UNIVERSITE CHADLI BENDJEDID - EL TARF

Mémoire de fin d'étude - MASTER -

Spécialité

Analyse Fonctionnelle et Calcul Stochastique

Présentée par

Cheloufi Asma

Thème

Méthode de Décomposition de Domaines pour une Classe d'EDP Non Linéaire

Juillet 2021

Encadré par Dr. MECHERI HALIMA

TABLE DES MATIÈRES

1 Introduction générale 5

1 Notions de Bases **7**

1 Produit scalaire 8
2 Bases hilbertiennes : 9
3 Espaces Fonctionnelles 11
3.1 Les espaces $L^p(\Omega)$ 11
4 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ 13
5 Quelques inégalités 14
5.1 Inégalité de Poincaré 14
5.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz 14
5.3 Inégalité de Young 15
6 Théorème de trace 15
6.1 Application du théorème de trace 15
7 Classification des EDPs 16
7.1 Types des équations aux dérivées partielles 16

2 Quelques Résultats Classiques sur Les Equations Linéaires Ellip-

tiques **18**
1 Equations Linéaires Elliptiques 18

3 Application de la méthode de décomposition pour les E.D.Ps. Non-linéaires **23**
1 Historique de la méthode de Schwarz 23
2 Méthode de Schwarz avec recouvrement et sans recouvrement 24
2.1 Méthode de Schwarz sans recouvrement : 25
2.2 Méthodes de Schwarz avec recouvrement : 26
3 Méthode Alternée de Schwarz pour les E.D.Ps Non Linéaires 28
3.1 Position du problème continu 28
3.2 Suites de Schwarz Continues 31
3.3 Suites de Schwarz discrètes 33
4 Analyse de l'Erreur d'Approximation 34
4.1 Définition des deux Suites de Schwarz Auxiliaires 34
5 Estimation Optimale de l'Erreur d'Approximation 35
6 Conclusion 44

yybyby

1 Introduction générale

Au cours de la dernière décennie, parmi les méthodes qui fournissent de bons algorithmes faciles à implémenter sur des architectures parallèles et ayant une base mathématique très riche, on trouve les méthodes de décomposition de domaine (MDD). Bien qu'elles soient très anciennes puisque la première remonte à la fin du XIXème siècle avec Herman Amandus Schwarz qui lui donna son nom [Schwarz, 1890], elles ont suscité récemment un grand intérêt et la littérature abondante qui leur est consacrée en témoigne.

La méthode alternée de Schwarz génère une suite de sous-problèmes dont la suite de solutions converge vers la solution du problème. La littérature relative à cette méthode appliquée à des problèmes linaires est très vaste ([18], [15], [5] et [6]). Cependant, quelques travaux seulement sont connus sur cette méthode pour les E.D.Ps. non-linéaires où l'étude est portée seulement sur la convergence de l'algorithme de Schwarz continu.

Dans le premier chapitre de notre travail, nous donnons quelques notions de bases qui nous seront utiles dans les à suivre.

Le deuxième chapitre est consacré à quelques résultats généraux sur les équations linéaires elliptiques, telle l'existence et l'unicité de la solution, leurs propriétés de régularité, de monotonie et de Lipshitzianité [2].

Nous rappelons aussi l'approximation par éléments finis de problème non linéaire et par symétrie nous donnons des résultats analogues aux problèmes continus. Et pour évaluer l'erreur commise entre la solution continue et la solution discrète, nous introduisons un théorème fondamentale du à qui montre la convergence uniforme en norme L^∞ de la solution approchée vers la solution discrète.

Le troisième chapitre concerne la méthode de décomposition de domaine, nous introduisant ici des généralités sur cette méthode à savoir la méthode de Schwarz classique pour un problème d'équation au dérivée partielle.

Nous nous intéressons à l'analyse de convergence de la méthode de alternée de Schwarz pour deux sous domaines avec recouvrement ; appliquée à une classe de problème elliptiques non-linéaires, dans ses deux versions continue et discrète.

Dans le cas discret, on considère que chaque sous domaine possède sa propre discrétisation par une méthode des éléments finis conforme « Non matching grids » dans le sens qu'un nœud ou un triangle appartenant a un sous domaine n'appartient pas a l'autre [2].

A la fin nous donnons quelques sources que nous avons utilisées pour rédiger ce travail.

CHAPITRE 1

Notions de Bases

Le premier chapitre est constitué des rappelles et des concepts de bases, à ce niveau nous rappelons quelques définitions et notions sur les espaces fonctionnelles, quelques théorèmes et inégalités et enfin, la classification des EDPs.

1 Produit scalaire

Définition 1.1 *On appelle produit scalaire dans un espace vectoriel réel H, une forme bilinéaire symétrique définie positive sur H .*

On note le produit scalaire de deux éléments u et v de H sous la forme (u, v).

On a donc, pour tout u et v, w dans H et pour tout μ et λ dans $\mathbb{R}$, vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout u et v dans H on a (u, v) dans $\mathbb{R}$.

2. Pour tout u et v, w dans H et pour tout μ et λ dans $\mathbb{R}$, on a

$$(u, \lambda v + \mu w) = \lambda (u, v) + \mu (u, w) \tag{1.1}$$

et

$$(\lambda u + \mu v, w) = \lambda (u, w) + \mu (v, w) \tag{1.2}$$

3. Pour tout u et v dans H on a $(u, v) = (v, u)$.

4. Pour tout u dans H, on a l'équivalence $(u, u) \geq 0$ et $(u, u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.

Définition 1.2 *Un espace de hilbert H est un espace vectoriel muni de produit scalaire (u, v) et qui est complet lorsqu'il est normé par la norme associée à ce produit scalaire.*

Corollaire 1.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers u,dans topologie faible et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite qui converge faiblement vers v,*

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v_n) = (u, v) .$$

Définition 1.3 *On dit qu'un espace normé est complet si chaque suite de Cauchy est convergente.*

Définition 1.4 *Un espace normé et complet s'appelle un espace de Banach.*

Exemple 1.1 *L'espace* $L^2(\Omega)$ *muni du produit scalaire.*

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx$$

est un espace de Hilbert.

2 Bases hilbertiennes :

Définition 2.1 *Une suite d'éléments* $\{e_i\}_{i\geq 0}$ *d'un Hilbert* H *est une base hilbertienne de* H *si*

1. elle est orthonormée

$$\begin{cases} (e_i, e_j) = 0 & si\ i \neq j \\ \|e_i\| = 1 & pour\ tout\ i \end{cases} \tag{1.3}$$

2. elle est totale, c'est à dire que l'ensemble des combinaisons linéaire des e_i *est dense dans* H*.*

Définition 2.2 *On désigne par* $C(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions continues sur* Ω *à valeur dans* $\mathbb{R}$*.*

$C\left(\bar{\Omega}\right)$ est l'ensemble continue jusqu'à $\bar{\Omega}$. L'application

$$\|u\|_{C\left(\bar{\Omega}\right)} = \sup_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)| \tag{1.4}$$

est une norme sur $C\left(\bar{\Omega}\right)$, qui en fait que $C\left(\bar{\Omega}\right)$ soit un espace de Banach.

Définition 2.3 *Une fonction* u *définie sur* Ω *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *est dite de classe* $C^k(\Omega)$ *si cette fonction et toutes ses dérivées partielles* $\partial^k u(x)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leq k$ *sont définies et continues sur* Ω*,*

où

$$\partial^k u(x) = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}}, \tag{1.5}$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *et*

$$C^k\left(\bar{\Omega}\right) = \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ / u \in C^k(\Omega)\right\}, \tag{1.6}$$

de plus, $\partial^k u(x)$ *se prolongent continuement à* $\bar{\Omega}$.

Définition 2.4 *Sur* $C^k\left(\bar{\Omega}\right)$*, l'application définie par*

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq k} \left\{\sup_{\bar{\Omega}} |\partial^\alpha u(x)|\right\} \tag{1.7}$$

est une norme et l'espace $C^k(\Omega)$ *muni de celle ci est un espace de Banach.*

Définition 2.5 $D(\Omega)$ *désigne l'espace des fonctions* $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$ *qui sont infiniment dérivables et à support compact dans* Ω*, on les appelle aussi les fonction tests.*

Rappellons que si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est fonction continue, le support de f est la fermeture de l'ensemble des points $x \in \Omega$ pour lesquels $f(x) \neq 0$.

Définition 2.6 *On appelle distribution* T *sur* Ω*, tout forme linéaire continue sur* $D(\Omega)$*, noté* $D'(\Omega)$*. Et on définie l'espace* $H^1(\Omega)$ *par*

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega); \exists g \in L^2(\Omega) \ \text{ tel que } \int_\Omega u\varphi' dx = -\int_\Omega g\varphi dx\right\}. \tag{1.8}$$

Définition 2.7 *On définie l'espace* $H_0^1(\Omega)$ *par* $u \in H^1(\Omega)$ *tel que* $u\backslash_{\partial\Omega} = 0$*, c'est-à-dire la solution est nulle sur le bord.*

Définition 2.8 *Si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors il existe une constante $c > 0$ tels que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.9}$$

3 Espaces Fonctionnelles

3.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 3.1 *Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}. \tag{1.10}$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}. \tag{1.11}$$

Définition 3.2 *L'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ est définie par*

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \exists C \leq 0 \text{ tel que } f(x) \leq C \quad \mu - pp \}. \tag{1.12}$$

pour toute fonction $f \in L^\infty(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \{ C \leq 0, |f| \leq C \quad \mu - pp \}. \tag{1.13}$$

Théorème 3.1 *On suppose que l'injection canonique de V dans H est compacte et que*

la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique et v-elliptique, alors il existe une suite croissante des valeurs propres tendant vers $+\infty$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \ldots$$

et il existe une base hilbertienne orthonomale de H formée de vecteurs propres w_m tels que

$$\forall v \in V,\ a\left(w_m, v\right) = \lambda_m \left(w_m, v\right). \tag{1.14}$$

Remarque 3.1 *Soient deux espace de Hilbert V et H vérifiant :*

- *$V \subset H$ avec injection continue.*
- *V dense dans H.*
- *Une forme bilinéaire $u, v \longrightarrow a\left(u, v\right)$ continue sur $V \times V$.*
  On notera $(.,.)$ le produit scalaire dans H, et on notera $|.|$ la norme correspondante et $\|.\|$ la norme dans V.

Il s'agit ensuite d'introduire des espaces de fonctions $v : t \longrightarrow v\left(t\right)$ définies sur $(0,1)$ à valeurs dans V ou H.

De manière générale, soit X un espace de Banach de norme $\|.\|_X$; pour tout $m \geq 0$, on désigne par $C^m\left(0,1;X\right)$ l'espace des fonctions m fois continûement différentiables sur $[0,1]$ à valeurs dans X ; c'est lui-même un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{C^m(0,1;X)} = \max_{0 \leq\, l\, \leq m} \left\{ \sup_{0 \leq\, t\, \leq 1} \left| \frac{\partial^l}{\partial t} u\left(t\right) \right| \right\}. \tag{1.15}$$

D'autre part, pour tout $P \in R$ avec $1 \leq P < +\infty$, on désigne par $L^P\left(0,1;X\right)$ l'espace des fonctions $t \longrightarrow v\left(t\right)$ fortement mesurables sur $(0,1)$ pour la mesure dt, (i.e. les fonctions scalaires $t \longrightarrow \|v\left(t\right)\|_X$ sont mesurables pour la mesure dt) et telles qu'on a

$$\|v\|_{L^P(0,1;X)} = \left(\int_0^1 \|v\left(t\right)\|_X^P \, dt \right)^{\frac{1}{P}} < +\infty; \tag{1.16}$$

Cette norme qui en fait de $L^P\left(0,1;X\right)$ un espace de Banach.

Si X est un espace de Hilbert de produit scalaire $(.,.)_X$, $L^2(0,1;X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v)_{L^2(0,1;X)} = \int_0^1 (u(t), v(t))_X \, dt. \tag{1.17}$$

Notons en outre que si $u : t \longrightarrow u(t)$ est une fonction de $L^2(0,1;X)$ et si v est un élément de X, la fonction $t \longrightarrow (u(t), v)_X$ appartient à $L^2(\Omega)$.

4 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$; elle s'identifie à une distribution sur Ω, notée v, et on peut donc définir ses dérivées $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, en tant que distributions sur Ω. En général, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ n'appartient pas au sous-espace $L^2(\Omega)$. On introduit alors la définition suivante :

Définition 4.1 *On appelle espace de Sobolev d'ordre* 1 *sur* Ω *l'espace*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \forall i = \overline{1,n} \right\}; \tag{1.18}$$

On munit $H^1(\Omega)$ *du produit scalaire :*

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \right) dx, \tag{1.19}$$

et on note

$$\|v\|_{1,\Omega} = (v,v)_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.20}$$

la norme correspondante.

Notons maintenant la propriété fondamentale de l'espace $H^1(\Omega)$ qui motive son introduction.

Définition 4.2 *On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de l'espace des distributions $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

Définition 4.3 *Soit P_1 l'espace des fonctions polynomiales de degré inferieur ou égale à 1 telle que :*

$$P_1 = \{p : p(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

5 Quelques inégalités

Notons le resultat suivant qui aura une importance pratique considérable dans la suite de notre travail.

5.1 Inégalité de Poincaré

Théorème 5.1 *Si Ω est borné alors il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$, telle que*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\ \|v\|_{0.\Omega} \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0.\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.21}$$

5.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition 5.1 *Soit f et $g \in L^2(\Omega)$, alors f et $g \in L^1(\Omega)$ et on a*

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.22}$$

5.3 Inégalité de Young

Définition 5.2 *Soit p et q deux nombres réels conjugués $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ dans $[1,+\infty[$. Alors*

$$\forall\ a\ ,b>0,\quad ab\leq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q; \tag{1.23}$$

En particuler : pour $p=q=2$ on a

$$\forall\ a\ ,b>0,\ ab\leq\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2.$$

6 Théorème de trace

Lemme 6.1 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Soit $(w_i)_{1\leq i\leq l}$ une partition régulier Ω, c'est-à-dire que chaque (w_i) est un ouvert régulier de classe C^1, $w_i\cap w_i=\phi$ si $i\neq j$ et $\overline{\Omega}=\bigcup_{i=1}^{l}\overline{w_i}$. Soit ν une fonction dont la restriction à chaque w_i , $\nu_i=\nu\mid_{w_i}$, appartient à $H^{\ 1}(w_i)$. Si ν est continue sur $\overline{\Omega}$, alors ν appartient à $H^{\ 1}(w_i)$.*

Théorème 6.1 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1, ou bien $\Omega=\mathbb{R}^N_+$. On définit l'application de trace γ_0.*

$$H^{\ 1}(\Omega)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)\to L^2(\partial\Omega)\cap C\left(\overline{\partial\Omega}\right) \tag{1.24}$$

$$\nu\to\gamma_0(\nu)=\nu\mid_{\partial\Omega}\ .$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^{\ 1}(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0. En particulier, il existe une constante $C>0$ telle que, pour toute fonction $\nu\in H^{\ 1}(\Omega)$, on a $\|\nu\|_{L^2(\partial\Omega)}\leq C\|\nu\|_{H^{\ 1}(\Omega)}$.

6.1 Application du théorème de trace

Nous avons donner quelques conséquences importantes du théorème de trace .

Théorème 6.2 *(Formule de Green)*

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. si u et v sont des fonctions de $H^{\,1}(\Omega)$, elles vérifient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \nu}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_{\Omega} \nu(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\, \nu(x)\, n_i(x)\, dx, \tag{1.25}$$

où $n = (n_i)_{1\le i\le N}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

Corollaire 6.1 *(Formule d'intégration par partie)*

Soit Ω un ouvert borné de frontiére Γ de classe C^1 par morceaux. Alors si u et v sont des fonctions de $H^{\,1}(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} (\partial_{x_i} u)\, \nu dx = -\int_{\Omega} u\, (\partial_{x_i} \nu)\, dx + \int_{\Gamma} u \nu x_i dx,\ i = \overline{1, N}. \tag{1.26}$$

Où x_i est la i^{eme} composante de la normale sortante au domaine Ω.

7 Classification des EDPs

Définition 7.1 *La forme générale d'une équation aux dérivées partielles linéaires, scalaire, d'ordre 2 est :*

$$au + c\nabla u + \operatorname{div}(A\nabla u) = f, \tag{1.27}$$

où $a : \Omega \to \mathbb{R}$, $c : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ sont les coefficients de l'équation aux dérivées partielles linéaire.

7.1 Types des équations aux dérivées partielles

Dans le cas où u est scalaire ($n = 1$) et les coefficients sont constants, on obtient :

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \delta\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda u = f, \tag{1.28}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda$ Sont des scalaires. Cette équation est dite :

1. Elliptique si
$$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0;$$
2. Parabolique si
$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0;$$
3. Hyperbolique si
$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0.$$

On peut dire que :

Les problèmes elliptiques vont concerner les problèmes stationnaires tels que ceux de la mécanique, la thermique, l'électrostatique, les membranes élastique, l'écoulement potentiel.

CHAPITRE 2

Quelques Résultats Classiques sur Les Equations Linéaires Elliptiques

1 Equations Linéaires Elliptiques

Soit Ω un domaine polyédrique borné de $\mathbb{R}^2$ou de $\mathbb{R}^3$; de frontière suffisament règuliére. On considère la forme bilinéaire :

$$a(u,v) = \int_{\Omega} (\nabla u.\nabla v)dx,$$

la forme linéaire

$$(f,v) = \int_{\Omega} f(x)\, v(x)\, dx.$$

Où le seconde membre f est régulière et l'espace :

$$V^{(g)} = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = g \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

où g est une fonction régulière définie sur $\partial\Omega$.

On considère l'équation linéaire elliptique :

$$\begin{cases} \text{trouver } \zeta \in V^{(g)} \text{ tel que} \\ a(\zeta, v) + c(\zeta, v) = (f, v), \forall v \in V^{(g)}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$c \geq \beta > 0.$$

Soit V_h l'espace des éléments constitue de fonctions linéaires continues par morceaux et s'annulant sur la frontière $\partial\Omega$ et ϕ_s les fonctions de bases de V_h.

L'analogue discret du problème continue (2.1) est définie par :

$$\begin{cases} \text{trouver } \zeta_h \in V_h^{(g)} \text{ tel que} \\ a(\zeta_h, v) + c(\zeta_h, v) = (f, v), \forall v \in V_h^{(g)}, \end{cases} \tag{2.2}$$

où

$$V_h^{(g)} = \{v \in V_h \text{ tel que } v = \pi_h(g) \text{ sur } \partial\Omega\},$$

et π_h est l'opérateur d'interpolation défini sur $\partial\Omega$.

Définition 1.1 *[12] (PMD) On suppose que la matrice résultante de discrétisation de problème (2.1) est une $M-$matrice.*

Théorème 1.1 *[13] Soient ζ solution de (2.1) et ζ_h solution de (2.2) alors il existe une constante C indépendante de h telle que :*

$$\|\zeta - \zeta_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ch^2 |\log h| \tag{2.3}$$

Lemme 1.1 *[17] Soit $w \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tel que $a(w, \phi) + c(w, \phi) \geq 0$ pour tout ϕ positive dans $H^1(\Omega)$ et $w > 0$ sur $\partial\Omega$. Alors $w > 0$ dans $\overline{\Omega}$.*

Soient (f,g) et $\left(\widetilde{f},\widetilde{g}\right)$ deux données telles que $\zeta=\sigma\left(f,g\right)$ et $\zeta_h=\sigma\left(\widetilde{f},\widetilde{g}\right)$ deux solutions relatives au problème (2.1), alors on a la proposition qui suit :

Proposition 1.1 *[3] Sous les conditios du lemme (1.1) précédent on a*

$$\|\zeta-\widetilde{\zeta}\|_{L^\infty(\Omega)}\leq\max\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)\|f-\widetilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)},\|g-\widetilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\}.$$

Preuve. On pose

$$\theta=\max\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)\|f-\widetilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)},\|g-\widetilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\}.$$

Comme

$$\begin{aligned}\widetilde{f}&\leq f+\|f-\widetilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}\\&\leq f+\left(\frac{c}{\beta}\right)\|f-\widetilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\widetilde{f}\ &\leq f+c\frac{1}{\beta}\|f-\widetilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}\\&\leq f+c\max\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)\|f-\widetilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)},\|g-\widetilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\}\\&\leq f+c\theta\end{aligned}$$

ce qui implique que pour tout ϕ positive dans $H_0^1\left(\Omega\right)$:

$$\left(\widetilde{f}\ ,\ \phi\right)\leq\left(f+c\theta,\phi\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}a\left(\widetilde{\zeta},\phi\right)+c\left(\widetilde{\zeta},\phi\right)&\leq a\left(\zeta,\phi\right)+c\left(\zeta,\phi\right)+c\left(\theta,\phi\right)\\&=a\left(\zeta+\theta,\phi\right)+c\left(\zeta+\theta,\phi\right).\end{aligned}$$

Donc

$$a\left(\zeta+\theta-\widetilde{\zeta},\phi\right)+c\left(\zeta+\theta-\widetilde{\zeta},\phi\right)\geq 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$\zeta+\theta-\widetilde{\zeta}=g+\theta-\widetilde{g}\geq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

En utilisant le lemme (1.1), on obtient

$$\zeta+\theta-\widetilde{\zeta}\geq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

En échangeant les rôles de (f,g) et de $\left(\widetilde{f},\widetilde{g}\right)$ on trouve

$$\widetilde{\zeta}+\theta-\zeta\geq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

Ce qui complète la démonstration. ■

Remarque 1.1 *le lemme* (1.1) *reste vrai dans le cas discret.*

En effet, on suppose que le principe du maximum discret **(P.M.D)** soit satisfait, alors on a :

Lemme 1.2 *Soit* $w\in V_h$ *tel que* $a\left(w,\phi_s\right)+c\left(w,\phi_s\right)\geq 0, s=1,2,...,m\left(h\right)$ *et* $w>0$ *sur* $\partial\Omega$. *Alors* $w>0$ *dans* $\overline{\Omega}$.

Preuve. la démonstration est la conséquence directe du principe du maximum discret. ■

Soient $(f\ ,\ g)$et $\left(\widetilde{f}\ ,\ \widetilde{g}\right)$ deux données discrètes telles que $\zeta_h = \sigma_h\left(f\ ,\ g\right)$et $\widetilde{\zeta}_h = \sigma_h\left(\widetilde{f}\ ,\ \widetilde{g}\right)$ deux solutions discrètes relatives au problème discret (2.2), alors on a la proposition suivante :

Proposition 1.2 *Sous les conditions du principe du maximum discret* ***(P.M.D)*** *et Sous les conditions du lemme* (1.2) *on a*

$$\|\zeta_h - \widetilde{\zeta}_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)\|f - \widetilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g - \widetilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right\} \tag{2.4}$$

Remarque 1.2 *si on considère le cas où* $f = \widetilde{f}$ *on retrouve alors le principe du maximum discret.*

CHAPITRE 3

Application de la méthode de décomposition pour les E.D.Ps. Non-linéaires

1 Historique de la méthode de Schwarz

La première méthode de Schwarz a été développée à la fin du 19eme siècle par le mathématicien H. A. Schwarz dans le but d'étudier l'opérateur de Laplace. Son idée est de traiter le problème dans le cas où Ω est la réunion avec recouvrement de deux domaines simples. Par exemple : l'union d'une plaque rectangulaire et un disque.

Algorithme 1 : Schwarz 1870

$$\begin{cases} Lu_1^{n+1} = f \ \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \ \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = u_0 \ \text{ sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} Lu_2^{n+1} = f \ \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \ \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = u_0 \ \text{ sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

La convergence vers la solution global de cet algorithme a été établir par Schwarz en utilisant le principe de maximum.

Ensuite, vers les années 30, Sobolev a découvert la formulation variationnelle pour des problèmes en élasticité linéaire. Le résultat de Sobolev offre un point de départ pour utiliser l'algorithme pour des problèmes ne vérifiant pas le principe de maximum. Puis en 1988. P. L. Lions donne une interprétation de cet algorithme à l'aide d'une formulation variationnelle[13], [14]. Il précise que la convergence de cette méthode dépend de la taille du recouvrement d et du pas de discrétisation h . On note que la convergence est meilleure si le recouvrement est important.

2 Méthode de Schwarz avec recouvrement et sans recouvrement

Pour simplifier, nous allons nous limiter au cas d'un problème elliptique avec conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} Lu = f \ \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

Les méthodes de Schwarz sont basées sur un partitionnement du domaine Ω en $m\,(m \geq 2)$ sous domaines Ω_i , tel que :

$$\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \Omega_i \tag{3.4}$$

Ces méthodes visent à résoudre le problème global sur Ω en résolvant des problèmes plus petits sur les sous domaines Ω_i. On distingue deux types de partitionnement.

2.1 Méthode de Schwarz sans recouvrement :

L'intersection entre les sous domaines se limite aux interfaces :

$$\forall 1 \leq i \leq j \leq m, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \ \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \Gamma_{i,j}.$$

Où $\Gamma_{i,j}$ est la frontière entre les sous domaines Ω_i et Ω_j.

Algorithme 2 : Schwarz sans recouvrement

Soit $(u_i^0)_{i=1,2}$ une approximation initiale de la solution dans chaque sous domaine dans le cas d'un découpage en deux sous domaines, et $(u_i^n)_{i=1,2}$ est la valeur de l'approximation de u à l'itération n.

L'algorithme de Schwarz s'écrit :

$$\begin{cases} Lu_1^{n+1} = f \ \text{ dans } \Omega_1 \\ B_1 u_1^{n+1} = B_1 u_2^n \ \text{ sur } \Gamma_{1,2} \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} Lu_2^{n+1} = f \ \text{ dans } \Omega_2 \\ B_2 u_2^{n+1} = B_2 u_1^n \ \text{ sur } \Gamma_{1,2} \end{cases} \tag{3.6}$$

Où B_1 et B_2 sont des opérateurs d'interfaces. (voir la figure 3.1).

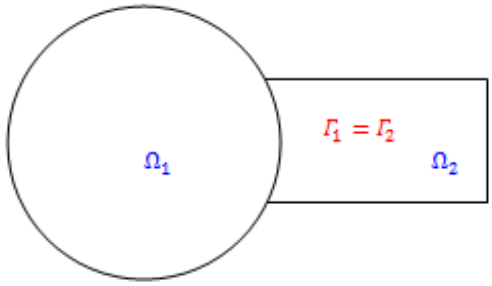

Figure 3.1

Dans cet algorithme la résolution des deux sous problèmes se déroule en parallèle : à l'itération courante, chaque sous domaine a besoin d'information à l'itération précédente de son voisin, avec lequel il a des frontières non vides P. L. Lion (1990) a montré que ces opérateurs d'interfaces peuvent être remplacé par des conditions aux limites mixtes de type Dirichlet et Neumann, qui sont appelées « conditions de transmissions de types de Robin ou mixtes ».

2.2 Méthodes de Schwarz avec recouvrement :

Chaque sous domaines recouvre une partie de ses sous domaines voisins. On distingue deux versions :

Algorithme 3 : Schwarz additif – calcul parallèle :

On prend comme condition de Dirichlet pour un sous domaine Ω_i, les valeurs calculées par

le sous domaines voisin à l'itération précédant. Soit à résoudre ces deux sous problèmes en parallèles :

$$\begin{cases} Lu_1^{n+1} = f \ \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \ \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1 \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} Lu_2^{n+1} = f \ \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^n \ \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2/\Gamma_2 \end{cases} \tag{3.8}$$

Algorithme 4 : Schwarz multiplicatif – calcul séquentiel

On prend comme condition de Dirichlet les dernières valeurs d'interfaces calculées par le sous domaines voisin. (voir la figure 3.2).

Soit à résoudre ces deux sous problèmes séquentiellement :

$$\begin{cases} Lu_1^{n+1} = f \ \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \ \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1 \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} Lu_2^{n+1} = f \ \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \ \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2/\Gamma_2 \end{cases} \tag{3.10}$$

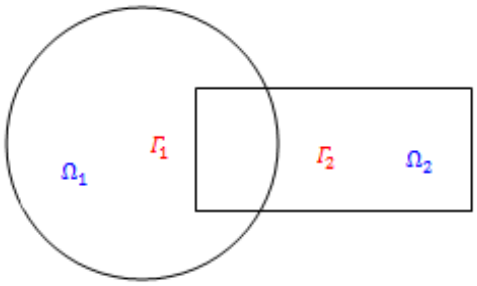

Figure 3.2

Remarque 2.1 *L'algorithme de Schwarz multiplicatif s'interprète algébriquement comme une méthode de Gauss Seidel par blocs où chaque bloc est relatif a l'opérateur restreint sur un sous domaine. Le degré du parallélisme dans ce cas est moins important puisque le sous domaine doit* Ω_2 *attendre que le calcul soit fait sur le sous domaine voisin* Ω_1 *avant d'entamer son propre calcul.*

Remarque 2.2 *Il faut souligner que la convergence de la méthode de Schwarz additive est moins bonne que sa version multiplicative. En termes algébriques, elle correspond à une méthode de Jacobi par blocs chaque bloc est relatif a l'opérateur restreint sur un sous domaine.*

L'avantage de ces algorithmes est l'économie en place mémoire, en effet si le problème global est résolu par des méthodes directes le coût de stockage est très grand, mais en divisant ce problème en plus petits morceaux la quantité de stockage peut être réduite.

3 Méthode Alternée de Schwarz pour les E.D.Ps Non Linéaires

Cette partie est consacré l'analyse de la convergence de la méthode alternée de Schwarz pour deux sous-domaines -avec recouvrement-, appliquée une classe de problèmes elliptiques non linéaires, dans ses deux versions continue et discrète. Dans le cas discret, on considère que chaque sous-domaine possède sa propre discrétisation par une méthode des éléments finis conforme : " Non matching grid " dans le sens qu'un nœud ou un triangle appartenant un sous-domaine n'appartient pas l'autre.

L'étude de la convergence est établie dans le cas où les deux processus continu et discret de Schwarz conservent la définition de base de la méthode de Schwarz dans le sens où les deux suites de sous-problèmes générées par le processus de Schwarz restent des problèmes non linéaires. L'existence de la solution du problème initial dans les deux cas continu et discret est prouvée par une méthode de monotonie dite également la méthode des sous et sur-solutions

3.1 Position du problème continu

On considère l' E.D.P elliptique non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

Où f est une fonctionnelle non-linéaire monotone croissante et lipschitzienne, il existe une constante k telle que $\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$,

Le problème (3.11) est équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = F(u) \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où la fonction f est définie par $F(u) = f(u) + cu$

c désigne une constante positive telle que

$$k < \beta \leq c.$$

dont la formulation faible est :

$$a(u, v) + c(u, v) = (F, v), \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

On décompose le domaine en deux sous-domaines polygonaux et tels que :

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.On note par $\partial\Omega_i$ le bord de Ω_i et $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$,

l'intersection de Γ_i avec Γ_j est supposée vide. (voir la figure 3.3).

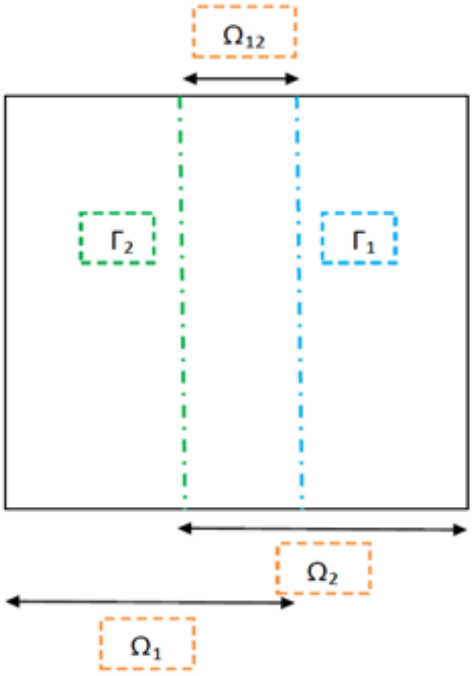

Figure 3.3

On définit le problème suivant :

$$\begin{cases} -\triangle u_i + cu_i = F(u_i) \text{ dans } \Omega_i \\ u_i = u_j \quad \text{sur } \Gamma_i \\ u_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_i/\Gamma_i \end{cases} \tag{3.12}$$

Soit l'espace

$$V_i^{(w_j)} = \left\{ v \in H^1(\Omega_i) \text{ tel que } v = w_g \text{ sur } \Gamma_i \right\}.$$

On associe au problème le système de deux sous-problèmes comme suit :
trouver $(u_1, u_2) \in V_1^{(u_2)} \times V_2^{(u_1)}$ solution de :

$$\begin{cases} a_1(u_1, v) + c(u_1, v) = (F(u_1), v), \forall v \in V_1^{(u_2)} \\ a_2(u_2, v) + c(u_2, v) = (F(u_2), v), \forall v \in V_2^{(u_1)}, \end{cases} \tag{3.13}$$

où

$$a_i(u, v) = \int_{\Omega_i} (\nabla u . \nabla v)\, dx;$$
$$u_i = u/\Omega_i, \quad i = 1, 2.$$

3.2 Suites de Schwarz Continues

Soit u^0 une donnée initiale continue dans $C^0(\Omega)$ telle que

$$a\left(u^0, v\right) + c\left(u^0, v\right) = (F, v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.14}$$

$u_2^0 = u^0/\Omega_2$, on définit respectivement la suite de Schwarz $\left(u_1^{n+1}\right)$ dans Ω_1 telle que $u_1^{n+1} \in V_1^{\left(u_2^n\right)}$ est solution de :

$$a_1\left(u_1^{n+1}, v\right) + c\left(u_1^{n+1}, v\right) = \left(F\left(u_1^{n+1}\right), v\right), \forall v \in V_1^{\left(u_2^n\right)}; \tag{3.15}$$

et $\left(u_2^{n+1}\right)$ dans Ω_2 telle que $u_2^{n+1} \in V_2^{\left(u_1^{n+1}\right)}$ est solution de :

$$a_2\left(u_2^{n+1}, v\right) + c\left(u_2^{n+1}, v\right) = \left(F\left(u_2^{n+1}\right), v\right), \forall v \in V_2^{\left(u_1^{n+1}\right)}. \tag{3.16}$$

On introduit dans ce qui suit un résultat de la convergence géométrique des suites de Schwarz.

Théorème 3.1 *[13] Les deux suites de Schwarz* $\left(u_2^{n+1}\right)$ *et* $\left(u_1^{n+1}\right)$ *convergent géométriquement vers la solution* (u_1, u_2) *du système continu. Ils existent deux constantes* k_1 *et* k_2 *dans qui dépendent respectivement de* (Ω_1, Γ_2) *et* (Ω_2, Γ_1) *tels que pour tout* $n \geq 0$ *on a :*

$$\|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq k_1^n k_2^n \|u^0 - u\|_{(\Gamma_1)}$$

$$\|u_2 - u_2^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_2)} \leq k_1^{n+1} k_2^n \|u^0 - u\|_{(\Gamma_2)}.$$

Discrétisation

Pour tout $i = 1, 2$, on définit τ^{h_i} une discrétisation par une méthode des éléments finis régulière et quasi uniforme et h_i est le pas de discrétisation. On suppose que les deux triangulations sont incompatibles dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$ dans le sens qu'un triangle appartenant à une triangulation n'appartient pas nécessairement à l'autre. (voir la figure 3.4).

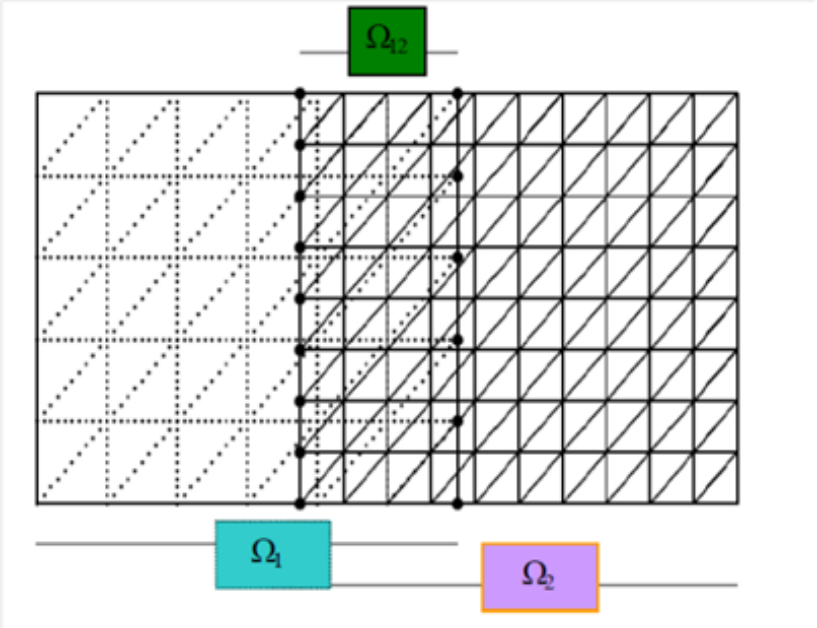

Figure 3.4

Soit $V_{h_i} = V_{h_i}(\Omega_i)$ l'espace des fonctions continues par morceaux sur τ^{h_i} et qui s'annulent sur $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i$, défini par

$$V_{h_i} = \left\{ v \in C\left(\overline{\Omega_i}\right) \cap H_0^1(\Omega_i) \text{ tel que } v/K \in P_1, \forall K \in \tau^{h_i} \right\}$$

$\phi_s^i, s = 1, 2, ..., m(h_i)$ sont les fonctions de bases de τ^{h_i}. Pour tout $w \in C\left(\overline{\Gamma_i}\right)$ on définit l'espace

$$V_{h_i}^{(w)} = \left\{ v \in V_{h_i} : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i; v = \pi_{h_i}(w) \text{ sur } \Gamma_i \right\},$$

où π_{h_i} est l'opérateur d'interpolation sur Γ_i.

Le Principe du Maximum Discret (P.M.D) : ([12], [8])

On suppose que les matrices résultantes des discrétisations des problèmes (3.17) et (3.18) sont des $M-$matrices.

On fait remarquer que comme les deux triangulations et sont indépendantes dans l'intersection des sous-domaines il est impossible de formuler le problème discret global relatifs au problèmes continu.

3.3 Suites de Schwarz discrètes

On définit Les suites de Schwarz discrètes comme suit :

Soit u_h^0 l'analogue discret de u^0 définie dans (3.15). La suite de Schwarz discrète $\left(u_{h_1}^{n+1}\right)$ dans Ω_1 telle que $u_{h_1}^{n+1} \in V_{h_1}^{\left(u_{h_2}^n\right)}$est solution de :

$$a_1\left(u_{h_1}^{n+1}, v\right) + c\left(u_{h_1}^{n+1}, v\right) = \left(F\left(u_{h_1}^{n+1}\right), v\right), \forall v \in V_{h_1}^{\left(u_{h_2}^n\right)};\ \forall n \geq 0 \tag{3.17}$$

et la suite de Schwarz discrète $\left(u_{h_2}^{n+1}\right)$ dans Ω_2 telle que $u_{h_2}^{n+1} \in V_{h_2}^{\left(u_{h_1}^{n+1}\right)}$ est solution de :

$$a_2\left(u_{h_2}^{n+1}, v\right) + c\left(u_{h_2}^{n+1}, v\right) = \left(F\left(u_{h_2}^{n+1}\right), v\right), \forall v \in V_{h_2}^{\left(u_{h_1}^{n+1}\right)};\ \forall n \geq 0 \tag{3.18}$$

4 Analyse de l'Erreur d'Approximation

Cette section est consacrée à la démonstration des deux résultats principaux. On commence par introduire les deux suites auxiliaires suivantes et démontrer un lemme fondamental relatif à chaque résultat.

4.1 Définition des deux Suites de Schwarz Auxiliaires

Soit $w_{h_2}^0 = u_{h_2}^0$ la donnée initiale discrète, on définit les suites auxiliaires suivantes $\left(w_{h_1}^{n+1}\right)$ telles que $w_{h_1}^{n+1} \in V_{h_1}^{\left(u_2^n\right)}$est solution de :

$$a_1\left(w_{h_1}^{n+1}, v\right) + c\left(w_{h_1}^{n+1}, v\right) = \left(F\left(u_1^{n+1}\right), v\right), \forall v \in V_{h_1}^{\left(u_2^n\right)} \tag{3.19}$$

et $\left(w_{h_2}^{n+1}\right)$ telles que $w_{h_2}^{n+1} \in V_{h_2}^{\left(u_1^{n+1}\right)}$est solution de :

$$a_1\left(w_{h_2}^{n+1}, v\right) + c\left(w_{h_2}^{n+1}, v\right) = \left(F\left(u_2^{n+1}\right), v\right), \forall v \in V_{h_2}^{\left(u_1^{n+1}\right)} \tag{3.20}$$

Il est claire que $w_{h_1}^{n+1}$ et $w_{h_2}^{n+1}$ sont respectivement les analogues discrets de u_1^{n+1} et u_2^{n+1} définis dans (3.16) et (3.17). Comme $F(.)$ est continue $\|F\left(u_i^n\right)\|_\infty \leq C$ (C indépendante de n) en utilisant alors les estimations standards pour les problèmes elliptiques linéaires, on a :

$$\|u_i^n - w_{h_i}^n\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq C h_i^2 \left|\log h_i\right| \tag{3.21}$$

Dans toute la suite on utilisera les notations suivantes :

$$\|.\|_1 = \|.\|_{L^\infty(\Omega_1)}, \|.\|_2 = \|.\|_{L^\infty(\Omega_2)}$$

5 Estimation Optimale de l'Erreur d'Approximation

Le lemme qui suit joue un rôle cursial dans la démenstration du résultat dans l'estimation de l'erreur.

Lemme 5.1 *[2] Soient u_i^n suite de schwarz continue et $u_{h_i}^n$ la suite de schwarz discrète, alors on a :*

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{i=1}^{n+1} \|u_1^i - w_{h_1}^i\|_1 + \sum_{i=0}^{n} \|u_2^i - w_{h_2}^i\|_2 \tag{3.22}$$

$$\|u_2^{n+1} - u_{h_2}^{n+1}\|_2 \leq \sum_{i=0}^{n+1} \|u_2^i - w_{h_2}^i\|_2 + \sum_{i=1}^{n+1} \|u_1^i - w_{h_1}^i\|_1 \tag{3.23}$$

Preuve. On démontre maintenant (3.23) et (3.24) simultanément par récurrence. En effet pour $n = 1$, en utilisant la proposition (1.2), on obtient dans le domaine 1 :

$$\begin{aligned}\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 &\leq \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \|w_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \\ &\leq \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \max\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)\|F\left(u_1^1\right) - F\left(u_{h_1}^1\right)\|_1; \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2\right\}\end{aligned}$$

Alors

$$\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \max\left\{\left(\frac{1}{\beta}\right)\|F\left(u_1^1\right) - F\left(u_{h_1}^1\right)\|_1; \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2\right\}$$

donc

$$\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \max \rho\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1; \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2$$

où

$$\rho = \frac{k}{\beta} > 1.$$

On distingue alors deux cas possibles :

$$(1) : \max\left\{\rho\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1;\ \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2\right\} = \rho\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \tag{3.24}$$

ou

$$(2) : \max\left\{\rho\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1;\ \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2\right\} = \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 \tag{3.25}$$

Le cas (1) implique

$$\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \rho\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \tag{3.26}$$

$$\|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 \leq \rho\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \tag{3.27}$$

En additionnant $\|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1$ dans (3.28), on obtient

$$\|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 + \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \rho\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \tag{3.28}$$

alors $\|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \rho\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1$ est majoré par les deux valeurs suivantes

$$\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \text{ et } \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 + \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1.$$

Ce qui implique

$$(a) : \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 + \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1$$

ou

$$(b) : \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 + \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \tag{3.29}$$

implique

$$\begin{aligned}(a) : \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 &\leq \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 + \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 \\ &\leq \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \rho\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1.\end{aligned} \tag{3.30}$$

ou

$$(b) : \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 + \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \tag{3.31}$$
$$\leq \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \rho\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1$$

Ainsi, les deux cas (a) et (b) sont vrais car ils coïncident avec (3.27). donc il y a contradiction et le cas 2 est impossible ou le cas 1 est possible seulement si :

$$\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 = \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 + \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1. \tag{3.32}$$

Tandis que le cas 2 implique

$$\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 \tag{3.33}$$

$$\rho\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2, \tag{3.34}$$

c'est-à-dire

$$\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \left(\frac{1}{\rho}\right)\|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 < \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2$$
$$\leq \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2$$

qui coinside avec (3.24). Donc dans les deux cas (1) et (2) on peut écrire

$$\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - w_{h_1}^1\|_1 + \|u_2^0 - u_{h_2}^0\|_2 \tag{3.35}$$

Ce qui équivalent à

$$\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \sum_{i=1}^{1}\|u_1^i - w_{h_1}^i\|_1 + \sum_{i=0}^{0}\|u_2^i - w_{h_2}^i\|_2 \tag{3.36}$$

De manière similaire, on obtient dans le domaine 2

$$\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \max\left\{\rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_1; \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1\right\}$$

Donc, on distingue alors deux cas suivants :

$$(1) : \max\left\{\rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_1; \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1\right\} = \rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \tag{3.37}$$

ou

$$(2) : \max\left\{\rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_1; \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1\right\} = \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \tag{3.38}$$

Le cas (1) implique

$$\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \tag{3.39}$$

$$\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \tag{3.40}$$

additionnant $\|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2$ dans (3.41), on obtient

$$\|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \tag{3.41}$$

par conséquent, $\|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2$ est majoré par

$$\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \text{ et } \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1$$

donc :

$$(a) : \|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \tag{3.42}$$

ou

$$(b) : \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \leq \|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \tag{3.43}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}(a) : \|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 &\leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \\ &\leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2\end{aligned} \tag{3.44}$$

ou

$$\begin{aligned}(b) : \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 &\leq \|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \\ &\leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2\end{aligned} \tag{3.45}$$

Ainsi, les deux cas (a) et (b) sont vrais car ils coïncident avec (3.40). donc il y a contradiction et le cas 1 est impossible ou le cas 2 est possible seulement si :

$$\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 = \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \tag{3.46}$$

le cas (2) implique

$$\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1$$

$$\rho\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \leq \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1$$

donc

$$\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \tag{3.47}$$

et

$$\begin{aligned}\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \leq \left(\frac{1}{\rho}\right)\|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 &< \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1 \\ &\leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1\end{aligned}$$

qui coinside avec (3.48). Donc les deux cas (1) et (2) implique

$$\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{h_1}^1\|_1. \tag{3.48}$$

Utilisant (3.37) on obtient

$$\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \leq \|u_2^1 - w_{h_2}^1\|_2 + \left(\sum_{i=1}^{1}\|u_1^i - w_{h_1}^i\|_1 + \sum_{i=0}^{0}\|u_2^i - u_{h_2}^i\|_2\right)$$

qui est équivalent

$$\|u_2^1 - u_{h_2}^1\|_2 \leq \left(\sum_{i=0}^{1} \|u_2^i - u_{h_2}^i\|_2 + \sum_{i=1}^{1} \|u_1^i - w_{h_1}^i\|_1 \right). \tag{3.49}$$

Maintenant, on suppose que (3.51) et (3.52) sont vraies

$$\|u_1^n - u_{h_1}^n\|_1 \leq \sum_{i=1}^{n} \|u_1^i - w_{h_1}^i\|_1 + \sum_{i=0}^{n-1} \|u_2^i - u_{h_2}^i\|_2 \tag{3.50}$$

$$\|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 \leq \sum_{i=0}^{n} \|u_2^i - u_{h_2}^i\|_2 + \sum_{i=1}^{n} \|u_1^i - w_{h_1}^i\|_1 \tag{3.51}$$

et montrons que

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{i=1}^{n+1} \|u_1^i - w_{h_1}^i\|_1 + \sum_{i=0}^{n} \|u_2^i - u_{h_2}^i\|_2 \tag{3.52}$$

$$\|u_2^{n+1} - u_{h_2}^{n+1}\|_2 \leq \sum_{i=0}^{n+1} \|u_2^i - u_{h_2}^i\|_2 + \sum_{i=1}^{n+1} \|u_1^i - w_{h_1}^i\|_1 \tag{3.53}$$

on a dans le domaine 1

$$\begin{aligned}
\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 &\leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \|w_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \\
&\leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \max\left\{ \left(\frac{1}{\beta}\right) \|F\left(u_1^{n+1}\right) - F\left(u_{h_1}^{n+1}\right)\|_1; \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 \right\}
\end{aligned}$$

alors

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \max\left\{ \left(\frac{1}{\beta}\right) \|F\left(u_1^{n+1}\right) - F\left(u_{h_1}^{n+1}\right)\|_1; \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 \right\}$$

or

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \max\left\{ \rho \|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1; \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 \right\}.$$

On distingue alos deux cas possibles :

$$(1) : \max\left\{\rho\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1; \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2\right\} = \|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \tag{3.54}$$

ou

$$(2) : \max\left\{\rho\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1; \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2\right\} = \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 \tag{3.55}$$

Le cas (1) implique

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \rho\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \tag{3.56}$$

$$\|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 \leq \rho\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \tag{3.57}$$

Additionnant $\|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1$ dans (3.58), on obtient

$$\|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 + \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \rho\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1.$$

Donc
$\|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \rho\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1$ est majorée par

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \text{ et } \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 + \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1$$

ce qui implique :

$$(a) : \|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 + \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 \tag{3.58}$$

ou

$$(b) : \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 + \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \tag{3.59}$$

qui implique

$$\begin{aligned}(a) : \|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 &\leq \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 + \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 \\ &\leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \rho\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1\end{aligned}$$

ou

$$(b) : \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 + \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1$$
$$\leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \rho\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1.$$

Ainsi, les deux cas (a) et (b) sont vrais car ils coïncident avec (3.57). donc il y a contradiction et le cas 1 est impossible ou le cas 2 est possible seulement si :

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 = \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 + \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 \tag{3.60}$$

le cas (2) implique

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 \tag{3.61}$$

$$\rho\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 \tag{3.62}$$

c'est à dire

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \left(\frac{1}{\rho}\right)\|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 < \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2$$
$$\leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2$$

ce qui équivalant avec (3.62). Donc dans les deux cas 1 et 2 on peut écrire

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \|u_2^n - u_{h_2}^n\|_2 \tag{3.63}$$

utilisant (3.54), on obtient

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1^{n+1} - w_{h_1}^{n+1}\|_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\|u_2^i - u_{h_2}^i\|_2 + \sum_{i=1}^{n}\|u_1^i - u_{h_1}^i\|_1\right)$$

où

$$\|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{i=1}^{n+1}\|u_1^i - w_{h_1}^i\|_1 + \sum_{i=0}^{n}\|u_2^i - u_{h_2}^i\|_2. \tag{3.64}$$

■

Théorème 5.1 *[2] Soit $h = \max\{h_1, h_2\}$. Alors pour tout $i = 1, 2$; il existe une constante C indépendante de h et de n telle que :*

$$\|u_i - u_{h_i}^{n+1}\|_i \leq Ch^2 \left|\log h\right|^2 \tag{3.65}$$

Preuve. *On présente la démonstration pour le cas $i = 1$. Le cas $i = 2$ est similaire. En effet, soit $\kappa = \max\{k_1, k_2\}$ alors en utilisant le théorème (3.1), le lemme (5.1) et (3.22) on a*

$$\|u_1 - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1 - u_1^{n+1}\|_1 + \|u_1^{n+1} - u_{h_1}^{n+1}\|_1$$

Donc

$$\|u_1 - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \kappa^2 \|u_1 - u_1^0\|_1 + \left(\sum_{i=1}^{n+1} \|u_1^i - w_{h_1}^i\|_1 + \sum_{i=0}^{n} \|u_2^i - w_{h_2}^i\|_2\right)$$

Ainsi

$$\|u_1 - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \kappa^2 \|u_1 - u_1^0\|_1 + 2(n+1)Ch^2 \left|\log h\right| \tag{3.66}$$

En mettant

$$\kappa^{2n} = h^2$$

Alors

$$n = \frac{\left|\log h\right|}{\left|\log \kappa\right|} = \overline{C} \left|\log h\right| \tag{3.67}$$

on obtient

$$\|u_1 - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq \kappa^2 \|u_1 - u_1^0\|_1 + 2\left(\overline{C} \left|\log h\right| + 1\right) Ch^2 \left|\log h\right| \tag{3.68}$$

Et donc le résultats cherché

$$\|u_1 - u_{h_1}^{n+1}\|_1 \leq Ch^2 \left|\log h\right|^2 \tag{3.69}$$

■

6 Conclusion

Dans cette étude, nous avons proposé une approche permettant d'estimer l'erreur en norme L^∞ de l'algorithme de Schwarz pour un problème d'EDP non linéaire. L'estimation d'erreur obtenue sur chaque sous domaine est optimal avec un ordre de convergence $h^2 \left|\log h\right|^2$.

Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode de Schwarz multiplicative. On peuvent pour suivre cette étude dans les nombreuses directions, par exemple :

• Appliquer la variante additive pour un cas d'équation non linéaire parabolique, hyperbolique ou pour un cas d'un système d'EDPs non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Harbi, sur l'analyse numérique de la méthode de Schwarz pour une classe de Problèmes Elliptiques non linéaires », thèse, 2012.

[2] A. Harbi, "Maximum Norm Analysis of a Nonmatching Grids Method for Nolinear Elliptic Boundary Value Problem $-\Delta u = f\,(u)$, World Academy of Science, Engineering and Technology",vol. 78, pp. 1164-1169, 2013.

[3] A. Harbi and M.Boulbrachene,"Maximum Norm Analysis of a Nonmatching Grids Method for Nonlinear Elliptic PDES",journal of Applied Mathematic. Volume 2011.

[4] A. Mehri, "Approximation par la Méthode de Décomposition en sous Domaines d'une classe d'Inéquation Quasi-variationnelle Elliptique », thèse, Mai 2015.

[5] A. Quarteroni, A. Valli : Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Oxford University Press, Oxford, (1999).

[6] B.E Smith, P. Bjorstad, W. D. Gropp : Domain Decomposition : Parallel Multilevel. Algorithms for Elliptic Partial Differential Equations. Cambridge University Press, New York, (1996).

[7] H. Brezis and M. Sibony, "Mthodes d'approximation et d'itration pour les opratteurs monotones" Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 28, pp. 59-82, 1968.

[8] J. Karatson and S. Korotov,"Discrete Maximum principale for finite element solutions of nonlinear elliptic problems with mixed boundary conditions", Numerische Mathematik, vol. 99, no.4, pp. 669-698, 2005.

[9] J. Nitsche," L^{∞} –convergence of finite element approximations", in proceedings of the Symposium on Mathematical Aspects of Finite Element Methods, vol. 606 of Lecture Notes in Mathematics, pp. 261-274, 1977.

[10] M.Boulbrachene, Ph. Cortey- Dumont, and J.-C. Miellou, "Mixing finite elements and finite differences in a subdomain method," in Domain Decomposition for partial Differential Equations, pp. 198-216, SIAM, Philadelphia, Pa, USA, 1988.

[11] M.Boulbrachene and S. Saadi,"Maximum norm analysis of an overlapping nonmatching grids method for the obstacle problem"Advances in Difference Equations, pp. 1-10, 2006.

[12] P G. Ciarlet and P.-A. Raviart," Maximum principale and uniform convergence for the finite element method." Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 2, pp. 17-31, 1973.

[13] P.-L. Lions, "On the Schwarz alternating method. " , in proceedings of the 1 st International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, pp. 1-42, SIAM, Philadelphia, pa, USA, 1988.

[14] P.-L. Lions, "On the Schwarz alternating method." ,Stochastic interpretation and order properties" , in of the 2nd International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, pp. 47-70, SIAM, Philadelphia, Pa, USA, 1989.

[15] R. Glowinski, G. H. Golub, J. Periaux : First Int. Symp. On Domain Decomposition Methods. SIAM, philadelphia, (1988).

[16] S.-H. Lui, "On monotone and Schwarz alternating methods for non linear elliptic PDEs", Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 35, no. 1, pp. 1-15, 2001.

[17] S.-H. Lui, "On monotone iteration and Schwarz methods for non linear elliptic PDEs", Numerische Mathematik, vol. 93, no. 1, pp. 109-129, 2002.

[18] T. F. chan, T. R Mathew : Domain Decomposition Algorithms. Acta Numerica, pp.61-143. (1994).

[19] T. P. Mathew and G. Russo,"Maximum norm stability of difference schemes for parabolic equations on overset nonmatching spac-time grids", Mathematics of Computation, vol. 72, no. 242, pp. 619-656, 2003.

[20] X.-C. Cai, T.P. Mathew, and M. V. Sarkis, "Maximum norm analysis of overlapping nonmatching grids discretization of elliptic equations,"SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 37, no. 5, pp. 1709 - 1728, 2000.