الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات..
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématique et informatique

Filière : Mathématique

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique.

Thème

Nouveaux résultats d'existence de solution positive pour une classe d'équations différentielle fractionnaire non linéaires.

Présenté par: Zemouri Anfal

Devant le Jury :

Dr. Salim Adjmi	MAA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Président
Dr. Ouarda Saifia	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Amar Chidouh	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinateur

Année Universitaire 2021-2022

Dédicase

Je dédie ce fruit de mes effort à ceux qui ont beaucoup souffert pour me rendre joyeuse et heureuse, à ceux qui se sont sacrifiés pour me mettre sur la voie de connaissance et de savoir à:

Mon Cher grand –père et ma grande- mère.

Ma mère et mon père .

Pour leurs soutiens moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études, et qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

à mes frères **Souhaib** et **Mohamed** , à mon fiancé et à mes meilleurs amies que je souhaite à elles une bonne santé.

Enfin, Nous dédions également ce travail à ceux qui nous ont permis d'accéder à ce cher succès : mes professeurs à qui nous exprimons nos sincères reconnaissances et considérations.

Remerciements

Avant tout, je tiens à remercier Dieu le tout puissant, de m'avoir donné le courage et la patience pour pouvoir mener à terme ce travail.

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements au **Dr. Ouarda Safia** qui a été une directrice de mémoire exemplaire. Je la remercie donc pour sa patience ainsi que la rigueur de son suivi ainsi pour soutien constant le long de l'élaboration de ce projet. Je l'exprime ma profonde gratitude. Ce fut un plaisir de travailler avec elle.

Je remercie très chaleureusement **Dr. Chidouh Amar** et **Dr. Adjmi Salim** pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail et pour avoir accepter de participer au jury. Veuillez accepter l'expression de ma reconnaissance.

Merci à tous...

ملخص

من اللافت للنظر في السنوات الأخيرة أن مجال حساب التفاضل والتكامل الكسري يعتبر موضوعًا تدار حوله الكثير من الأبحاث من قبل العديد من علماء الرياضيات ، نظرًا لفعاليته في وصف الظواهر الفيزيائية مثل الريولوجيا ، واللزوجة المرنة ، والكيمياء الكهربية ،...، إلخ

في هذه العمل المتواضع ، نعطي مقدمة لحساب التفاضل والتكامل الكسري ثم ندرس مشكلة ابتدائية تحكمها معادلات تفاضلية كسرية. يعتمد تحليلنا على نظرية النقطة الصامدة وخاصة طريقة التحت و الفوق حل.

Abstract

It is remarkable in recent years that the field of fractional calculus has been the subject of much research by many mathematicians, because of its effectiveness in describing physical phenomena such as rheology, viscoelasticity, electrochemistry,... ,etc.

In this note, we give an introduction to fractional calculus then study a fractional problem and establish some existence results, while our analysis is based on the fixed point method and especially the method of upper un lower solutions based on the theorem of Schauder fixed point theorem.

Résumé

Il est remarquable ces dernières années que le domaine du calcul partiel ait fait l'objet de nombreuses recherches par de nombreux mathématiciens, du fait de son efficacité à décrire des phénomènes physiques tels que la rhéologie, la viscoélasticité, l'électrochimie,...,etc.

Dans ce mémoire, nous donnons une introduction au calcul fractionnaire puis étudions un problème fractionnaire et établir quelques résultats d'existence, alors que notre analyse est basée sur la méthode du point fixe et et spécialement la méthode des sous et sur solutions basé sur théorème du point fixe de Schauder.

Table des matières

1 Théorie de point fixe et exemple d'application **7**

1.1 Rappel et quelques notions sur la théoire de point fixe 7

1.2 Quelques resultats d'existence pour un problème aux limites 10

1.2.1 Fonction de Green associée à un problème periodique 10

1.2.2 Solutions positives non triviaux 12

2 Introduction au calcul fractionnaire **17**

2.1 Fonctions spéciales 17

2.1.1 Fonction Gamma 18

2.1.2 Fonction Bêta 19

2.1.3 Fonction de Mittag-Leffler 20

2.1.4 Transformée de Laplace 21

2.2 Introduction de l'intégrale d'ordre 1/2 23

2.3 Intégrale et dérivée fractionnaires 24

2.4 Intégrale et dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville 24

2.4.1 Intégrale fractionnaire 24

2.4.2 Dérivée fractionnaire 25

2.4.3 Transformée de Laplace des dérivées et intégrales de Riemann-Liouville 27

2.4.4 Compositions d'opérateurs fractionnaires 28

2.5 Dérivée fractionnaire de Caputo 31
2.5.1 Dérivée fractionnaire 31
2.5.2 Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo 32
2.6 Equations différentielles fractionnaires 34

3 Quelques resultats d'existence sur un problème fractionnaire 37

3.1 Existence de la solution positive 38
3.2 Unicité de La solution positive 45

Introdutioin

L'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse mathématique qui étudie la possibilité de définir des puissances non entières des opérateurs de dérivation et d'intégration. Ces dérivées ou intégrations fractionnaires entrent dans le cadre plus général des opérateurs pseudo-différentiels.

Par exemple, on peut se demander comment interpréter convenablement la racine carrée $\sqrt{D} = D^{\frac{1}{2}}$ de l'opérateur de dérivation, c'est-à-dire une expression d'un certain opérateur qui, lorsqu'elle est appliquée deux fois à une fonction, aura le même effet que la dérivation.

Plus généralement, on peut examiner le problème de définir D^{α} pour des valeurs réelles de α, de telle sorte que lorsque α prend une valeur entière n, on récupère la dérivation n-ième usuelle pour $n > 0$ et la meme chose pour l'intégration.

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons souligner quelques unes, à savoire l'approche de Riemann-Liouville et l'approche de Caputo.

Le but de ce travail est une initiation à l'étude de quelques problèmes fractionnaires alors que notre analyse est basé sur la théorie de point fixe pour établir nos résultats d'existence. Après des généralités, notre étude va s'articuler sur trois points. Tout d'abord, nous rappellons quelques théorèmes de point fixe après étudier un exemple d'application en appliquant les théorèmes de point fixe. Dans la 2ème partie, nous définissons les intégrales et dérivées fractionnaires, après avoir introduit tous les éléments nécessaires. Enfin, avant de conclure, on présente des théorèmes d'existence et unicité de quelques problèmes fractionnaires.

Chapitre 1

Théorie de point fixe et exemple d'application

1.1 Rappel et quelques notions sur la théoire de point fixe

Aujourd'hui la théorie du point fixe se rencontre pratiquement dans tous les domaines de la recherche en mathématiques et spécialement quand on étudie l'existence et l'unicité de la solution des équation différentielles. L'objectifs de notre travail est d'exposer cette méthode de point fixe et d'expliquer, par des exemples concrets, ses applications et illustrer quelques avantages d'appliquer le principe de l'application contractante et le théorème de point fixe de Schauder.

Définition 1.1.1. **(Point fixe)** Soit A une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe de A tout point y tel que $Au = y$. S'il existe un tel y on dit que A possède *un point fixe*, ce qui est équivalent à dire que l'équation $Ax - x = 0$ possède une solution.

Définition 1.1.2. Étant donnés deux espaces métriques (X,d) et (Y,ρ) et une application $A : X \to Y$. Alors

(i) A est *k-lipschitzienne* si $\forall y, v \in X, \rho(A(y), A(v)) \leq k.d(y, v)$,

(ii) si $k = 1$, A est dite *non-expansive*,

(iii) si $k < 1$, A est dite *contractante*,

(iv) A est *contractive* si $\forall y, v \in X, y \neq v, \rho(A(y), A(v)) < d(y, v)$.

On a les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} A \text{ contractante sur } X & \Rightarrow & A \text{ contractive sur } X \quad \Rightarrow \\ A \text{ non-expansive sur } X & \Rightarrow & A \text{ 1-lipschitzienne sur } X \quad \Rightarrow \\ A \text{ uniformément continue sur } X & \Rightarrow & A \text{ continue sur } X. \end{array}$$

Proposition 1.1.3

Soit (X, d) un espace métrique et soit A une application $A : X \to X$. Si A est contractive sur X, elle ne peut avoir qu'un seul point fixe.

Théorème 1.1.4

*(**Théorème du point fixe de Banach**) Soit X un espace métrique complet, soit S une partie fermée de X, et soit $A : S \to S$ une application contractante de constante $0 \leq k < 1$ telle que $A(S) \subset S$. On a :*

(i) *Existence et unicité : il existe $y \in S$ un point fixe unique de A, i.e., $A(y) = y$.*

(ii) *Algorithme de calcul : la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ de points de S telle que $y_{n+1} = A(y_n)$ et $y_0 \in X$ (choisi arbitrairement), avec $A^0 = Id_X, A^n = A \circ A \circ ... \circ A$ (itéré de A), et $y_{n+1} = A(y_0)$.*

(iii) *Estimations de l'erreur : $\forall n \geq 0$, on a :*

$(iii - 1)$ *Estimation a priori : $d(y_n, y) \leq \frac{k^n}{1-k} d(y_0, y_1)$.*

$(iii - 2)$ *Estimation a posteriori : $d(y_{n+1}, y) \leq \frac{k}{1-k} d(y_n, y)$.*

(iv) *Vitesse de convergence : $d(y_{n+1}, y) \leq k.d(y_n, y)$.*

Remarque 1.1.5. Ce résultat est parfois appelé *théorème de point fixe des contractions*, on trouve également dans la littérature : *théorème de Banach-Picard*, *théorème de Banach-Caccioppoli*,...

Remarque 1.1.6. Ce théorème représente en quelque sorte un *idéal* du point de vue de l'analyse numérique. En effet, on a l'existence et l'unicité et un algorithme de calcul stable qui donne la solution (unique). De plus, on dispose de deux majorations, a priori et a posteriori, de l'erreur et de la vitesse de convergence.

Théorème 1.1.7

(Schauder) *Soit X un espace de Banach, et M une partie non vide, convexe, bornée et fermée de X. Alors toute application compacte $M \to M$ admet un point fixe.*

Théorème 1.1.8

Soit X un espace normé, $\emptyset \neq M \subset X$ convexe et $V \subset X$ relativement compacte. Alors toute application continue $M \to V$ admet un point fixe.

Définition 1.1.9. Soit (E, d) un espace métrique. On dit que (E, d) est *précompact* (ou bien : *totalement borné*) si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des parties finies de E dont le diamètre est inférieur à ε. Une partie A de E sera dite *précompacte* dans (E, d) si le sous-espace métrique $(A, d_{A\times A})$ est précompact.

Définition 1.1.10. Soit (E, d) un espace métrique. Une partie A de E sera dite *relativement compacte* dans (E, d) si la fermeture $\bar{A}$ de A est compacte.

Proposition 1.1.11

Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique X. Alors :

(a) Si A est relativement compact, A est précompact.

(b) Si A est précompact et X est complet, A est relativement compact.

Théorème 1.1.12

(Ascoli-Arzelà) *Soit $X = C[a, b]$ $\infty < a < b < \infty$, muni de la norme $\|.\|_\infty$, $M \subset X$. Si M est*

(i) uniformément borné, i.e., $\exists r \geq 0$ tq $\|u\|_\infty \leq r \ \forall u \in M$,

(ii) équicontinu, i.e.,$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$|x - y| < \delta \text{ et } y \in M \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon,$$

alors M est totalement borné (précompact).

Définition 1.1.13. Soit X est un espace de Banach. un ensemble non vide convexe et fermé $P \subset X$ est appellé cône s'il satisfait les deux conditions suivantes :

(i) $x \in P$, $\lambda \geq 0$ implique $\lambda x \in P$.

(ii) $x \in P$, $-x \in P$ implique $x = 0$.

Théorème 1.1.14 (Théorème de Guo-Krasnoselskii)
[5]soit X un espace de Banach et $K \subset X$ un cône. Ω_1, Ω_2 sont deux ouvers de X avec $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.

Soit $T : K \cap (\overline{\Omega_2 \backslash}\, \Omega_1) \to K$ un opérateur complètement continu tel que :

(i) $Tu \nleq u$ for any $u \in K \cap \partial\Omega_1$ and $Tu \ngeq y$ for any $u \in K \cap \partial\Omega_2$,

ou bien

(ii) $Tu \ngeq u$ for any $u \in K \cap \partial\Omega_1$ and $Tu \nleq u$ for any $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors T possède un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2 \backslash}\, \Omega_1)$.

1.2 Quelques resultats d'existence pour un problème aux limites

1.2.1 Fonction de Green associée à un problème periodique

Considérons le problème périodique suivant :

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(t,y),\ 0 \le t \le 2\pi, \\ y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi). \end{cases} \tag{1.1}$$

où ω est une constante, si $\omega \neq 1,2,...$, alors la fonction de Green du problème (1.1) est donnée par

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\sin\omega(t-s)+\sin\omega(2\pi-t+s)}{2\omega(1-\cos 2\omega\pi)},\ 0 \le s \le t \le 2\pi, \\ \frac{\sin\omega(s-t)+\sin\omega(2\pi-s+t)}{2\omega(1-\cos 2\omega\pi)},\ 0 \le t \le s \le 2\pi. \end{cases} \tag{1.2}$$

La recherche de la solution de (1.1) revient à chercher un point fixe de l'opérateur suivant :

$$Ty(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s) f(s,y(s)) ds.$$

Nous montrons avec le principe de contraction de Banach l'unicité de la solution. Si f est *k-lipschitzienne*, alors (1.1) a une seule solution si $k < \frac{1}{\gamma}$ où

$$\gamma = \max_{0\leq t\leq 2\pi}\int_0^{2\pi} G(t,s)ds.$$

Soit

$$\widehat{G}(x) = \frac{\sin\omega x + \sin\omega(2\pi - x)}{2\omega(1-\cos 2\omega\pi)},\ x\in[0,2\pi].$$

Alors, $\widehat{G}$ est croissante sur $[0,\pi]$, décroissante sur $[\pi,2\pi]$ et $G(t,s) = \widehat{G}(|t-s|)$.

D'où

$$\frac{\sin 2\omega\pi}{2\omega(1-\cos 2\omega\pi)} = \widehat{G}(0) \leq G(t,s) \leq \widehat{G}(\pi) = \frac{\sin\omega\pi}{\omega(1-\cos 2\omega\pi)},\ t,s\in[0,2\pi].$$

De plus, $G(t,s)$ est positive sur $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ pour $0<\omega<1/2$ et lorsque la fonction de Green est positive, on peut toujours trouver son minimum N et maximum M.

Définissons un cône K comme suit

$$K = \left\{ y\in C[0,2\pi],\ \min_{0\leq t\leq 2\pi} y(t) \geq \frac{N}{M}\|y\| \right\}. \tag{1.3}$$

Ensuite, par le theorème1.1.14 du point fixe de Krasnoselskii, nous pouvons établir l'existence et la multiplicité des solutions positives. Cependant, si $\omega = 1/2$, alors la fonction de Green est nulle pour $t=s$. $N=0$ va nous empecher d'appliquer le theorème 1.1.14 sur le cône K défini par (1.3).

En résumé, dans le cas où la fonction de Green associée au problème posé est zéro sur un ensemble de mesure nulle, on peut pas travailler sur le cône standard K.

Après cette petite introduction pour étudier le problème (1.1). Nous allons presenter le travail de R. Greaf et al comme un exemple.

Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} y'' + R(t)y = g(t)f(y),\ 0\leq t\leq 2\pi, \\ y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi). \end{cases} \tag{1.4}$$

Sans l'hypothèse que la fonction de Green associée au problème ci-dessus est strictement positive (nonnégative), nous ne demandons que

$$\beta = \min_{0\leq s\leq 2\pi} \int_0^{2\pi} G(t,s)dt > 0. \tag{1.5}$$

De cette derniere. On définit alos un cône E sur lequel appliquer le theorème 1.1.14 pour prouver l'existence de solutions positives du problème (1.4).

$$E = \left\{ y \in C[0,2\pi],\ y(t) \geq 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} y(t)dt \geq \frac{\beta}{M} \|y\| \right\} \tag{1.6}$$

où

$$M = \max_{0\leq s\leq 2\pi, 0\leq t\leq 2\pi} |G(t,s)|.$$

1.2.2 Solutions positives non triviaux

Les hypothèses utilisées pour établir l'existence de solutions sont les suivantes :

$(H1)$ $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est continue,

$(H2)$ $g :[0,1] \to [0,\infty)$ est continue et $\eta = \min_{0\leq t\leq 2\pi} g(t) > 0$,

$(H3)$ $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est convexe et non décroissante.

Nous introduisons la notation suivante :

$$f_0 = \lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} \text{ et } f_\infty = \lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y}$$

Théorème 1.2.1

Supposons que $(H1)$ et $(H2)$ sont vérifiées, alors si :

(a) $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$,.

ou bien

(b) $f_0 = 0$, $f_\infty = \infty$ et $(H3)$ est vérifiée.

Alors (1.4) a au moins une solution positive non triviale $y(t) \geq 0$.

La démonstration est basée sur le théorème du point fixe de Guo-Krasnoselskii 1.1.14 dans le cône E qu'on a définit par (1.6).

Lemme 1.2.2

$T : E \to E$ est stable.

Démonstration. Soit $y \in E$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} Ty(t)dt &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t,s)g(s)f(y(s))dsdt \\ &= \int_0^{2\pi} g(s)f(y(s))\int_0^{2\pi} G(t,s)dtds\end{aligned}$$

Alors, de (1.5), on voit que

$$\int_0^{2\pi} Ty(t)dt \geq \beta \int_0^{2\pi} g(s)f(y(s))ds.$$

D'autre part,

$$Ty(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s)g(s)f(y(s))ds \leq M\int_0^{2\pi} g(s)f(y(s))ds \text{ pour tout } t \in [0,2\pi]$$

D'où

$$\int_0^{2\pi} Ty(t)dt \geq \frac{\beta}{M}\|Ty\|.$$

Par conséquent $Ty \in E$. □

Lorsque f est continue, nous pouvons définir la fonction f^* comme suit

$$f^*(y) = \max_{0\leq z\leq y}\{f(z)\}.$$

Lemme 1.2.3 ([6])
Si f est continue. Alors $f_0^* = f_0$ et $f_\infty^* = f_\infty$.

Preuve de Theorème 1.2.1. A l'aide du Théorème de Ascoli Arzela, nous prouvons que T est un opérateur compact.

Nous noterons

$$\Omega_r = \{y \in C[0,2\pi],\ \|y\| \leq r\}.$$

Partie (a). D'après que $f_0 = \infty$,nous pouvons choisir $r_1 > 0$ suffisamment petit pour que

$$f(y) \geq \theta y \text{ pour } y \leq r_1$$

où θ satisfait $\beta^2\eta\theta/(2M\pi) > 1$ avec η défini dans $(H2)$.Nous montrons maintenant que $Ty \nleq y$ pour tout $y \in K \cap \partial\Omega_1$.

En effet, s'il existe $y_1 \in \partial\Omega_1$ tel que $Ty_1 \leq y_1$, alors de (1.5) et la définition de η, on a

$$\begin{aligned}
\|y_1\| &\geq \|Ty_1\| \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Ty_1(t)dt \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(s)f(y_1(s))\int_0^{2\pi} G(t,s)dtds \\
&\geq \frac{\beta\eta}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y_1(s))ds \\
&\geq \frac{\beta\eta\theta}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_1(s)ds \\
&\geq \frac{\beta\eta\theta}{2\pi}\frac{\beta}{M}\|y_1\| \\
&\geq \frac{\beta^2\eta\theta}{2\pi M}\|y_1\| > r_1.
\end{aligned}$$

D'où la contradiction.

Lorsque $f_\infty = 0$, on a d'après le Lemme 1.2.3 que $\lim_{y\to\infty} f^*(y)/y = 0$. Par conséquent, il existe $r_2 \in (r_1, \infty)$ tel que

$$f^*(r_2) < \frac{r_2}{2\pi M\|g\|}.$$

Nous prouvons que $Tu \not\geq y$ pour tout $y \in K \cap \partial\Omega_2$. S'il existe $y_2 \in \partial\Omega_2$ tel que $Tu_2 \geq y_2$, alors

$$\|y_2\| \leq \|Ty_2\| \leq 2\pi M\|g\| f^*(r_2) < r_2$$

d'où la contradiction. De la première partie du Theorème 1.1.14, T a au minimum un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2 \setminus} \Omega_1)$. Il est evident que $y(t) \geq 0$ est une solution non triviale de (1.4).

Partie (b). Lorsque $f_\infty = \infty$, nous pouvons choisir $r_2 > 0$ suffisamment grand pour que

$$f\left(\frac{\beta}{M}r_2\right) \geq \frac{\beta\theta}{M}r_2,$$

où θ satisfait $\beta^2\eta\theta/(2M\pi) > 1$.

Nous montrons que $Ty \not\leq y$ pour tout $y \in K \cap \partial\Omega_2$. S'il existe $y_2 \in \partial\Omega_2$ tel que $Ty_2 \leq y_2$, alors

$$\begin{aligned}
\|y_2\| &\geq \|Ty_2\| \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Ty_2(t)dt \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(s)f(y_2(s))\int_0^{2\pi} G(t,s)dtds \\
&\geq \frac{\beta\eta}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y_2(s))ds
\end{aligned}$$

Par conséquent, compte tenu de $(H3)$ et de l'inégalité de Jensen, nous avons

$$\begin{aligned}
\|y_2\| &\geq \frac{\beta\eta}{2\pi} f\left(\int_0^{2\pi} y_2(s)ds\right) \\
&\geq \frac{\beta\eta}{2\pi} f\left(\frac{\beta}{M}\|y_2\|\right) \\
&\geq \frac{\beta\eta}{2\pi} f\left(\frac{\beta}{M} r_2\right) \\
&\geq \frac{\beta^2\eta\theta}{2\pi M} r_2 > r_2.
\end{aligned}$$

D'où la contradiction.

Lorsque $f_0 = 0$, le Lemme (1.2.3) implique $\lim_{y\to 0} f^*(y)/y = 0$. Alors, il existe $r_1 \in (0, r_2)$ tel que

$$f^*(r_1) < \frac{r_1}{2\pi M\|g\|}$$

.

Nous montrons que $Ty \not\geq y$ pour tout $y \in K \cap \partial\Omega_1$. S'il existe $y_1 \in \partial\Omega_1$ tel que $Ty_1 \geq y_1$, alors

$$\|y_1\| \leq \|Ty_1\| = 2\pi M\|g\| f^*(r_1) < r_1.$$

d'où la contradiction. De la deuxième partie du Theorème 1.1.14, T a au minimum un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2 \setminus \Omega_1})$. Il est evident que $y(t) \geq 0$ est une solution non triviale de (1.4).

En resumé, si les hypothèses $(H1)$, $(H2)$ et $(H3)$ sont vérifiées, alors (1.4) a au moins une solution positive non triviale $y(t) \geq 0$. □

Exemple 1.2.4. Considérons le problème aux limites (1.1) où $0 < \omega \leq 1/2$, g est une fonction positive continue sur $[0, 2\pi]$, quelconque et $f(y) = y^\alpha$ avec $\alpha \in (0,1) \cup (1, \infty)$.

Nous affirmons que (1.1) a une solution non triviale $y(t) \geq 0$.

Dans ce cas,

$$\beta = \frac{2\sin^2 \omega\pi}{\omega^2(1-\cos 2\pi\omega)} > 0$$

Avec le choix ci-dessus de fonctions f et g, on voit que $(H1)$ et $(H2)$ sont satisfaites, et de plus $(H3)$ est vérifiée si $\alpha \in (1,\infty)$.

On peut voir que

$f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$ si $\alpha \in (0,1)$. De la partie (a) de Theorème 1.2.1, (1.1) a une solution non triviale $y(t) \geq 0$.

Et

$f_0 = 0$ et $f_\infty = \infty$ si $\alpha \in (1,\infty)$. De la partie (b) de Theorème 1.2.1, (1.1) a une solution non triviale $y(t) \geq 0$.

Chapitre 2

Introduction au calcul fractionnaire

La dérivation numérique d'ordre fractionnaire remonte à diverses correspondances entre Leibniz, Guillaume de l'Hospital et Johann Bernoulli à la fin du 17ème siècle. Mais ces grands pionniers se sont heurtés à un paradoxe. On pourrait penser que cette recherche de dérivation fractionnaire est une question de mathématiques "pures" sans intérêt pour l'ingénieur. Par contre, on voit bien à travers un exemple l'introduction naturelle d'une intégrale d'ordre un-demi.

Plusieurs mathématiciens ont contribué à l'élaboration de la théorie de la dérivation d'ordres non entiers et différentes définitions de l'opérateur fractionnaire ont vu le jour. Les plus familières sont celles de Caputo, de Grünwald-Letnikov et de Riemann-Liouville. Pour la compréhension de cet opérateur, il est impératif de définir quelques fonctions et notions de base.

2.1 Fonctions spéciales

L'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler. Son interprétation est simplement la généralisation de la factorielle de n ($n!$) car elle permet à n de prendre des valeurs non entières et même complexes.

2.1.1 Fonction Gamma

Définition :

La fonction Gamma pour un nombre complexe z de partie réelle strictement positive est donnée par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0),$$

Voici quelques propriétés intéressantes de la fonction gamma.

Propriétés :

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, Re $z > 0$
2. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$ car $\Gamma(1) = 1$

La première propriété vient de l'intégration par partie de la fonction Gamma. En effet,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} = \lim_{A \to \infty} \left[-t^z e^{-t}\right]_0^A + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

Pour la deuxième, il suffit de remarquer que pour $z = 1$, $\Gamma(1)$ vaut 1 et d'utiliser la première propriété pour les $n > 0$

Représentation limite :

La fonction gamma se présente aussi sous forme de limite

$$\Gamma(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \mathrm{Re}\, z > 0.$$

On introduit, pour la démonstration de cette formule, la fonction auxiliaire

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) t^{z-1} dt. \tag{2.1}$$

On substitue t/n par τ puis on répète l'intégration par parties pour avoir

$$\begin{aligned} f_n(z) &= n^z \int_0^n (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau \\ &= \frac{n^z}{z} n \int_0^n (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^n \tau^{z+n-1} d\tau \\ &= \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)}. \end{aligned}$$

La limite de la fonction f_n comme définie dans (2.1) donne bien la fonction Gamma.

2.1.2 Fonction Bêta

Pour alléger l'écriture de plusieurs fonctions, il est plus commode d'utiliser une fonction nommé Bêta qu'une combinaison de valeurs de la fonction Gamma.

Définition :

La fonction Bêta est définie pour deux variables complexes de parties réelles positives comme suit

$$B(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau, \quad (\text{Re } z > 0, \text{Re } w > 0).$$

Propriétés :

Pour des variables z et w à parties réelles non négatives on a les relations suivantes :

1. $B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$.
2. La symétrie : $B(z,w) = B(w,z)$.

En effet, afin d'établir une relation entre la fonction Bêta et la fonction Gamma nous introduisons la fonction h

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau,$$

ainsi que sa transformée de Laplace H. Comme h est une convolution de deux fonctions t^{z-1} et t^{w-1}, H n'est autre que le produit des transformées des deux.

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \cdot \frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}},$$

Il est possible d'obtenir la fonction d'origine h par la transformée inverse de Laplace de H car $\Gamma(z)\Gamma(w)$ est une constante. D'une part l'unicité de l'inverse donne

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w-1},$$

et comme $h_{z,w}(1) = B(z,w)$, alors on aboutit à

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

De cette dernière relation, on déduit que

$$B(z,w) = B(w,z).$$

Représentation intégrale :

Elle peut prendre aussi les formes intégrales pour $x,y \in \mathbb{R}$

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta,$$

et

$$B(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt.$$

Elle satisfait des équations fonctionnelles telles que :

$$\begin{aligned}
&B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y),\\
&B(x,y)\cdot B(x+y,1-y) = \frac{\pi}{x\sin(\pi y)},\\
&B(x,x) = 2^{1-2x}B(\frac{1}{2},x).
\end{aligned}$$

Il existe d'autres fonctions spéciales [3] connues et utilisées dans le calcul fractionnaire comme celle de Mittag-Leffler qui a le même rôle que l'exponentielle dans les équations différentielles.

2.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition :

La fonction Mittag-Leffler généralise la fonction exponentielle comme suit ([3])

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Propriétés :

Cette fonction a été introduite par G. M. Mittag-Leffler [3] et étudiée aussi par A. Wiman [3]. Les deux paramètres de cette fonction jouent un rôle important dans le calcul fractionnaire. Elle a de nombreuses propriétés et relations avec d'autres fonctions. Nous citons entre autres

1. $E_{1,1}(z) = e^z$,
2. $E_{1,2}(z) = \frac{e^z-1}{z}$,
3. $E_{1,3}(z) = \frac{e^z-1-z}{z}$,
4. Et en général
$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{z=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}, \quad m \geq 2$$
5. $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$,
6. $E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh z}{z}$,

On vérifie rapidement que les propriétés précédentes sont vraies car

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z-1}{z} \\
E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z-1-z}{z} \\
E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \\
E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = (\sinh z)/z
\end{aligned}$$

Pour $\beta = 1$ on retrouve la fonction Mittag-Leffler à un paramètre

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} := E_\alpha(z), \quad (\alpha > 0).$$

2.1.4 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil très simple d'emploi pour résoudre les problèmes d'évolution (équations différentielles, équations aux dérivée partielles, équations intégrales). Par cette tansformée, les équations différentielles deviennent des équations algébriques, tandis que les équations aux dérivées partielles se transforment en des équations différentielles. Il en résulte une simplification effecace des problèmes qui permet souvent leur résolution analytique.

On rappelle qu'une fonction f définie sur $(0,\infty)$ est dite "d'ordre exponentielle a" s'il existe des constantes M et T telles que

$$e^{-at}|f(t)| \leq M, \quad \forall t \in (0,\infty).$$

Si f est de plus intégrable alors sa transformée $(\mathcal{L}f)(t)$ nommée *transformée de Laplace* existe pour tout s de partie réelle supérieure strictement à a

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

On aura l'occasion d'écrire la transformée inverse unique de Laplace d'une fonction F lors de la résolution des EDF.

Notation 2.1.1.

$$F(s) := (\mathcal{L}f)(s), \quad G(s) := (\mathcal{L}g)(s).$$

On cite, sans démonstration, quelques propriétés élémentaires connues et simples à vérifiées.

Propriétés :

Linéarité : $(\mathcal{L}(c_1 f + c_2 g)(s) = c_1 F(s) + c_2 G(s), \quad \mathrm{Re}\, s > a.$

$\left(\mathcal{L}(e^{\lambda t}\right)(s) = \dfrac{1}{s-\lambda}, \quad \mathrm{Re}\, s > a.$

Translation : $\mathcal{L}\left(e^{at} f\right)(s) = F(s-a), \quad \mathrm{Re}\,(s-\lambda) > a.$

Dérivation : $\mathcal{L}\left(f'\right)(s) = sF(s) - f(0+), \quad \mathrm{Re}\, s > a.$

$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+), \quad \mathrm{Re}\, s > a.$

Intégration : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)(s) = F(s)/s, \quad \mathrm{Re}\, s > a.$

$\mathcal{L}\left(t^\mu\right)(s) = \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}}, \quad \mu > -1.$

$\mathcal{L}\left(\cos \lambda t\right)(s) = \dfrac{s}{s^2+\lambda^2}. \quad \mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\,(-i\lambda)$

$\mathcal{L}\left(\sin \lambda t\right)(s) = \dfrac{a}{s^2+\lambda^2}. \quad \mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\,(-i\lambda)$

$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t-u)g(u)du\right)(s) = F(s)G(s), \quad \mathrm{Re}\, s > a.$

$\mathcal{L}\left(t^n f\right)(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad \mathrm{Re}\, s > a.$

$\mathcal{L}\left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha\right)(s) = \dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad |s^{-\alpha}\lambda| < 1.$

2.2 Introduction de l'intégrale d'ordre 1/2

On se donne l'intervalle $[0,+\infty[$ pour la variable d'espace x. On suppose la variable t positive et on se donne une constante de diffusion μ strictement positive et une fonction $f(t)$ qui pour cet exemple ne dépend que du temps. On cherche une solution $u(x,t)$ solution du problème de la chaleur suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(t), \quad t > 0, \quad x \geq 0, \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \to 0, \text{ quand } x \to +\infty. \tag{2.4}$$

Les ingénieurs sont intéressés principalement par le flux de la chaleur $\Phi(t)$ à la paroi, donné par la loi de Fourier :

$$\Phi(t) = -\mu\frac{\partial u}{\partial x}(0,t), \quad t > 0, (\mu \text{ étant un paramètre strictement positif})$$

Le problème précédent se résout à l'aide de la transformée de Fourier en temps. Notons par $\widehat{u}(x,w)$ la transformée de Fourier de $u(x,t)$ par rapport à t :

$$\widehat{u}(x,w) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-iwt}dt,$$

ou encore u est la transformée inverse de $\widehat{u}$ donnée par

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(x,w)e^{iwt}dw.$$

Il s'ensuit que la dérivée par rapport au temps de u est

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} iw\widehat{u}(x,w)e^{-iwt}dw.$$

La transformée de Fourier de la **dérivée** en temps s'obtient en **multipliant** la transformée de Fourier par l'expression $\boldsymbol{iw}$, ce qui donne

$$\frac{\widehat{\partial u}}{\partial t} = iw\widehat{u}. \tag{2.5}$$

Soit $\widehat{f}$ la transformée du second membre. L'équation (2) du problème devient simplement :

$$iw\widehat{u} - \mu\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x^2} = \widehat{f}.$$

Notons aussi $\sqrt{z}$ la détermination principale de la racine carrée, d'un nombre complexe de partie réelle positive. Re $\sqrt{z}$ étant positive alors la solution de l'équation (2) est

$$\widehat{u} = \frac{1}{iw}\widehat{f} + \alpha exp\left(\sqrt{\frac{iw}{\mu}}x\right) + \beta exp\left(-\sqrt{\frac{iw}{\mu}}x\right).$$

Les conditions (3) et (4) nécessitent que $\alpha = 0$ et que $\beta = -1$, on en déduit que

$$\widehat{u}(x,w) = \frac{1}{iw}\widehat{f}\left[1 - exp\left(-\sqrt{\frac{iw}{\mu}}x\right)\right].$$

La dérivée de cette expression par rapport à x à la paroi (i.e. : $x = 0$) vaut

$$\widehat{\Phi}(w) = -\sqrt{\frac{\mu}{iw}}\widehat{f}. \tag{2.6}$$

La quantité (6) comparée à (5) peut être interprétée comme la transformée d'une **intégrale d'ordre un-demi** de la fonction f à cause de la **multiplication** par $\boldsymbol{(iw)^{-1/2}}$.

2.3 Intégrale et dérivée fractionnaires

2.4 Intégrale et dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville

On définira dans cette section les intégrales et dérivées fractionnelles dans un intervalle fini.

2.4.1 Intégrale fractionnaire

Définition :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, Re $\alpha > 0$ et $f \in L_p(a,b)$. Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ notée I^{α}_{a+} et I^{α}_{b-} sont définies par

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a)$$

et

$$(I^{\alpha}_{b-}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b).$$

I^{α}_{a+} (respectivement I^{α}_{b-}) est dite intégrale fractionnaire d'ordre α de f de borne inférieure a (respectivement de borne supérieure b).

Remarque 2.4.1. *Quand $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, les intégrales précédentes coincident avec les intégrales $n^{\text{ièmes}}$ de la forme :*

$$\begin{aligned}(I^n_{a+}f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(I^n_{b-}f)(x) &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^{b} dt_2 \ldots \int_{t_{n-1}}^{b} f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)dt\end{aligned}$$

2.4.2 Dérivée fractionnaire

Définition :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, Re $\alpha \geq 0$ et soit $n = [\text{Re}\,\alpha] + 1$, $[x]$ désigne la partie entière de x. Les dérivées de borne inférieure et supérieure d'ordre α sont données par :

$$(D^\alpha_{a+}f)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a+}f)(x) \quad (x > a)$$

$$(D^\alpha_{b-}f)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{b-}f)(x) \quad (x < b).$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ alors

$$\begin{aligned}(D^0_{a+}f)(x) &= (D^0_{b-}f)(x) = f(x); \\ (D^n_{a+}f)(x) &= f^{(n)}(x) = (D^n f)(x); \\ (D^n_{b-}f)(x) &= (-1)^n f^{(n)}(x); \quad (n \in \mathbb{N}),\end{aligned}$$

où $f^{(n)}(x)$ désigne la dérivée $\text{n}^{\text{ième}}$ ordinaire de $f(x)$.

Si par contre α est un nombre complexe pur, alors Re $\alpha = 0$ et $\alpha = i\theta$ tel que θ parcourt $\mathbb{R}^*$

$$(D^{i\theta}_{a+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{i\theta}} \quad (x > a)$$

$$(D^{i\theta}_{b-}f)(x) := \frac{-1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{i\theta}} \quad (x < b)$$

Après ces définitions voici quelques propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Propriétés :

Si α et $\beta \in \mathbb{C}$ tel que Re $\beta > 0$ alors

1. $(I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1} \quad (\text{Re}\,\alpha > 0)\,;$
2. $(D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (\text{Re}\,\alpha \geq 0)\,;$
3. $(I^{\alpha}_{b-}(b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1} \quad (\text{Re}\,\alpha > 0)\,;$
4. $(D^{\alpha}_{b-}(b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1} \quad (\text{Re}\,\alpha \geq 0).$

Les quatre premières propriétés se démontrent de la même manière. On se contentera donc de vérifier la $2^{\text{ième}}$ pour $a = 0$, puis on citera dans le corollaire un résultat direct de celle-ci.

$$\begin{aligned}
(D^{\alpha}_{0+}t^{\beta-1})(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{t^{\beta-1}dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{n-1-\alpha+\beta}\int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{n-\alpha-1} \\
&= \frac{B(\beta, n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{n-1-\alpha+\beta} \\
(D^{\alpha}_{0+}t^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+n)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{n-1+\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

On a utilisé, pour cette démonstration, le changement de variable suivant $t = xz$ et pour les autres on a utilisé le changement de variable $t - a = z(x-a)$.

Remarque 2.4.2. *On note que les dérivées* $(D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta-1})$ *et* $(D^{\alpha}_{b-}(b-t)^{\beta-1})$ *s'annulent si* $\alpha - \beta \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. *Ceci est dû au fait que* $\frac{1}{\Gamma(-p)} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.4.3. *On peut vérifier que la dérivée fractionnaire d'une constante n'est pas nulle, en général, et on a exactement pour* $0 <$ *Re* $\alpha < 1$

$$(D^{\alpha}_{a+}1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}; (D^{\alpha}_{b-}1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

On remarque aussi que $(D^{\alpha}_{a+}t^{\alpha-m})(x) = \frac{\Gamma(\alpha-m+1)}{\Gamma(n-m+1)}(x^{n-m})^{(n)}$ est nulle pour des constantes $m \in \{1, 2, \ldots, [\text{Re}\,\alpha]+1\}$. Ceci est vrai aussi pour $(D^{\alpha}_{b-}t^{\alpha-m})(x)$, d'où les résultats suivants :

Proposition 2.4.1. Soit Re $\alpha > 0$ avec $n = [\text{Re}\,\alpha] + 1$, l'équation $(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = 0$ a une famille de solutions $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x-a)^{\alpha-j}$ avec $c_j \in \mathbb{R} \quad (j = 1, \ldots, n)$ des constantes arbitraires. En particulier, si $0 <$ Re $\alpha \leq 1$ alors la solution de l'équation précédente est $c_1(x-a)^{\alpha-1}$.

Proposition 2.4.2. Soit Re $\alpha > 0$ avec $n = [\text{Re } \alpha] + 1$, l'équation $(D^{\alpha}_{b-}f)(x) = 0$ a une famille de solutions $f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j(b-x)^{\alpha-j}$ avec $d_j \in \mathbb{R} \quad (j = 1, \dots, n)$ des constantes arbitraires. En particulier, si $0 < \text{Re } \alpha \leq 1$ alors la solution de l'équation précédente est $d_1(b-x)^{\alpha-1}$.

Nous notons que les deux équations énoncées dans les deux dernières assertions sont des exemples d'**équations différentielles fractionnaires** simples.

2.4.3 Transformée de Laplace des dérivées et intégrales de Riemann-Liouville

On a vu que l'une des propriétés de la transformée de Laplace est qu'elle transforme le produit de convolution, et en particulier l'intégrale et la dérivée fractionnaire, en un produit de transformées. L'assertion suivante introduit la transformée de Laplace pour l'intégrale et la dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville, voir [4].

On rappelle tout d'abord la définition d'une fonction absolûment continue.

Définition 2.4.1. *On appelle ensemble de fonctions absolûment continues qu'on notera $AC[a,b]$ l'ensemble des primitives de fonctions sommables de $L_1(a,b)$, i.e.*

$$f \in AC[a,b] \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \exists \phi \in L(a,b) : f(x) = c + \int_a^x \phi(t)dt, \quad \forall x \in [a,b]$$

et on définira $AC^n[a,b]$ l'ensemble des fonctions f continues à dérivées continues jusqu'à l'ordre $n-1$ telles que $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$

$$AC^n[a,b] = \left\{ f \in C^{n-1}[a,b] : D^{n-1}f \in AC[a,b] \right\}.$$

Proposition 2.4.3. Si $f \in AC^n[a,b]$, f s'écrit sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$$

Lemme 2.4.1. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$: Re $\alpha > 0$ et $f \in L_1(0,b)$ pour $b > 0$. Soit aussi l'estimation

$$|f(x)| \leq Ae^{p_0 x} \ (0 < x < b), \quad \text{pour Re } s > p_0$$

valable, pour des constantes $A > 0$ et $p_0 > 0$, alors

$$(\mathcal{L}I^{\alpha}_{0+}f)(s) = s^{-\alpha}F(s)$$

Lemme 2.4.2. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$: Re $\alpha > 0$ et $f \in AC^n[0,b]$, pour $b > 0$. Soit aussi l'estimation

$$|f(x)| \leq Be^{q_0 x} \ (0 < x < b)$$

valable, pour des constantes $B > 0$ et $q_0 > 0$, alors

$$(\mathcal{L}D^{\alpha}_{0+}f)(s) = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k (D^{\alpha-k-1}_{0+}f)(0+), \quad \text{pour Re } s > p_0$$

2.4.4 Compositions d'opérateurs fractionnaires

La propriété du semi-groupe des opérateurs d'intégration fractionnaire découle des résultats suivants développés par Samko et al. voir [4].

Lemme 2.4.3. Si Re $\alpha > 0$ et Re $\beta > 0$, alors les identités suivantes

$$(I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{a+}f)(x) \text{ et } (I^{\alpha}_{b-}I^{\beta}_{b-}f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{b-}f)(x) \tag{2.7}$$

sont satisfaites presque partout dans $[a,b]$, pour $f \in L_p(a,b) \quad (1 \leq p \leq \infty)$. En outre, si $\alpha + \beta > 1$, alors les relations précédentes (2.7) sont vraies pour tout point de $[a,b]$.

L'assertion suivante montre que l'opérateur de dérivation fractionnaire est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

Lemme 2.4.4. Si Re $\alpha > 0$ et $f \in L_p(a,b)$, alors on a

$$(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = f(x) \text{ et } (D^{\alpha}_{b-}I^{\alpha}_{b-}f)(x) = f(x).$$

Par composition avec un opérateur d'intégration fractionnaire on trouve facilement les relations suivantes :

Proposition 2.4.4. Si Re $\alpha >$ Re $\beta > 0$, alors pour $f \in L_p(a,b)$

$$(D^{\beta}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = (I^{\alpha-\beta}_{a+}f)(x) \text{ et } (D^{\beta}_{b-}I^{\alpha}_{b-}f)(x) = (I^{\alpha-\beta}_{b-}f)(x).$$

Particulièrement, pour $\beta = k \in \mathbb{N}$ et Re $\alpha > k = \alpha$, on a

$$(D^k I^{\alpha}_{a+}f)(x) = (I^{\alpha-k}_{a+}f)(x) \text{ et } (D^k I^{\alpha}_{b-}f)(x) = (-1)^k (I^{\alpha-k}_{b-}f)(x).$$

Proposition 2.4.5. Soient α tel que Re $\alpha \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}$. Si les dérivées fractionnaires $(D^{\alpha}_{a+}f)(x)$ (respectivement $(D^{\alpha}_{b-}f)(x)$) et $(D^{\alpha+m}_{a+}f)(x)$ (respectivement $(D^{\alpha+m}_{b-}f)(x)$) existent, alors

$$(D^m D^{\alpha}_{a+}f)(x) = (D^{\alpha+m}_{a+}f)(x),$$

(respectivement

$$(D^m D^\alpha_{b-} f)(x) = (-1)^m (D^{\alpha+m}_{b-} f)(x)).$$

Pour présenter d'autres propriétés on a besoin de définir les espaces de fonctions $I^\alpha_{a+}(L_p)$ et $I^\alpha_{b-}(L_p)$ pour garantir l'existence des fonctions $D^\alpha_{a+} f$ et $D^\alpha_{b-} f$.

Définition 2.4.2. *Les espaces de fonctions $I^\alpha_{a+}(L_p)$ et $I^\alpha_{b-}(L_p)$ sont définis par*

$$I^\alpha_{a+}(L_p) := \{f : \exists \phi \in L_p(a,b), f = I^\alpha_{a+}\phi\}$$

et

$$I^\alpha_{b-}(L_p) := \{f : \exists \psi \in L_p(a,b), f = I^\alpha_{b-}\psi\}$$

respectivement.

La composition de l'opérateur I^α_{a+} avec l'opérateur D^α_{a+} est donnée par le résultat suivant

Proposition 2.4.6. Si Re $\alpha > 0$ et $f \in I^\alpha_{a+}(L_p)$, alors $(I^\alpha_{a+} D^\alpha_{a+} f)(x) = f(x)$

Proposition 2.4.7. Soient Re $\alpha > 0$, $n = [\text{Re}\,\alpha] + 1$ et $f_{n-\alpha}(x) = (I^{n-\alpha}_{a+} f)(x)$ l'intégrale fractionnaire d'ordre $n-\alpha$. Si $f(x) \in L_1(a,b)$ et $f_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a,b]$, alors on a la relation suivante

$$(I^\alpha_{a+} D^\alpha_{a+} f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(n-j)}_{n-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}$$

Des deux dernières propositions on aboutit à la propriété suivante.

Proposition 2.4.8. Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $n = [\alpha] + 1$, $m = [\beta] + 1$ et $\alpha + \beta < n$ et soient $f \in L_1(a,b)$ et $f_{m-\alpha} \in AC^m[a,b]$. Alors on a la relation suivante :

$$(D^\alpha_{a+} D^\beta_{a+} f)(x) = (D^{\alpha+\beta}_{a+} f)(x) - \sum_{j=1}^{m} (D^{\beta-j}_{a+} f)(a+) \frac{(x-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}.$$

Preuve 1. *Comme $n > \alpha + \beta$, alors on utilise le lemme 2.4.3 pour avoir*

$$(D^\alpha_{a+} D^\beta_{a+} f)(x) = D^n (I^{n-\alpha}_{a+} D^\beta_{a+} f)(x) = D^n (I^{n-\alpha-\beta}_{a+} [I^\beta_{a+} D^\beta_{a+} f])(x).$$

Sachant que $f \in L_1(a,b)$ et $f_{m-\alpha} \in AC^m[a,b]$, on utilise le lemme 2.4.4 tout en substituant

α par β pour trouver

$$\begin{aligned}
(D^{\alpha}_{a+}D^{\beta}_{a+}f)(x) &= D^{n}(I^{n-\alpha-\beta}_{a+}[f-\sum_{j=1}^{m}(D^{m-j}[I^{m-\beta}_{a+}f])(a+)\frac{(x-a)^{\beta-j}}{\Gamma(1+\beta-j)}])(x)\\
&= (D^{\alpha+\beta}_{a+}f)(x)-\sum_{j=1}^{m}(D^{n}[I^{n-\alpha-\beta}_{a+}(D^{\beta-j}_{a+}f)(a+)\frac{(x-a)^{\beta-j}}{\Gamma(1+\beta-j)}])(x)\\
&= (D^{\alpha+\beta}_{a+}f)(x)-\sum_{j=1}^{m}(D^{\beta-j}_{a+}f)(a+)(D^{n}[I^{n-\alpha-\beta}_{a+}\frac{(x-a)^{\beta-j}}{\Gamma(1+\beta-j)}])(x)\\
(D^{\alpha}_{a+}D^{\beta}_{a+}f)(x) &= (D^{\alpha+\beta}_{a+}f)(x)-\sum_{j=1}^{m}(D^{\beta-j}_{a+}f)(a+)\frac{(x-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}.
\end{aligned}$$

□

On remarque que selon la définition de Riemann-Liouville l'opérateur de dérivation fractionnaire ne peut pas définir un semi-groupe. Néanmoins, il existe d'autres généralisations de la dérivation et de l'intégration basées sur différentes approches. On a choisi celle de M. Caputo pour son utilité dans la formulation des problèmes appliqués. Cette approche permet de formuler des conditions initiales pour les problèmes d'ordres fractionnaires.

On définira dans cette section les intégrales et dérivées fractionnaires dans un intervalle fini.

2.5 Dérivée fractionnaire de Caputo

2.5.1 Dérivée fractionnaire

L'opérateur de Riemann-Liouville jouait un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire et dans ses applications en mathématiques pures. Par contre, les besoins de la technologie moderne requiert certaines révisions sur cette approche pour pouvoir interpréter les conditions initiales telles que $f(a)$, $f'(a)$, etc. Dans l'approche de Riemann-Liouville, les conditions initiales sont des limites de valeurs des dérivées fractionnaires dont nous ne connaissons pas encore leurs interprétations physiques.

Définition :

Dans cette section on présente des définitions et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo. Soit $[a,b]$ un intervalle fini de la droite réelle. Les dérivées fractionnaires de Caputo, notées $({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f)(x)$ et $({}^{C}D^{\alpha}_{b-}f)(x)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$ sont définies par

$$\begin{aligned} ({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt, \\ ({}^{C}D^{\alpha}_{b-}f)(x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt. \end{aligned}$$

où $n = [\operatorname{Re}\alpha] + 1$.

Elles sont aussi reliées aux dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville comme suit

$$\begin{aligned} ({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f)(t) &:= D^{\alpha}_{a+}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right], \qquad (2.8) \\ ({}^{C}D^{\alpha}_{b-}f)(t) &:= D^{\alpha}_{b-}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k\right]. \end{aligned}$$

Ces définitions coincident si la fonction $f \in AC^n[a,b]$ et l'équivalence peut être démontrée en utilisant un théorème de dérivation par parties adapté au calcul fractionnaire.

Dans les cas suivants, on a la dérivée fractionnaire de Caputo qui coincide avec celle de Riemann-Liouville :

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f)(x) = (D^{\alpha}_{a+}f)(x) \qquad (2.9)$$

si $f(a) = y'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et

$$({}^C D^\alpha_{b-} f)(x) = (D^\alpha_{b-} f)(x) \tag{2.10}$$

si $f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(n-1)}(b) = 0$.

D'après les dernières relations entre l'opérateur de Riemann-Liouville et celui de Caputo (2.8), (2.9) et (2.10), on voit clairement qu'ils ont presque les mêmes propriétés.

Propriétés :

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et Re $\beta > 0$, alors

1. ${}^C D^\alpha_{a+}(t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-1} \quad (\text{Re}\,\alpha \geq 0, \text{Re}\,\beta > n)$.
2. ${}^C D^\alpha_{b-}(b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-1} \quad (\text{Re}\,\alpha \geq 0, \text{Re}\,\beta) > n)$.
3. ${}^C D^\alpha_{a+}(t-a)^k = 0$ et ${}^C D^\alpha_{b-}(t-a)^k = 0$ si $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
4. ${}^C D^\alpha_{a+} c = 0$ et ${}^C D^\alpha_{b-} c = 0$, pour toute constante c.

Si $a = 0$ et $\alpha = n$, alors

$$(({}^C D^n_{0+} y)(x) := y^{(n)}(x), (({}^C D^n_{0-} y)(x) := (-1)^n y^{(n)}(x) \; (x \in \mathbb{R}^+).$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors on a, d'après la propriété 2.17 de [1]

$$\begin{aligned} (({}^C D^\alpha_{0+} e^{\lambda t})(x) &= \lambda^\alpha e^{\lambda x}, \\ (({}^C D^\alpha_{a+} E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha])(x) &= \lambda E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha]. \end{aligned}$$

2.5.2 Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

L'assertion suivante qui découle du lemme 2.4.2 donne la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^C D^\alpha_{a+}$.

Lemme 2.5.1. Soit $\alpha > 0, n-1 < \alpha \leq n \quad (n \in \mathbb{N})$ tel que $y \in C^n(\mathbb{R}^+), y^{(n)} \in L_1(0,b) \quad (b > 0)$, l'estimation du lemme 2.4.2 est vérifiée pour $y^{(n)}$, alors les transformées de Laplace $Y(s)$ et $(\mathcal{L}[D^n y])$ existent et $\lim_{x\to\infty}(D^k y)(x) = 0$, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. On a la relation

$$(\mathcal{L}{}^C D^\alpha_{0+} y)(s) = s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0).$$

En particulier, pour $0 < \alpha \leq 1$

$$(\mathcal{L}{}^C D^\alpha_{0+} y)(s) = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0).$$

Les transformées de Laplace précédentes appliquées à la dérivée de Riemann-Liouville et Caputo nous permettent de résoudre quelques EDF. Il existes bien évidemment d'autres transformées comme la transformée de Fourier par exemple et des techniques analytiques ainsi que des méthodes numériques. La section suivante est consacrée seulement à des exemples de résolution des EDF linéaires à coefficients constants par la transformée de Laplace.

2.6 Equations différentielles fractionnaires

Pour l'étude des EDF, il faut avoir des conditions initiales ou limites. Pour les équations différentielles ordinaire les conditions sont la valeur initiale ou la dérivée au point initial. Cependant, pour les EDF à dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville sont définies par :

$$(D_{a+}^{\alpha-k}f)(a+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

où $n = [\text{Re}\,\alpha] + 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $\alpha = n$ si $\alpha \in \mathbb{N}$. La notation précédente $(D_{a+}^{\alpha-k}f)(a+)$ désigne la limite de tous les points du voisinage de a, $(a, a+\varepsilon), \quad \varepsilon > 0$, comme suit :

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha-k}f)(a+) &= \lim_{x \to a+} (D_{a+}^{\alpha-k}f)(x), \quad 1 \leq k \leq n-1, \\ (D_{a+}^{\alpha-n}f)(a+) &= \lim_{x \to a+} (I_{a+}^{n-\alpha}f)(x) := (J_{a+}^{n-\alpha}f)(x) \quad \text{si } \alpha \neq n, \\ (D_{a+}^{0}f)(a+) &= f(a) \quad \text{si } \alpha = n. \end{aligned}$$

Dans le cas où $0 < \text{Re}\,\alpha < 1$ les conditions précédentes prennent la forme :

$$(I_{a+}^{1-\alpha}f)(x) = b \quad b \in \mathbb{C}.$$

Les EDF à dérivée fractionnaire de Caputo ${}^{C}D_{0+}^{\alpha}$ quant à elles utilisent les dérivées naturelles, *i.e.*

$$f^{(k)}(0) = b_k \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Kilbas et Marzan ont étudié le problème de Cauchy avec une dérivée de Caputo d'ordre complexe α suivant :

$$\begin{aligned} &({}^{C}D_{0+}^{\alpha}f)(x) = y[x, f(x)] \quad a \leq x \leq b, \\ &f^{(k)}(0) = b_k \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Ils ont établi l'équivalence entre le problème

$$\begin{aligned} &({}^{C}D_{0+}^{\alpha}f)(x) = \lambda f(x) + y(x) \quad a \leq x \leq b, 0 < \alpha < 1 \\ &f(0) = b \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

et l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{y[t, f(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad x > 0$$

Maintenant, on résout une équation différentielle fractionnaire unidimensionnelle non homogène à coefficients constant à dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la forme

$$\sum_{k=1}^{m} A_k D_{0+}^{\alpha_k} y(x) + A_0 y(x) = f(x)\ (x > 0) \tag{2.11}$$

avec $m \in \mathbb{N}^*$, $0 < \text{Re}\ \alpha_1 < \ldots < \text{Re}\ \alpha_m$ et $A_0, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$, en utilisant la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville $D_{0+}^{\alpha_k} y \quad (k = 1, \ldots, m)$.

Pour des fonctions y appropriées, par exemple y vérifiant les conditions de l'un des lemmes 2.4.2 et $(D_0^{\alpha-k} yf)(0) = 0, \quad (k = 1, \ldots, n)$, la transformée de Laplace est donnée par

$$(\mathcal{L} D_{0+}^{\alpha} y)(s) = s^{\alpha} Y(s).$$

Appliquons cette dernière à l'équation (2.11)

$$\left[A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k s^{\alpha_k} \right] Y(s) = F(s).$$

Par la transformée inverse $\mathcal{L}^{-1}$, on trouve une solution de (2.11) sous la forme

$$y(x) = \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k s^{\alpha_k}} \right] \right)(x).$$

Maintenant qu'on a la solution générale y, essayons de résoudre quelques exemples.

Exemple .1. On va résoudre par la méthode de la transformée de Laplace l'équation à dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville suivante énoncée par [2] :

$$\begin{aligned} &\left[D^1 + a D_{0+}^{1/2} + b D^0 \right] y(t) = 0. \\ &y(0) = c_0 \\ &(J^{1/2} y)(0) = c_1 \end{aligned}$$

où c_0 et c_1 sont deux constantes finies non nulles.

On transforme les deux membres de l'équation

$$[sY(s) - y(0)] + a \left[\mathcal{L}(D_{0+}^{1/2} y)(t) \right] + bY(s) = 0.$$

La substitution de la quantité $\mathcal{L}(D_{0+}^{1/2} y)(s)$ par sa valeur $s^{1/2} Y(s) - (J_{0+}^{1/2} y)(0)$ dans la dernière équation donne

$$\left[s - a s^{1/2} + b \right] Y(s) - y(0) - a(J_{0+}^{1/2} y)(0) = 0.$$

Alors,

$$Y(s) = \frac{y(0) + a(J_{0+}^{-1/2}y)(0)}{s - as^{1/2} + b}.$$

Supposons que la quantité $y(0) + a(J^{1/2}y)(0)$ est une constante finie non nulle. On peut alors inverser la transformée de Laplace en utilisant les transformées de Laplace de fonctions usuelles et compositions de fonctions élaborées précédemment. Il reste une quantité à décomposer : $s - as^{1/2} + b$.

$$\frac{1}{s - as^{1/2} + b} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{s^{1/2} - \alpha} - \frac{1}{s^{1/2} - \beta}\right)$$

On suppose que α et β sont les zéros distincts de $s - as^{1/2} + b$. Inversant maintenant $s^{1/2} - \alpha$

$$(\mathcal{L}^{-1})\left\{\frac{1}{s^{1/2} - \alpha}\right\} = (\mathcal{L}^{-1})\left\{\frac{1}{s^{-1/2}(s - \alpha^2)} + \frac{\alpha}{s - \alpha^2}\right\} = t^{-1/2}E_{1,1/2}(\alpha^2 t) + \alpha e^{\alpha^2 t}.$$

On trouve, après quelques transformations simples, la solution y.

$$\begin{aligned} y(t) &= [\mathcal{L}^{-}1Y](t) \\ &= \frac{c_0 + ac_1}{\alpha - \beta}\left[\alpha e^{\alpha^2 t} - \beta e^{\beta^2 t} + t^{-1/2}E_{1,1/2}(\alpha^2 t) - t^{-1/2}E_{1,1/2}(\beta^2 t)\right]. \end{aligned}$$

Exemple .2. Soit l'équation suivante avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo voir [3].

$$\begin{aligned} &({}^{C}D_{0+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = 0, \quad x > 0, 1 < \alpha \leq 2 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \\ &y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

où c_0 et c_1 deux constantes données.

Appliquons la transformée de Laplace à l'équation précédente en tenant compte de la valeur de la transformée de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, on aura

$$Y(s) = y(0)\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \lambda} + y'(0)\frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha} - \lambda}. \tag{2.13}$$

On remarque que

$$\mathcal{L}\left[E_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha})\right](s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \lambda}$$

et que

$$\mathcal{L}\left[tE_{\alpha,2}(\lambda t^{\alpha})\right](s) = \frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha} - \lambda}$$

sont vérifiées si $s^{-\alpha}\lambda < 1$. Il ne reste qu'à remplacer les deux dernières équations dans (2.13) et pour trouver la solution y de (2.12)

$$y(x) = y(0)E_{\alpha,1}(\lambda x^{\alpha}) + y'(0)xE_{\alpha,2}(\lambda x^{\alpha}).$$

Chapitre 3

Quelques resultats d'existence sur un problème fractionnaire

Ces dernières années, les équations différentielles fractionnaires ont été d'un grand intérêt et il ya eu de nombreux résultats sur l'existence et l'unicité des solution de ce type d'équations. Dans ce chapitre, nous allons principalement étudier l'équation différentielle fractionnaire non linéaire suivante

$$D^{\alpha}u = f(t,u), 0 < t < 1, u(0) = 0, \tag{3.1}$$

où $0 < \alpha < 1, D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Reimann-liouville sans aucune exigence monotone sur le terme non linéaire en construisant des fonctions de contrôle supérieures et inférieures et en exploitant la méthode des sous et sur solutions. L'existence et l'unicité de la solution positive de l'équation 3.1 sont obtenues par le théorème de point fixe de Schauder. D'autre part, nous soulignons que ce travail est basé sur l'article qui présente bien l'utilisation de la méthode des sous et sur solutions pour certains type d'équations différentielles fractionnaires non linéaires et cette méthode est un outil puissant pour résoudre ces équations différentielles non linéaires.

3.1 Existence de la solution positive

Soit $X = C[0,1]$ un espace de Banach muni de la norme sup et définissons

$$K = \{u \in X : u(t) \geq 0,\ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Alors, Eq (3.1) est équivalente à l'équation intégrale

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds, 0 \leq t \leq 1, \tag{3.2}$$

L'équation intégrale (3.2) est également équivalente au problème du point fixe

$$Tu(t) = u(t),\ u \in C[0,1],$$

où l'opérateur $T : K \to K$ est défini comme

$$(Tu)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds, 0 \leq t \leq 1. \tag{3.3}$$

Alors on aura le lemme suivant.

Lemme 3.1.1
L'opérateur $T : K \to K$ est compact.

Démonstration. L'opérateur $T : K \to K$ est est continu selon l'hypothèse de non négatifité et continuité de $f(t,u)$. Soit $M \subset K$ borné, c'est à dire qu'il existe une constante positive l tell que $\| u \| \leq l$ pour tout $u \in M$, et $L = \max_{0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq l} f(t,u(t)) + 1$,alors pour tout $u \in M$, on a

$$\begin{aligned}
| \quad Tu(t) \mid &= \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \mid \\
\leq \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s) \mid f(s,u(s)) \mid ds \\
\leq \quad & \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
\leq \quad & \frac{L}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\| Tu \| \leq \frac{L}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Par conséquent,$T(M)$ est uniformément borné.

Maintenant, nous allons prouver que l'opérateur T est équicontinu.

Pour chaque $u \in M$, tout $\epsilon > 0, t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$. Soit $\delta = (\frac{\epsilon\Gamma(1+\alpha)}{2L})^{\frac{1}{\alpha}}$, alors quand $\mid t_2 - t_1 \mid < \delta$,on a

$$\begin{aligned} \mid & Tu(t_1) - Tu(t_2) \mid = \\ & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s) ds \right|. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mid & Tu(t_1) - Tu(t_2) \mid \\ = & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \right| \end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned} \mid & Tu(t_1) - Tu(t_2) \mid \\ \leq & \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}) ds \\ & + \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\ \leq & \frac{L}{\Gamma(1+\alpha)} [t_1^\alpha + (-t_1)^\alpha - t_2^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha] \\ \leq & \frac{2L}{\Gamma(1+\alpha)} (t_2 - t_1)^\alpha \\ < & \frac{2L}{\Gamma(1+\alpha)} \delta^\alpha = \epsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent $T(M)$est équicontinue. Le théorème d'Arzela-Ascoli implique que T est compact. □

Maintenant, soit $f(t,u) : [0,1] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ une fonction continue.

Pour tout $u \in [a,b]$,on définit la fonction de contrôle supérieure

$$H(t,u) = \sup_{a \leq \eta \leq u} f(t,\eta),$$

et fonction de contrôle inférieure

$$h(t,u) = \inf_{u \leq \eta \leq b} f(t,\eta).$$

C'est évident qu'on trouve $H(t,u)$ et $h(t,u)$ sont monotones non décroissantes par rapport u et

$$h(t,u) \leq H(t,u) \leq f(t,u).$$

Définition 3.1.2. Soient $\overline{u}(t), \underline{u}(t) \in K, b \geq \overline{u}(t) \geq \underline{u}(t) \geq a$,satifaisant

$$D^{\alpha}\overline{u}(t) \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t_1 - s)^{\alpha-1} H(s, \overline{u}(s)) ds, 0 \leq t \leq 1),$$

et

$$D^{\alpha}\underline{u}(t) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t_1 - s)^{\alpha-1} h(s, \underline{u}(s)) ds, 0 \leq t \leq 1),$$

alors les fonctions $\overline{u}(t)$ et $\underline{u}(t)$ sont appelées respectivement sur et sous solutions de l'équation 3.1.

Nous donnons maintenant les principaux résultats dans ce chapitre.

Théorème 3.1.3
Supposons que $f(t,u) : [0,1] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue, et que $\overline{u}(t)$ et $\underline{u}(t)$ sont les sur et sous solutions de l'équation 3.1, alors ce problème aux valeurs initiales admet au moins une solution $u(t) \in C[0,1]$, de plus

$$\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t),\ t \in [0,1].$$

Démonstration. Soit

$$S = \{u(t) \mid u(t) \in k,\ \underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t),\ t \in [0,1]\},$$

muni de la norme

$$\| u \| = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|,$$

alors on a $\| u \| \leq b$.

Ainsi, S est un sous-ensemble convexe, borné et fermé de l'espace de Banach X. D'aprés la compacité de l'opérateur T, il suffit de prouver que $T : S \to S$.

Pour tout $u(t) \in S$,on a $\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t)$, alors

$$\begin{aligned} Tu(t) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} H(s,u(s))ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} H(s,\overline{u}(s))ds \leq \overline{u}(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Tu(t) &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s,u(s))ds \\ &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s,\underline{u}(t))ds \\ &\geq \underline{u}(t) \end{aligned}$$

Donc

$$\underline{u}(t) \leq Tu(t) \leq \overline{u}(t),$$

et d'après théorème de Schauder notre opérateur T admet un point fixe dans l'espace S. En conclusion, notre problème admet au moins une solution $u(t) \in C[0,1]$ et $\underline{u}(t) \leq Tu(t) \leq \overline{u}(t)$, $t \in [0,1]$. □

Corollaire 3.1.4
Supposons que $f(t,u) : [0,1] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue, et il exite $k_2 \geq k_1 > 0$,telques

$$k_1 \leq f(t,l) \leq k_2, (t,l) \in [0,1] \times [0,+\infty), \tag{3.4}$$

Alors le problème aux valeurs initiales (3.1) ademt une solution positive $u(t) \in C[0,1]$.

De plus

$$\frac{k_1}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \leq u(t) \leq \frac{k_2}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha.$$

Démonstration. Par l'hypothèse (3.2) et la définition de la fonction de contrôle, nous avons

$$k_1 \leq h(t,l) \leq H(t,l) \leq k_2, (t,l) \in [0,1] \times [a,b].$$

Maintenant, on considère l'équation

$$D^\alpha \omega(t) = k_2, \qquad \omega(0) = 0. \tag{3.5}$$

évidemment, l'équation (3.3) a une solution positive

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}k_2 ds\\ &= \frac{k_2}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}\\ &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}H(s,\omega(s))ds\end{aligned}$$

Alors que $\omega(t)$ est une sur solution de l'équation 3.1.

De la même façon, on vérifie que $v(t) = I^{\alpha}(k_1)$ est la sous solution de l'équation (3.1). Une application direct de notre théorème prouve que le problème posé admet au moins une solution $u(t) \in C[0,1]$ et de plus

$$\frac{k_1}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha} \leq u(t) \leq \frac{k_2}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}$$

□

Corollaire 3.1.5
supposons que $f(t,u) : [0,1] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue,où a est une constante positive, de plus,

$$a < \lim_{u\to+\infty} f(t,u) < +\infty,\ t \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Alors le problème aux données initiales (3.1) admet au moins une solution positive $u(t) \in C[0,1]$.

Démonstration. D'aprés (3.6), il existe des constantes positives $N,\ R$ telles que lorsque $u > R$, on a $f(t,u) < N$. Soit

$$C = \max_{0\leq t\leq 1, 0\leq u\leq R} f(t,u),$$

alors,

$$a \leq f(t,u) \leq N + C, 0 < u < +\infty.$$

D'aprés le corollaire précédent, le problème aux données intiales (3.1) admet au moins une solution positive $u(t) \in C[0,1]$ et satisfait

$$\frac{C}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha} \leq u(t) \leq \frac{N+C}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha} \tag{3.7}$$

□

Corollaire 3.1.6

Supposons que $f(t,u) : [0,1] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *est continue, où a est une constante positive, de plus,*

$$a < \lim_{u\to+\infty} \max_{0\leq t\leq 1} \frac{f(t,u)}{u} < +\infty. \tag{3.8}$$

Alors le problème de valeur initiale (3.1) a au moins une solution positive

$$u(t) \in C[0,\delta], où\ 0 < \delta < 1.$$

Démonstration. D'après

$$a < \lim_{u\to+\infty} \max_{0\leq t\leq 1} \frac{f(t,u)}{u} < +\infty.$$

Il existe $M > 0$ et $C > 0$, tel que pour tout $u \in X$ nous avons

$$f(t,u(t)) \leq Mu(t) + C$$

Par la définition de la fonction de contrôle, nous avons

$$H(t,u(t)) \leq Mu(t) + C \tag{3.9}$$

Ensuite, on considère l'équation

$$D^{\alpha}u(t) = Mu(t) + C, 0 < \alpha < 1, 0 < t < 1. \tag{3.10}$$

L'équation 3.10 est équivalente à l'équation intégrale

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(Mu(s) + C)ds, 0 \leq t \leq 1.$$

Soit $A : K \to K$ un opérateur défini comme suit

$$Au(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(Mu(s) + C)ds, 0 \leq t \leq 1,$$

Il est clair que A est un opérateur compact. Alors, soit

$$B_R = \left\{ u(t) \in K \mid \parallel u - \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha} \parallel \leq R < +\infty \right\}.$$

B_R est un sous-ensemble convexe, borné et fermé de l'espase de Banach $C[0,\delta]$,où $0 < \delta < 1$.Pour tout $u \in B_R$ on a

$$\begin{aligned} \parallel & u \parallel \\ \leq & \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha} + R \\ \leq & \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} \delta^{\alpha} + R \\ \leq & \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} + R. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
&\| \quad Au(t) - \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha} \| \\
\leq \quad & \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds \\
\leq \quad & \frac{M}{\Gamma(1+\alpha)} \| u(t) \| t^{\alpha} \\
\leq \quad & \frac{M}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} + R \right) \delta^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Soit

$$\delta < \min \left\{ \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2M} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \left[\frac{R(\Gamma(1+\alpha))}{2MC} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, 1 \right\},$$

Ensuite

$$\| Au(t) - \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha} \| \leq R.$$

Par conséquent, le théorème fixe de schauder assure que l'opérateur A a au moins un point fixe et ce qui prouve que l'équation (3.10) admet au moin une solution positive $\omega^*(t), 0 < t < \delta$.Par conséquent, nous avons

$$\omega^*(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (M\omega^*(s) + C) ds, 0 < t < 1,$$

En combinant la condition (3.9), on a

$$\omega^*(t) \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} H(s, \omega^*(s)) ds, 0 < t < 1.$$

$\omega^*(t)$ est la sur solution du problème aux conditions intiales (3.1),et $v^*(t) = I^{\alpha}(\alpha) > 0$ est la sous solution de l'équation (3.1). En conclusion le problème (3.1) admet au moins une solution positive $u(t) \in C[0, \delta]$,où

$$0 < \delta < 1 \text{ et } v^*(t) \leq u(t) \leq \omega^*(t).$$

□

Corollaire 3.1.7

Supposons que $f(t, u) : [0, 1] \times [0, +\infty) \to [a, +\infty)$ est continue, où a est une constante positive, et il existe $d > 0, c > 0$, tel que

$$\max\{f(t, l) : (t, l) \in [0, 1] \times [0, d]\} \leq c\Gamma(1+\alpha), \tag{3.11}$$

alors, le problème aux données initiales (3.1) admet au moins une solution positive $u(t) \in C[0, 1]$ et satisfait

$$0 < \| u(t) \| \leq c.$$

Démonstration. Par la définition de la fonction de contrôle, nous avons

$$a \leq H(t,l) \leq c\Gamma(1+\alpha) \in [0,1] \times [0,d].$$

D'aprés le premier corollaire, le problème aux données intiales (3.1) admet au moins une solution positive $u(t) \in C[0,1]$, et vérifie $0 < u(t) \leq c$.

Donc

$$0 < \| u(t) \| \leq c.$$

□

3.2 Unicité de La solution positive

Dans cette section, nous prouverons l'unicité de la solution positive en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 3.2.1
Si l'équation (3.1) admet une paire de sous et sur solutions positives et pour tout $u, v \in X$, il existe $l > 0$, tel que

$$\| f(t,u) - f(t,v) \| \leq l \| u - v \|, \tag{3.12}$$

alors lorsque

$$\frac{l}{\Gamma(\alpha+1)} < 1,$$

le problème aux données initiales (3.1) admet une et seule solution positive $u \in C[0,1]$.

Démonstration. Pour démontrer ce théoreme, il suffit de montrer la contraction de l'opérateur T. Alors, pour tout $u_1, u_2 \in X$ et par l'hypotèse (3.12), on a

$$\begin{aligned}
\| &\ Tu_1 - Tu_2 \| \\
\leq &\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau, u_1(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau))| d\tau \\
\leq &\ \frac{l}{\Gamma(\alpha)} \| u_1 - u_2 \| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
\leq &\ \frac{l}{\Gamma(\alpha+1)} \| u_1 - u_2 \| .
\end{aligned}$$

Lorsque

$$\frac{l}{\Gamma(\alpha+1)} < 1,$$

l'opérateur T est une contraction. Par conséquant, le problème aux données intiales (3.1) admet une solution unique $u \in C[0,1]$. $\square$

Enfin, nous donnons un exemple pour éclairer nos résultats.

Exemple 3.2.2. nous consédérons l'équation fractionnaire

$$D^{\frac{1}{2}}u(t) = 1 + \frac{u(t)}{u(t) + \sin[u(t)+1]}, 0 \leq t \leq 1, u(0) = 0, \tag{3.13}$$

où

$$f(t,u) = 1 + \frac{u}{u + \sin[u+1]}.$$

Comme

$$\lim_{u \to +\infty} f(t,u) = 2 \text{ et } f(t,u) \geq 1, u \in [0,+\infty),$$

D'aprés les corollaires qu'on a vu l'équation 3.13 admet une solution positive.

Conclusion générale

Le calcul fractionnaire est devenu un outil très efficace pour modéliser certains phénomènes en biologie, mécanique...etc. D'un point de vue mathématique, l'opéra- rateur fractionnaire est une équation intégrale de type Voltera. Dans ce mémoire, nous avons essayé de faire une introduction au calcul fractionnaire et ses applications. Nous avons vu les outils principaux pour le calcul comme les fonctions spéciales. Après avoir donné une vue complète sur le calcul fractionnaire, on a abordé un problème fractionnaire dans le dernier chapitre et en ce qui concerne l'analyse d'existence de solutions, nous avons utilisé la méthode du point fixe. La méthode de sous et sur solutions a était aussi un outil fort pour établir nos résultats. Nous espérons que ce modeste travail sera une vision préliminaire sur le calcul fractionnaire et initiation à la recherche scientifique.

Bibliographie

[1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo. Theory and application of fractional differential equations. *North-Holland Mathematics Studies*, 204, 2006.

[2] K. S. Killer and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley, New York, 1993.

[3] I. Podlubny. *Fractional differential equations, mathematics in science and engineering*. Academic Press, New York, 1999.

[4] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

[5] P. J. Torres. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a krasnoselskii fixed point theorem. *Journal of Differential Equations*, 190(2) :643–662, 2003.

[6] H. Wang. On the number of positive solutions of nonlinear systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 281(1) :287–306, 2003.