



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف

Université Chadli Bendjedid – El Tarf

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات

Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

### Thème

Résolution des équations différentielles  
fractionnaires

Présenté par :

Benyahia Oussama

Devant le Jury :

Dr. Bouaziz Asma	MCA	Univ. Chadli Bendjedid – El Tarf	Présidente
Dr. Ali Khelil Karima	MCB	Univ. Badji Mokhtar – Annaba	Rapporteur
Dr. Mehri Allaoua	MCA	Univ. Chadli Bendjedid – El Tarf	Examineur

Année Universitaire 2021–2022

## Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A mon père, le chemin à suivre dans cette vie.

A ma mère, source de tendresse et l'exemple du dévouement.

A mes très chers frères et sœurs.

Et à tous ceux qui m'ont soutenu dans la réalisation de ce travail.

## REMERCIEMENTS

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

Je voudrais également exprimer mes remerciements, Dr. *Ali Khelil Karima*, pour ses conseils et ses orientations sages et rationnels, et pour les avoir mis à disposition tout au long de la période d'achèvement de ce mémoire.

Je remercie Dr. *Bouaziz Asma* pour avoir accepté de présider le jury et Dr. *Mehri Allaoua*, qui m'a fait l'honneur d'avoir accepté de rapporter mon mémoire.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>ii</b>
<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>Définitions et propriétés</b>	<b>6</b>
<b>1 Définitions et propriétés</b>	<b>7</b>
1.1 Fonction gamma . . . . .	7
1.1.1 Propriétés . . . . .	8
1.1.2 Valeurs particulières . . . . .	10
1.1.3 Quelques formules importantes . . . . .	13
1.2 Fonction <i>Bêta</i> . . . . .	13
1.2.1 Propriétés . . . . .	14
1.2.2 Quelques valeurs . . . . .	17
1.3 Fonction Mittag-Leffler . . . . .	18

1.3.1	Propriétés . . . . .	18
	<b>Intégrale fractionnaire et dérivée fractionnaire</b>	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>Intégrale fractionnaire et dérivée fractionnaire</b>	<b>21</b>
2.1	Intégrale fractionnaire au sens de $\mathcal{R}$ iemann- $\mathcal{L}$ iouville . . . . .	22
2.1.1	Propriétés de l'intégrale fractionnaire . . . . .	25
2.2	Dérivées fractionnaires . . . . .	26
2.2.1	Au sens de $\mathcal{R}$ iemann- $\mathcal{L}$ iouville . . . . .	26
2.2.2	Au sens de Caputo . . . . .	27
2.3	Lien entre les deux dérivées fractionnaires . . . . .	28
2.4	Propriétés . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Equation différentielle fractionnaire</b>	<b>31</b>
3.1	Existence et unicité de la solution . . . . .	32

## ملخص:

في هذا العمل قمنا بدراسة وجود ووحدانية الحل لمعادلة تفاضلية ذات مشتقات كسرية ذات الشكل التالي:

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(x) = f(t, y(x)), & x \in [0, T], \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

حيث  ${}^c D^\alpha$  مؤثر المشتق الكسري لـ Caputo

و  $f(., y): [0, T] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  دالة مستمرة بالنسبة لكل  $x \in [0, T]$  ،  
من اجل كل  $y \in I \subset \mathbb{R}$  .

**كلمات مفتاحية:** تكامل الكسري، مشتق الكسري، معادلة تفاضلية ذات مشتق كسري.

# Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse par la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème de Cauchy d'une équation différentielle fractionnaire au sens de *Caputo* suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(x) = f(x, y(x)), & x \in [0, T], 1 < \alpha \leq 2 \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \end{cases}$$

où  ${}^C D^\alpha$  est l'opérateur de dérivation fractionnaire de *Caputo*,  $f(., y) : [0, T] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par rapport à  $x \in [0, T]$ , pour tout  $y \in I \subset \mathbb{R}$ .

**Mots clés :** Intégrale fractionnaire, dérivée fractionnaire, équation différentielle fractionnaire.

# Abstract

In this work, we are interested in the question of existence and uniqueness of the solution for a *Cauchy* problem of a fractional differential equation in the sense of *Caputo* as follows :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(x) = f(x, y(x)), & x \in [0, T], 1 < \alpha \leq 2 \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \end{cases}$$

where  ${}^C D^\alpha$  is the *Caputo* fractional derivative operator,  $f(., y) : [0, T] \times I \rightarrow \mathbb{R}$  a continuous function with respect to  $x \in [0, T]$ , for all  $y \in I \subset \mathbb{R}$ .

**Key words :** Fractional integral, fractional derivative, fractional differential equation.

# Introduction

Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe. Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaires sont souvent associés aux noms de *Riemann* et de *Liouville*, alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne. En effet, l'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de *Leibniz*, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire. Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre  $n$ ,  $\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$  où  $n$  est un entier positif. Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa l'*Hospital* à s'interroger sur la possibilité d'avoir  $n$  dans  $\mathbb{Q}$ . Il posa la question : et si  $n = \frac{1}{2}$ ? En 1695, dans une lettre à l'*Hospital*, *Leibniz* écrivit prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que  $d^{\frac{1}{2}}x$  sera égal à  $x\sqrt{dx} : x$ , un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ». Sur ces questions, nous retrouvons les contributions de grands mathématiciens tels qu'*Euler* ou *Lagrange* au *XVIIIe* siècle, *Laplace*, *Fourier*, *Liouville* (1832, 1837) ou *Riemann* (1847) au *XIXe* siècle, ainsi qu'à *Grünwald* (1867) et *Letnikov* (1868) dans la seconde moitié du même siècle. Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche

passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière (*voir* [6], [9], [10], [13]). Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés.

Le calcul traditionnel était basé sur la différentiation de l'intégration d'ordre entier, le concept du calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière. Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques, thermiques et viscoélastiques sont régis par des équations différentielles à dérivées non entières. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est pas appropriée. Des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non entières ont été développés.

Dans le développement de la théorie de l'intégration et de la dérivation fractionnaires ainsi que ses applications en mathématiques pures, la définition de *Riemann-Liouville* a joué un rôle très important. Néanmoins, les résolutions des problèmes physiques requièrent une certaine révision de cette approche bien établie, notamment en diffusion et en électricité où la dérivation fractionnaire est utilisée pour mieux décrire certaines propriétés physiques. En rhéologie, les modèles mathématiques adoptés conduisent en générale à des équations différentielles fractionnaires. Constater également que l'obtention des systèmes fractionnaires issus directement de l'identification, particulièrement en électrochimie, en mécanique et dans les systèmes biomédicaux. Ainsi, la nécessité d'une formulation adéquate des conditions initiales pour de telles équations différentielles fractionnaires est fondamentale.

En générale, les applications requièrent des définitions permettant l'utilisation de conditions initiales interprétables physiquement. Malheureusement, la définition de

la dérivée fractionnaire au sens de *Riemann-Liouville* conduit à des conditions initiales de type fractionnaires qui sont difficiles à interpréter physiquement. En dépit du fait qu'un tel problème de valeur ou condition initiale peut être bien résolu en utilisant une représentation diffusive [15]. Cependant, *Sabatier* et al. [15] montrent que ni l'approche *Riemann-Liouville*, ni l'approche *Caputo* ne peuvent être utilisées pour prendre en compte les conditions initiales d'une manière commode d'un point de vue physique. Pour éventuellement pallier à cette situation, *Caputo* dans [3] propose une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire qui porte d'ailleurs son nom et qui incorpore les conditions initiales de la fonction à traiter, ainsi que ses dérivées entières. Cette approche a été adoptée par *Caputo* et *Mainardi* dans leurs travaux en viscoélasticité [4].

La dérivation au sens classique ou d'ordre entier a un sens physique et géométrique, tous deux très clairs, ce qui a priori permet de simplifier son introduction dans la résolution des problèmes appliqués dans les domaines scientifiques. Malheureusement, ce n'est pas le cas pour la différentiation fractionnaire. Le manque ou l'absence de telles interprétations a été fortement abordé lors de la première conférence internationale sur le calcul fractionnaire qui a eu lieu à New Haven (*USA*) en 1974 où la question a été classée parmi les problèmes ouverts et est restée sans réponse (*voir* [13], [14]), et ce malgré les rencontres internationales qui ont suivi, notamment en 1984, 1989 et en 1996. Récemment, beaucoup d'efforts ont été dédiés à cette question et différentes approches ont été adoptées, parmi celles-ci nous citerons celle de *Podlubny* qui se base sur l'intégrale de *Riemann-Liouville* et pour une introduction à la matière [12]. La raison principale de l'usage des modèles d'ordre entier était l'absence des méthodes de solution pour des équations fractionnaires ou d'ordre non entier. Actuellement un bon nombre de méthodes pour l'approximation de la dérivée et de l'intégrale fractionnaires ont été proposées et peuvent être employées dans divers

applications, notamment en théorie du contrôle, en théorie des circuits, etc... La dérivation fractionnaire a largement dépassé le stade simple outil formel capable de condenser en une écriture plus compacte certaines propriétés purement analytiques ; c'est notamment par ses domaines d'application de plus en plus nombreux qu'elle a ouvert la voie à des questionnement scientifiques profonds.

Dans les dernières décennies, beaucoup d'auteurs ont affirmés que l'usage des opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires est souhaitable pour la description des propriétés de plusieurs matériaux comme les polymères.

Les développements résumés ci-dessus constituent les trois chapitres de ce mémoire. On va en décrire les principaux aspects, afin de faciliter la lecture de ce mémoire, certains développements et démonstration sont donnés.

Le chapitre 1, est consacré à la description de quelques fonctions spéciales, à savoir, la fonction  $\Gamma$  Gamma, la fonction  $\beta$  Bêta et la fonction de *Mittag-Leffler*. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Le chapitre 2, est dédié à la description de la théorie de l'intégrale et la dérivée fractionnaires sont proposées : les différentes définitions de la dérivation fractionnaire proposées dans la littérature (*Riemann-Liouville* et *Caputo*) et leurs propriétés principales.

Le chapitre 3, est consacré à l'étude du problème de Cauchy d'une équation différentielle avec dérivation non entière. On s'intéresse particulièrement à la dérivation fractionnaire au sens de *Caputo*. Pour conclure ce chapitre, on a proposé quelques résultats sur l'existence et l'unicité de solutions.

# Chapitre 1

## Définitions et propriétés

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques définitions des fonctions spéciales telles que la fonction  $\mathcal{G}$ amma, la fonction  $\mathcal{B}$ êta et la fonction de  $\mathcal{M}$ ittag- $\mathcal{L}$ effler avec certains propriétés importantes et exemples [8].

### 1.1 Fonction gamma

Cette fonction est née de l'exigence de donner un sens à  $x!$  pour  $x$  complexe quelconque.

En mathématiques, la fonction gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes (excepté en certains points).

**Définition 1.1.1** *Pour tout nombre  $z$  tel que  $\operatorname{Re} z > 0$ , la fonction gamma est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (1.1)$$

*Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est*

*strictement positive.*

### 1.1.1 Propriétés

#### 1. Lien avec la fonction factorielle

La fonction gamma est généralement perçue comme un prolongement de la factorielle à l'ensemble des nombres complexes (excepté les entiers négatifs ou nuls), on a

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (1.2)$$

En plus,

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En effet, par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= \left[ e^{-t} \frac{t^z}{z} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{z} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{z} \Gamma(z + 1) \end{aligned}$$

d'où

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

D'après (1.2), on a

$$\begin{aligned}
 \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
 &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\
 &\vdots \\
 &= n(n-1)(n-2)\dots 2.1 \\
 &= n!, \quad n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

**Exemple 1.1.1**

$$\begin{aligned}
 \Gamma(8) &= \Gamma(7+1) = 7!, \\
 \frac{\Gamma(10)}{\Gamma(6)} &= \frac{9!}{5!}.
 \end{aligned}$$

**2. Dérivée**

La fonction gamma est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , sa dérivée est donnée par

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))t^{z-1}e^{-t}dt.$$

En effet, par dérivation, on obtient

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
 \Gamma'(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} (t^{z-1} e^{-t}) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\partial(t^{z-1})}{\partial z} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{z-1} e^{-t} dt,
 \end{aligned}$$

généralement, sa dérivée  $k$ -ième possède sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'expression intégrale suivante :

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1} e^{-t} dt.$$

### 1.1.2 Valeurs particulières

1.  $\Gamma(1) = 1$  et  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

En effet,

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

pour  $z = 1$ , on a

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Evaluons  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

D'après (1.1), on a

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt,\end{aligned}$$

posons  $t = y^2 \Rightarrow dt = 2y dy$ , alors

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-y^2} 2y dy \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.\end{aligned}$$

Multiplions l'intégrale par elle-même, on obtient

$$\begin{aligned} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= \left( 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left( 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \end{aligned}$$

c'est une intégrale sur le 1<sup>e</sup> quadrant du plan, on peut la calculer aisément en passant aux coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et

$$dx dy = r dr d\theta$$

donc

$$\begin{aligned} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= 4 \cdot \frac{\pi}{2} \left[ \frac{e^{-r^2}}{-2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$2. \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}$$

D'après (1.2), on a

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z),$$

alors

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) + 1\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\dots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

**Remarque 1.1.1** Ces valeurs permettent, par récurrence de déterminer les autres valeurs de la fonction gamma pour les demi entiers positifs et négatifs également.

La fonction gamma n'existe pas pour les entiers négatifs.

### 1.1.3 Quelques formules importantes

#### Formule de multiplication

$$\Gamma(z).\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

#### Formule des compléments

Pour tout  $z$  tel que  $0 < \operatorname{Re} z < 1$

$$\Gamma(1 - z).\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

## 1.2 Fonction Bêta

L'origine de la fonction Bêta remonte au début du calcul différentiel et intégral.

**Définition 1.2.1** La fonction *Bêta* est définie par l'intégrale suivante :

$$\mathcal{B}(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1} (1-t)^{z_2-1} dt, \quad \operatorname{Re} z_1 > 0, \quad \operatorname{Re} z_2 > 0. \quad (1.3)$$

### 1.2.1 Propriétés

Soient  $z_1, z_2$  deux nombres complexes, on a

1. La relation  $\mathcal{B}(z_1, z_2) = \mathcal{B}(z_2, z_1)$  se démontre en effectuant le changement de variable  $T \rightarrow 1 - t$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(z_1, z_2) &= \int_0^1 t^{z_1-1} (1-t)^{z_2-1} dt \\ &= \int_1^0 (1-t)^{z_1-1} t^{z_2-1} (-dt) \\ &= \int_0^1 t^{z_2-1} (1-t)^{z_1-1} dt \\ &= \mathcal{B}(z_2, z_1). \end{aligned}$$

2. La relation

$$z_1 \mathcal{B}(z_1, z_2 + 1) = z_2 \mathcal{B}(z_1 + 1, z_2)$$

se démontre en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
 z_1 \mathcal{B}(z_1, z_2 + 1) &= z_1 \int_0^1 t^{z_1-1} (1-t)^{z_2} dt \\
 &= z_1 \left[ \frac{t^{z_1}}{z_1} (1-t)^{z_2} \right]_0^1 + z_1 \int_0^1 \frac{t^{z_1}}{z_1} \cdot z_2 (1-t)^{z_2-1} dt \\
 &= z_2 \int_0^1 t^{z_1} (1-t)^{z_2-1} dt \\
 &= z_2 \mathcal{B}(z_1 + 1, z_2).
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

3. Pour  $n = z_2 + 1$  est un entier, cela donne une relation de récurrence.

D'après (1.4), on a

$$\mathcal{B}(z_1, n) = \frac{n-1}{z_1} \mathcal{B}(z_1 + 1, n-1)$$

et comme  $\mathcal{B}(z_1, 1) = \frac{1}{z_1}$ , on obtient de proche en proche que

$$\mathcal{B}(z_1, n) = \frac{1.2 \dots (n-1)}{z_1(z_1+1) \dots (z_1+n-1)}.$$

Et si  $z_1 = m$  est un entier, on obtient

$$\mathcal{B}(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

4. La fonction gamma et Bêta sont reliées par la relation suivante :

$$\mathcal{B}(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1) \cdot \Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1 + z_2)},$$

on a évidemment

$$\begin{aligned}\Gamma(z_1).\Gamma(z_2) &= \left( \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z_1-1} dx \right) \cdot \left( \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{z_2-1} dy \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} x^{z_1-1} y^{z_2-1} dx dy.\end{aligned}$$

Dans cette intégrale double, effectuons le changement de variable  $y = u - x$  pour  $0 \leq x \leq u$ , et conservons la variable  $x$ ,  
comme  $\frac{\partial y}{\partial u} = 1$ , on a  $dx dy = dx du$ , on a

$$\begin{aligned}\Gamma(z_1).\Gamma(z_2) &= \int_0^{+\infty} \int_0^u e^{-u} x^{z_1-1} (u-x)^{z_2-1} dx du \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} \left( \int_0^u x^{z_1-1} (u-x)^{z_2-1} dx \right) du,\end{aligned}$$

pour évaluer l'intégrale relative à  $dx$ , effectuons le changement de variable  $x = tu$ , on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^u x^{z_1-1} (u-x)^{z_2-1} dx &= \int_0^1 (tu)^{z_1-1} (u-tu)^{z_2-1} u dt \\ &= u^{z_1+z_2-1} \int_0^1 t^{z_1-1} (1-t)^{z_2-1} dt \\ &= u^{z_1+z_2-1} \mathcal{B}(z_1, z_2).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\Gamma(z_1).\Gamma(z_2) &= \mathcal{B}(z_1, z_2) \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z_1+z_2-1} du \\ &= \mathcal{B}(z_1, z_2)\Gamma(z_1 + z_2).\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré.

### 1.2.2 Quelques valeurs

La fonction  $\mathcal{B}$ êta possède un grand nombre d'expression intégrale obtenue par changement de variables.

Posons

$$\begin{aligned}t &= \sin^2 \theta \text{ et } 1 - t = \cos^2 \theta \\ \implies dt &= 2 \sin \theta \cos \theta d\theta,\end{aligned}$$

on obtient que

$$\mathcal{B}(z_1, z_2) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2z_1-1} (\cos \theta)^{2z_2-1} d\theta.$$

En particulier,

$$\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Par suite,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma(1).\pi,$$

cela donne

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

## 1.3 Fonction Mittag-Leffler

Cette fonction est considérée comme une généralisation de la fonction  $e^x$ .

**Définition 1.3.1** 1. La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre est définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

2. La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

### 1.3.1 Propriétés

$$\begin{aligned} E_{\alpha,1}(z) &= \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\ &= E_\alpha(z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \\ &= e^z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{1,2}(z) &= \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{(k+1)!} \\
 &= \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \\
 &= \frac{e^z - 1}{z},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{1,3}(z) &= \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{(k+2)!} \\
 &= \frac{1}{z^2} \sum_{k \geq 0} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} \\
 &= \frac{e^z - 1 - z}{z^2},
 \end{aligned}$$

$$E_{1,p}(z) = \frac{1}{z^{p-1}} \left( e^z - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{z^k}{k!} \right), \quad p \geq 2,$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(p)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z),$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,1+\beta}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha,1+\beta}(z),$$

$$\begin{aligned}
 E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \\
 &= ch(z),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{\operatorname{sh}(z)}{z}. \end{aligned}$$

## Chapitre 2

# Intégrale fractionnaire et dérivée fractionnaire

Le but de ce chapitre est de présenter les éléments sur la théorie du calcul fractionnaire sur lesquels s'appuie le travail décrit dans le chapitre 3. On expose la théorie de l'intégrale et de la dérivée fractionnaires tout en passant par les différentes définitions de la dérivation fractionnaire. En plus, une évaluation numérique de l'intégrale et la dérivée fractionnaires de quelques fonctions usuelles [9, 11].

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions.

## 2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit  $f$  une fonction réelle définie et continue sur  $[a, b[$  (où  $b \leq +\infty$ ), soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $[a, b[$ , que l'on notera  $I_a^1 f$ , définie comme suit

$$F(x) = I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

avec  $F(a) = 0$ .

Ainsi la deuxième primitive est définie par

$$\begin{aligned} I_a^2 f(x) &= \int_a^x I_a^1 f(t) \, dt \\ &= \int_a^x \left[ \int_a^t f(s) \, ds \right] dt \end{aligned}$$

D'après le théorème de *Fubini*, on obtient

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) \, dt$$

En plus, la troisième primitive est donnée par

$$I_a^3 f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f(t) \, dt$$

Par récurrence, on a

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) \, dt$$

ou bien

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt, \quad (2.1)$$

**Définition 2.1.1** Soit  $\alpha$  un nombre complexe tel que  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ .

On appelle intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  de  $f$ , l'intégrale suivante :

$$I_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad (2.2)$$

ou bien

$$I_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

où  $\Gamma$  est définie par (1.1).

**Remarque 2.1.1** Soit  $n$  un entier positif.

Lorsque  $\alpha = n$ , on a le cas de la  $n$  ième primitive de  $f$ .

**Exemple 2.1.1** 1. Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$  par

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad \beta > -1.$$

D'après (2.2), on a

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(t-a)^\beta}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \end{aligned}$$

En intégrant par un changement de variable, posons  $t = a + (x - a)y$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{(x - a)^{\beta + \alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^\beta (1 - t)^{\alpha - 1} dt \\ &= \frac{(x - a)^{\beta + \alpha}}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{B}(\beta + 1, \alpha) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{B}$  est définie par (1.3).

2. Soit  $f$  une fonction constante sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(x) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

D'après (2.2), on a

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x - t)^{1 - \alpha}} dt \\ &= \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{dt}{(x - t)^{1 - \alpha}} \\ &= \frac{k}{\alpha \Gamma(\alpha)} (x - a)^\alpha \\ &= \frac{k}{\Gamma(\alpha + 1)} (x - a)^\alpha. \end{aligned}$$

3. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^{kx}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'après (2.2), on a

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{e^{kt}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt. \end{aligned}$$

En intégrant par un changement de variable, posons  $y = x - t$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} \frac{e^{k(x-t)}}{t^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} e^{k(x-t)} dt \\ &= E_{x-a}(\alpha, k) \end{aligned}$$

où  $E_x$  la fonction de Mellin-Ross définie par

$$E_x(\alpha, k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{k(x-t)} dt.$$

### 2.1.1 Propriétés de l'intégrale fractionnaire

Le résultat suivant donne quelques propriétés importantes de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

**Proposition 2.1.1** *soient  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ ,  $\alpha, \beta$  deux nombres complexes tels que  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  et  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ , alors*

1.  $I_a^\alpha (I_a^\beta f(x)) = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$ .
2.  $\frac{d}{dx} [I_a^\alpha f(x)] = I_a^{\alpha-1} f(x)$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) > 1$ .

$$3. \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_a^\alpha f(x) = f(x).$$

## 2.2 Dérivées fractionnaires

### 2.2.1 Au sens de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de *Riemann-Liouville* est la plus connue et la plus répandue. Cette définition est basée sur la primitive ou l'intégrale *k ième* d'une fonction.

**Définition 2.2.1** Soit  $\alpha \in [n - 1, n]$ ,  $n$  un entier positif non nul.

La dérivée fractionnaire au sens de *Riemann-Liouville* est définie par

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} [I_a^{n-\alpha} f(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n+\alpha}} dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Exemple 2.2.1** 1. Soit  $f(x) = (x-a)^\beta$ ,  $\beta > -1$ .

D'après la relation (2.3), on a

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} [I_a^{n-\alpha} f(x)] \\ &= \frac{d^n}{dx^n} [I_a^{n-\alpha} (x-a)^\beta] \end{aligned}$$

D'après l'exemple 2.1.1, on obtient

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D_a^\alpha f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{(x-a)^{\beta+n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \mathcal{B}(\beta+1, n-\alpha) \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\beta+n-\alpha} \\
 &= \Gamma(\beta+1) \frac{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{(\beta+n-\alpha)\Gamma(\beta+n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\
 &= \Gamma(\beta+1) \frac{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.
 \end{aligned}$$

2 Soit  $f(x) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

D'après la relation (2.3), on a

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} [I_a^{n-\alpha} k]$$

D'après l'exemple 2.1.1, on obtient

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D_a^\alpha f(x) &= \frac{k}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{n-\alpha} \\
 &= k \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)\dots(1-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+1)} (x-a)^{-\alpha} \\
 &= k \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)\dots(1-\alpha)}{(n-\alpha)(n-\alpha-1)\dots(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} \\
 &= \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

## 2.2.2 Au sens de Caputo

L'avantage principal de l'approche *Caputo* est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de *Caputo* des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.

**Définition 2.2.2** Soit  $n$  un entier positif non nul, soient  $f \in C^n([a, b])$  et  $n-1 <$

$\alpha < n$ .

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre  $\alpha$  de  $f$  est définie par

$${}^C D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{1-n+\alpha}} dt \quad (2.4)$$

## 2.3 Lien entre les deux dérivées fractionnaires

Le résultat suivant donne une relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

**Théorème 2.3.1** [7] Si  ${}^{RL}D_a^\alpha f$  et  ${}^C D_a^\alpha f$  existent, alors

$${}^C D_a^\alpha f(x) = {}^{RL}D_a^\alpha f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}.$$

**Remarque 2.3.1** Lorsque  $f^{(j)}(a) = 0$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ , on a

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x) = {}^C D_a^\alpha f(x).$$

**Exemple 2.3.1** 1. Soit  $f(x) = (x-a)^\beta$ ,

sachant que

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)(x-a)^{\beta-n} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n}, \quad \beta > n-1. \end{aligned}$$

D'après la relation (2.4), on a

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{1-n+\alpha}} dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x \frac{(t-a)^{\beta-n}}{(x-t)^{1-n+\alpha}} dt, \quad 0 \leq n-1 \leq \alpha \leq n. \end{aligned}$$

En intégrant par un changement de variable, posons

$$t = a - (x-a)y,$$

on obtient

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 t^{\beta-n} (1-t)^{n-\alpha-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \mathcal{B}(\beta-n+1, n-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

**Remarque 2.3.2** Lorsque  $\alpha = 1$ , on a le cas usuel, i.e.

$${}^C D_a^1 (x-a)^\beta = \frac{d}{dx} (x-a)^\beta.$$

2 Soit  $f(x) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  et comme

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad n \geq 1.$$

Par conséquent,

$${}^C D_a^\alpha k = 0.$$

## 2.4 Propriétés

•

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt \right) \\
 &= \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + {}^C D_a^\alpha f(x).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

• Si  $f \in C([a, b])$ , alors

$${}^C D_a^\alpha [I_a^\alpha f(x)] = f(x). \tag{2.6}$$

• Si  $f \in C^n([a, b])$ , alors

$$I_a^\alpha [{}^C D_a^\alpha f(x)] = f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i. \tag{2.7}$$

• Linéarité

$$D^\alpha [\beta f(x) + \gamma g(x)] = \beta D^\alpha f(x) + \gamma D^\alpha g(x) \tag{2.8}$$

où  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$  et  $D^\alpha$  désigne l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ou bien au sens de *Caputo*.

# Chapitre 3

## Equation différentielle fractionnaire

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution pour un problème de Cauchy d'une équation différentielle fractionnaire au sens de *Caputo* [1, 2, 5].

soit  $\alpha$  un réel positif tel que  $n - 1 < \alpha \leq n$ , pour  $n \geq 1$ , et soit  $f(., y)$  une fonction continue par rapport à  $x \in [a, b]$ , pour tout  $y \in I \subset \mathbb{R}$ .

**Définition 3.0.1** 1. *L'équation différentielle est une équation qui contient une ou dérivées fractionnaires.*

2. *Le système fractionnaire est un système qui est décrit par une équation différentielle fractionnaire.*

**Définition 3.0.2** *Le problème de Cauchy d'une équation différentielle au dérivée fractionnaire*

1 Au sens de Riemann-Liouville est donné par

$$\begin{cases} {}^{RL}D_a^\alpha y(x) = f(x, y(x)) \\ {}^{RL}D_a^{\alpha-i} y(x) = y_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3.1)$$

2 Au sens de Caputo est donné par

$$\begin{cases} {}^C D_a^\alpha y(x) = f(x, y(x)) \\ y^{(i)}(a) = y_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.1 Existence et unicité de la solution

Tout d'abord, on va montrer que le problème de Cauchy possède au moins une solution.

**Théorème 3.1.1** *Le problème de Cauchy 3.2 admet une solution  $y$  si et seulement si*

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i}{i!} (x-a)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \quad (3.3)$$

**Preuve.**

Tout d'abord, supposons que  $y$  est une solution de 3.2, i.e.

$${}^C D_a^\alpha y(x) = f(x, y(x)).$$

D'après la relation 2.7, on a

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i}{i!} (x-a)^i + \mathbf{I}_a^\alpha [{}^C D_a^\alpha y(x)] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i}{i!} (x-a)^i + \mathbf{I}_a^\alpha f(x, y(x)) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i}{i!} (x-a)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt
 \end{aligned}$$

D'où la relation 3.3 satisfaite.

Réciproquement, supposons que

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i}{i!} (x-a)^i + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt$$

Dérivons la relation au-dessus  $k$ -fois, on obtient

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n-1} \frac{y_i}{(i-k)!} (x-a)^{i-k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-k-1} f(t, y(t)) dt$$

Effectuons le changement de variable  $t = a + z(x-a)$ , on obtient

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n-1} \frac{y_i}{(i-k)!} (x-a)^{i-k} + \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^1 (1-z)^{\alpha-k-1} f(a+z(x-a), y(a+z(x-a))) dz.$$

Lorsque  $x$  tend vers  $a$ , on a

$$y^{(k)}(a) = y_k.$$

De plus, Appliquons l'opérateur  ${}^C D_a^\alpha$  sur 3.3 et d'après 2.8, on obtient

$${}^C D_a^\alpha \left[ y(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i}{i!} (x-a)^i \right] = {}^C D_a^\alpha [I_a^\alpha f(x, y(x))].$$

D'après 2.6, on trouve

$${}^C D_a^\alpha \left[ y(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i}{i!} (x-a)^i \right] = f(x, y(x)).$$

Par conséquent,  $y$  est une solution du problème 3.2. ■

Dans tout ce qui suit, considérons  $1 < \alpha \leq 2$  et notera par  ${}^C D^\alpha$  l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo pour  $a = 0$ .

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(x) = f(x, y(x)), & x \in [0, T], \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \end{cases} \quad (3.4)$$

**Théorème 3.1.2** [7] *Soit  $f(., y)$  une fonction définie sur  $[0, T] \times I$  ( $I \subset \mathbb{R}$ ) vérifie les conditions suivantes :*

1.  $f(., y)$  est continue par rapport à  $x \in [0, T]$ , pour tout  $y \in I$ ,
2.  $\exists M > 0 : |f(x, y(x))| < M$ , pour tout  $(x, y) \in [0, T] \times I$ .

Alors  $y \in C^2([0, T])$  est une solution de 3.4 si et seulement si

$$y = y_0 + y_1 x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt.$$

où  $C^2([0, T])$  l'ensemble des fonctions deux fois continûment dérivables sur  $[0, T]$ .

**Preuve.**

Résultat immédiate d'après le théorème 3.1.1. ■

**Lemme 3.1.1** Soit  $y \in C^2([0, T])$ , alors

$$|I^\alpha f(x, y(x))| \leq \frac{M x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

où  $I^\alpha$  l'intégrale fractionnaire pour  $a = 0$  et  $f(., y)$  une fonction vérifie les conditions du théorème 3.1.2.

**Preuve.**

$$\begin{aligned} |I^\alpha f(x, y(x))| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x |(x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t))| dt. \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{M x^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} = \frac{M x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

■

**Corollaire 3.1.1** [7] Soit  $f(., y)$  une fonction définie sur  $[0, T] \times I$  ( $I \subset \mathbb{R}$ ) vérifie les conditions du théorème 3.1.2.

Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x)), & x \in [0, T], \\ y(0) = y_0, & y'(0) = y_1, \end{cases} \quad (3.5)$$

admet une solution  $y \in C^2([0, T])$  si et seulement si

$$y = y_0 + y_1 x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt.$$

**Théorème 3.1.3** [7] Soit  $f(., y)$  une fonction définie sur  $[0, T] \times I$  ( $I \subset \mathbb{R}$ ) vérifie les conditions suivantes :

1.  $f(., y)$  est continue par rapport à  $x \in [0, T]$ , pour tout  $y \in I$ ,
2.  $\exists M > 0 : |f(x, y(x))| < M$ , pour tout  $(x, y) \in [0, T] \times I$ ,
3.  $f$  est  $L$ -lipschitzienne par rapport à  $y$ , i.e.

$$\exists L > 0 : |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq L |y_1(x) - y_2(x)|, \quad y_1, y_2 \in I, \quad x \in [0, T],$$

4.  $\exists x_0 \in ]0, T] : L \left[ \frac{x_0^{\alpha-1} (x_0 - \alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] < 1$ .

Alors le problème 3.4 admet une solution unique.

**Corollaire 3.1.2** [7] Soit  $f(., y)$  une fonction définie sur  $[0, T] \times I$  ( $I \subset \mathbb{R}$ ) vérifie les conditions du théorème 3.1.3.

Alors le problème 3.5 admet une solution unique.

# Conclusion

Au terme de ce mémoire, après avoir présenté les notions préliminaires utiles dans la théorie du calcul fractionnaire. On a définie selon l'approche de *Riemann-Liouville* sur le calcul fractionnaire, la notion d'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$ , qui généralise la célèbre formule d'intégrales répétées  $n$ -fois, en plus, on a introduit les deux définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires à savoir celle de *Riemann-Liouville* et de *Caputo*, en donnant les propriétés les plus importantes de ces notions. Enfin, on a présenté des résultats d'existence et d'unicité du problème de *Cauchy* différentiel d'ordres fractionnaires relatifs à la dérivée de *Caputo*.

# Bibliographie

- [1] M. Benchohra, B. A. Slimani, Existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional differential equations, *EJDE*, Vol **2009** :10, 2009, 1 – 11.
- [2] L. Byszewski, Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, *J. Math. Anal. Appl.*, **162**, 1991, 494 – 505.
- [3] M. Caputo, Linear model of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **13**, 1967, 529 – 539.
- [4] M. Caputo and F. Mainardi, A new dissipation model based on memory mechanism, *Pure and Applied Geophysics*, **91**, 1971, 134 – 137.
- [5] D. Delbosco, L. Rodino, Existence and uniqueness for a fractional differential equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **204**, 1996, 609 – 625.
- [6] S. Dugowson, *Les Différentielles Métaphysiques : Histoire et Philosophie de la Généralisation de l'Ordre de Dérivation*, PhD thesis, Université de Paris XIII, Villetaneuse , France, 1994.
- [7] A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and application of fractional differential equations*, North-Holland, 2006.
- [8] P. Maroni, Fonctions eulériennes, Polynômes orthogonaux classiques, In technique de l'ingénieur, **154**, 1994, 1 – 30.

- [9] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [10] K .B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [11] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic, New York, 1999.
- [12] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, **5**, 2002, 367 – 386.
- [13] B. Ross, *Fractional Calculus and its Applications*, volume **457** of *Lecture Notes in Mathematics*, chapter A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional calculus, pages 1 – 36. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [14] B. Ross, *Fractional Calculus and its Applications*, volume **457** of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [15] J. Sabatier, M. Merveillaut, R. Malti and A. Oustaloup, How to impose physically coherent initial conditions to a fractional system? *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **10**, 2010, 1318 – 1326.