \varphi \in C(D) \text{ telle que : } \varphi - \int_D k(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (1.2.6)$$

$$\text{trouver } \psi \in C(D) \text{ telle que : } \psi - \int_D k(y, x) \psi(y) dy = g(x) \quad (1.2.7)$$

Théorème 1.2.5 Alors on a l'alternative:

Ou bien les équations(1.2.4) et (1.2.5) n'ont que les solutions triviales $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Dans ce cas, les équations(1.2.6) et (1.2.7) admettent une unique solution $\varphi \in C(D)$ et $\psi \in C(D)$ pour chaque $f \in C(D)$ et $g \in C(D)$.

Ou bien les équations (1.2.4) et (1.2.5) ont le même nombre fini m de solutions linéairement indépendantes. Dans ce cas, les équations (1.2.6) et (1.2.7) sont solvables si et seulement si pour toute solution φ de (1.2.4) et toute solution ψ de (1.2.5) on a :

$$\int_D f(x) \psi(x) dx = \int_D g(x) \varphi(x) dx = 0$$

dans ces conditions, la solution générale de (1.2.6) s'écrit sous la forme:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{n=1}^m \alpha_n \varphi_n$$

où $\tilde{\varphi}$ est une solution particulière de (1.2.6) et les $(\varphi_n)_{1 \leq n \leq m}$ forment une famille libre de solution de (1.2.4).

Résumé (Alternative de Fredholm)

Soit $K \in C(D)$ un opérateur compact et $\lambda \neq 0$. La structure du spectre des opérateurs compacts permet d'étudier la solvabilité de l'équation

$$(\lambda I - K) \varphi = f \tag{1.2.8}$$

Alors, seule l'une des deux éventualités suivantes peut se produire :

1-L'opérateur $\lambda I - K$ admet un inverse continu et l'équation (1.2.8) a une unique solution pour tout $f \in C(D)$.

2-L'opérateur $\lambda I - K$ n'est pas injectif. Dans ce cas, l'équation (1.2.8) admet une solution (qui est nécessairement non unique) si et seulement si

$$f \in [Ker(\lambda I - K)^*]^\perp.$$

1.2.3 Formules de Green

Soit Ω un domaine borné de classe C^2 , $\partial\Omega = \Gamma$ la frontière est conexe et $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, alors la première formule de Green est donnée par :

$$\int_{\Omega} u \Delta v dy = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\gamma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dy. \tag{1.2.9}$$

et la deuxième formule de Green est donnée par:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dy = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\gamma \tag{1.2.10}$$

La dérivée normale sur la frontière existe dans le sens que la limite

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} (n(x), \text{grad } u(x - hn(x))), x \in \Gamma$$

existe uniformément sur Γ .

Les résultats de ce chapitre sont démontrés dans les livres [3] ou [8].

2.1 Modélisation d'une onde acoustique

La propagation d'une onde acoustique dans un milieu homogène et isotrope caractérisé par une vitesse de propagation $C > 0$ est décrite par l'équation des ondes

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t) - \Delta U(x, t) = f(x, t), \quad (2.1.1)$$

où $U(x, t)$ désigne la pression au point $x \in \mathbb{R}^3$, à l'instant $t \geq 0$ et où $f(x, t)$ désigne un terme source. Cette équation peut être obtenue par linéarisation de l'équation d'Euler :

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } V^2 + \text{rot } V \wedge V \right) + \text{grad } P = 0, \quad (2.1.2)$$

Pour les fluides compressibles autour d'une position d'équilibre, dans le cas de petites perturbations, avec un écoulement irrotationnel, i.e $\text{rot } V = 0$, l'équation (2.1.2) devient :

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } V^2 \right) + \text{grad } P = 0, \quad (2.1.3)$$

où P désigne la pression, V la vitesse et ρ la masse volumique.

Lorsqu'un système régi par l'équation des ondes est soumis à une excitation périodique, on peut s'attendre à ce que sa solution devienne elle aussi périodique en temps avec la même période. La justification rigoureuse de ce passage à la limite en temps long repose sur le principe d'amplitude limite. Étant donné $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ un support compact. Soit U la solution du problème d'évolution :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t) - \Delta U(x, t) &= f(x) e^{-i\omega t} & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty) & \quad (2.1.4) \\ U(x, 0) &= 0 & x \in \mathbb{R}^3 & \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) &= 0 & x \in \mathbb{R}^3 & \end{aligned}$$

Alors

$$\lim |U(x, t) - u(x) e^{-i\omega t}| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

où u vérifie

$$\Delta u + \kappa^2 u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad \kappa = \frac{\omega}{c} > 0 : \text{ nombre d'onde} \quad (2.1.5)$$

La solution U décrit le régime transitoire, alors que la solution u de (2.1.5) décrit le régime périodique établi, aussi appelé régime harmonique. Plus précisément, ce régime correspond à la recherche de solutions particulières de(2.1.1) de la forme

$$U(x, t) = \text{Re} \left\{ u(x) e^{-i\omega t} \right\},$$

où la fonction u à valeurs complexes explique la variation spatiale résultant de l'équation (2.1.5). L'opérateur $\Delta + \kappa^2$ est appelé opérateur de Helmholtz et l'équation obtenue en l'absence de source, à savoir :

$$\text{Re} \left\{ (\Delta u + \kappa^2 u) e^{-i\omega t} \right\} = 0, \quad \forall t > 0$$

i.e

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

est appelé l'équation de Helmholtz.

2.2 Solution particulière

2.2.1 Les ondes radiales

Maintenant, nous intéressons au cas des solutions radiales de l'équation de "Helmholtz" à l'extérieur d'une boule $r > R_0$. nous utilisons pour obtenir ses solutions les coordonnées sphériques sont définies par:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$x_3 = r \cos \theta$$

avec $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Dans ce système, l'expression du Laplacien est la suivante :

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\sigma$$

où Δ_σ est l'opérateur de "Laplace-Beltrami". Les opérateurs Δ_r et Δ_σ sont définis par :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right],$$

Si on cherche une solution u indépendante de θ et φ , on obtient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \kappa^2 u = 0$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \kappa^2 u = 0$$

$$r \frac{d^2u}{dr^2} + 2 \frac{du}{dr} + \kappa^2 r u = 0$$

où encore

$$(ru)'' + \kappa^2 (ru) = 0$$

Ainsi, les solutions radiales sont de la forme (car $\kappa \neq 0$)

$$u(r) = \lambda \frac{e^{i\kappa r}}{r} + \mu \frac{e^{-i\kappa r}}{r}.$$

2.2.2 Solutions fondamentales

Définition 2.2.1 On appelle solution fondamentale de l'opérateur $-\Delta - \kappa^2$, $\kappa \geq 0$, une distribution $E \in D'(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$-\Delta E - \kappa^2 E = \delta_0 \quad \text{dans } D'(\mathbb{R}^3),$$

c'est à dire une distribution telle que :

$$\langle \Delta E + \kappa^2 E, \psi \rangle = -\psi(0), \forall \psi \in D(\mathbb{R}^3)$$

Proposition 2.2.1 Les fonctions définies par

$$E(x) = \frac{e^{i\kappa|x|}}{4\pi|x|}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$\overline{E(x)} = \frac{e^{-i\kappa|x|}}{4\pi|x|},$$

sont des solutions fondamentales de l'opérateur $-\Delta - \kappa^2$ dans \mathbb{R}^3 , pour tout $\kappa > 0$.

Pour démontrer la proposition précédente on a besoin de ce lemme :

Lemme 2.2.1 Pour toute fonction $\psi \in D(\mathbb{R}^3)$, posons :

$$\tilde{\psi}(s) := \int_{s^2} \psi(sx) dx, \forall s \in \mathbb{R},$$

où S^2 est la sphère unité de \mathbb{R}^3 . Alors $\psi \in D(\mathbb{R})$ est paire et

$$\overline{\tilde{\psi}}(0) = 4\pi\psi(0).$$

Preuve. Les solutions fondamentales radiales $E(x) = \phi(r)$ (i.e, $|x| = r$) de l'opérateur $(-\Delta - \kappa^2)$ vérifient

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \phi')' + \kappa^2 \phi = 0, \quad \forall r > 0,$$

ou encore

$$(r\phi'' + 2\phi') + \kappa^2 (r\phi) = 0, \quad \forall r > 0,$$

c'est à dire

$$(r\phi)'' + \kappa^2 (r\phi) = 0, \quad \forall r > 0,$$

En intégrant cette équation, on obtient que

$$\phi(r) = \lambda \frac{e^{i\kappa r}}{r} + \mu \frac{e^{-i\kappa r}}{r}$$

Prenons $\mu = 0$ et recherchons le coefficient λ pour que $E(x) = \lambda e^{i\kappa|x|}/|x|$ soit une solution fondamentale. Bien évidemment, $\overline{E(x)} = \overline{\lambda} e^{-i\kappa|x|}/|x|$ définit alors également une solution fondamentale (puisque κ est réel). Pour toute fonction test $\psi \in D(\mathbb{R}^3)$, i.e $\text{supp } \psi \subset B(x, R)$ on a :

$$\begin{aligned} \langle \Delta E + \kappa^2 E, \psi \rangle &= (E, \Delta \psi + \kappa^2 \psi) \\ &= \int_{B(x, R)} E (\Delta \psi + \kappa^2 \psi) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} E (\Delta \psi + \kappa^2 \psi) dx \end{aligned}$$

tel que $\Omega_\varepsilon = B(x, R) \setminus B(x, \varepsilon)$ et $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup S(x, \varepsilon)$. On applique la deuxième formule de

Green, tel que $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$ où n est la normale extérieur, on obtient :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} E (\Delta\psi + \kappa^2\psi) dx = \left(- \int_{\Gamma_\varepsilon} E \frac{\partial\psi}{\partial r} d\gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial r} \psi d\gamma + \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta E + \kappa^2 E) \psi dx \right)$$

ce qui implique

$$\langle \Delta E + \kappa^2 E, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left[-E \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial E}{\partial r} \psi \right] d\gamma$$

on reprend les notions du lemme(3.1) :

$$\begin{aligned} \langle \Delta E + \kappa^2 E, \psi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\phi(\varepsilon) \varepsilon^2 \int_{S^2} \psi(\varepsilon\omega) d\omega + \phi'(\varepsilon) \varepsilon^2 \int_{S^2} \psi'(\varepsilon\omega) d\omega \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\phi(\varepsilon) \tilde{\psi}'(\varepsilon) \varepsilon^2 + \phi'(\varepsilon) \tilde{\psi}(\varepsilon) \varepsilon^2 \right) \\ &= -\lambda \tilde{\psi}(0), \end{aligned}$$

et donc en choisissant $\lambda = \frac{1}{4\pi}$, on a bien une solution fondamentale de $-\Delta - \kappa^2$. ■

Remarque 2.2.1 *On notera que*

$$E \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

et que $G(x, y) = E(x - y)$ vérifie

$$-\Delta_y G(x, y) = \delta_x.$$

2.2.3 La condition de radiation de Sommerfeld

La condition de radiation de Sommerfeld caractérise complètement le comportement des solutions d'équation de "Helmholtz" comme une onde divergente (i. e onde sortante) au voisinage de l'infini.

Physiquement, cette condition assure que l'onde diffracté se propage loin de l'obstacle et mathématiquement assure l'unicité de la solution i.e le problème est bien posé.

Proposition 2.2.2 Une solution radiale u de l'équation de Helmholtz à l'extérieur d'une boule est sortante si et seulement si elle vérifie

$$\frac{du}{dr} - i\kappa u = o\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty, \text{ dans } \mathbb{R}^3. \quad (2.2.1)$$

la condition (2.2.1) est appelé condition de rayonnement de Sommerfeld.

Remarque 2.2.2 On peut donner une formulation équivalente de la condition (2.2.1) présentant l'avantage de ne pas dépendre de la dimension d'espace . Plus précisément, on peut vérifier q'une solution radiale u est sortante si et seulement si elle vérifie la "**condition de rayonnement de Sommerfeld**" :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - i\kappa u \right|^2 d\gamma = 0.$$

Soit

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|}, \text{ pour } x, y \in \mathbb{R}^3, x \neq y,$$

solution fondamentale de l'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^3 .

Les propriétés de la fonction fondamentale G sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 $G(\cdot, y)$ résout l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \underbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}}_{\text{pour tout } y \in \mathbb{R}^3}$$

et satisfait la condition de radiation

$$\frac{x}{|x|} \nabla_x G(x, y) - i\kappa G(x, y) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty$$

uniformément pour toutes les directions $\frac{x}{|x|}$.

Théorie du potentiel et Application

Dans ce chapitre, on présente les problèmes aux limites de Dirichlet et Neumann intérieur et extérieur. Pour les résoudre, on utilise la théorie du potentiel

3.1 Problèmes aux limites

Soient f et g des fonctions continues, alors on pose les problèmes aux limites suivants :

3.1.1 Problème de Dirichlet intérieur:

$$D^- \begin{cases} \text{Trouver } u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ tel que :} \\ \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = f \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.1.1)$$

3.1.2 Problème de Neumann intérieur :

$$N^- \begin{cases} \text{Trouver } u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ tel que :} \\ \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.1.2)$$

3.1.3 Problème de Dirichlet extérieur :

$$D^+ \begin{cases} \text{Trouver } u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \\ u = f \text{ sur } \Gamma \\ u \text{ satisfait la condition de radiation de Sommerfeld(2.2.1)} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

3.1.4 Problème de Neumann extérieur :

$$N^+ \begin{cases} \text{Trouver } u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \Gamma \\ u \text{ satisfait la condition de radiation de Sommerfeld(2.2.1)} \end{cases} \quad (3.1.4)$$

3.2 Unicité de la solution

Théorème 3.2.1 *Soit $\text{Im } \kappa > 0$. Alors les problèmes de Neumann et de Dirichlet intérieurs admettent au plus une solution.*

Preuve. Soit $u \in R(\Omega)$ une solution de l'équation de Helmholtz, d'après la première formule de Green (1.2.9), pour $u = v$ on obtient:

$$\int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma = \int_{\Omega} (|\text{grad } u|^2 - \kappa^2 |u|^2) dx$$

Si $u = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ , alors :

$$0 = \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma = \int_{\Omega} (|\text{grad } u|^2 - \kappa^2 |u|^2) dx$$

tel que $\kappa \neq 0$ et $\text{Im } \kappa > 0$ alors:

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx = 0$$

donc $u = 0$ dans Ω . ■

Remarque 3.2.1 *Soulignons que dans le cas d'un problème de Helmholtz intérieur, on perd l'unicité de la solution, au moins pour certaines valeurs du nombre d'onde.*

En effet, considérons le problème homogène

$$\begin{cases} \Delta u + \kappa^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Ce problème admet une solution non nulle que si κ^2 n'est pas valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ sur $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Or, cet opérateur étant auto-(adjoit et à résolvante compacte, son spectre est constitué d'une suite de valeurs propres positives $(\lambda_n(\Omega))_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini. Par conséquent, si $\kappa = \kappa_n := \sqrt{\lambda_n(\Omega)}$, $n \in \mathbb{N}$, la solution du problème de Helmholtz intérieur, lorsqu'elle existe, n'est pas unique. Les fréquences κ_n sont appelées fréquences irrégulières associées au domaine Ω .

L'ingrédient principale pour établir l'unicité de la solution pour les problèmes extérieurs est le lemme de Rellich.

Lemme 3.2.1 *(de Rellich) Soit $\kappa > 0$ et $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ une solution de l'équation de Helmholtz satisfaisant la condition de radiation de Sommerfeld et*

$$\int_{|x|=R} |u|^2 d\gamma = o(1), R \rightarrow \infty$$

alors $u = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$.

Preuve. La démonstration est basée sur le développement de u sous la forme :

$$u(x) = \frac{e^{i\kappa r}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta, \phi)}{r^n}$$

avec r, θ, ϕ les coordonnées sphériques de x et l'utilisation de la représentation intégrale à l'extérieur du domaine, et pour plus de détail voir [3]. ■

Théorème 3.2.2 *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ une solution de l'équation de Helmholtz satisfaisant la condition de radiation de Sommerfeld et*

$$\text{Im} \left(\kappa \int_{\Gamma} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) \geq 0,$$

alors $u = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$.

Preuve. Voir [3]. ■

Théorème 3.2.3 (d'unicité) *Le problème de Dirichlet extérieur admet au plus une solution.*

Preuve. Soit u une solution du problème extérieur homogène (3.1.3) ou $u = 0$ sur Γ . Soit $\Omega_R = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \cap \{|x| < R\}$. La première formule de Green entraîne que

$$\int_{|x|=R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma = \int_{\Omega_R} (|\text{grad } u|^2 - \kappa^2 |u|^2) dx$$

et donc

$$\text{Im} \int_{|x|=R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma = 0 \quad (3.2.1)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - i\kappa u \right|^2 d\gamma &= \int_{|x|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + \kappa^2 |u|^2 \right) d\gamma + 2\kappa \text{Im} \int_{|x|=R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma \\ &= \int_{|x|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + \kappa^2 |u|^2 \right) d\gamma \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

car u vérifient la condition de radiation à l'infini, donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |u|^2 = 0$$

Le Théorème de Rellich s'applique, Donc

$$u = 0$$

■

Remarque 3.2.2 *Le résultat d'unicité précédent demeure valable pour une condition de type Neumann sur le bord. En effet, avec les notations ci-dessus on a pour toute solution de l'équation de Helmholtz dans Ω_R :*

$$\int_{\partial\Omega_R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma = \int_{\Omega_R} (|\text{grad } u|^2 - k^2 |u|^2) dx,$$

et donc

$$\text{Im} \int_{|x|=R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma = \text{Im} \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma.$$

Comme le terme de droite est nul pour une condition de Neumann, on peut pour suivre la preuve à partir de (3.2.1).

3.3 Méthodes d'équations intégrales

L'idée principale des méthodes d'équations intégrales est de montrer qu'un problème extérieur peut être formulé de manière équivalente sous la forme d'une équation sur le bord de Γ . Il est important de connaître la fonction de Green du problème ce qui n'est possible que pour des milieux simples (homogène, stratifié,...).

Parmi les avantages de cette méthode, elle permet une prise en compte implicite de la condition de rayonnement et elle réduit le problème d'une dimension d'espace (du 3D au 2D ou du 2D au 1D). Ceci représente un gain mémoire important lors de l'approximation numérique.

Le point essentiel des méthodes d'équations intégrales est le théorème de représentation intégrale de la solution. Il permet d'obtenir une expression analytique de la solution en fonction d'inconnues définies sur le bord de l'obstacle. Le théorème de représentation nécessite l'utilisation de la formule de Green ainsi que la connaissance de la solution fondamentale.

3.3.1 Formule de représentation intégrale dans un domaine borné

Théorème 3.3.1 Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ est une solution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Alors

$$\int_{\Gamma} \left(u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) G(x, y) \right) d\gamma(y) = \begin{cases} -u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Preuve. On choisit arbitrairement un point fixe $x \in \Omega$, soit la sphère

$$\Omega_{x, \varepsilon} := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |x - y| = \varepsilon\}$$

tel que $\Omega_{x, \varepsilon} \subset \Omega$ et la normale unité n vers l'intérieur de $\Omega_{x, \varepsilon}$. On applique la deuxième formule de Green à la fonction $u(y)$ et $G(x, y)$ dans le domaine $\{y \in \Omega \mid |x - y| > \varepsilon\}$,

on obtient

$$\int_{\Gamma+\Omega_{x,\varepsilon}} \left(u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) G(x,y) \right) d\gamma(y) = 0$$

Ainsi sur $\Omega_{x,\varepsilon}$ nous avons

$$G(x,y) = \frac{e^{i\kappa\varepsilon}}{4\pi\varepsilon}, \quad \text{grad}_y G(x,y) = \left(\frac{1}{\varepsilon} - i\kappa \right) \frac{e^{i\kappa\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} n(y) \quad (3.3.1)$$

Montrons que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{x,\varepsilon}} \left(u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) G(x,y) \right) d\gamma(y) = u(x) = I(x)$$

Tenant compte de $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon}$, on calcule $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(y) G(x,y)$

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\kappa\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} \left| \int_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(y) d\gamma(y) \right| &\leq C \frac{e^{i\kappa\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} \|\nabla u\|_\infty 4\pi\varepsilon^2 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{i\kappa\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} \int_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(y) d\gamma(y) &= o(\varepsilon) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(y) G(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Examinons maintenant la seconde intégrale et montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} d\gamma(y) = u(x)$$

$$\int_{S(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} d\gamma(y) = u(x) \int_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} d\gamma(y) + \int_{S(x,\varepsilon)} (u(y) - u(x)) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} d\gamma(y)$$

Notant que $u(y) - u(x) = o(\varepsilon)$ uniformément sur $S(x,\varepsilon)$, il vient d'après (3.3.1)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(x,\varepsilon)} (u(y) - u(x)) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} d\gamma(y) = 0$$

Pour conclure, il reste à estimer la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ du terme

$$\begin{aligned} \int_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} d\gamma(y) &= \left(\frac{1}{\varepsilon} - i\kappa \right) \frac{e^{i\kappa\varepsilon}}{\varepsilon} \cdot \text{mes}(S^2) \cdot \varepsilon^2 \\ \int_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} d\gamma(y) &= 1 \end{aligned}$$

En utilisant cette dernière relation, on obtient $I(x) = u(x)$, d'où le résultat. ■

3.3.2 Formule de représentation intégrale à l'extérieur d'un domaine borné

Théorème 3.3.2 Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ est une solution de l'équation de Helmholtz et satisfait la condition de radiation de Sommerfeld (3.9) uniformément pour toutes les directions $\frac{x}{|x|}$. Alors

$$\int_{\Gamma} \left(u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) G(x, y) \right) d\gamma(y) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \\ u(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} = \Omega'$, considérons une sphère S_ε de centre x , de rayon $\varepsilon > 0$ petit tel que $S_\varepsilon \subset \Omega'$, et soit B_R suffisamment grande pour contenir Ω tel que $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} : |x - y| < R\}$. On applique la deuxième formule de Green dans le domaine Ω_R (hachuré). On a $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \left(u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} - G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} \right) d\gamma(y) \\ &+ \int_{S(x, \varepsilon)} \left(u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} - G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} \right) d\gamma(y) \\ &+ \int_{\Gamma_R} \left(u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} - G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} \right) d\gamma(y) \\ &= I_{\Gamma} + I_{\varepsilon} + I_R, \end{aligned}$$

pour le calcul $I_{\Gamma}, I_{\varepsilon}$, on suit les étapes de la preuve précédente. Il reste à montrer que

$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$, en utilisant les hypothèses sur le comportement à l'infini de u :

$$\begin{cases} u(y) = o\left(\frac{1}{|y|}\right) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial r} - i\kappa u = o\left(\frac{1}{r}\right) \\ \text{quand } |y| = r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Pour plus de détails voir [3]. ■

Remarque 3.3.1 Une solution de l'équation de Helmholtz vérifie la condition de radiation de Sommerfeld (3.9) satisfait aussi

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty$$

uniformément pour toutes les directions $\frac{x}{|x|}$.

3.4 Potentiel simple et double couche

Rappelons la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^3

$$G(x, y) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|}, x, y \in \mathbb{R}^3, x \neq y$$

Définition 3.4.1 Soit $\varphi \in C(\partial\Omega)$ une fonction donnée, et G noyau de Green. La fonction

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} G(x, y) \varphi(y) d\gamma(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \quad (3.4.1)$$

est appelée potentiel de simple-couche de densité φ .

Définition 3.4.2 Soit $\psi \in C(\partial\Omega)$ une fonction donnée, et G noyau de Green. La fonction

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) d\gamma(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega \quad (3.4.2)$$

est appelée potentiel double-couche de densité ψ .

Lemme 3.4.1 Soit $\Gamma = \partial\Omega \in C^2$, alors il existe une constante $M > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} |(x - y, n(x))| &\leq M |x - y|^2, x, y \in \Gamma \\ |n(x) - n(y)| &\leq M |x - y|, x, y \in \Gamma \end{aligned}$$

Preuve. Voir[4]. ■

Théorème 3.4.1 Les deux potentiels simple et double couche satisfont la condition de radiation de Sommerfeld

$$\nabla u(x) - i\kappa u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty \quad (3.4.3)$$

uniformément pour toutes les directions $\frac{x}{|x|}$.

Notation 3.4.1 Nous distinguerons par indices + et - la limite obtenue en approchant la frontière Γ de l'intérieur de $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ et Ω , respectivement i.e :

$$v_+(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} v(y), x \in \Gamma.$$

$$v_-(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega} v(y), x \in \Gamma.$$

Théorème 3.4.2 Soit $\Gamma \in C^2$, le potentiel double couche v avec densité $\psi \in C(\Gamma)$ est prolongeable par continuité de Ω à $\bar{\Omega}$ et de $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ à $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ avec les limites :

$$v \pm (x) = \int_{\Gamma} \psi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} d\gamma(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x), x \in \Gamma, \quad (3.4.4)$$

où

$$v \pm (x) = \lim_{h \rightarrow 0} v(x \pm hn(x)),$$

uniformément $x \in \Gamma$, et l'intégrale impropre est convergent.

Preuve. Voir [3]. ■

Théorème 3.4.3 Soit Γ de classe C^2 , alors le potentiel double couche v avec la densité ψ vérifie

$$\lim_{h \rightarrow +0} n(x) [\nabla v(x + hn(x)) - \nabla v(x - hn(x))] = 0 \quad (3.4.5)$$

uniformément pour tout $x \in \Gamma$.

Corollaire 3.4.1 Le potentiel double couche avec une densité continue ψ vérifie la relation du saut :

$$v_+ - v_- = \psi$$

Théorème 3.4.4 Soit $\Gamma \in C^2$, le potentiel simple couche $u(x)$ avec la densité $\varphi \in C(\Gamma)$ satisfait :

$$\frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial n} = \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(x)} d\gamma(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), x \in \Gamma,$$

où

$$\frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial n} := \lim_{h \rightarrow 0} n(x) \cdot \nabla u(x \pm hn(x)),$$

uniformément $x \in \Gamma$, et l'intégrale impropre est convergent.

Preuve. Voir [3]. ■

3.5 Existence des solutions

L'existence d'une solution du problème aux limites revient à la résolution d'une équation intégrale qui relève à l'alternative de Fredholm, en d'autres termes l'étude de l'existence de la solution se ramène à l'injectivité des opérateurs intégraux correspondants.

La formule de Green montre que toute solution de l'équation de Helmholtz peut être représentée comme une combinaison des potentiels simple et double couche, ce qui est à la base de la méthode indirecte : on cherche la solution pour cela, sous la forme de deux potentiels.

Nous introduisons les opérateurs intégraux $K, K' : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$ par

$$(K\psi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) d\gamma(y), x \in \Gamma \quad (3.5.1)$$

$$(K'\phi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(x)} \phi(y) d\gamma(y), x \in \Gamma \quad (3.5.2)$$

Les opérateurs intégraux K, K' admettent un noyau faiblement singulier, par conséquent sont des opérateurs compacts.

L'opérateur K' est l'opérateur adjoint de l'opérateur K dans le système dual

$$\langle C(\Gamma), C(\Gamma) \rangle$$

Défini par

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{\Gamma} \psi \phi dy.$$

Théorème 3.5.1 *Le potentiel double couche*

$$v(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) d\gamma(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$$

avec la densité continue, v est une solution du problème de Dirichlet intérieur (3.1.1) à condition que ψ est une solution de l'équation intégrale

$$\psi(x) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) d\gamma(y) = -2f(x), x \in \Gamma$$

il résout le problème de Dirichlet extérieur (3.1.3) dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ à condition que ψ est une solution de l'équation intégrale

$$\psi(x) + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) d\gamma(y) = 2f(x), x \in \Gamma.$$

Théorème 3.5.2 *Le potentiel simple couche*

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, y) \phi(y) d\gamma(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$$

avec la densité ϕ continue, u est une solution du problème de Neumann intérieur (3.1.2) à condition que ϕ est une solution de l'équation intégrale

$$\phi(x) + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(x)} \phi(y) d\gamma(y) = 2g(x), x \in \Gamma$$

il résout le problème de Neumann extérieur (3.1.4) dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ à condition que ϕ est une solution de l'équation intégrale

$$\phi(x) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(x)} \phi(y) d\gamma(y) = -2g(x), x \in \Gamma.$$

On peut écrire les équations intégrales pour les problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur de la forme

$$\psi - K\psi = -2f, \tag{3.5.3}$$

et

$$\psi + K\psi = 2f, \tag{3.5.4}$$

et pour les problèmes de Neumann intérieur et extérieur de la forme

$$\phi + K'\phi = 2g, \tag{3.5.5}$$

et

$$\phi - K'\phi = -2g. \tag{3.5.6}$$

On va appliquer la théorie de Riesz-Fredholm pour ces équations. Nous considérons l'espace linéaire $R(\Omega)$ des fonction à valeur complexe

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

On introduit l'espace linéaire

$$U := \left\{ u|_{\Gamma}, u \in R(\Omega), \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega, \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$$

Le noyau de l'opérateur $(I + K)$ correspond aux solutions du problème de Neumann homogène intérieur et on énonce le théorème suivant :

Théorème 3.5.3 $N(I + K) = U.$

Preuve. Voir[4]. ■

On applique l'alternative de Fredholm, on a :

$$\dim N(I + K) = \dim N(I + K') = m_N$$

où $m_N = 0$, si k n'est pas une valeur propre du problème de Neumann intérieur, donc $N(I + K) = \{0\}$

L'existence des solutions pour le problème de Neumann intérieur et Dirichlet extérieur sont établies par les deux théorèmes suivants :

Théorème 3.5.4 *Le problème de Neumann intérieur est résoluble si et seulement si*

$$\int_{\Gamma} u g d\gamma = 0,$$

pour toute u solution de problème de Neumann homogène intérieur.

Théorème 3.5.5 *Le problème de Dirichlet extérieur est uniquement solvable.*

On introduit maintenant l'espace linéaire

$$V := \left\{ \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, v \in R(\Omega), \Delta v + \kappa^2 v = 0 \text{ dans } \Omega, v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

Le noyau de l'opérateur $(I - K')$ correspond aux solutions du problème de Dirichlet homogène intérieur et on énonce le théorème suivant :

Théorème 3.5.6 $N(I - K') = V$. On applique l'alternative de Fredholm, on a :

$$\dim N(I - K') = \dim N(I - K) = m_D$$

où $m_D = 0$ si K n'est pas une valeur propre du problème de Dirichlet intérieur.

Théorème 3.5.7 Le problème de Dirichlet intérieur est résoluble si seulement si

$$\int_{\Gamma} f \frac{\partial v}{\partial n} d\gamma = 0$$

pour toute v solution du problème de Dirichlet homogène intérieur.

Théorème 3.5.8 Le problème de Neumann extérieur est uniquement résoluble.

3.6 Application

L'intérêt d'une sonde sphérique pour la détermination des trois composantes du vecteur intensité acoustique a été montré dans [1]. La connaissance analytique des phénomènes de diffraction autour de la sphère dans le cas d'un champ d'ondes planes ou d'ondes sphériques a permis de mettre au point des algorithmes conduisant à la connaissance

complète du champ acoustique non perturbé. Comme pour l'intensimétrie traditionnelle par différences finies, ces derniers s'appuient sur des mesures de phases.

La direction de propagation ou encore les cosinus directeurs du vecteur intensité acoustique peuvent être déterminés jusqu'à 12500 Hz.

A ces fréquences, les phénomènes de diffraction ne relèvent plus simplement de la sphère de mesure mais de toute la sonde. L'approche analytique n'étant plus possible pour cette géométrie complexe, la présente étude propose une approche numérique basée sur l'équation intégrale de Helmholtz.

Le but de cette étude est double :

- Dans un premier temps, ce calcul permet de quantifier les perturbations dues à la poignée et ainsi de connaître les limites de la géométrie présentée au lèr Congrès Français d'Acoustique [13].

- Dans un second temps, une optimisation de la forme de la poignée conduisant à une erreur minimale est proposée. Même si ce calcul est limité à 10 kHz pour les raisons présentées dans la partie suivante, ces enseignements restent valables dans tout le domaine de mesure.

3.6.1 Résolution par équation intégrales

Les phénomènes de diffraction des ondes acoustiques peuvent être mis en équation sous forme intégrale par une combinaison de potentiels de simple et double couche.

Soient ρ_d la pression diffractée par l'obstacle et ρ_i la pression incidente. La fonction de Green s'écrit:

$$G(M, P) = \frac{e^{ik\|\overrightarrow{MP}\|}}{4\pi\|\overrightarrow{MP}\|} \quad (3.6.1)$$

S représente la surface de l'obstacle, Ω_i et Ω_e les domaines intérieur et extérieur.

$$\int_S \left\{ P_d(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_p} - \frac{\partial P_d(P)}{\partial n_p} G(M, P) \right\} ds = v P_d(M) \quad (3.6.2)$$

avec $v = 0$ si $M \in \Omega_i$, $v = 1$ si $M \in \Omega_e$, $v = \frac{1}{2}$ si $M \in S$.

L'étude étant réalisée dans l'hypothèse d'un champ incident d'ondes planes, le gradient de pression sur ε est donné par:

$$\frac{\partial P_d(P)}{\partial n_p} = -\frac{\partial P_i(P)}{\partial n_p} \quad (3.6.3)$$

L'intérêt principal (3.6.3) du polyèdre (approximation de la surface ε en éléments plans) est d'annuler les termes G_{ii} (3.6.6) ; En effet, le calcul de ces termes entraînent des difficultés lors du découpage de ε en éléments de surfaces gauches.

La pression ainsi que la composante normale de son gradient sont approximées par des distributions constantes par morceaux.

La pression diffractée en chacun des points ρ_i , centre de gravité des mailles est alors solution du système d'équations linéaires suivant:

$$\left(\frac{1}{2}[I] - [G]\right) [P_d] = [M] \left[\frac{\partial P_i}{\partial n}\right] \quad (3.6.4)$$

avec pour $i \neq j$

$$G_{ij} = \int_{\varepsilon} \frac{\partial G(P_1, P)}{\partial n_j} d\varepsilon_j \quad M_{ij} = \int_{\varepsilon} G(P_1, P) d\varepsilon_j \quad (3.6.5)$$

pour $i = j$

$$G_{ii} = 0 \quad M_{ii} = \lim_{\sigma_i \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_i - \sigma_i} G(P_i, P) d\varepsilon_i \quad (3.6.6)$$

Pour certains nombres d'ondes k' , le noyau de l'équation (3.6.2) devient singulier. Au contraire de géométries simples, comme la sphère ou le cylindre, il n'est pas possible ici d'exprimer analytiquement ces fréquences. Schenck (3.6.4) a montré que ces valeurs k' sont celles pour lesquelles le problème intérieur de Dirichlet (3.6.7) admet une solution non triviale.

$$\begin{cases} \Delta P_d(M) + k'^2 P_d(M) = 0 & \text{pour } M \in \Omega_i \\ P_d(M) = 0 & \text{pour } M \in \varepsilon \end{cases} \quad (3.6.7)$$

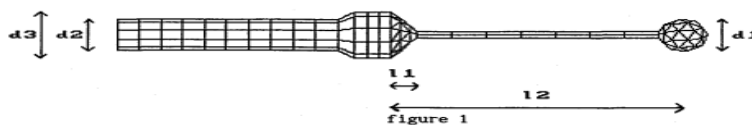
Pour remédier à ce problème, de la même façon que (3.6.3), des points à l'intérieur du solide sont utilisés pour surdéterminer le système. Cette technique bien adaptée pour les

premiers nombres d'ondes caractéristiques, sera moins satisfaisante au delà de 10 kHz. En effet, la densité plus grande de fréquences caractéristiques entraînera une surdétermination plus importante et donc un conditionnement du système de plus en plus délicat.

En outre, le faible rayon de la tige (figure 1) donne à la sonde un comportement semblable à celui de deux obstacles côte à côte (sphère + poignée). L'apparition de divergences au voisinage des nombres d'ondes caractéristiques dépendra alors de l'incidence de l'onde.

3.6.2 Diffraction par la sonde 3D

Le maillage de la sonde a été réalisé à l'aide de triangles, de trapèzes et de rectangles; L'utilisation de ces différentes formes a permis d'obtenir des mailles de surfaces comparables. La surface de la sphère est approximée par 55 triangles et 5 trapèzes assurant le raccordement avec la tige. Le maillage de la totalité de la sonde en 295 éléments (figure 1) est suffisant pour satisfaire les hypothèses dans la partie précédente.



La méthode présentée dans § I permet de calculer la pression diffractée à la surface de la sonde ainsi que la pression mesurée par chacun de six microphones.

Soient ρ_{mt} et ρ_{ms} , les pressions mesurées respectivement pour la sonde totale et pour la sphère seule. De la même façon, $\Delta\varphi_t$ et $\Delta\varphi_s$ représentent le déphasage entre deux microphones d'un même axe de mesure.

Les perturbations engendrées par la poignée sont alors représentées par les grandeurs K et φ :

$$K = 20 \log \frac{|P_{mt}|}{|P_{ms}|} \quad \varphi = \Delta\varphi_t - \Delta\varphi_s \quad (3.6.8)$$

L'évolution de φ avec l'incidence de l'onde montre que les ondes provenant de l'avant dans l'axe de la tige (figure 2) sont beaucoup plus perturbées que celles provenant de

l'arrière (figure 3). Le facteur K évolue de façon similaire avec des variations maximums de $\pm 2.5db$.

Cette évolution en fonction de l'incidence de l'onde est vérifiée expérimentalement (figure 4 et 5). Deux raisons expliquent l'écart entre les deux courbes de la figure 5:

- de multiples réflexions non maîtrisées entre la sonde et le haut-parleur,
- l'hypothèse de l'onde sphérique serait ici plus réaliste [14].

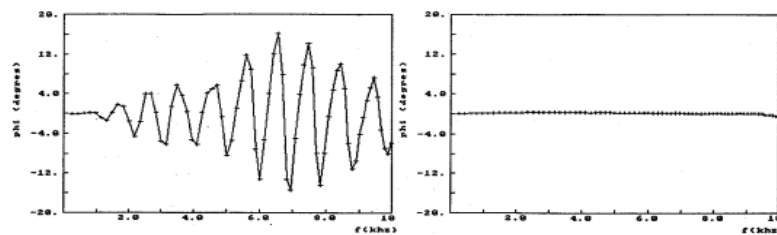
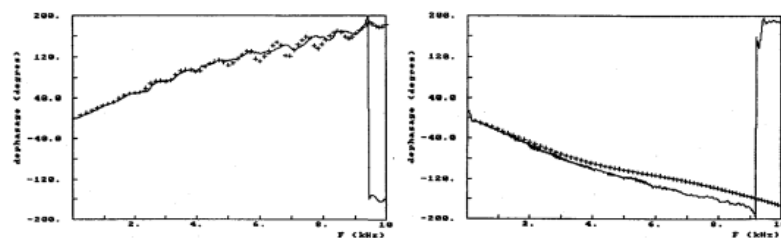


fig 2: forwards wave

fig 3: backwards wave

fig 4: forwards wave
++ theory, — experimentfig 5: backwards wave
++ theory, — experiment

3.7 Conclusion

Cette étude a permis d'analyser la propagation des ondes acoustiques en présence d'un obstacle, à travers l'équation de Helmholtz et les méthodes des équations intégrales. La fonction de Green et la théorie du potentiel ont joué un rôle essentiel dans la reformulation du problème et dans l'étude rigoureuse de l'existence et de l'unicité de la solution, sous des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann.

Cette approche a permis de simplifier le problème en le plaçant dans un cadre théorique plus accessible à l'analyse, notamment dans les domaines non bornés, où la condition de radiation de Sommerfeld prend toute son importance. Ces résultats offrent une base théorique solide pour la compréhension des phénomènes ondulatoires et ouvrent la voie à des applications futures dans divers domaines tels que la physique et l'ingénierie acoustique.

Bibliographie

- [1] **A. Munnier, B. Pinçon&K. Ramdani**, Méthodes d'équations intégrales pour les EDP. Application à l'étude des opérateurs de Laplace et de Helmholtz et domaine extérieur.
- [2] **Christophe Hazard&Marc Lenoir**. Modélisation et Résolution des problèmes de Diffraction, ENSTA Cours de EL340. Cours de Master de Recherche-Nancy-université.
- [3] **D. Colton&R. Kress**, Integral Equation Methods in scattering theory.Wile-Interscience Publication, New York 1983.
- [4] **R. Kress**, Linear Integral Equations, Second Edition, Springer, 1998.
- [5] **W. H : Wolfgang Hackbusch** : Integral Equations, Theory and Numerical treatment, Birkhäuser Verlag, Switzerland, International series of numerical mathematics; Vol. 120, 1995.
- [6] **M. A. Bahayou**, Sur le problème de Helmholtz, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. Vol. 65, 4, 2007.
- [7] **J.GIROIRE et J. C. NEDELEC**. Numerical solution of an extrior Neumann problem using a double layer potentiel.
- [8] **H.Bréziz**, Analyse fonctionnelle : Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.
- [9] **E.Becache**, Equations intégrales pour l'équation des ondes.

- [10] **Besma Berhail**, Equations intégrales dans un problème d'onde en acoustique. Cas bidimensionnel, Mémoire de Master, 2009.
- [11] **G. H Koopman, H Brenner** "method for computing the sound power of machines based on the Helmholtz integral" J.A.S.A (71) Janvier 1982.
- [12] **O Coste, J.C Patrat** "diffraction autour d'une sphère appliquée à une sonde intensimétrique 3D " 1^{er} Congrès Français d'Acoustique (895-898) Avril 1990.
- [13] **J Wasmer** "sonde pour l'analyse d'intensimétrie à 3 dimensions" 1^{er} Congrès Français d'Acoustique (927-930) Avril 1990.
- [14] **H.A Schenck** "improved integral formulation for acoustic radiation problems" J.A.S.A (44) (41-58) décembre 1967.
- [15] **O Coste, J.C Patrat** "scattering of a spherical wave applied to a 3D sound intensity probe" Congrès INTERNOISE Sydney Décembre 1991.

تتناول هذه المذكرة انتشار و حيود الموجات الصوتية في وسط متجانس يحتوي على حاجز تم نمذجتها بواسطة معادلة هيلمولتز مع شروط حدود ديركلي ونيومان اعتماد على طبيعة العائق. تركز الدراسة على تحليل وجود الحل وحدانيته باستخدام طريقة المعادلات التكاملية بما في ذلك معادلات فريدهولم من النوع الثاني، كما تعطى مفاهيم اساسية مثل دالة غرين ونظرية الامكانيات و شرط اشعاع سومرفيلد. تم تناول هذه الدراسة:

[4],[5],[7],[11],[12]

الكلمات المفتاحية: حيود الموجات الصوتية، معادلة هيلمولتز، المعادلات التكاملية، دالة غرين، نظرية الامكانيات.