



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف  
Université Chadli Bendjedid – El Tarf  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
قسم الرياضيات  
Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Spécialité:** Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

### Thème

**Résultat d'existence et d'unicité des solutions  
d'une équation différentielle fractionnaire**

Présenté par:

Mohamed Arif

Devant le Jury :

Dr. BOUSSELSAL Naila	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. BOUAZIZ Asma	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. SAIFIA Ouarda	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2023-2024

Résultat d'existence et d'unicité des solutions  
d'une équation différentielle  
fractionnaire

Mohamed Arif

Département de Mathématiques, Université de Chadli Bendjedid El-Tarf

Juin 2024

Encadré par : Dr. Asma Bouaziz

---

# TABLE DES MATIÈRES

1	<b>Introduction</b> . . . . .	11
<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>14</b>
1	Quelques définitions . . . . .	14
2	Espaces utilisés . . . . .	15
3	Fonctions spéciales . . . . .	17
3.1	La fonction Gamma d'Euler . . . . .	17
3.2	La fonction Bêta . . . . .	20
3.3	Fonction de Mittag-Leffler . . . . .	22
4	Théorèmes des points fixes . . . . .	25
4.1	Théorème de point fixe de Banach . . . . .	25
4.2	Théorème de point fixe de krasnosselskii . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Calcul fractionnaire</b>	<b>27</b>
1	Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .	27
2	Dérivation fractionnaire . . . . .	36
2.1	La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	37
2.2	La dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	42

---

2.3	Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Quelques résultats sur l'existence et l'unicité des solutions</b>	<b>47</b>
1	Position du problème . . . . .	47
2	Existence et unicité des solutions . . . . .	52
2.1	Premier résultat d'existence . . . . .	52
2.2	Deuxième résultat d'existence . . . . .	56

---

# TABLE DES FIGURES

<i>Figure 01 : Courbe représentative de fonction Gamma.....</i>	<i>17</i>
<i>Figure 02 : Courbe représentative de fonction Beta.....</i>	<i>21</i>
<i>Figure 03 : La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.....</i>	<i>23</i>
<i>Figure 04 : La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.....</i>	<i>23</i>

---

## REMERCIEMENT

Je tiens avant tout à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a donnés pour pouvoir mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier **Dr. Bouaziz Asma**, mon encadrante de mémoire, pour la confiance qu'elle m'a donné, ses conseils avisés, et le temps qu'elle a consacré à la réalisation du mémoire et à finalisation du travail. Je voudrais aussi lui combien j'apprécie sa grande présence et son respect indéfectible des rendez-vous.

Je voudrais également remercier les membres du jury

**Dr. Bousalsal Naila**, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant d'être présidente de mon jury.

**Dr. Saifia Ouarda**, qui a bien voulu examiner ce travail.

Enfin, je remercie ma famille en particulier **mon père, ma mère et ma femme**, qui m'ont toujours soutenu et fait preuve de courage dans des moments difficiles, aussi que tous **mes amis les plus proches**.

---

## Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A celui qui m'a encouragé à persévérer tout au long de ma vie, à l'homme le plus important de ma vie (Mon cher père : **Khaled** que Dieu prolonge sa vie)

À celui qui est au-dessus et basé sur lui, au cœur qui donne (Ma mère bien-aimée : **Nedjma**, que Dieu prolonge sa vie et garde sa santé et son bien-être)

À un compagnon de lutte et de circonstances difficiles qui n'a pas ménagé son temps ni ses efforts pour m'aider (Ma femme vertueuse **Hala** et mon cher fils **Ayhem Younes**)

A mes chers frères, toute ma famille, mes amis, tous les étudiants de 2<sup>ième</sup> année mathématiques.

À tous ceux qui ont contribué, même par une lettre, à ma vie universitaire, parmi les honorables professeurs du département de mathématique, université de Chadli Bendjedid pour leurs utiles conseils, leur patience, et leur prévenance..., et désolé pour ceux d'entre nous qui sont tombés par inadvertance

Quant aux remerciements particuliers. Nous le tournons également vers tous ceux qui ne nous ont pas soutenus. Au contraire, il s'est mis sur notre chemin. Et obstrué la marche de nos recherches et planté des épines sur le chemin. Sans leur présence, nous n'aurions pas ressenti le plaisir de la recherche, ni la douceur d'une compétition positive pour briser leur puissance. Nous avons tous nos remerciements...

A eux tous : je dédie cet humble travail, que je demande à Dieu Tout-Puissant de l'accepter sincèrement. Puisse-t-il être dans la balance de vos bonnes actions et des miennes...

---

## ملخص

تلعب المعادلات الكسرية دورا مهما في نمذجة العديد من العمليات الفيزيائية والبيولوجية والميكانيكية، إلخ. في السنوات الاخيرة، تم التركيز على دراسة وجود حلول المعادلات التفاضلية الكسرية وتفردتها. هدفنا الرئيسي في هذه المذكرة هو تقديم العديد من نتائج الوجود والتفرد لمعادلة تفاضلية كسرية باستخدام مبدأ الإنكماش لبناخ وكذلك نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسيلسكي.

الكلمات المفتاحية: المعادلة التفاضلية الكسرية، نظرية النقطة الثابتة لبناخ، نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسيلسكي.

---

## Résumé

La théorie des équations fractionnaires jouent un rôle important dans la modélisation de plusieurs processus physiques, biologiques et mécaniques, etc. Ces dernières années, une attention particulière à été portée à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires.

Notre but principal dans ce mémoire est de présenter plusieurs résultats l'existence et d'unicité pour une équation différentielle fractionnaire en utilisant le principe de contraction de Banach ainsi que la théorie du point fixe de Krasnoselskii.

**Mots clés :** Equation différentielle fractionnaire, théorème de point fixe de Banach, théorème du point fixe de Krasnoselskii.

---

## Abstract

The theory of fractional equations plays an important role in the modeling of several physical, biological and mechanical processes, etc. In recent years, a great attention was paid on the study of the existence and uniqueness of solutions for fractional differential equations.

Our main goal in this work is to present several existence and uniqueness results for a fractional differential equation using Banach's contraction principle as well as Krasnoselskii's fixed-point theorem.

**Keywords :** Fractional differential equation, Banach fixed point theorem, Krasnoselskii fixed point theorem.

---

## Notation

$\mathbb{N}$  : Ensemble des nombres entiers positifs.

$\mathbb{N}^*$  :  $\mathbb{N} - \{0\}$ .

$\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$  : Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

$\mathbb{R}^n$  : Espace vectoriel de dimension  $n$  construit sur le corps des réels.

$\mathbb{C}$  : Ensemble des nombres complexes.

$\| \cdot \|$  : Norme.

$R - L$  : Riemann-Liouville.

$\Gamma(\alpha)$  : Fonction Gamma d'Euler.

$B(\alpha, \beta)$  : Fonction Bêta.

$M - L$  : Fonction de Mittag-Leffler

$[\alpha]$  : Partie entière de  $\alpha$ .

$I_a^\alpha$  : Intégral fractionnaire de Riemann-Liouville.

$D_a^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

${}^c D_a^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Caputo.

# 1 Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui. Ces origines remontent à la fin du 17 – *ième* siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. L'histoire débute le 30 septembre 1695. Dans une lettre adressée à Gottfried Wilhelm Leibniz (le co-inventeur du calcul différentiel), le Marquis de l'Hôpital lui pose la question suivante :  $\frac{d^n f}{dt^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$  ? Le calcul différentiel étant encore à ses débuts, Leibniz réponds qu'il s'agit là d'un paradoxe, mais qu'un jour, il en découlera de très utiles conséquences.

Le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans, et les dérivées fractionnaires ont été mentionnées dans certains contextes , par exemple : Euler en 1730, Lagrange en 1772, Laplace en 1812, Lacroix en 1819, J.B.J. Fourier(1822), Abel entre (1823 - 1826), J. Liouville(1832-1873), Riemann en 1847, H. Holmgren(1865-1867), Grunwald en 1867 [12], A.K. Grunwald(1867-1872), Liouville et Letnikov en 1868[21] [20], A.V. Letnikov(1868-1872), Sonin en 1869, Laurent en 1884, Nekrassov en 1888, Krug en 1890, Hadamard en 1892, O. Heaviside(1892-1912), Weyl en 1917, Marchaud en 1927, Hardy et Littlewood en 1928, Riesz en 1937, E.R. Amour(1938-1996), H. Kober(1940), D.V. Widder(1941), M. Riesz(1949), Oldham et Spanier en 1970 et enfin Ross en 1974 où il a organisé la première conférence sur ce sujet à l'Université de New Haven (voir [15] [18] [17] [23] [25] [27] [28] [29]).

D'autre part, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de 30 ans, elle a été objet de quelques conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune,

commencé en 1968.

Aujourd'hui, et comme l'avait prédit Leibniz, le calcul fractionnaire a un large éventail d'applications, notamment le traitement du signal et de l'image, les biotechnologies et les applications biomédicales, le diagnostic et la détection des défauts dans les machines par la modélisation. Il occupe une grande position dans les nombreux mathématiciens, en raison du développement de la théorie du calcul fractionnaire et ses applications en physique, mécanique, économie, Viscoélasticité, électrochimie, électromagnétisme,...etc. (voir [24], [28], [9], [15], [10]). Pas mal d'auteurs ont discuté l'existence de solutions des équations différentielles fractionnaires non linéaires par exemple ([7], [3], [16], [11], [30], [14],[4],[26]).

### **Organisation du mémoire**

Ce mémoire se répartit en trois chapitres, comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons les notions préliminaires nécessaires à la bonne compréhension de ce manuscrit

Le deuxième chapitre fournit une base théorique pour les calculs fractionnaires nécessaires. Les concepts de base et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont énumérés.

L'objet du troisième chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour une équation différentielle fractionnaire hyperbolique non linéaire suivante :

$${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J = [0, 1], \quad (1)$$

soumis à des conditions aux limites intégrales

$$y(0) = \int_0^1 y(s) ds, \quad (2)$$

$$y(1) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} y(s) ds, \quad (3)$$

où  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue,  ${}^C D^\alpha$  la dérivée fractionnaire

---

d'ordre  $\alpha$  de Caputo avec  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \beta \leq 1$ . Nous commençons par établir une équivalence entre ce problème et une équation intégrale. Ensuite, nous présentons un premier résultat d'existence en utilisant le théorème du point fixe de Banach. Un second résultat d'existence sera présenté en utilisant le théorème de Krasnoselskii.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques concepts et définitions que nous emploierons dans les chapitres suivants.

### 1 Quelques définitions

**Définition 1.1 (Norme)** [31] Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . On appelle une norme sur  $E$  toute application  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifie :

$$-\forall x \in E : \| x \| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$-\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \| \lambda x \| = |\lambda| \| x \| \text{ (homogénéité).}$$

$$-\forall x, y \in E : \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \text{ (inégalité triangulaire).}$$

On dit alors que  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace vectoriel normé.

**Définition 1.2 (Opérateur linéaire)** [22] un opérateur linéaire (ou plus simplement un opérateur) est une fonction entre deux espaces vectoriels qui est linéaire sur son domaine de définition.

**Définition 1.3 (Opérateur compact)** Soit  $D \in E$ , un opérateur  $F : D \rightarrow E$  est dit compact si pour tous ensemble borné  $S \subset D$ ,  $F(S)$  est relativement compact. De

## 2. Espaces utilisés

---

plus,  $F$  est complètement continu s'il est continu et compact.

**Définition 1.4 (Ensemble équicontinue)** Soit  $A$  un sous ensemble de  $C(J, \mathbb{R})$ ;  $L$ 'ensemble  $A$  est équicontinue. i.e. pour tout  $\varepsilon > 0$ ; il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A.$$

### Théorème d'Arzèla-Ascoli

**Théorème 1.1** Soit  $A$  un sous ensemble de  $C(J; \mathbb{R})$ ;  $A$  est relativement compact dans  $C(J; \mathbb{R})$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i  $L$ 'ensemble  $A$  est uniformément borné. i.e. il existe une constante  $k > 0$  telle que :

$$\|f(x)\| \leq K \text{ pour tout } x \in J \text{ et tout } f \in A .$$

ii  $L$ 'ensemble  $A$  est équicontinue.

## 2 Espaces utilisés

**Définition 2.1 (Espace  $L^p$ )** [27] Soit  $\Omega = ]a, b[$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) un intervalle borné ou non borné de  $\mathbb{R}$ . Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit l'espace  $L^p$  comme suit :

1. Pour  $1 \leq p < \infty$ ,  $L^p(\Omega)$  est l'espace des fonction mesurables de puissance  $p$  intégrables sur  $\Omega$ , c.-à-d. :

$$f \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty; \quad (1.1)$$

où

$$\|f\|_p = \left( \int |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur  $L^p(\Omega)$  et  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  est un Banach.

2. Pour  $p = 2$ , alors :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : f \text{ mesurable à carré intégrable sur } \Omega, \int_{\Omega} f^{(2)}(x)dx < \infty \right\}. \quad (1.2)$$

L'espace  $(L^2(\Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)})$  est un Hilbert, où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$  est le produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x).g(x)dx, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega). \quad (1.3)$$

3. Pour  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur  $\Omega$ .

**Définition 2.2 (Espaces des fonctions continues) [18]**

Soit  $\Omega = [a, b]$  ( $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ) et  $n \in \mathbb{N}$ . On désigne par  $C^n(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  qui leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à  $n$  soit continues sur  $\Omega$ , muni de la norme :

$$\| f \|_{C^n} = \sum_{k=0}^n \| f^{(k)} \|_C = \sum_{k=0}^n \max_{x \in \Omega} | f^{(k)}(x) |, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

En particulier, si  $n = 0$ ,  $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  continues sur  $\Omega$  muni de la norme :

$$\| f \|_C = \max_{x \in \Omega} | f(x) |. \quad (1.5)$$

**Définition 2.3 (Espace métrique)** Un espace métrique  $(E, d)$  est un ensemble  $E$  muni d'une application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  appelée distance ou métrique, qui satisfait les propriétés suivantes :

- i)  $\forall x, y \in E \quad d(x, y) \geq 0$ , et  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie).
- iii)  $\forall x, y, z \in E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

**Définition 2.4 (Espace complet) [19]** On dit qu'un espace métrique  $(E, \| \cdot \|)$  est complet si toute suite de Cauchy de  $E$  est convergente.

**Définition 2.5 (Espace de Banach)** [31] On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 3 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma d'Euler, Bêta et la fonction de Mittag-Leffler, qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications.

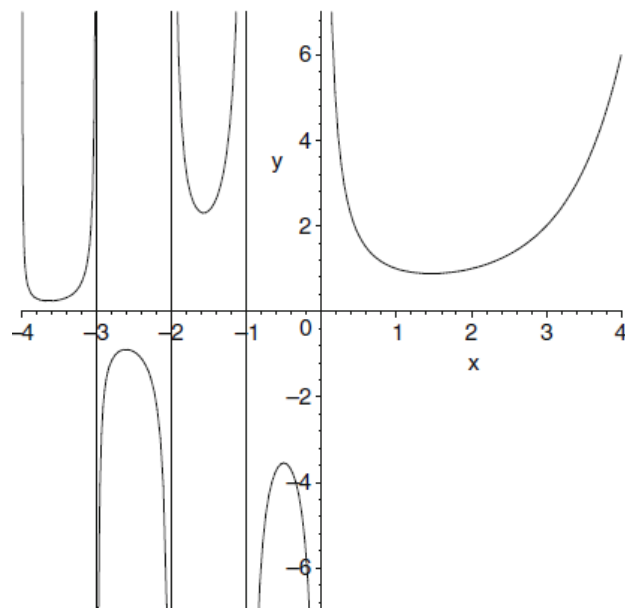


FIGURE 1 : Courbe représentative de la fonction Gamma.

#### 3.1 La fonction Gamma d'Euler

En mathématiques, l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction eulérienne Gamma (ou fonction Gamma). Il s'agit d'une fonction complexe

qui prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

**Définition 3.1** *Pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ , tel que  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ , on définit la fonction Gamma d'Euler, représentée par la relation suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad (1.6)$$

**Lemme 3.1**  $\Gamma(\alpha)$  est une fonction monotone et strictement décroissante pour

$$0 < \alpha \leq 1.$$

**Proposition 3.1** [22] *Pour tout  $\alpha > 0$  La fonction  $\Gamma(\alpha)$  satisfait les propriétés suivante :*

**1**  $\Gamma(1) = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(0_+) = +\infty;$

**2**  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \operatorname{Re}(x) > 0;$

**3**  $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}^*;$

**4**  $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\dots(x+n)},$  pour  $-(n+1) < x < -n, n \in \mathbb{N}^*.$

**Preuve.**

1.  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 dt = 1$

### 3. Fonctions spéciales

---

2. En intégrant(1.6) par parties

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(x+1)-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= [-e^{-t} t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Alors :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (1.7)$$

3. On a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1.$$

Et en utilisant (1.7), on obtient pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1.1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

...                    ...                    ...                    ...

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

Par conséquent

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

4. Prolongement de Gamma dans  $\mathbb{C}$ 

soit  $x \in \mathbb{C}$ , on a :

$A_1$  : Si  $-1 < \operatorname{Re}(x) < 0$ , alors :  $0 < \operatorname{Re}(x+1) < 1$  et  $\Gamma(x)$  est bien définie par la forme :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dx}{x}.$$

$A_2$  : Si  $-2 < x < -1$ , alors :  $0 < \operatorname{Re}(x+2) < 1$  et  $\Gamma(x)$  est bien définie par la forme :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}.$$

$A_n$  : Si  $-n < \operatorname{Re}(x) < -n+1$ , alors :  $0 < \operatorname{Re}(x+n) < 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(n+x)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}.$$

Alors on peut prolonger  $\Gamma$  pour les nombres complexes  $x \in \mathbb{C}$  tel que  $x \notin \mathbb{Z}$  par :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(n+x)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}; 0 < \operatorname{Re}(x+n) < 1.$$

■

### 3.2 La fonction Bêta

Comme la fonction Gamma, la fonction Bêta est également définie par une intégrale impropre.

**Définition 3.2** [8] *La fonction Bêta ou bien la fonction de Bessel de seconde espèce est une type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes  $\alpha$  et  $\beta$  par la relation :*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (1.8)$$

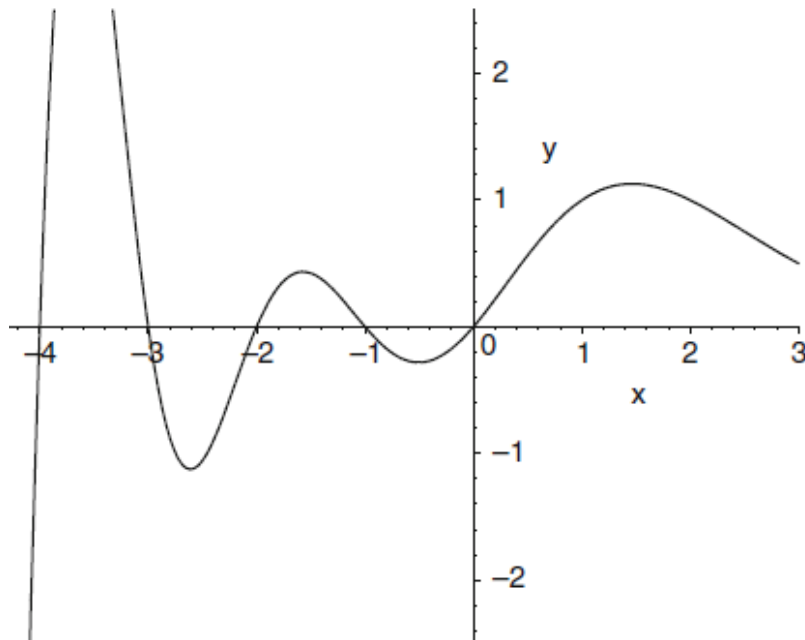


FIGURE 2 : Courbe représentative de la fonction Beta.

**Proposition 3.2** *La fonction Gamma est liée à la fonction Bêta par la relation suivante :*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \text{ et } \text{Re}(\beta) > 0. \quad (1.9)$$

et elle est symétrique i.e.

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha).$$

**Preuve.** Le produit  $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$  peut s'écrire :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt \int_0^{\infty} e^{-s}s^{\beta-1}ds = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(t+s)}t^{\alpha-1}s^{\beta-1}dtds.$$

$$\Gamma(\alpha + \beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)} t^{\alpha-1} s^{\beta-1} dt ds.$$

Nous utilisons le changement de variable  $t + s = x$ , pour  $0 < t < \infty$  et  $0 < s < \infty$  implique  $0 < x < \infty$  et  $0 < y < 1$ . Le jacobien est

$$\frac{D[t, s]}{D[x, y]} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 - y & -x \end{vmatrix} = -xy - x + xy = -x.$$

Résultant :

$$dt ds = \left| \frac{D[t, s]}{D[x, y]} \right| dx dy = x dx dy.$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^1 \int_0^1 e^{-x} (xy)^{\alpha-1} x^{\beta-1} (1-y)^{\beta-1} x dx dy \\ &= \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+\beta-1} dx \int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy \\ &= \Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Alors

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

■

### 3.3 Fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle,  $e^z$ , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle

### 3. Fonctions spéciales

---

à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler.

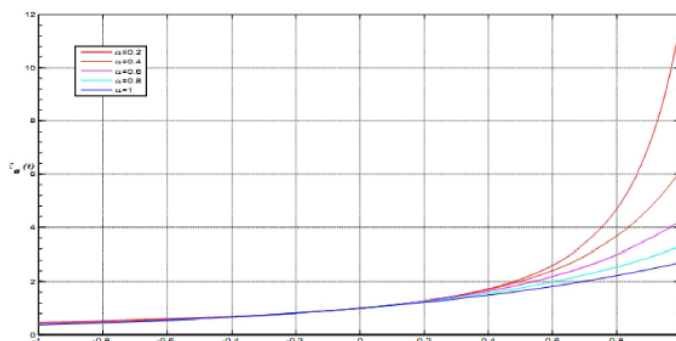


FIGURE 3 : La fonction de Mittag-Leffler a un seul parametre

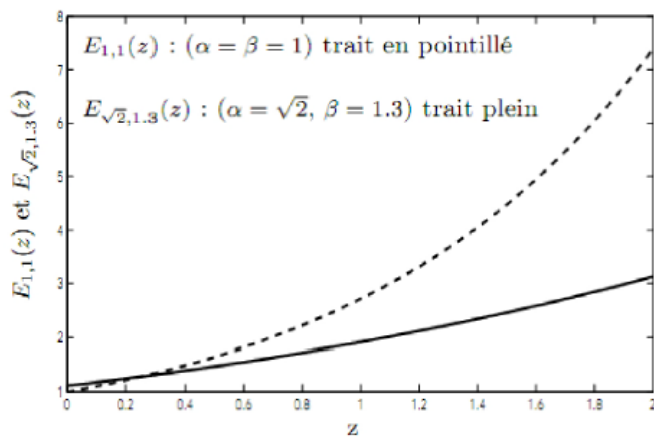


FIGURE 4 : La fonction de Mittag-Leffler a deux parametres

**Définition 3.3** Pour  $z \in \mathbb{C}$ , la fonction de Mittag-Leffler  $E_\alpha(z)$  (notée par  $M - L$ )

est définie comme suit :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha > 0);$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée  $E_{\alpha,\beta}(z)$  est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

**Exemple 3.1** Pour des valeurs spéciales de  $\alpha$  et  $\beta$  on a :

1.  $E_1(z) = E_{1,1}(z) = e^z$ .

2.  $E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$  :

$$E_{1,2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1).$$

3.  $E_{1,3}(z) = \frac{e^z - z - 1}{z^2}$  :

$$E_{1,3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}(e^z - z - 1).$$

**Théorème 3.1** [18] La fonction de Mittag-Leffler possède les propriétés suivantes :

1. Pour  $|z| < 1$  la fonction de Mittag-Leffler généralisée satisfait :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha}) dt = \frac{1}{z-1}.$$

2. Intégration de la fonction de  $M - L$  :

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}) t^{\beta-1} dt = z^{\beta} E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^{\alpha}).$$

3. La dérivée d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  de la fonction de  $M - L$  est donnée par :

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)) = z^{\beta-n-1}E_{\alpha,\beta-n}(z^\alpha).$$

## 4 Théorèmes des points fixes

Les théorèmes de point fixe sont des outils extrêmement utiles pour résoudre les équations différentielles. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour qu'une fonction donnée admette un point fixe, assurant ainsi l'existence et l'unicité de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de point fixe. Dans cette section, nous introduisons les théorèmes du point fixe que nous utiliserons par la suite. [5] [8]

Soit  $J := [0; T], T > 0$ . Notons  $C(J; R)$  est l'espace de Banach des fonctions continues définies de  $J$  dans  $R$ ; muni de la norme

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|, t \in J\}.$$

**Définition 4.1** Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  dans lui même. On appelle point fixe de  $f$  tout point  $u \in E$  tel que

$$f(u) = u.$$

### 4.1 Théorème de point fixe de Banach

Le principe de contraction de Banach, également connu sous le nom de principe de Banach, est un outil précieux dans la théorie des espaces métriques. Il garantit l'existence et l'unicité des points fixes de quelques applications des espaces métriques.

**Définition 4.2** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une application  $f : X \rightarrow X$  est dite  $k$ -Lipschitzienne de constante  $k \geq 0$  si

$$\forall u, v \in X : d(f(u), f(v)) \leq kd(u, v).$$

**Définition 4.3** *L'application  $k$ -Lipschitzienne  $f$  est dite une contraction si  $k \in (0, 1)$ .*

**Théorème 4.1** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet, soit  $F$  une partie fermée de  $X$ , et soit  $f : X \rightarrow X$  une contraction. Alors  $f$  admet un unique point fixe  $f(x) = x$ .*

## 4.2 Théorème de point fixe de krasnoselskii

Le théorème de Krasnoselskii est une combinaison de deux théorèmes de point fixe : à savoir le théorème de Chauder et le théorème de l'application contractante de Banach.

**Théorème 4.2** *Soit  $F$  un ensemble non vide, fermé, et convexe d'un espace de Banach  $X$  :  $T_1$  et  $T_2$  sont deux applications de  $F$  dans  $X$  telles que :*

1.  $T_1(x) + T_2(y) \in F, \forall x, y \in F$ ,
2.  $T_1$  est une contraction,
3.  $T_2$  est compacte et continue.

*Alors,  $T_1 + T_2$  admet un point fixe dans  $F$  ; autrement dit, il existe  $x \in F$  tel que  $T_1(x) + T_2(x) = x$ .*

---

---

# CHAPITRE 2

---

## Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse qui se consacre aux opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier.

Dans ce chapitre, nous abordons un aperçu sur le calcul fractionnaire. Nous nous limitons à deux des approches les plus populaires des dérivées fractionnaires, à savoir l'approche de Riemann-Liouville et l'approche de Caputo, et nous présentons leurs propriétés. Nous commençons par définir l'intégrale de Riemann-Liouville.

### 1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue.

- La primitive de  $f$  est donnée par l'expression

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (2.1)$$

- Pour la seconde primitive on aura

$$\begin{aligned} (I_a^2 f)(x) &= \int_a^x I_a^1 f(s) ds \\ &= \int_a^x \left( \int_t^x f(t) dt \right) ds, \end{aligned} \quad (2.2)$$

et en utilisant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} (I_a^2 f)(x) &= \int_a^x \left( \int_t^x ds \right) f(t) dt \\ &= \int_a^x (x-t) f(t) dt. \end{aligned}$$

- En générale, pour la  $\alpha^{\text{ième}}$  primitive, on aura :

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 \dots \int_a^{x_{\alpha-1}} f(x_\alpha) dx_\alpha = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt. \quad (2.3)$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy.

**Définition 1.1** *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction  $f \in L^1[a, b]$  est donnée par la relation suivante :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (2.4)$$

*Cette formule est la généralisation de (2.3) par la factoriel de la fonction Gamma :*

$$(\alpha-1)! = \Gamma(\alpha),$$

## 1. Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

---

où  $\alpha$  est un nombre réel ou complexe.

**Remarque 1.1** La formule (2.4) est une généralisation de la  $\alpha^{\text{ième}}$  primitive avec un ordre de primitivation non entier.

**Exemple 1.1** L'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction

$$f(x) = (x - a)^\beta \text{ avec } \beta > -1,$$

est donnée par :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt,$$

Pour évaluer cette intégrale, on effectue le changement de variable suivant :

$$t = a + s(x - a) \Rightarrow dt = (x - a) ds.$$

$$\text{si } t = x \Rightarrow s = \frac{x-a}{x-a} = 1 \text{ et si } t = a \Rightarrow s = 0.$$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - a - s(x - a))^{\alpha-1} (a + s(x - a) - a)^\beta (x - a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x - a) - s(x - a)]^{\alpha-1} [s(x - a)]^\beta (x - a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x - a)(1 - s)]^{\alpha-1} s^\beta (x - a)^\beta (x - a) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha+\beta} (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\
 &= \frac{B(\alpha, \beta+1)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}.
 \end{aligned}$$

donc

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}. \quad (2.5)$$

**Exemple 1.2** L'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction

$$f(x) = x^\beta \text{ avec } \beta > 1$$

est donnée par :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^\beta (x-t)^{\alpha-1} dt. \quad (2.6)$$

En posant  $t = xu \Rightarrow dt = xdu$ .

Si  $t = x \Rightarrow u = \frac{x}{x} = 1$  et si  $t = 0 \Rightarrow u = 0$ .

Alors la formule (2.6) devient :

$$I_a^\alpha (x^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (xu)^\beta (x-xu)^{\alpha-1} xdu,$$

## 1. Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

---

En utilise la fonction Bêta on trouve :

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha(x^\beta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^\beta u^\beta x^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} x du \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha+\beta-1+1} u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\
 &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\
 &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}.
 \end{aligned}$$

Alors

$$I_a^\alpha(x^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}.$$

**Exemple 1.3** L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), d'une fonction constante  $f(x) = c$  est

$$I_a^\alpha f(x) = I_a^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t (x-t)^{\alpha-1} c dt = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} (x-\alpha)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

**Théorème 1.1** [18] [33] Soit  $\alpha, \beta > 0$ , alors pour toute fonction  $f \in L^1[a, b]$ , l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) = I_a^\beta I_a^\alpha f(x). \quad (2.8)$$

**Preuve.** Soit  $f \in L^1[a, b]$ , la preuve découle directement de la définition

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \int_u^x (t-u)^{\beta-1} f(u) du dt.$$

D'après le théorème de Fubini on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} dt du.$$

En utilisant le changement de variable  $t = u + s(x-u)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x (x-u-s(x-u))^{\alpha-1} (u+s(x-u)-u)^{\beta-1} dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x [(x-u)-s(x-u)]^{\alpha-1} [s(x-u)]^{\beta-1} dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x [(x-u)(1-s)]^{\alpha-1} s^{\beta-1} (x-u)^{\beta-1} dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} \int_s^x (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} dt du \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= I_a^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

**Théorème 1.2** [22] *Propriété de linéarité :*

$${}_a I_x^\alpha [c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_{1a} I_x^\alpha f(x) + c_{2a} I_x^\alpha g(x), \quad (2.9)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes et  $f(x)$  et  $g(x)$  sont deux fonctions arbitraires.

**Preuve.**

$$\begin{aligned} {}_a I_x^\alpha [c_1 f(x) + c_2 g(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} [c_1 f(t) + c_2 g(t)] dt \\ &= c_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + c_2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt \\ &= c_{1a} I_x^\alpha f(x) + c_{2a} I_x^\alpha g(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

**Proposition 1.1** [28] *Soit  $\alpha$  un nombre complexe et  $f \in C^0([a, b])$ .*

- i)  $(I_a^0 f)(x) = f(x)$ ;
- ii)  $\frac{d}{dx} (I_a^\alpha f)(x) = (I_a^{\alpha-1} f)(x)$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) > 1$ ;
- iii)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x)$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ .

**Preuve.** i)

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) d\left(\frac{(x-t)^\alpha}{-\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ f(a)(x-a)^\alpha + \int_a^x f^{(1)}(t)(x-t)^\alpha \right] dt. \end{aligned}$$

Alors on trouve :

$$\begin{aligned}(I_a^0 f)(x) &= 1 \left[ f(a) \times 1 + \int_a^x f^{(1)}(t) dt \right] \\ &= f(a) + f(x) - f(a) = f(x).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

ii)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= (I_a^{\alpha-1} f)(x),\end{aligned}$$

avec  $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ .

iii) Soit  $f \in C^0([a, b])$ .

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

## 1. Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

---

D'après (2.5), on peut écrire :

$$(I_a^\alpha 1)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \times 1 dt = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 1 .$$

Alors

$$\begin{aligned} & | (I_a^\alpha f)(x) - (I_a^\alpha 1)(x)f(x) | = | (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) | \quad (2.10) \\ & = | \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(x) dt | \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} | f(t) - f(x) | dt \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\gamma} (x-t)^{\alpha-1} | f(t) - f(x) | dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\gamma}^x (x-t)^{\alpha-1} | f(t) - f(x) | dt. \end{aligned}$$

D'une part, comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , nous écrivons :

$$\forall x, t \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 : | t - x | < \gamma \Rightarrow | f(t) - f(x) | < \varepsilon,$$

qui conduit à

$$\int_{x-\gamma}^x (x-t)^{\alpha-1} | f(t) - f(x) | dt \leq \int_{x-\gamma}^x (x-t)^{\alpha-1} \varepsilon dt = \frac{\varepsilon \gamma^\alpha}{\alpha}. \quad (2.11)$$

D'autre part,

$$\int_a^{x-\gamma} (x-t)^{\alpha-1} | f(t) - f(x) | dt \leq \int_a^{x-\gamma} (x-t)^{\alpha-1} (| f(t) | + | f(x) |) dt \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \sup_{\varepsilon \in [a, x]} |f(\varepsilon)| \int_a^{x-\gamma} (x-t)^{\alpha-1} dt, \quad \forall x \in [a, b] \\ &= 2M \left( \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\gamma^\alpha}{\alpha} \right), \quad \text{où } M = \sup_{\varepsilon \in [a, x]} |f(\varepsilon)|. \end{aligned}$$

On compare entre (2.10), (2.11) et (2.12), on trouve :

$$\begin{aligned} \left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right| &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} [\varepsilon \gamma^\alpha + 2M((x-a)^\alpha - \gamma^\alpha)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [\varepsilon \gamma^\alpha + 2M((x-a)^\alpha - \gamma^\alpha)]. \end{aligned}$$

D'après la limite :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left| (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit :

$$\left| \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(x) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

C.-à-d.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x).$$

■

## 2 Dérivation fractionnaire

L'idée principale de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et de l'intégration itérées. Le terme "fractionnaire" est un terme trompeur mais il reste conforme à l'usage courant.

## 2.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'approche de B. Riemann et J. Liouville de dérivation fractionnaire est donnée par l'intégrale suivant :

**Définition 2.1** [13] [17] Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n - 1 \leq \alpha < n$ . La dérivation fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann-Liouville d'une fonction  $f$  (notée par  $D_a^\alpha$  ou bien  ${}^{RL}D_a^\alpha$ ) définie par la relation suivante :

$$D_a^\alpha f(x) = D_a^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad x > 0, \quad (2.13)$$

avec  $D^n = \left( \frac{d}{dx} \right)^n$ .

En particulier, si  $\alpha = 0$ , alors on trouve :

$$(D_a^0 f)(x) = I_a^0 f(x) = f(x). \quad (2.14)$$

Si  $\alpha = n$ , on trouve :

$$D_a^n f(x) = D_a^{n+1} I_a^{n+1-n} f(x) = D_a^{n+1} I_a^1 f(x) = D^n f(x). \quad (2.15)$$

D'autre part, si  $\alpha < 0$

$$D_a^\alpha f(x) = I^{-\alpha} f(x). \quad (2.16)$$

**Exemple 2.1** La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction

$$f(x) = (x-a)^\beta.$$

Soit  $\beta > -1$  et  $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ , alors on a :

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

$$D^\alpha(x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^\beta dt.$$

On utilise le changement de variable  $t = a + s(x-a)$ , on aura :

$$\begin{aligned} D^\alpha(x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^1 (x-a-s(x-a))^{n-\alpha-1} (a+s(x-a)-a)^\beta (x-a) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^1 [(x-a)-s(x-a)]^{n-\alpha-1} [s(x-a)]^\beta (x-a) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^1 [(x-a)(1-s)]^{n-\alpha-1} s^\beta (x-a)^\beta (x-a) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^\beta du \\ &= \frac{B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} \\ &= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc

$$D^\alpha(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}. \quad (2.17)$$

On sait que :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.18)$$

## 2. Dérivation fractionnaire

---

Par substitution de (2.18) dans (2.17) on trouve :

$$\begin{aligned}
 D^\alpha(x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$D^\alpha(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.19)$$

**Exemple 2.2** La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante est en général ni nulle ni constante.

$$D^\alpha(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \quad (2.20)$$

**Théorème 2.1** [22] Soit  $n-1 < \alpha < n$  et si  $f(x)$  satisfait les conditions de théorème de Taylor

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-a}. \quad (2.21)$$

**Preuve.** Comme  $f(x)$  satisfait les conditions du théorème de Taylor, on peut appliquer le développement de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} x^k.$$

On dérive au sens de Riemann-Liouville, on trouve :

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} D^\alpha x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha},$$

Alors

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} x^{k-a}.$$

■

**Théorème 2.2** [33] Soient  $\alpha, \beta > 0$  et  $n - 1 < \alpha < n$ ,  $m - 1 \leq \beta < m$  tel que  $n, m \in \mathbb{N}^*$  alors :

1. si  $\alpha > \beta > 0$ , alors pour  $f \in L^1[a, b]$  l'égalité

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x), \quad (2.22)$$

est presque partout sur  $[a, b]$ .

2. S'il existe une fonction  $\varphi \in L^1[a, b]$  tel que  $f = I_a^\alpha \varphi$ , alors

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x), \quad (2.23)$$

pour presque tout  $x \in [a, b]$ .

3. Pour  $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$ .

Si les dérivées fractionnaires  $D_a^\alpha f$  et  $D_a^{k+\alpha} f$  existent, alors

$$D^k(D_a^\alpha f(x)) = D_a^{k+\alpha} f(x), \quad (2.24)$$

4. Si  $\beta \geq \alpha > 0$  et la dérivée fractionnaire  $D_a^{\beta-\alpha} f$  existe, alors

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x). \quad (2.25)$$

**Preuve.** En utilisant la définition (2.13) de dérivation fractionnaire et la relation (2.8) on trouve :

## 2. Dérivation fractionnaire

---

1. Pour  $\alpha > \beta > 0$ , alors  $n \geq m$ , on a :

$$\begin{aligned} D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) &= D^n I_a^{n-\beta}(I_a^\alpha f)(x) \\ &= D^n(I_a^{n+\alpha-\beta} f)(x) \\ &= D^n I_a^n(I_a^{\alpha-\beta} f)(x) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x). \end{aligned}$$

2. Par la relation (2.23) on obtien :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) &= I_a^\alpha(D_a^\alpha I_a^\alpha \varphi(x)) \\ &= I_a^\alpha \varphi(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) &= D_a^\alpha(I_a^\alpha I_a^\alpha \varphi(x)) \\ &= I_a^\alpha \varphi(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} D^k[D_a^\alpha f(x)] &= D^k D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^{k+n} I_a^{n-\alpha+k-k} f(x) \\ &= D^{k+n} I_a^{k+n-(\alpha+k)} f(x) \\ &= D^{k+n} f(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

4. On a :

$$\begin{aligned} D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) &= D_a^\beta I_a^{n-\beta}(I_a^\alpha f)(x) \\ &= D_a^n I_a^{n-(\beta-\alpha)} f(x) \\ &= D_a^{\beta-\alpha} f(x), \end{aligned}$$

existe pour  $i - 1 \leq \beta - \alpha < i$  avec  $i \leq n$ . ■

## 2.2 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, en raison de ses applications en mathématiques pures et appliquées. Cependant, étant donnée que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle et que les conditions initiales du problème de Cauchy sont exprimées par des dérivées d'ordre fractionnaire, Caputo propose une autre approche où la dérivée de la constante est nulle et que les conditions initiales sont exprimées comme dans le cas classique par des dérivées d'ordre entier.

Dans cette section, nous donnerons une définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

**Définition 2.2** *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  de la fonction  $f(x)$  est définie par la relation suivante :*

$${}^c D_a^\alpha f(x) = I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad x > a, \quad (2.26)$$

avec  $n - 1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Si  $\alpha = n$  on trouve

$${}^c D_a^\alpha f(x) = f^{(n)}(x). \quad (2.27)$$

En particulier, si  $\alpha = 0$ , alors

$${}^c D_a^0 f(x) = f(x). \quad (2.28)$$

## 2. Dérivation fractionnaire

---

**Exemple 2.3** La dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction :

$$f(x) = (x - a)^\beta.$$

Soit  $\alpha$  non entier et  $\beta > n - 1$  avec  $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ , alors on a :

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)}(t - a)^{\beta - n}.$$

D'où

$${}^c D_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} (t - a)^{\beta - n} dt.$$

En utilisant le changement de variable  $t = a + s(x - a)$ , on aura :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_0^1 (x - a - s(x - a))^{n - \alpha - 1} (a + s(x - a) - a)^{\beta - n} (x - a) ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_0^1 [(x - a) - s(x - a)]^{n - \alpha - 1} [s(x - a)]^{\beta - n} (x - a) ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_0^1 [(x - a)(1 - s)]^{n - \alpha - 1} s^{\beta - n} (x - a)^{\beta - n} (x - a) ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{\beta - n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)B(n - \alpha, \beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Donc

$${}^c D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.29)$$

**Exemple 2.4** La dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction

$$f(x) = x^\beta,$$

est donné par :

$${}^c D_a^\alpha f(x) = {}^c D_a^\alpha x^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}, & \beta > \alpha - 1, \\ 0, & \beta \leq \alpha - 1. \end{cases} \quad (2.30)$$

**Exemple 2.5** La dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est nulle i.e.

$${}^c D_a^\alpha C = 0, \quad \forall C \in \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \times 0 dt = 0 \end{aligned}$$

### 2.3 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

**Théorème 2.3** [18] [1] Soient  $f \in C^n([a, b])$ ,  $\alpha > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  avec  $n-1 \leq \alpha < n$ . Si  $D^\alpha f(x)$  et  ${}^c D^\alpha f(x)$  existent, alors on a :

$${}^c D^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}. \quad (2.32)$$

## 2. Dérivation fractionnaire

---

De la relation (2.32), on déduit que si  $f^{(k)} = 0$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  et  $n = [\alpha] + 1$

$${}^c D^\alpha f(x) = D^\alpha f(x). \quad (2.33)$$

Si  $0 < \alpha < 1$ , on trouve :

$${}^c D^\alpha f(x) = D^\alpha (f(x) - f(a)). \quad (2.34)$$

**Preuve.** En utilise le développement de Taylor

$$f(x) = f(a) + (x-a)f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_{n-1}.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1},$$

telle que

$$R_{n-1} = \int_a^x \frac{f^{(n)}(s)(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f^{(n)}(s)(x-s)^{n-1} ds = I^n f^{(n)}(x).$$

En utilisant les propriétés de la dérivée de Riemann-Liouville mentionnées précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= D^\alpha \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^\alpha (x-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + D^\alpha R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^\alpha (x-a)^k}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^\alpha (x-a)^k}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + {}^c D^\alpha f(x). \end{aligned}$$

Donc

$${}^c D^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha}.$$

■

---

---

# CHAPITRE 3

---

## Quelques résultats sur l'existence et l'unicité des solutions

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle fractionnaire hyperbolique non linéaire avec des conditions aux limites intégrales, en utilisant des théorèmes de point fixe.

### 1 Position du problème

Nous considérons l'équation différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions intégrales aux limites :

$${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J = [0, 1], \quad (3.1)$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s) ds \quad (3.2)$$

$$y(1) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} y(s) ds \quad (3.3)$$

où  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue,  ${}^C D^\alpha$  la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de Caputo avec  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \beta \leq 1$ .

**Lemme 1.1** [34] Si  $\alpha > 0$ , alors l'équation différentielle

$${}^C D^\alpha h(t) = 0,$$

admet une solution

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $n = [\alpha] + 1$ .

**Lemme 1.2** Si  $\alpha > 0$ , alors

$$I^\alpha {}^C D^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $n = [\alpha] + 1$ .

**Définition 1.1** Une fonction  $y \in C(J, \mathbb{R})$  est dite solution du problème (3.1)-(3.3), si  $y$  satisfait l'équation  ${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t))$  sur  $J$ , et les conditions (3.2) et (3.3).

Pour étudié d'existence de solutions du problème (3.1)-(3.3), nous utilisons le lemme suivant :

**Lemme 1.3** [32] Soit  $1 < \alpha \leq 2$  et soit  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction donnée continue. Alors, le problème aux limites

$${}^C D^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in J \quad (3.4)$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s)ds \quad (3.5)$$

$$y(1) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} y(s)ds \quad (3.6)$$

admet une solution unique donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + \\ & \int_0^1 \left[ \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} dr - \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} \right. \\ & \left. + \left( \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \alpha \Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right) (1-s)^\alpha \right] h(s)ds, \end{aligned}$$

où

$$\gamma_1 = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}, \gamma_2 = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+2)}.$$

**Preuve.** En appliquant le lemme 1.2 nous pouvons réduire le problème (3.4)-(3.6) à une équation intégrale équivalente

$$\begin{aligned} y(t) &= I_0^\alpha h(t) + c_0 + c_1 t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + c_0 + c_1 t, \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour certaines constantes  $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ .

Par intégration et l'utilisation du théorème de Fubini, nous obtenons :

$$\int_0^1 y(s)ds = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau + c_0 + \frac{c_1}{2}. \quad (3.8)$$

D'après (3.7), on trouve :

$$y(0) = c_0,$$

et par (3.5) et (3.8), nous arrivons à :

$$y(0) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau + c_0 + \frac{c_1}{2},$$

alors,

$$c_1 = -2 \int_0^1 \frac{(1-\tau)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau, \quad (3.9)$$

Et d'après (3.6) et (3.7), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} y(s) ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_0^s (1-s)^{\beta-1} (s-r)^{\alpha-1} h(r) dr ds \\ &+ \frac{c_0}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds + \frac{c_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_0^s (1-s)^{\beta-1} (s-r)^{\alpha-1} h(r) dr ds \\ &+ \frac{c_0}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds + \frac{c_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds, \end{aligned}$$

## 1. Position du problème

---

après simplifications, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} h(s) dr ds \\ &+ \frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{c_1}{\Gamma(\beta+2)} \end{aligned}$$

et s'écrire aussi,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right) c_0 + \left(1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+2)}\right) c_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} h(s) dr ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En posant  $\gamma_1 = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}$ ,  $\gamma_2 = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+2)}$ , alors (3.10) devient :

$$\gamma_1 c_0 + \gamma_2 c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} h(s) dr ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

En utilisant (3.9), nous trouvons :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} h(s) dr ds \\ &- \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha h(s) ds, \end{aligned} \quad (3.11)$$

une combinaison de (3.7), (3.9) et (3.11) nous conduit à :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} h(s) dr ds$$

$$- \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \left[ \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \alpha \Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right] \int_0^1 (1-s)^\alpha h(s) ds,$$

ou d'une autre manière,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds +$$

$$\int_0^1 \left[ \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} dr - \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} \right.$$

$$\left. + \left( \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \alpha \Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right) (1-s)^\alpha \right] h(s) ds.$$

■

## 2 Existence et unicité des solutions

Deux méthodes permettent de résoudre le problème de l'existence : Le premier résultat est obtenu en utilisant le théorème du point fixe de Banach et le second résultat est fourni par l'utilisation du théorème du point fixe de Krasnoselskii.

### 2.1 Premier résultat d'existence

**Théorème 2.1** [32] *Supposons que la fonction  $f : [0; 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et qu'il existe une constante  $L > 0$  telle que*

$$(H_1) : |f(t, x) - f(t, y)| \leq L |x - y|, \quad t \in [0; 1], \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

## 2. Existence et unicité des solutions

---

Si  $LA < 1$ , alors le problème aux limites (3.1)-(3.3) admet une solution unique, où

$$A = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\beta(\beta, \alpha)}{|\gamma_1| (\alpha + \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha + 2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \quad (3.12)$$

**Preuve.** On définit l'opérateur  $F$  par :

$$(Fy)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \int_0^1 \left[ \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} dr - \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} + \left( \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \alpha \Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right) (1-s)^\alpha \right] f(s, y(s)) ds, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.13)$$

Posons  $\sup_{t \in [0;1]} |f(t, 0)| = M$  et montrons que  $FB_\rho \subset B_\rho$ , où  $B_\rho = \{y \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \|y\| \leq \rho\}$  et  $\rho \geq \frac{MA}{1-LA}$ .

Soient  $y \in B$  et  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} \| (Fy)(t) \| \leq & \sup_{t \in [0;1]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right. \\ & + \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) dr ds \\ & + \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1| \alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha f(s, y(s)) ds \\ & \left. + \frac{2t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha f(s, y(s)) ds \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{t \in [0;1]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (|f(s, y(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|) ds \right. \\
&\quad + \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} (|f(s, y(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|) dr ds \\
&\quad + \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} (|f(s, y(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|) ds \\
&\quad + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1| \alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha (|f(s, y(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|) ds \\
&\quad \left. + \frac{2t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha (|f(s, y(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|) ds \right\}.
\end{aligned}$$

Posons  $u = \frac{s-r}{1-s}$ , ce qui donne  $1-r = (1-u)(1-s)$ ,  $dr = (1-s)du$  et par suite :

$$\int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} dr ds = \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} ds \int_s^1 (1-u)^{\beta-1} u^{\alpha-1} du = \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{\alpha + \beta}. \quad (3.15)$$

Par substitution dans (3.14) et après des simplifications, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\| (Fy)(t) \| &\leq (L_\rho + M) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{|\gamma_1| (\alpha + \beta) \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha + 1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha + 2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \right\} \\
&\leq (L_\rho + M)A \\
&\leq \rho,
\end{aligned} \quad (3.16)$$

ce qui implique que  $FB_\rho \subset B_\rho$ .

Supposons maintenant que  $x, y \in C([0, 1], \mathbb{R})$  et  $t \in [0, 1]$ . Alors

$$\begin{aligned}
\| F(x) - F(y) \| &\leq \sup_{t \in [0;1]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} | f(s, x(s)) - f(s, y(s)) | ds \right. \\
&+ \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} | f(s, x(s)) - f(s, y(s)) | dr ds \\
&+ \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} | f(s, x(s)) - f(s, y(s)) | ds \\
&+ \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1| \alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha | f(s, x(s)) - f(s, y(s)) | ds \\
&\left. + \frac{2}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha | f(s, x(s)) - f(s, y(s)) | ds \right\}. \\
&\leq L \| x - y \| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{|\gamma_1| (\alpha+\beta) \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha+1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha+2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} \right\} \\
&= LA \| x - y \|.
\end{aligned}$$

Par hypothèse on a  $0 < LA < 1$ , alors  $F$  est une contraction.

On déduit que le problème (3.1)-(3.3) admet une solution unique par l'utilisation du principe de l'application contractante de Banach. ■

**Exemple 2.1** *Considérons le problème aux limites suivant :*

$${}^C D^{\frac{3}{2}} y(t) = \frac{1}{t^2 + 4} \times \frac{|x|}{1 + |x|} + t \cos^2 t, t \in [0; 1] \tag{3.17}$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s) ds \quad (3.18)$$

$$y(1) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}} y(s) ds. \quad (3.19)$$

Dans cet exemple,  $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{2}$  et  $f(t; x) = \frac{1}{t^2+4} \times \frac{|x|}{1+|x|} + t \cos^2 t$ .

On a :

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= \frac{1}{t^2+4} \times \frac{||x| - |y||}{(1+|x|)(1+|y|)} \\ &\leq \frac{1}{4} |x - y|, \end{aligned}$$

donc,  $L = \frac{1}{4}$ .

Par un calcul simple, on trouve :  $LA \simeq 0,3715... < 1$ , et d'après le théorème (2.1) on déduit que le problème (3.17)-(3.19) admet une solution unique.

## 2.2 Deuxième résultat d'existence

**Théorème 2.2** [32] Soit  $f : [0; 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue qui satisfait les conditions  $(H_1)$  et  $(H_2)$  :  $|f(t, x)| \leq \mu(t), \forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$  et  $\mu \in (C[0, 1], \mathbb{R}^+)$ .

Supposons que

$$L \left\{ \frac{\beta(\beta, \alpha)}{|\gamma_1| (\alpha + \beta) \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2 |\gamma_2|}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha + 2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \right\} < 1. \quad (3.20)$$

Alors, le problème aux limites (3.1)-(3.3) admet une solution unique.

**Preuve.** Posons  $\sup_{t \in [0,1]} |\mu(t)| = \|\mu(t)\|$ .

Nous fixons  $\rho^* \geq \|\mu(t)\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\beta(\beta, \alpha)}{|\gamma_1| (\alpha + \beta) \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha + 2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \right\}$  et nous considérons l'ensemble  $B_{\rho^*} = \{y \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \|y\| \leq \rho^*\}$ .

## 2. Existence et unicité des solutions

---

Nous définissons les deux opérateurs  $P$  et  $Q$  sur  $B$  par :

$$(Py)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds, \quad t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} (Qy)(t) &= \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) dr ds \\ &+ \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 (1-s)^\alpha f(s, y(s)) ds \\ &+ \frac{2t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Soient  $x, y \in B_{\rho^*}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \| Px + Qy \| &\leq \frac{\|\mu\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{\|\mu\|}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} dr ds \\ &+ \frac{\|\mu\|}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds + \frac{2|\gamma_2| \|\mu\|}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 (1-s)^\alpha ds \\ &+ \frac{2\|\mu\|}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 (1-s)^\alpha ds \\ &\leq \|\mu\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{|\gamma_1| (\alpha+\beta) \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha+1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha+2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} \right\} \\ &\leq \rho^*. \end{aligned}$$

Donc,  $Px + Qy \in B_{\rho^*}$ .

Nous avons :

$$\| Qx - Qy \| \leq L \| x - y \| \left\{ \frac{\mathbb{B}(\beta, \alpha)}{|\gamma_1| (\alpha + \beta) \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1| \Gamma(\alpha + 2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \right\}.$$

Par exploitation de (3.20), on déduit que  $Q$  est une contraction. D'après la définition de l'opérateur  $P$ , on déduit que la continuité de  $f$  implique celle de  $P$ . En plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \| Px \| &\leq \| \mu \| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \\ &\leq \frac{\| \mu \|}{\Gamma(\alpha + 1)}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

ce qui implique que  $P$  est uniformément borné.

Maintenant, nous montrons que  $P$  est compact.

On a :

$$\begin{aligned} (Py)(t_1) - (Py)(t_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right). \end{aligned}$$

Posons  $f^* = \sup_{(t,x) \in [0,1] \times B_{\rho^*}} |f(t, x)|$ .

## 2. Existence et unicité des solutions

---

En tenant compte de la condition  $(H_1)$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} (Py)(t_1) - (Py)(t_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] f(s, y(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{f^*}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \right|, \end{aligned}$$

nous conduit à :

$$| (Py)(t_1) - (Py)(t_2) | \leq \frac{f^*}{\Gamma(\alpha + 1)} | t_2^\alpha - t_1^\alpha |. \quad (3.22)$$

Le second membre de (3.22) est indépendant de  $y$  et tend vers zéro quand  $t_2 - t_1 \rightarrow 0$ , donc  $P$  est équicontinu. En utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, on déduit que  $P$  est compact dans  $B$ . Ainsi, toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Krasnoselskii sont satisfaites. Ceci, implique que le problème aux limites (3.1)-(3.3) admet une solution unique sur  $[0, 1]$ . ■

---

## Conclusion

Notre but principal dans ce mémoire consistait à présenter quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions d'une équation différentielle fractionnaire. Ces résultats ont été obtenus en utilisant certains théorèmes de point fixe.

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, Hala A.A. El-Saka. On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems. Article in Physics Letters A. October 2006.
- [2] N. Boccara, Analyse Fonctionnelle une introduction pour physiciens, 1984.
- [3] R.L. Bagley, P.J. Torvik, A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. J Rheol. 27(1983) :201-210.
- [4] M. Benchohra and F. Ouair, Existence Results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, Bullten Of Mathematical analysis and Applications, Vol. 2 issue4, pp. 7-15, (2010).
- [5] A. Bouzaroura. Etude d'une équation différentielle fractionnaire impulsive dans un espace de Banach. Mémoire de Doctorat d'Université Badji Mokhtar-Annaba.
- [6] M. Benchohra, S. Hamani, S.K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Volume 71, Issues 7–8, 1–15 October 2009.
- [7] A. M. El-Sayed and E.O. Bin-Tahar , "Positive Nondecreasing solutions for a Multi-Term Fractional-Order Functional Differential Equation With Integral

- Conditions", *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2011(2011), No. 166, pp. 1-8.
- [8] F. Bouchelaghem. Etude de la stabilité pour certaines équations différentielles fractionnaires. Mémoire Magistère d'Université Badji Mokhtar-Annaba.
- [9] L. Gaul, P. Klein and Kempfle, Damping description involving fractional operators, *Mech. Systems Signal Processing* 5 (1991), 81-88.
- [10] W. G. Glokle and T. F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics, *Biophys. J.* 68 (1995), 46-53.
- [11] R. Gorenflo, Abel integral equations with special emphasis on applications, *Lectures in Mathematical Sciences*, Vol. 13, University of Tokyo, 1996.
- [12] A.K. Grünwald, Ueber "begrenzte" derivationen und deren anwendung, *Zeitschrift f. Mathematik u. Physik*, 12 (6), 441-480.
- [13] J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, *J. Mat. Pure Appl. Ser.* 8 (1892), 101-186.
- [14] S.B. Hadid, Local and global existence theorems on differential equations of non-integer order. *J. Fractional Calculus*, Vol. 7, pp. 101-105, May (1995).
- [15] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [16] R.W. Ibrahim, Existence and uniqueness of holomorphic solutions for fractinal Cauchy problem, *J. Math. Anal. Appl.* 380, pp. 232-240, (2011).
- [17] A.A. Kilbas, S.A. Mazran, Nonlinear differential equations with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, *Differential Equations.* 41 (2005), 84 - 89.
- [18] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo *Theory and applications of fractional differential Equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006).
- [19] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* 2<sup>e</sup> édition, Editions Mir-Moscou. 1974.

- 
- [20] A.V. Letnikov, On the historical development of the theory of differentiation of an arbitrary order, *Mat. Sb.* 3 (1868), 85-112 (in Russian).
- [21] A.V. Letnikov, Theory of differentiation of an arbitrary order, *Mat. Sb.* 3 (1868), 1-68 (in Russian).
- [22] C.J. Luo Albert. Nonlinear systems and complexity, Introduction to Functional Differential Equations, Springer Nature Switzerland AG 2019.
- [23] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds), Springer-Verlag, Wien, (1997), 291-348
- [24] F. Metzler, W. Schick, H. G. Kilian and T. F. Nonnenmacher, Relaxation in filled polymers : A fractional calculus approach, *Chem. Phys.* 103(1995), 7180-7186.
- [25] K.S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons Inc, New York, (1993).
- [26] S.K. Ntouyas, Existence Results For First Order Boundary Value Problems For Fractional Differential equations and Inclusions With Fractional Integral Boundary Conditions, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 3 July 2012, No. 9, pp 1-14.
- [27] K.B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, London, (1974).
- [28] I. Podlubny, Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering, vol. 198. New York/London : Springer, 1999.
- [29] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marchev, Fractional Integrals and Derivatives ; Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, (1993).
- [30] K. Saoudi, K. Haouam, Critical exponent for nonlinear hyperbolic system with spatiotemporal fractional derivatives. *International Journal of Applied Mathematics* vol 24, No 6 2011 pp 861-871.
- [31] L. Schwartz, *Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Édition Corrigée Paris. (2008).

- [32] B. Tellab, K. Haouam, Existence and uniqueness of solution for nonlinear hyperbolic fractional differential equation with integral boundary conditions. *International Journal of Applied Mathematical Research*. vol. 5(1)(2016), pp 18-23.
- [33] M. Wellbeer, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their, *Analytical Background*, D. Univ Braunschweig, (2010).
- [34] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional equations, *Electron. J. Differential Equations* 2006, No. 36, pp. 1-12.