



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف

Université Chadli Bendjedid El-Tarf-

كلية العلوم و التكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse Fonctionnelle et Calcul Stochastique

Thème

Mesure invariante pour l'équation stochastique d'un gaz visqueux
barotropique en dimension spatiale dans un domaine discrétisé

Présenté par:

Hamis Rawya

Devant le Jury :

Dr. Youbi Zahra	MCB	Univ. Chadli Bendjedid El - Tarf -	Présidente
Dr. Bensghir Rym	MCA	Univ. Chadli Bendjedid El - Tarf -	Rapporteur
Dr. Chidouh Amar	MCB	Univ. Chadli Bendjedid El - Tarf -	Examineur

Année Universitaire : 2020-2021

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour mener à terme ma formation et pouvoir réaliser ce travail de recherche.

Je voudrais remercier très sincèrement mon encadreur, Madame **Bensghir Rym**, pour la confiance qu'elle m'a accordée en acceptant de me suivre pour réaliser ce modeste travail. J'ai pu apprécier sa motivation professionnelle, ses multiples conseils et critiques constructives et ses corrections. J'ai pu toucher également sa gentillesse et sa grande disponibilité, sa patience et son respect. Je la remercie pour le temps qu'elle a consacré à la réalisation de ce travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres de jury, Madame **Youbi Zahra**, présidente de jury et Monsieur **Chidouh Amar**, examinateur de ce travail, pour leur présence, leur lecture attentive de ce travail ainsi que leur remarques lors de la soutenance.

J'adresse également mes reconnaissances à tous les enseignants de la faculté des Sciences et de la Technologie de l'université Chadli bendjedid et plus précisément, mes enseignants du département de Mathématiques.

Je voudrais remercier tous les membres du département de Mathématiques pour leurs efforts surtout : Mofida, Ismahane et Farid.

Je tiens à remercier mes enseignants du primaire, du moyen et du lycée de m'avoir guidé.

Ma reconnaissance va à tous ceux qui ont contribué de près ou de loins à l'élaboration de ce travail et à la réussite de mon parcours universitaire.

Dédicaces



....Je dédie ce travail :

A

Mes Parents

**Pour tous leurs sacrifices, leurs soutiens,
leurs encouragements et leurs amours. J'ai réussi mon parcours et ma vie grâce à eux.
Que dieu les protège, les bénisse et les promette une longue vie pleine de santé.**

A

Mes frères : Hakim, Hamoda et Rabia

A

Ma soeur : Yasmine

**Pour leur disponibilité à entendre mes frustrations et d'avoir supporté mon stress
Je leur souhaite tout le bonheur et la réussite dans leur vie.**

A

**Toute ma famille, aucun langage ne saurait exprimer mon respect et ma considération pour
leur soutien et leur encouragement. Que Dieu le tout Puissant les garde et les procure la
santé et le bonheur, surtout ma belle Karima et Zina**

A

**L'étudiant de maroco Khalid, Il m'a beaucoup aidé et soutenu, il est disponible à tout
moment. Je le remercie infiniment.**

A

**Mes amies Randa, Saida, Rabiaa, Rahma, Sara, Asma, Chaima, Khadija, Zina, Amira et
Zineb. Je n'arrive pas à trouver les mots pour exprimer mes sentiments pour elles, je les
considère mes soeurs. J'apprécie l'amitié qui nous unit et les bons souvenirs que nous
avons passés ensemble.**

”Life is good only for two things, discovering mathematics and teaching mathematics.”

Simeon Denis Poisson

Table des matières

1	Introduction au calcul stochastique	13
1.1	Espaces mesurables et mesurés	13
1.2	Fonctions mesurables et variables aléatoires	13
1.2.1	Convergence des suites de variables aléatoires	14
1.3	Processus stochastiques et processus usuels	15
1.3.1	Processus stochastique	15
1.3.2	Processus usuels	15
1.4	Quelques inégalités	18
1.5	Intégrale stochastique	18
1.5.1	Intégrale stochastique pour les fonctions étagées	18
1.5.2	Intégrale stochastique pour toute fonction	19
1.6	Formule d'Itô	20
2	Equations différentielles stochastiques et mesure invariante	22
2.1	Equations différentielles stochastiques (EDS)	22
2.1.1	Définition d'une EDS	22
2.1.2	Solutions des EDS	22
2.1.3	Existence et unicité de la solution	23
2.1.4	Théorème de Girsanov	29
2.2	Mesure invariante	29
2.2.1	Définition d'une mesure invariante	29
2.2.2	Condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une mesure invariante	30
2.2.3	Existence d'une mesure invariante (Théorème de Has'minski)	32
3	Application : Existence d'une mesure invariante pour l'équation d'un gaz visqueux barotropique en une dimension spatiale	34
3.1	Equation déterministe du mouvement d'un gaz visqueux en coordonnées eulériennes	34
3.1.1	Système d'équations	34
3.1.2	Modèle barotropique	35
3.1.3	Equation du mouvement d'un gaz visqueux en une dimension spatiale .	35
3.2	Equation déterministe du mouvement d'un gaz en une dimension spatiale en coordonnées lagrangiennes	36
3.3	Equation stochastique du mouvement d'un gaz visqueux barotropique	36
3.3.1	Equation stochastique d'un gaz visqueux en coordonnées eulériennes . . .	36
3.3.2	Equation stochastique d'un gaz visqueux en coordonnées lagrangiennes .	37
3.4	Estimation de l'énergie	37
3.5	Equation approché d'un gaz visqueux barotropique en dimension spatiale	39
3.5.1	Problème discrétisé	39
3.5.2	Problème régularisé	40
3.6	Existence et unicité de la solution du problème approché	42
3.7	Existence d'une mesure invariante pour le problème approché	47

Resumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'équation stochastique qui décrit le mouvement d'un gaz visqueux barotropique en une dimension spatiale. L'application de la formule d'Itô à une fonctionnelle convenablement choisie nous permet d'analyser le comportement de la solution à savoir l'obtention de l'estimation de l'énergie. Malgré l'élégance de cette estimation, malheureusement, elle ne nous permet pas de démontrer l'existence d'une mesure invariante à cause de la non régularité des espaces fonctionnels. Pour cela, nous avons étudié un problème approché. Plus précisément, un problème discrétisé avec la régularisation de la densité. Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution, ainsi, nous avons appliqué le théorème de Has'minskii [16] pour démontrer l'existence d'une mesure invariante.

Abstract

In this work, we are interested in the stochastic equation that describes the motion of a viscous barotropic gas in one spatial dimension. The application of the Itô formula to a suitably chosen functional allows us to analyze the behavior of the solution (the energy estimate). Despite the elegance of this estimate, unfortunately, it does not allow us to demonstrate the existence of an invariant measure because the lack of the regularity of the functional spaces. For this reason, we have studied an approximate problem. More precisely, a discretized problem with density regularization. We proved the existence and the uniqueness of the solution and by applying Has'minski's theorem [16], we prove the existence of an invariant measure.

ملخص

في هذا العمل نحن مهتمون بالمعادلة التي تصف حركة الغاز الباروتروبي اللزج ذات بعد واحد. يتيح لنا تطبيق معادلة إيتو معرفة سلوك الحل أي الحصول على تقدير للطاقة. لكنه لا يمكننا من إثبات وجود قياس ثابت. لهذا قمنا بدراسة معادلة تقريبية مع تنظيم الكثافة أين برهنا على وجود حل وحيد. هذا ما أتاح لنا تطبيق نظرية هاسمينسكي 16 لإثبات وجود مقياس ثابت.

Introduction

Il y a plusieurs phénomènes dans différents domaines (Science, mécanique, physique, biologie,...) qui sont modélisés mathématiquement par des équations différentielles ordinaires soumises à des excitations, représentées mathématiquement par des mouvements browniens. Cette représentation a permis d'introduire la notion des équations différentielles stochastiques, qui, dans l'année 1940, a été développées par Kiyosi Itô. Plusieurs auteurs l'ont étudié aussi bien en dimension finie à savoir Gikhman, A. V. Skorokhod [17] et A. Friedman [13] qu'en dimension infinie comme Da Prato [10] qui a développé la théorie pour résoudre des problèmes plus généraux à savoir les problèmes de la mécanique des fluides, (voir aussi [28], [27], [26], [22]). Aussi, Il y a le problème de la mesure invariante qui est devenue un des thèmes centraux de la recherche sur les équations différentielles stochastiques et a fait l'objet de nombreux travaux. Plusieurs auteurs se sont intéressés à son existence et à son unicité dans des contextes plus ou moins variés. Sans être exhaustif, nous pouvons citer quelques travaux qui ont marqué la recherche dans ce domaine à savoir Da Prato et Zabczyk [11], Da Prato [10] et Prévot et Rockner [23]. L'équation de Navier Stokes stochastique, quant à elle, a inspiré plusieurs auteurs. Citons par exemple ceux de Cruzeiro [9], Albeverio et Cruzeiro [3], Flandoli [16] et Flandoli et Gozzi [15] qui ont pris en compte plusieurs types de perturbations stochastiques pour démontrer l'existence et l'unicité de la mesure invariante.

L'équation qui décrit le mouvement d'un gaz visqueux quant à elle, a inspiré plusieurs auteurs à savoir Kazikhov [19] qui a démontré l'existence et l'unicité de la solution dans le cas déterministe et en coordonnées lagrangiennes. Ainsi, H. Fujita Yashima et E. Tornado [25] ont étudié cette équation dans le cas stochastique où la perturbation stochastique est à variation bornée et R. Benseghir et A. Benchettah [8] ont généralisé ce résultat avec une perturbation stochastique représentée par un Q -processus de Wiener. Concernant le problème de l'existence d'une mesure invariante, plusieurs tentatives ont été élaborées sans trouver un résultat pertinent. Pour cela, plusieurs problèmes approchés ont été étudiés à savoir le problème étudié par R. Benseghir et A. Benchettah [8] où ils ont ajouté un terme de diffusion de la densité. Il y a aussi un autre problème approché. Il s'agit du problème établie par R. Benseghir et H. Fujita Yashima [8], où il ont étudié un problème approché à l'équation stochastique qui décrit le mouvement d'un gaz visqueux barotrope en une dimension spatiale en coordonnées eulériennes et lagrangiennes. Plus précisément, un problème discrétisé avec la régularisation de la densité. Dans le présent travail, nous allons détailler ce problème en suivant le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par donner une introduction au calcul stochastique qui sera utile dans notre travail. Nous allons définir les espaces mesurables et mesurés, donner la notion des processus et rappeler les processus usuels à savoir le processus de Markov, les martingales et le mouvement brownien. Nous nous intéressons également à la définition et la construction de l'intégrale stochastique.

Dans le deuxième chapitre, nous allons introduire la notion des EDS en rappelant le Théorème de l'existence et l'unicité de la solution forte ainsi que le Théorème de Girsanov pour les solutions faibles. Nous allons définir également la mesure invariante en donnant une condition nécessaire et suffisante pour son existence. Nous allons donner ensuite un résultat très important qui sert à démontrer l'existence d'une mesure invariante, il s'agit du

Théorème de Has'minski [19].

Enfin, dans le troisième chapitre, nous allons étudier l'existence d'une mesure invariante pour l'équation stochastique qui décrit le mouvement d'un gaz visqueux barotropique. Nous allons commencer par introduire l'équation dans le cas déterministe aussi bien en coordonnées eulériennes que lagrangiennes. Ensuite, nous allons analyser le comportement de la solution à savoir l'obtention de l'estimation de l'énergie. Et puisque cette estimation ne nous permet pas de démontrer l'existence d'une mesure invariante, nous allons introduire un problème approché. Plus précisément, un problème discrétisé avec la régularisation de la densité. Nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution pour ce problème en appliquant les approximation de Galerkin. Ainsi, nous allons appliquer le Théorème de Has'minski [19] qui nous permet de démontrer l'existence d'une mesure invariante pour ce problème approché.

INTRODUCTION AU CALCUL STOCHASTIQUE

1.1 Espaces mesurables et mesurés

Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, visant à mettre en évidence les outils de notre étude. Nous présenterons quelques définitions, propositions, Théorèmes faits sans démonstration et des résultats de base du calcul stochastique à savoir les processus stochastiques, l'espérance conditionnelle ...etc.

Nous commençons par introduire la notion des espaces mesurables et mesurés et pour ce faire, nous aurons besoin des définitions suivantes.

Définition 1.1. Soit Ω un ensemble non vide. On appelle tribu ou σ -algèbre sur Ω toute famille $\mathcal{F}$ de sous ensembles de Ω vérifiant

- i) $\phi \in \mathcal{F}$,
- ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
- iii) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé espace mesurable.

Définition 1.2. Soit $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ (ou I est ensemble quelconque) une famille de sous-ensembles de Ω . On appelle tribu engendrée la plus petite tribu sur Ω qui contient tous les sous ensembles $A_i, i \in I$. Elle est notée $\sigma(\mathcal{A})$.

Si Ω est un espace topologique, on définit la tribu borélienne de Ω comme étant la tribu engendrée par tous les ouverts de Ω que l'on note $\mathcal{B}_{\Omega}$.

Définition 1.3. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On appelle mesure sur $\mathcal{F}$ toute application $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, non identiquement égale à $+\infty$ et σ -additive, i.e., pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ disjointe ($A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$), définie sur la tribu $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, la réunion des A_n soit encore dans $\mathcal{F}$ et $\sum_{\mu(A_n) < \infty} \mu(A_n)$ converge, alors on a

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est appelé espace mesuré.
- Si $\mu(\Omega) = 1$, alors μ est dite mesure de probabilité et $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est appelé espace probabilisé.

1.2 Fonctions mesurables et variables aléatoires

Définition 1.4. Soient $(\Omega, \mathcal{F})$, (E, Σ) deux espaces mesurables. Une application $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \Sigma)$ est dite (E, Σ) -mesurable si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \Sigma.$$

f est dite aussi variable aléatoire.

Si $\mathcal{F}$ est une tribu borélienne, on écrira simplement f est $\mathcal{F}$ -mesurable.

Si $\mathcal{F}$ et Σ sont des tribus boréliennes, alors la fonction f est dite simplement borélienne. Toute fonction continue est borélienne (mesurable).

Définition 1.5. Soit Ω un ensemble non vide. Pour $A \subset \Omega$, on définit la fonction indicatrice χ_A par

$$\chi_A := \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que la variable aléatoire χ_A est $\mathcal{F}$ -mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.

Définition 1.6. Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \Sigma)$ une variable aléatoire. On appelle mesure image de $\mathbb{P}$ sur Σ par rapport à X , la mesure $\mathbb{P}_X$ définie par

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\}), \quad B \in \Sigma.$$

De plus, on définit la fonction de répartition de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction $F_X(x)$ définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

Définition 1.7. 1. On définit l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X par rapport à $\mathbb{P}$ (ou la moyenne) par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x).$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable ($\mathbb{E}(X)^2 < +\infty$). On définit la variance $Var(X)$ et la covariance $Cov(X, Y)$ par

$$Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0.$$

et

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Définition 1.8. Soit $X \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ -mesurable telle que

$$\mathbb{E}[\chi_A X] = \mathbb{E}[\chi_A \mathbb{E}(X | \mathcal{G})], \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

i.e.,

$$\int_G (X d\mathbb{P}) = \int_G \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) d\mathbb{P}, \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

Soit X une variable aléatoire intégrable (i.e $\mathbb{E}(|X|) < \infty$). $\mathbb{E}[XB]$ est donnée par

$$\mathbb{E}[XB] = \frac{\mathbb{E}[X\chi_B]}{\mathbb{P}(B)}, \quad \mathbb{P}(B) \neq 0.$$

1.2.1 Convergence des suites de variables aléatoires

Soient $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires et X une autre variable aléatoire définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Citons deux types de convergence de la suite (X_n) vers X que nous utilisons dans ce présent travail.

Convergence en probabilité

(X_n) converge en probabilité vers X si, $\forall \epsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{\mathbb{P}(\omega \in \Omega : X_n(\omega) - X(\omega) > \epsilon)\} = 0.$$

Convergence presque sûre

(X_n) converge presque sûre vers X si

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

1.3 Processus stochastiques et processus usuels

Dans toute la suite, on supposera donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.3.1 Processus stochastique

Commençons par définir les processus stochastiques.

Définition 1.9. *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\{(X(t)), t \in T\}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans (E, Σ) où $T \in \mathbb{R}_+$.*

Remarque 1.1. • Pour $t \in T$ fixé, l'application $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

• Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \rightarrow X_\omega(t)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.

• Deux processus $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ sont dits équivalents si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t_1, \dots, t_n \in T$, on a

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \quad \text{en loi.}$$

On dit également que le processus $(Y_t)_{t \in T}$ est la version du processus $(X_t)_{t \in T}$.

• Nous disons qu'un processus stochastique est continu si pour presque tout ω , ses trajectoires sont continues, i.e.,

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : t \mapsto X_\omega(t), t \in T \text{ continu}\} = 1.$$

Processus séparable et processus progressivement mesurable

Définition 1.10. *Un processus stochastique $\xi(t), t \in I$ (I quelconque), est dit séparable s'il existe une suite $T = \{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dense dans I et un sous ensemble $N \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(N) = 0$ tel que $\omega \notin N$ vérifiant*

$$\{\xi(t, \omega) \in F \quad \forall t \in I\} = \{\xi(t_j, \omega) \in F \quad \forall t_j \in I\},$$

pour tout sous ensemble $J \in I$ et pour tout ensemble fermé $F \in \mathbb{R}^m$.

Définition 1.11. Soit X un processus adapté à une filtration $\mathcal{F}_t$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus X est progressivement mesurable si pour tout $T \geq 0$, $X : (\Omega \times [0, T]) \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{[0, T]}$ -mesurable.

1.3.2 Processus usuels

Martingale

Avant de définir la notion du martingale, on a besoin des définitions suivantes :

Définitions 1.1. 1. On appelle filtration $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq +\infty\}$ toute famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ vérifiant, pour $0 \leq s \leq t < +\infty$ on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ et l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré.

2. On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout $t \geq 0$.

Nous donnons maintenant la définition d'une martingale.

Définition 1.12. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. On appelle une martingale tout processus stochastique $(M_t)_{t \in T}$ vérifiant

i) $(M_t)_{t \in T}$ est $(\mathcal{F}_t)$ -mesurable pour tout t .

ii) $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$.

iii) $\mathbb{E}(M_s | \mathcal{F}_t) = M_t$ pour tout $s \geq t$.

- Si $\mathbb{E}(M_s|\mathcal{F}_t) \leq M_t$, on dit que (M_t) est sur-martingale,
- Si $\mathbb{E}(M_s|\mathcal{F}_t) \geq M_t$, on dit que (M_t) est une sous-martingale.

Définition 1.13. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus $\mathcal{F}_t$ adapté tel que $X_0 = 0$. On dit que X est une martingale locale s'il est continu et on a l'existence d'une suite croissante de temps d'arrêts $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

et X^{τ_n} est une martingale.

Définition 1.14. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus $\mathcal{F}_t$ adapté tel que $X_0 = 0$. On dit que X est une martingale bornée s'il existe une constante c tel que

$$\mathbb{E}(X_t) \leq c$$

Définition 1.15. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. On pose $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$. Un temps aléatoire T (variable aléatoire) qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est appelé $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt si on a

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Mouvement Brownien

Définition 1.16. Un processus stochastique $(W(t), t \geq 0)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles est appelé mouvement brownien si

- 1) Les trajectoires $t \mapsto W_t(\cdot)$ sont continues $\mathbb{P} - p.s.$,
- 2) $W(0) = 0$,
- 3) Pour tous $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$, les variables aléatoires $W(t_k) - W(t_{k-1})$, $(0 \leq k \leq n)$ sont à accroissement indépendants (Un processus X_t est dit à accroissements indépendants si pour tout $p \geq 1$ et $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p$, les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_p} - X_{t_{p-1}}$ sont indépendantes).
- 4) Pour tous $0 \leq s \leq t$, on a

$$\mathbb{E}[W(t) - W(s)] = (t - s)\mu,$$

$$\mathbb{E}[(W(t) - W(s))^2] = (t - s)\sigma^2,$$

où μ et σ sont des constantes réelles positives avec $\sigma \neq 0$.
 μ est appelé le drift et σ^2 la variance.

Si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, le mouvement brownien est dit standard ou normalisé.

Processus de Markov

Avant de définir le processus de Markov, on définit d'abord la probabilité de transition de Markov.

Probabilité de transition de Markov

Définition 1.17. Soient $A \in \mathcal{B}$, $x \in \mathbb{R}$ et $0 < s < t < \infty$. La probabilité $\mathbb{P}(X(t) \in A | X(s))$ notée $\mathbf{P}(s, X(s), t, A)$ est appelée probabilité de transition du processus de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ si elle vérifie

- 1) Pour tout $0 \leq s < t < \infty$ et pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a $\mathbf{P}(s, \cdot, t, A)$ est $\mathcal{B}$ mesurable.
- 2) Pour tout $0 \leq s < t < \infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbf{P}(s, x, t, \cdot)$ est une probabilité.
- 3) $\mathbf{P}$ satisfait l'équation de Chapman-Kolmogorov

$$\mathbf{P}(s, x, t, A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(s, x, r, dy) \mathbf{P}(r, y, t, A), \quad \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq s < r < t.$$

Construction de processus de Markov

Théorème 1.1. Soit $\mathbf{P}$ une probabilité de transition de Markov. Alors pour tout $s > 0$ et $\pi(dx)$ une distribution de probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, il existe un processus stochastique $X(t)$, $s \leq t < \infty$ de dimension n défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tel que

$$\mathbb{P}(X(s) \in B) = \pi(B),$$

$$\mathbb{P}(X(t) \in B | \sigma X(v), s \leq v \leq u) = \mathbf{P}(u, X(u), t, B), \quad \mathbb{P} - p.s.,$$

pour tous $s \leq u \leq t$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Notons que, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit π_x par

$$\pi_x(B) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, en notant $\mathbb{P}_{s,x}$ la probabilité $\mathbb{P}_s$ construite sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^s)$ quand $\pi = \pi_x$ et $\mathbb{E}_{s,x}$ l'espérance associée à $\mathbb{P}_{s,x}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty^0$, on obtient

- a) $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable, $\mathcal{F}_t^s = \sigma X(v)$, $s \leq v \leq u$, $\mathcal{F}^s$ est la tribu qui contient toutes les $\mathcal{F}_t^s$.
- b) Il existe une fonction $X(t, \omega)$ de $[0, +\infty[\times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $X(t, \cdot)$ soit $\mathcal{F}_t$ mesurable pour tout $t \geq s$.
- c) Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$, il existe une probabilité $\mathbb{E}_{s,x}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^s)$ telle que

$$\mathbf{P}_{s,x}(X(s, \omega) = x) = 1$$

et

$$\mathbf{P}_{s,x}X(t+h, \omega) \in B | \mathcal{F}_t^s = \mathbf{P}(t, X(t, \omega), t+h, B), \quad \mathbb{P}_{s,x} - p.s.,$$

où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $t \geq s$, $h \geq 0$.

Définition 1.18. Toute famille $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t^s, X(t), \mathbb{P}_{s,x})$, $(s \in I, s \in \mathbb{R}^n)$, vérifiant a), b), c) est dite processus de Markov correspondant à la probabilité de transition $\mathbf{P}$.

Processus de diffusion

Définition 1.19. Un processus de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit un processus de diffusion si sa probabilité de transition $\mathbf{P}(s, x, t, A)$ satisfait les propriétés suivantes

- 1) Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} \mathbf{P}(t, x, t+h, dy) = 0.$$

- 2) Pour tous $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$ il existe deux fonctions $a(t, x)$ et $b(t, x)$ vérifiant :

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} (y-x) \mathbf{P}(t, x, t+h, dy) = a(t, x).$$

et

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} (y-x)^2 \mathbf{P}(t, x, t+h, dy) = b(t, x),$$

où $a(t, x)$ est appelée fonction de diffusion et $b(t, x)$ est appelée le drift.

Exemple

Le mouvement brownien standard est un processus de diffusion de drift $a(t, x) = 0$ et de coefficient de diffusion $b(t, x) = 1$.

1.4 Quelques inégalités

Dans cette partie, nous allons donner quelques inégalités qui seront utiles par la suite.

1) Inégalité de Holder

Si $X \in L^q, Y \in L^p$, tels que $q > 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, on a

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \mathbb{E}(|X|^q)^{\frac{1}{q}} \mathbb{E}(|Y|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

2) Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable. Alors

- i) XY est intégrable, i.e., $\mathbb{E}(|XY|) < +\infty$.
- ii) On a

$$(\mathbb{E}(|XY|))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

3) Inégalité de Doob

Soit $(M_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale réelle de carré intégrable. On a

$$\mathbb{E}[\max_{0 \leq k \leq n} M_k^2] \leq 4\mathbb{E}[M_n^2], \quad \forall k \in [0, n], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier, on a

$$\mathbb{E}[\sup_{n \in \mathbb{N}} M_n^2] \leq 4 \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[M_n^2].$$

1.5 Intégrale stochastique

Dans cette partie, nous allons introduire dans la notion de l'intégrale stochastique. Il nous sert à définir les équations différentielles stochastiques que nous allons étudier dans le chapitre suivant. Pour ce faire, nous avons besoin des notions suivantes.

Définition 1.20. Une classe de fonction $f : [\alpha, \beta] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ est dite non anticipative relativement à $\mathcal{F}_t, t \in [\alpha, \beta]$, si

- i) $f(t)$ est un processus séparable,
- ii) $f(t)$ est un processus progressivement mesurable, i.e., $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ est mesurable,
- iii) $\forall t \in [\alpha, \beta], f(t)$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

1.5.1 Intégrale stochastique pour les fonctions étagées

Définition 1.21. Un processus $f(t), t \in [\alpha, \beta]$ est dit processus étagé (élémentaire) s'il existe une partition $\alpha = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r = \beta$ dans $[\alpha, \beta]$ telle que

$$f(t) = f(t_i) \quad \text{si} \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, r-1.$$

Notons par

$$L_W^p[\alpha, \beta] = \left\{ \begin{array}{l} f \text{ nonanticipatives : } \mathbb{P} \left[\int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|^p dt < \infty \right] = 1, \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty \\ \text{et} \quad \mathbb{P} \left(\text{ess sup}_{\alpha \leq t \leq \beta} |f(t)| < \infty \right) = 1 \quad \text{si} \quad p = \infty \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

et

$$M_W^p[\alpha, \beta] = \left\{ \begin{array}{l} f \in L_W^p[\alpha, \beta] : \mathbb{E} \left[\int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|^p dt \right] < \infty, \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty \\ \text{et} \quad \mathbb{E} \left(\text{ess sup}_{\alpha \leq t \leq \beta} |f(t)| \right) < \infty \quad \text{si} \quad p = \infty. \end{array} \right\}. \quad (2.2)$$

On commence d'abord par définir l'intégrale pour toute fonction étagées $f \in L_W^2$.

Définition 1.22. *La variable aléatoire*

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k) (W(t_k) - W(t_{k-1})),$$

que l'on note

$$\int_{[\alpha, \beta]} f(t) dW(t), \quad (2.3)$$

est appelée *intégrale stochastique* ou *intégrale d'Itô* de la fonction étagée $f \in L_W^2[\alpha, \beta]$, où $(W(t), t \in [\alpha, \beta])$ est un mouvement brownien.

1.5.2 Intégrale stochastique pour toute fonction

Les lemmes suivants nous permettent d'établir la définition de l'intégrale stochastique pour toute fonction $f \in L_W^2[\alpha, \beta]$.

Lemme 1.1. *Soit $f \in L_W^2[\alpha, \beta]$. Il existe une suite de fonctions étagées $f_n \in L_W^2[\alpha, \beta]$ telle que*

$$\int_{[\alpha, \beta]} |f_n(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Lemme 1.2. *Pour toute fonction élémentaire $f \in L_W^2[\alpha, \beta]$ et pour tous $\varepsilon > 0$ et $N > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left\{\left|\int_{[\alpha, \beta]} f(t) dW(t)\right|^2 > \varepsilon\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\int_{[\alpha, \beta]} f^2(t) dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}.$$

Maintenant voici la définition de l'intégrale stochastique.

Définition 1.23. *L'intégrale stochastique de $f \in L_W^2[\alpha, \beta]$ est définie comme la limite en probabilité de*

$$\int_{[\alpha, \beta]} f_n(t) dW(t),$$

où f_n est une suite de fonctions étagées $\in L_W^2[\alpha, \beta]$, i.e.,

$$\int_{[\alpha, \beta]} f(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} f_n(t_k) (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

L'intégrale stochastique vérifie les propriétés

1. *Linéarité :*

Soient $f_1, f_2 \in L_W^2[\alpha, \beta]$ et λ_1, λ_2 deux nombres réels quelconques, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in L_W^2[\alpha, \beta]$ et on a

$$\int_{[\alpha, \beta]} (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)) dW(t) = \lambda_1 \int_{[\alpha, \beta]} f_1(t) dW(t) + \lambda_2 \int_{[\alpha, \beta]} f_2(t) dW(t).$$

2. *Isométrie :*

Soit $f \in M_W^2[\alpha, \beta]$, alors

$$\mathbb{E} \left| \int_{[\alpha, \beta]} f(t) dW(t) \right|^2 = \mathbb{E} \int_{[\alpha, \beta]} f^2(t) dt.$$

3. Soit $f \in M_W^2[\alpha, \beta]$, alors

$$\mathbb{E} \int_{[\alpha, \beta]} f(t) dW(t) = 0.$$

4. Soit $f \in M_W^2[\alpha, \beta]$, alors on a

$$\mathbb{E} \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW(t) | \mathcal{F}_{\alpha} \right] = 0, \quad \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

et

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW(t) \right|^2 | \mathcal{F}_{\alpha} \right] = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbb{E} [f^2(t)] dt \quad \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

1.6 Formule d'Itô

Maintenant nous allons définir La formule d' Itô qui nous permet d' introduire la notion de la différentielle stochastique. Il s'agit d'un outil particulièrement important dans l'étude des processus stochastiques.

Définition 1.24. Soit $(\xi(t), t \in [0, T])$ un processus stochastique réel tel que, pour tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, on a

$$\xi(t_1) - \xi(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t) dW(t),$$

où $a \in L_W^1[0, T]$ et $b \in L_W^2[0, T]$. Alors, on dit que $\xi(t)$ a une différentielle stochastique $d\xi$, donnée par

$$d\xi(t) = a(t) dt + b(t) dW(t).$$

Notons que T étant quelconque dans $\mathbb{R}$, dans le cas où $T = +\infty$, on écrira $[0, +\infty[$. Ainsi, la formule d' Itô est donnée dans le Théorème suivant.

Théorème 1.2. [6] Soient $\xi(t)$ un processus admettant une différentielle stochastique

$$d\xi(t) = a(t) dt + b(t) dW(t)$$

et $f(t, x)$ est une fonction continue sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}$ admettant les dérivées $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ continues. Alors, le processus $F(t) = f(t, \xi(t))$ admet une différentielle stochastique donnée par

$$df(t, \xi(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, \xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t))a(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, \xi(t))b^2(t) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t))b(t)dW(t).$$

Notons que si $f(t)$ est différentiable, le terme

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, \xi(t))b^2(t)$$

n' apparait pas.

Ce résultat se généralise dans $\mathbb{R}^m$.

Théorème 1.3. [6] Soient les processus $\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)$ admettant tous des différentielles stochastiques données par

$$d\xi_i(t) = a_i(t) dt + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)dW_j(t), \quad i = 1, \dots, m,$$

où $a = (a_1, \dots, a_m) \in L_W^1[0, T]$, $b = b_{ij, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n} \in L_W^2[0, T]$ et $W(t)$ est un mouvement brownien en dimension n .

Si $u(t, x_1, \dots, x_m)$ est une fonction continue dans $[0, \infty[\times \mathbb{R}^m$ admettant aussi des dérivées continues $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, \dots, m$, alors le processus $\eta(t) = u(t, \xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$ admet aussi une différentielle stochastique, donnée par

$$d\eta(t) = \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi(t)) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, \xi(t)) a_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, \xi(t)) b_{ik}(t) b_{jk}(t) \right] dt \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, \xi(t)) b_{ik}(t) dW_k(t).$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES ET MESURE INVARIANTE

2.1 Equations différentielles stochastiques (EDS)

Les équations différentielles stochastiques (EDS) sont des équations différentielles perturbées par un terme aléatoire, nommé mouvement brownien. Elles permettent de modéliser des trajectoires aléatoires et de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Les EDS sont appliquées aux différents domaines comme la physique, la biologie, la dynamique des populations, l'écologie, les mathématiques financières, le traitement du signal, la théorie du contrôle, ...

2.1.1 Définition d'une EDS

Définition 2.1. On appelle *équation différentielle stochastique* toute équation définie sur $\mathbb{R}^d$ de coefficient de drift b et de diffusion σ , donnée par

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \forall t \in [0, T], \\ X_0 = \xi, \end{cases} \quad (3.1)$$

où T est un réel strictement positif, $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ sont deux fonctions boréliennes, $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^d$ défini sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, et ξ une variable aléatoire quelconque indépendante du mouvement brownien appartient à $\mathbb{R}^n$

Si la matrice de diffusion est nulle l'EDS est devenue une équation différentielle ordinaire (EDO).

2.1.2 Solutions des EDS

Il existe deux types de solutions pour résoudre une EDS : les solutions fortes et les solutions faibles.

Solution forte

Définition 2.2. Une solution forte d'une EDS sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par rapport à un mouvement brownien W et avec condition initiale ξ est un processus

$X = \{X_t, t \geq 0\}$ vérifiant

- i) X est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \Omega}$,
- ii) $\mathbb{P}(X_0 = \xi) = 1$,
- iii) $\mathbb{P}[\int_0^t (|b(s, X)| + \sigma(s, X))ds] = 1$.

Solution faible

Définition 2.3. Une solution faible d'une EDS est la donnée d'un triplet $((\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_{t \geq 1}, (X, W))$ vérifiant

- 1) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 1}$ une filtration de cet espace.
- 2) W un mouvement brownien de dimension d tel que $(W_t)_{t \geq 1}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)$.
- 3) X un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \Omega}$.

Ainsi, comme on a l'EDS

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(u, X_u) du + \int_0^t \sigma(u, X_u) dW_u < \infty, \quad \mathbb{P} - p.s., \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

on dira alors que le couple (W_t, X_t) est une solution faible de l'EDS.

- Il est clair d'après les définitions ci-dessus qu'une solution forte est aussi une solution faible.
- Si la solution forte est unique alors il y aura aussi une unique solution faible. Par contre si la solution faible est unique, il se peut qu'il y ait plusieurs solutions fortes.

2.1.3 Existence et unicité de la solution

Nous donnons ici un résultat d'existence et d'unicité d'une solution forte.

Théorème 2.1. [2] Supposons que les coefficients b et σ satisfaisant
(H1) Condition de Lipschitz :

$$|b(t, X) - b(t, Y)| \leq K|X - Y|, \quad |\sigma(t, X) - \sigma(t, Y)| \leq K|X - Y|,$$

(H2) Condition de croissance linéaire :

$$|b(t, X)| \leq K_1(1 + |X|), \quad |\sigma(t, X)| \leq K_1(1 + |X|), \quad \forall t \in [0, T],$$

où $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et K, K_1 sont deux constantes. Alors, pour toute condition initiale ξ de carrée intégrable ($\mathbb{E}(|\xi|^2) < \infty$), l'EDS (3.1) admet une unique solution forte $(X_t)_{t \in [0, T]}$ continue presque sûrement.

De plus, on a

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^2| \right) < \infty.$$

Preuve 2.1. pour prouver l'unicité nous utilisons le lemme de Gronwall suivant.

Lemme 2.1. [2] Soit $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \geq 0.$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g(t) \leq ae^{bt}.$$

Preuve 2.2. (Preuve du Lemme) Posons

$$G(t) = a + b \int_0^t g(s) ds.$$

Par conséquent

$$g(t) \leq G(t).$$

Si g est continue alors, G est une fonction dérivable vérifiant

$$(e^{-bt}G(t))' = -be^{-bt}G(t) + e^{-bt}G'(t).$$

Alors, on a

$$G(t) = a + b \int_0^t g(s)ds \quad \text{donc} \quad G'(t) = bg(t),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} (e^{-bt}G(t))' &= -be^{-bt}G(t) + e^{-bt}bg(t). \\ &= be^{-bt}(g(t) - G(t)). \end{aligned}$$

Comme on a

$$g(t) \leq G(t),$$

alors

$$e^{-bt}(g(t) - G(t)) \leq 0.$$

Donc, on obtient

$$e^{-bt}g(t) \leq e^{-bt}G(t) \leq G(0).$$

Comme $G(0) = a$, on a

$$g(t) \leq ae^{bt}.$$

De plus si g est mesurable et bornée alors G est continue satisfaisant

$$G(t) = a + b \int_0^t g(s)ds \leq a + b \int_0^t G(s)ds, \quad (g(t) \leq G(t)). \quad \square$$

Preuve 2.3. (Preuve du Théorème 2.1) Commonçons par démontrer l'existence. Pour ce faire, nous utilisons la méthode d'approximations successives (méthode d'itération de Picard). En effet, soit l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \text{avec} \quad y(x_0) = y_0.$$

La suite des approximations successives de picard est obtenue à partir de la formule

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s))ds.$$

On utilise la variable x comme borne supérieure de l'intégrale et s comme variable d'intégration, on obtient

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0(s))ds, \\ y_2 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s))ds. \end{aligned}$$

Nous définissons par récurrence une suite de processus X_t^n comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t^0 = \xi, \\ X_t^1 = \xi + \int_0^t b(s, \xi)ds + \int_0^t \sigma(s, \xi)dW_s, \\ \vdots \\ X_t^{n+1} = \xi + \int_0^t b(s, X_s^n)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n)dW_s. \end{array} \right.$$

Par recurrence, pour chaque n , le processus X_t^n est continu et adapté. Donc le processus $\sigma(t, X_t^n)$ est également continu .

Pour $T > 0$, on vérifie d'abord par récurrence qu'il existe C_n tel que, pour $t \in [0, T]$, on a

$$\mathbb{E}[(X_t^n)^2] \leq C_n. \quad (3.2)$$

Pour $n = 0$, il n'y a rien à démontrer.

Supposons maintenant que cela est vrai à l'ordre $n - 1$ et vérifions que ça reste vrai à l'ordre n .

D'après la croissance linéaire (H2), on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds\right] < \infty.$$

De plus, d'après l'hypothèse de la récurrence et utilisons la croissance linéaire, on montre que

$$\mathbb{E}[(X_t^n)^2] \leq \infty.$$

En effet, on a

$$X_t^n = X(0) + \int_0^t b(s, X_{n-1}(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X_{n-1}(s))dW_s,$$

qui, en appliquant le sup et l'espérance mathématique, on trouve

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}|X_n(t)|^2 \leq M(T).$$

Maintenant, démontrons l'inégalité

$$|X_t^n| \leq |X(0)| + \left| \int_0^t b(s, X_{n-1}(s))ds \right| + \left| \int_0^t \sigma(s, X_{n-1}(s))dW_s \right|.$$

En effet, si on applique l'espérance mathématique, on trouve

$$\mathbb{E}(|X_t^n|)^2 - 3\mathbb{E}(|X(0)|)^2 \leq 3\mathbb{E}\left|\int_0^t b(s, X_{n-1}(s))ds\right|^2 + 3\mathbb{E}\left|\int_0^t \sigma(s, X_{n-1}(s))dW_s\right|^2,$$

qui, d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz, devient

$$\mathbb{E}(|X_t^n|)^2 - 3\mathbb{E}(|X(0)|)^2 \leq 3t \mathbb{E} \int_0^t |b(s, X_{n-1}(s))|^2 ds + 3\mathbb{E} \int_0^t |\sigma(s, X_{n-1}(s))|^2 ds.$$

Utilisons l'hypothèse (H2), on trouve

$$\mathbb{E}(|X_t^n|)^2 - 3\mathbb{E}(|X(0)|)^2 \leq 3t \mathbb{E} \int_0^t (K_1(1 + |X_{n-1}(s)|))^2 ds + 3\mathbb{E} \int_0^t (K_1(1 + |X_{n-1}(s)|))^2 ds.$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}(|X_t^n|)^2 - 3\mathbb{E}(|X(0)|)^2 \leq 3(t+1) \mathbb{E}\left[\int_0^t (K_1(1 + |X_{n-1}(s)|))^2 ds\right].$$

Utilisant la relation

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2,$$

on trouve

$$\mathbb{E}(|X_t^n|)^2 - 3\mathbb{E}(|X(0)|)^2 \leq 3(t+1) \mathbb{E}\left[\int_0^t (2K_1^2 + 2K_1^2|X_{n-1}(s)|)^2 ds\right] \leq C_n,$$

où

$$C_n = 6T(t+T) (K_1^2 + 4C_{n-1}).$$

L'inégalité (3.2) et l'hypothèse (H2) sur σ impliquent que la martingale locale

$(\int_0^t \sigma(s, X_n(s))dW_s)$ est une martingale bornée dans L^2 pour tout n , par suite, on trouve

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2 < \infty$$

et

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t [b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})] ds + \int_0^t [\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})] dW_s.$$

D' où l' inégalité

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \leq 2\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}) du \right|^2 + \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}) dW_u \right|^2 \right].$$

D' après l' inégalité de Doob (section 1.4) on trouve

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \leq 2\mathbb{E} \left[\left| \int_0^t b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}) du \right|^2 \right] + 4\mathbb{E} \left[\left| \int_0^t \sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}) dW_u \right|^2 \right],$$

ce qui nous donne

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \leq 2T\mathbb{E} \left[\int_0^t |b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1})|^2 du \right] + 4\mathbb{E} \left[\int_0^t |\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1})|^2 du \right].$$

De plus, d' après l' hyothèse (H1), on a

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \leq 2(T+4)K^2\mathbb{E} \left[\int_0^t |X_t^n - X_t^{n-1}|^2 du \right]$$

et

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \leq C_T \mathbb{E} \left[\int_0^t \sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2 du \right],$$

oé

$$C_T = 2(T+4)K^2.$$

On pose

$$g_n(u) = \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2 \right].$$

Ainsi, nous allons montrer que

$$g_n(u) \leq C_T \int_0^t g_{n-}(u) du.$$

En effet, pour tous n , g_n est bornée sur $[0, T]$ et on a

$$\begin{aligned} g_n(u) &\leq 2 \left[\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq r \leq u} \left| \int_0^r b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1}) ds \right|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq r \leq u} \left| \int_0^r \sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}) dW_s \right|^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Posons également que

$$\alpha_1(n) = \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq r \leq u} \left| \int_0^r b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1}) ds \right|^2 \right)$$

et

$$\alpha_2(n) = \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq r \leq u} \left| \int_0^r \sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}) dW_s \right|^2 \right).$$

D' après l' inégalité de Burkholder(**Pour chaque** $p > 0$ **et** $T > 0$, **il existe une constante** $c_p \geq 1$ **telle que** $\phi \in \Omega \times [0, T]$ **et**

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \phi_s dW_s \right|^p \right] \leq c_p \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |\phi_t|^2 dt \right)^{\frac{p}{2}} \right].$$

telle que $(W_t)_{t \geq 0}$ **un mouvement brownien**), alors on a

$$\alpha_2(n) \leq C_2 \mathbb{E} \left[\int_0^u ((\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}))^2 ds)^{\frac{2}{2}} \right].$$

Rappelons que si f est une fonction positive, alors obtient

$$\left(\int_0^u f(s) ds \right)^{\frac{p}{2}} \leq (u - 0)^{\frac{p}{2}-1} \int_0^u f(s)^{\frac{p}{2}} ds,$$

ce qui nous donne

$$\alpha_2(n) \leq C_2(u)^{\frac{2}{2}-1} \int_0^u |\mathbb{E} [\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})]^{\frac{2}{2}} ds \Big].$$

D'après l'hyphothèse (H1), on trouve

$$\alpha_2(n) \leq C_2 K^2 \int_0^u |\mathbb{E} [|X_s^n - X_s^{n-1}|^2 ds] \Big].$$

Par suite, il existe une constante L telle que

$$\alpha_2(n) \leq L \int_0^u |\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2 dr \right] \Big].$$

De mêmes, nous montrons qu'il existe une constante K_1 telle que

$$\alpha_2(n) \leq K_1 \int_0^u |\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2 dr \right] \Big].$$

En on déduit qu'il existe une constante C_T , vérifiant

$$g_t^n \leq C_T \int_0^t X_r^{n-1} dr.$$

Par récurrence, on a

$$g_t^n \leq C_T^n X_t^0 \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n$$

et

$$g_t^n \leq \frac{C_T^n}{n!} g_t^0 (t - 0)^n \leq \frac{C_T^n}{n!} g_t^0 T^n.$$

Posons $g_t^0 = \xi^2 = C < \infty$, on trouve

$$g_t^n \leq C \frac{(MT)^n}{n!},$$

Pour continuer la démonstration, on a besoin du critère de D'Alembert suivant.
Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs

1) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, a_n \neq 0$.

2) La suite $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \rightarrow l \in [0, +\infty]$.

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_n$ est $R = \frac{1}{l} \in [0, +\infty]$.

Appliquon maintenant le critère de D'Alembert, On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(T)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Par suite,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_r^{n+1} - X_r^n|^2 \right])^{\frac{1}{2}} \leq C^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(MT)}{n!} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Alors (X_u^n) est une suite de Cauchy dans L^2 (On note L^2 l'ensemble des fonction de carré intégrable sur Ω), et donc la limite existe et appartient aussi à L^2 . $\square$

Démontrons maintenant l'unicité.

En effet, soient $(W_t)_t \geq 0$ un mouvement brownien, $(X_t), (Y_t)$ deux processus stochastiques vérifiants

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

et

$$Y_t = \xi + \int_0^t b(s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) dW_s.$$

Nous allons montrer que $(X_t) = (Y_t)$, $\mathbb{P} - p.s.$ Ceci est équivalent à démontrer que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} (X_t - Y_t)^2 \right] = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ainsi, on a

$$|X_t - Y_t|^2 = \left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \right|^2.$$

Comme on a

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2, \quad \text{pour } 0 \leq t \leq r \leq T,$$

par conséquent, on trouve

$$|X_t - Y_t|^2 \leq 2 \left[\left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds \right|^2 + \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \right|^2 \right],$$

ce qui donne

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds \right|^2 + \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \right|^2 \right],$$

qui, en appliquant l'espérance mathématique, devient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 \right) &\leq 2\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds \right|^2 \right] \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Doob (section 1.4), on obtient

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 \right) \leq 2\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds \right|^2 \right] + 2 \times 4\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \right|^2 \right].$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy Schwartz. Ainsi, comme on a $(dW_s)^2 = ds$, alors on trouve

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 \right) \leq (2T \vee 8) \mathbb{E} \left[\int_0^T |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|^2 ds + \int_0^T |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^2 ds \right],$$

$$\vee = \min(2T, 8).$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipschitziennes, pour tout $r \in [0, T]$, on obtient

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 \right) \leq C(T, K) \int_0^T \mathbb{E}(\sup_{r \leq s} |X_r - Y_r|^2) ds, \quad C(T, K) = K^2 \min(2T, 8).$$

Appliquons maintenant le lemme de Gronwal donné ci dessus dans le cas de $a = 0$ et $b = C(t, K)$, on trouve

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 \right) \leq 0 e^{C(T, K)T} = 0.$$

Par suite, on a

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 \right) = 0$$

et

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 = 0,$$

ce qui nous donne l'unicité . □

Maintenant, nous allons énoncer un résultat très important pour la recherche d'une solution faible, il s'agit du Théorème de Girsanov.

2.1.4 Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ indexé par l'intervalle de temps $[0, T]$. Le résultat suivant est connu sous le nom de Théorème de Girsanov.

Théorème 2.2. [4] Soit $\mu = \{\mu_t : t \in [0, T]\}$ un processus stochastique tel que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \mu_t^2 dt \right) \right] < \infty.$$

Il existe une mesure $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que

i) $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$,

ii) $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \mu_t dW_t^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2} \int_0^T \mu_t^2 dt \right)$,

iii) Le processus $W^{\mathbb{Q}} = \{W_t^{\mathbb{Q}} : t \in [0, T]\}$ défini par $W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} - \int_0^t \mu_s ds$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ mouvement brownien.

Alors $W_t^{\mathbb{Q}}$ $0 \leq T \leq t$ est un mouvement brownien dans $(\Omega, \mathbb{P}, \mathbb{Q})$.

Pour la démonstration, voir [4].

2.2 Mesure invariante

Dans cette partie, nous nous sommes appuyés sur les définitions et les résultats de Has'minski [18] et pour plus de détails voir [7].

2.2.1 Définition d'une mesure invariante

Définition 2.4. Une mesure μ sur Ω est dite invariante pour la matrice de transition P si $\mu P = \mu$. Si μ est de plus une mesure de probabilité, on dit que μ est une mesure de probabilité invariante (ou stationnaire).

Nous donnons une autre version de la définition d' une mesure invariante. En effet, considérons l'équation stochastique

$$d\xi(t) = b(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dW, \quad (3.3)$$

pour un processus stochastique inconnu $\xi(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, dans (3.3) $b(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et dans $\mathbb{R}^{n \times m}$ respectivement (ici nous désignons par $\mathbb{R}^{n \times m}$ l'espace des matrices $n \times m$), tandis que $W = W(t)$ est le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^m$.

Si une mesure de probabilité $\bar{\mu}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ jouit de la propriété suivante : si une variable aléatoire ξ_0 à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ a la mesure de probabilité $\bar{\mu}$ et si la solution $\xi(t)$ de l'équation (3.3) avec la condition initiale $\xi(0) = \xi_0$ a la même mesure de probabilité $\bar{\mu}$ sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\bar{\mu}(\xi(t) \in B) = \bar{\mu}(\{\xi_0 \in B\}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

alors il est légitime d'appeler $\bar{\mu}$ mesure invariante pour l'équation (3.3).

Définition 2.5. *Un processus stochastique $\xi(t) = \xi(t, w)$, $-\infty < t < +\infty$, é valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dit stationnaire si, pour chaque suite finie de nombres $t_1, \dots, t_k$, la distribution des variables aléatoires $\xi(t_1 + h), \dots, \xi(t_k + h)$ est indépendante de h . La solution stationnaire de l'équation (3.3), toujours selon la terminologie de [18], est le processus stochastique $\xi(t)$ qui vérifie (3.3) presque sûrement.*

La mesure invariante pour l'équation (3.3) est la mesure de probabilité induite par les variables aléatoires $\xi(t)$, ($t \in \mathbb{R}$) quand $\xi(t)$ est la solution stationnaire de l'équation (3.3).

2.2.2 Condition nécessaire et suffisante pour l' existence d' une mesure invariante

Soit $\xi(t), t \in [0, +\infty[$ un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ défini dans l' espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $U_R = x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R$ où $R \in \mathbb{R}_+^*$.

Selon la définition, une condition nécessaire pour que $\xi(t)$ soit un processus de Markov stationnaire est : pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, les probabilités de $\xi(t) \in A$ et $\xi(t) \in A, \xi(t+h) \in B$ sont indépendantes de t . Ainsi, en exprimant ces probabilités en terme d'une fonction de transition $\mathbf{P}$, on remarque que la fonction de transition du processus de Markov stationnaire est homogène et, pour tout $h > 0$, la distribution initiale $\mathbf{P}_0(A) = \mathbb{P}(\xi_0 \in A)$ vérifie

$$\mathbf{P}_0(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}_0(dx) \mathbf{P}(x, h, A). \quad (3.4)$$

Ces deux conditions sont suffisantes pour qu'un processus de Markov soit stationnaire. Maintenant, nous allons énoncer un résultat qui nous donnent les conditions nécessaires et suffisantes sur les fonctions de transition pour obtenir un processus de Markov stationnaire

Théorème 2.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un processus de Markov stationnaire de fonction de transition $\mathbf{P}(x, t, A)$ de Feller (pour la défintion voir [10]) et stochastiquement continue est que, pour $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P}(x, t, \bar{U}_R) dt = 0, \quad (3.5)$$

oé $\bar{U}_R = |x| > R$.

Preuve 2.4. Nécessité

Soit $\mathbf{P}_0$ la distribution initiale. En intégrant (3.4) par rapport à t de 0 à T et en appliquant le Théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\mathbf{P}_0(\bar{U}_R) = \int \mathbf{P}_0(dx) \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P}(x, t, \bar{U}_R) dt. \quad (3.6)$$

Raisonnons par l'absurde : supposons que la condition (3.5) n'est pas vérifiée, i.e.,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P}(x, t, \bar{U}_R) dt = q(x) > 0, \quad (3.7)$$

On a déjà

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{P}_0(\bar{U}_R) \geq \int \mathbf{P}_0(dx) q(x) > 0, \quad (3.8)$$

contradiction !

Suffisance

D'après la condition (3.5), pour x_0 donné, il existe une suite $T_n \rightarrow \infty$ telle que

$$\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \mathbf{P}(x_0, t, U_R) dt \rightarrow 0, \quad \text{quand } R \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

On considère maintenant la suite des mesures sur $B(\mathbb{R}^l)$ définie par

$$\mathbf{P}_n(A) = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \mathbf{P}(x_0, t, A) dt. \quad (3.10)$$

Remarquons que d'après (3.9) $\mathbf{P}_n(A)$ est une suite faiblement compacte. On considère alors une sous-suite faiblement convergente vers une certaine distribution $\mathbf{P}_0$ notée $\mathbf{P}_{nk}$. Nous montrons que la mesure $\mathbf{P}_0$ satisfait (3.4). En effet, soit $f(x) \in C(\mathbb{R}^l)$. Comme on a $\mathbf{P}_{nk} \rightharpoonup \mathbf{P}_0$, la propriété de Feller (continuité) et Fubini-Tonelli nous donnent

$$\int \mathbf{P}_0(dx) \int \mathbf{P}_0(dx) \mathbf{P}(x, t, dy) f(y) = \lim_{nk \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{nk}} \int_0^{T_{nk}} ds \int \mathbf{P}(x_0, s, dx) \int \mathbf{P}(s, t, dy) f(y). \quad (3.11)$$

En appliquant maintenant la relation de Chapman-Kolmogorov, on obtient

$$\int \mathbf{P}_0(dx) \int \mathbf{P}_0(dx) \mathbf{P}(x, t, dy) f(y) = \lim_{nk \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{nk}} \int_0^{T_{nk}} ds \int \mathbf{P}(x_0, s + t, dy) f(y). \quad (3.12)$$

Posons

$$u = s + t,$$

par un simple calcul, (3.14) devient

$$\begin{aligned} \int \mathbf{P}_0(dx) \int \mathbf{P}_0(dx) \mathbf{P}(x, t, dy) f(y) &= \lim_{nk \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{nk}} \left[\int_0^{T_{nk}} du \int \mathbf{P}(x_0, u, dy) f(y) \right] \\ &+ \int_{T_{nk}}^{T_{nk+1}} du \int \mathbf{P}(x_0, u, dy) f(y) - \int_0^t du \int \mathbf{P}(x_0, u, dy) f. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Le deuxième et le troisième terme du membre de droite de l'égalité (3.15) sont nuls, on obtient

$$\int \mathbf{P}_0(dx) \int \mathbf{P}_0(dx) \mathbf{P}(x, t, dy) f(y) = \mathbf{P}_0(dy) f(y), \quad \text{pour tous } f,$$

qui s'écrit sous la forme

$$\int \mathbf{P}_0(dx) T_t f(x) = \int \mathbf{P}_0(dx) f(x).$$

D'où (3.4). □

2.2.3 Existence d'une mesure invariante (Théorème de Has'minski)

Soit le système d'équations stochastique

$$X_i(t) = x + \int_{t_0}^t b_i(s, X(s))ds + \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \sigma_{ij}(s, X(s))dW_j(s), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.14)$$

où $b : [0, \infty[\times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \sigma : [0, \infty[\times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sont boréliennes et W un processus de Wiener défini dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.4. *On considère le système d'équations stochastique (3.14) où les coefficients sont indépendants de t , i.e*

$$X_i(t) = x + \int_{t_0}^t b_i(s, X(s))ds + \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \sigma_{ij}(s, X(s))dW_j(s), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.15)$$

Supposons que

$$\begin{cases} |b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq B|x - y|, & x, y \in U_R, \\ |b(x)| + |\sigma(x)| \leq B(1 + |x|), & x \in U_R. \end{cases}$$

où B est une constante. S'il existe une fonction $V(x) \in C^2, x \in \mathbb{R}^m$ telle que

$$V(x) \geq 0, \quad (3.16)$$

$$\sup_{|x| > R} LV(x) = -A_R \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow +\infty. \quad (3.17)$$

où

$$L = \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3.18)$$

Si de plus pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, posons que le processus $X^x(t)$ est régulier (défini pour tout $t \geq 0$), alors l'équation (3.15) admet une solution qui est un processus stationnaire de Markov.

Pour démontrer ce Théorème, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2. *Soient $\xi(u)$ un processus satisfaisant l'équation (3.3) sur $[s, T]$, $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$, U un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$,*

$\tau_U = \inf\{u : \xi(u) \notin U\}$ et

$$\tau_U(t) = \min(\tau_U, t). \quad (3.19)$$

Supposons que

$$\mathbb{P}\{\xi(s) \in U\} = 1, \quad (3.20)$$

alors on a

$$\mathbb{E}(V(\xi(\tau_U(t))) - V(\xi(s))) = \mathbb{E} \int_s^{\tau_U(t)} LV(\xi(u))du.$$

Pour démontrer ce lemme, voir [7].

Preuve 2.5. (Preuve du Théorème)

Notons $\xi^y(t)$, $t \geq 0$, la solution $\xi(t)$ de l'équation (3.3) avec la condition $\xi(0) = y$. Supposons que $y \in U_q$ où $U_q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < q\}$. Comme $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$, d'après le lemme 2.2, on a

$$\mathbb{E}(V(\xi^y(\tau_q(t))) - V(y)) = \mathbb{E} \int_0^{\tau_q(t)} LV(\xi^y(u))du, \quad (3.21)$$

où $\tau_q = \inf\{u : \xi(u) \notin U_q\}$. Posons

$$A_R = - \sup_{|x|>R} LV(x),$$

alors la condition (3.17) nous donne

$$LV(\xi^y(u)) \leq -\chi_{\{|\xi^y(u)|>R\}}(\omega)A_R + \sup_{y \in \mathbb{R}^n} LV(y), \quad (3.22)$$

où χ est la fonction indicatrice.

En intégrant $\chi_{\{|\xi^y(u)|>R\}}(\omega)A_R$ de 0 à $\tau_q(t)$ et en appliquant l'espérance mathématique, on peut déduire de l'inégalité (3.22) que

$$\begin{aligned} A_R \mathbb{E} \int_0^{\tau_q(t)} \chi_{\{|\xi^y(u)|>R\}}(\omega) du &\leq -\mathbb{E} \int_0^{\tau_q(t)} LV(\xi^y(u)) du \\ &\quad + \sup_{y \in \mathbb{R}^n} LV(y) \int_0^{\tau_q(t)} du. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Substituons (3.21) dans l'inégalité (3.23), alors on obtient

$$A_R \mathbb{E} \int_0^{\tau_q(t)} \chi_{\{|\xi^y(u)|>R\}}(\omega) du \leq -\mathbb{E}(V(\xi^y(\tau_q(t)))) + V(y) + \sup_{y \in \mathbb{R}^n} LV(y) \int_0^{\tau_q(t)} du. \quad (3.24)$$

D'après la condition (3.16), on peut trouver deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$A_R \mathbb{E} \int_0^{\tau_q(t)} \chi_{\{|\xi^y(u)|>R\}}(\omega) du \leq c_1 t + c_2. \quad (3.25)$$

Puisque $\xi^y(t)$ est défini pour tout $t \geq 0$, on a $\tau_q \rightarrow t$ quand $q \rightarrow \infty$ et donc en passant à la limite dans (3.25), on obtient

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{P}(x, u, \bar{U}_R) du < \frac{c_3}{A_R}. \quad (3.26)$$

En tenant compte de (3.17), ceci nous permet d'utiliser une version du Théorème 2.1 du chapitre III de [7] où l'on utilise uniquement la suffisance et en considérant dans (3.26) la $\lim$ au lieu de la $\lim \inf$. D'où l'existence d'un processus de Markov stationnaire pour l'équation (3.3). $\square$

APPLICATION : EXISTENCE D'UNE MESURE INVARIANTE POUR L'ÉQUATION D'UN GAZ VISQUEUX BAROTROPIQUE EN UNE DIMENSION SPATIALE

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'équation qui décrit le mouvement d'un gaz visqueux barotrope en une dimension spatiale aussi bien dans les coordonnées eulériennes que lagrangiennes.

3.1 Equation déterministe du mouvement d'un gaz visqueux en coordonnées eulériennes

Nous commençons par introduire l'équation déterministe d'un gaz visqueux barotrope en une dimension spatiale et en coordonnées eulériennes. Pour plus de détails, voir [19].

3.1.1 Système d'équations

On considère le système d'équations

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0, \quad (4.1)$$

$$\varrho \partial_t v_j + \varrho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + R_1 \frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho T) \quad (4.2)$$

$$= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \left(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) + \varrho f_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

$$\varrho c_v (\partial_t T + v \cdot \nabla T) + R_1 \varrho T \nabla \cdot v = \quad (4.4)$$

$$= k \Delta v + \eta \sum_{j,k=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{j,k} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \zeta (\nabla \cdot v)^2,$$

où ϱ représente la densité de gaz, $v = (v_1, v_2, v_3)$ la vitesse, T la température, f la force extérieure (par l'unité de masse), tandis que η désigne le coefficient de viscosité d'écoulement, ζ représente le coefficient de viscosité volumique, c_v la chaleur spécifique, k signifie le coefficient de la conductibilité thermique et $R_1 = \frac{R}{\mu}$ telle que R représente une constante universelle de gaz et μ la masse molaire du gaz.

De plus, l'équation (4.1) exprime la loi de la conservation de la masse, tandis que l'équation (4.2) représente l'expression de la quantité de mouvement. Quant à l'équation (4.4), elle exprime l'énergie.

Ainsi, la pression p est donnée par

$$p = R_1 \varrho T. \quad (4.5)$$

Elle représente la loi constructive de la pression du gaz idéal.

3.1.2 Modèle barotropique

Dans le présent travail, nous nous intéressons au modèle barotropique, i.e., nous considérons la température comme étant une fonction de la densité. Par conséquent, la pression devient en fonction uniquement de la densité et le système d'équations ne contient pas la température T . Ensuite, comme la diffusion de la chaleur due au flux de la chaleur $-k\nabla T$ est, dans les gaz, assez lente et la contribution à l'augmentation de la température due au frottement interne du gaz est elle aussi petite par rapport aux autres termes, cela nous permet de définir le modèle barotropique donné comme suit

$$\varrho c_v(\partial_t T + v \cdot \nabla T) + R_1 \varrho T \nabla \cdot v = 0. \quad (4.6)$$

$$\varrho \partial_t v_j + \varrho \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + h \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho^\gamma = \quad (4.7)$$

$$= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \left(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\zeta \nabla \cdot v) + \varrho f_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$\varrho \partial_t v + \varrho (v \cdot \nabla) v + h \nabla \varrho^\gamma = \eta \Delta v + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \nabla (\nabla \cdot v) + \varrho f. \quad (4.8)$$

3.1.3 Equation du mouvement d'un gaz visqueux en une dimension spatiale

Nous considérons le modèle barotropique ci-dessus dans une dimension spatiale et nous supposons que les coefficients de viscosité sont des constantes, alors il devient

$$\partial_t \varrho + \partial_x (\varrho v) = 0, \quad (4.9)$$

$$\varrho (\partial_t v + v \partial_x v) = \mu \partial_x^2 v - R_1 \partial_x (\varrho T) + \varrho f, \quad (4.10)$$

$$\varrho c_v (\partial_t T + v \partial_x T) + R_1 \varrho T \partial_x v = \kappa \partial_x^2 T + \mu (\partial_x v)^2, \quad (4.11)$$

où

$$\mu = \frac{4}{3} \eta + \zeta.$$

Dans notre travail, nous allons envisager le système d'équations barotropique (4.9)-(4.11) dans le domaine $D =]0, 1[$, c'est-à-dire

$$0 < x < 1,$$

avec les conditions aux limites

$$v = 0, \quad \partial_x T = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \quad x = 1, \quad (4.12)$$

et les conditions initiales

$$\varrho(0, x) = \varrho_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad T(0, x) = T_0(x), \quad \text{pour} \quad x \in [0, 1]. \quad (4.13)$$

Donc, nous considérons le système

$$\partial_t \varrho + \partial_x (\varrho v) = 0, \quad (4.14)$$

$$\varrho (\partial_t v + v \partial_x v) = \mu \partial_x^2 v - h \partial_x \varrho^\gamma + \varrho f. \quad (4.15)$$

Le système d'équations (4.14)-(4.15) peut être envisagé par exemple dans le domaine $D =]0, 1[$ avec les conditions aux limites

$$v = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \quad x = 1, \quad (4.16)$$

et les conditions initiales

$$\varrho(0, x) = \varrho_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) \quad \text{pour} \quad x \in [0, 1]. \quad (4.17)$$

3.2 Equation déterministe du mouvement d'un gaz en une dimension spatiale en coordonnées lagrangiennes

Maintenant, nous rappelons l'équation déterministe qui décrit le mouvement d'un gaz visqueux barotrope en dimension spatiale mais en coordonnées lagrangiennes.

Dans ce cas, on utilise la position initiale x_0 comme une coordonnée spatiale. Ainsi, les coordonnées lagrangiennes (t, x_0) sont liées aux coordonnées eulériennes (t, x) par les relations

$$\frac{dx(x_0; t)}{dt} = v(t, x(x_0; t)) \quad (4.18)$$

avec les conditions initiales

$$x(x_0; 0) = x_0. \quad (4.19)$$

$$\partial_t \varrho + \varrho^2 \partial_\xi v = 0, \quad (4.20)$$

$$\partial_t v + h \partial_\xi \varrho^\gamma = \mu \partial_\xi (\varrho \partial_\xi v) + f. \quad (4.21)$$

Ensuite, nous considérons le système d'équations (4.20)-(4.21) dans le domaine $D =]0, 1[$ ($0 < \xi < 1$)), avec les conditions aux limites

$$v = 0 \quad \text{pour} \quad \xi = 0, \quad \xi = 1, \quad (4.22)$$

et les conditions initiales

$$\varrho(0, \xi) = \varrho_0(\xi), \quad v(0, \xi) = v_0(\xi) \quad \text{pour} \quad \xi \in [0, 1]. \quad (4.23)$$

3.3 Equation stochastique du mouvement d'un gaz visqueux barotrope

3.3.1 Equation stochastique d'un gaz visqueux en coordonnées eulériennes

Si nous supposons que la force extérieure f représente une perturbation stochastique, alors, notre système d'équations déterministe devient un système d'équations stochastiques aussi bien en coordonnées eulériennes que lagrangiennes. i.e., nous ajoutons à l'équation (4.15) une perturbation stochastique dH . En effet, nous obtenons le système stochastique

$$\varrho dv = [-\varrho v \partial_x v + \mu \partial_x^2 v - h \partial_x \varrho^\gamma] dt + \varrho dH, \quad (4.24)$$

$$\partial_t \varrho = -\partial_x (\varrho v). \quad (4.25)$$

Nous considérons les équations (4.24)-(4.25) par exemple dans le domaine

$$0 \leq x \leq 1$$

avec les conditions

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (4.26)$$

3.3.2 Equation stochastique d'un gaz visqueux en coordonnées lagrangiennes

De même, pour les coordonnées lagrangiennes, si nous ajoutons à l'équation (4.21) une perturbation stochastique dG , on a le système d'équations

$$dv = [\mu \partial_\xi (\varrho \partial_\xi v) - h \partial_\xi \varrho^\gamma] dt + dG, \quad (4.27)$$

$$\partial_t \varrho = -\varrho^2 \partial_\xi v. \quad (4.28)$$

Nous considérons le système (4.27)-(4.28) par exemple dans le domaine

$$0 \leq \xi \leq 1$$

avec les conditions

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (4.29)$$

Il nous faut rappeler que le processus stochastique $H = H(t)$ dans (4.24) doit être défini sur les coordonnées eulériennes $0 \leq x \leq 1$, tandis que le processus stochastique $G = G(t)$ dans (4.27) doit être défini sur les coordonnées lagrangiennes $0 \leq \xi \leq 1$. C'est-à-dire, $H = H(t)$ est une perturbation définie sur les positions spatiales x , tandis que $G = G(t)$ est une perturbation définie sur les points matériels, qui sont représentés par les coordonnées ξ .

Par la suite, notons la perturbation stochastique en coordonnées eulériennes ou lagrangiennes par $W(t)$.

Dans cette partie, nous considérons le mouvement brownien $W(t)$ à valeurs dans l'espace $L^2(0, 1)$ ayant la forme

$$W(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k e_k(\xi) W^{(k)}(t),$$

où λ_k , $k = 1, 2, \dots$ sont des nombres réels positifs, $(e_k)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ est une base orthonormale dans $L^2(0, 1)$ et $W^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, sont des mouvements browniens à valeurs réelles indépendants définis sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On a utilisé cette caractérisation de ce mouvement brownien dans un espace de Hilbert pour des raisons techniques. Pour plus de détails, voir par exemple [30] et [25].

3.4 Estimation de l'énergie

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement de la solution à savoir l'obtention de l'estimation de l'énergie. Nous allons utiliser l'équation en coordonnées eulériennes à cause de la facilité des calculs par rapport à l'équation en coordonnées lagrangiennes.

En effet, rappelons que le système d'équations en coordonnées eulérienne s'écrit sous la forme

$$\varrho dv = [-\varrho v \partial_x v + \mu \partial_x^2 v - h \partial_x \varrho^\gamma] dt + \varrho dW, \quad (4.32)$$

$$\partial_t \varrho = -\partial_x (\varrho v), \quad (4.33)$$

les conditions aux limites

$$v(0) = v(1) = 0 \quad (4.34)$$

et les conditions initiales

$$v|_{t=0} = v_0, \quad \varrho|_{t=0} = \varrho_0, \quad \varrho_0(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (4.35)$$

Proposition 3.1. *Etant fixées les données initiales (v_0, ϱ_0) telles que $\sqrt{\varrho_0}v_0 \in L^2(0, 1)$, $\varrho_0 \in L^\gamma(0, 1)$, il existe une constante C telle que*

$$\frac{1}{T} \mathbb{E} \int_0^T \|\partial_x v\|_{L^2(0,1)}^2 dt \leq C. \quad (4.36)$$

Preuve 3.1. *On considère la fonctionnelle $\varphi = \varphi(t)$ définie par*

$$\varphi = \int_0^1 \varrho \frac{v^2}{2} dx + \frac{1}{\gamma - 1} h \int_0^1 \varrho^\gamma dx. \quad (4.37)$$

Si on pose

$$u = v - W,$$

en appliquant la formule d'Ito à φ , on a

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} d\varrho + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial W_s} dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 W_s} dW_s^2. \quad (4.38)$$

Or, d'après (4.32) et (4.33), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} du &= \int_0^1 [-\varrho v^2 \partial_x v + \mu v \partial_x^2 v - h v \partial_x \varrho^\gamma] dx ds, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} d\varrho &= \int_0^1 \left[-\frac{v^3}{2} \partial_x \varrho - \varrho \frac{v^2}{2} \partial_x v \right] dx ds - \frac{\gamma}{\gamma - 1} h \int_0^1 (v \varrho^{\gamma-1} \partial_x \varrho + \varrho^{\gamma-1} \varrho \partial_x v) dx ds, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial W} dW &= \langle \varrho v, dW_s \rangle, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial W^2} (dW, dW) &= \int_0^1 \varrho \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 e_k^2 dx ds. \end{aligned}$$

En substituant ces relations dans (4.38), on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \varphi(0) &= \int_0^t \int_0^1 [-\varrho v^2 \partial_x v + \mu v \partial_x^2 v - h v \partial_x \varrho^\gamma] dx ds + \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \left[-\frac{v^3}{2} \partial_x \varrho - \varrho \frac{v^2}{2} \partial_x v - h \frac{\gamma}{\gamma - 1} (v \varrho^{\gamma-1} \partial_x \varrho + \varrho^{\gamma-1} \varrho \partial_x v) \right] dx ds + \\ &+ \int_0^t \langle \varrho v, dW_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \varrho \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 e_k^2 dx ds. \end{aligned} \quad (4.39)$$

En substituant ces relations dans l'égalité (4.39), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \varrho \frac{v^2(t)}{2} dx + \frac{1}{\gamma - 1} h \int_0^1 \varrho^\gamma(t) dx - \int_0^1 \varrho \frac{v^2(0)}{2} dx + \frac{1}{\gamma - 1} h \int_0^1 \varrho^\gamma(0) dx \\ &= -\mu \int_0^t \int_0^1 (\partial_x v)^2 dx ds + \int_0^t \langle \varrho v, dW_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^1 \varrho e_k^2 dx ds, \end{aligned} \quad (4.40)$$

qui, en appliquant l'espérance mathématique devient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_0^1 \varrho \frac{v^2}{2} dx + \frac{h}{\gamma-1} \int_0^1 \varrho^\gamma dx \right) + \mu \mathbb{E} \int_0^1 \|\partial_x v\|_{L^2}^2 ds \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^1 \varrho_0 \frac{v_0^2}{2} dx + \frac{h}{\gamma-1} \int_0^1 \varrho_0^\gamma dx \right) + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^1 \varrho e_k^2 dx ds. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Pour démontrer l'inégalité (4.36) nous avons besoin des relations suivantes

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq 1} e_k^2(x) &= \sup_{0 \leq x \leq 1} (\sqrt{2} \sin(k\pi x))^2 = 2, \\ \int_0^1 \varrho e_k^2 dx &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} e_k^2(x) \int_0^1 \varrho dx = 2 \end{aligned} \quad \square$$

Remarque 3.1. Malgré l'élégance de la formule (4.36), il nous est difficile d'en déduire une estimation sur ϱ utile pour prouver l'existence d'une mesure invariante. Pour cela, nous allons étudier un problème approché, i.e., un problème discrétisé avec une régularisation de la densité.

3.5 Equation approché d'un gaz visqueux barotropique en dimension spatiale

Nous nous appuyons dans cette partie sur le travail de R. Benseghir et H. Fujita Yashima [5]. Nous allons considérer le système d'équations (4.24)-(4.25) en coordonnées lagrangiennes massique ξ dans le domaine

$$0 < \xi < 1 \quad (4.42)$$

avec la condition aux limites (4.26).

Nous allons étudier une approximation de ce système, approximation faite par la discrétisation du domaine $]0, 1[$ et par l'introduction d'un nombre $\varepsilon > 0$ qui régularise la densité ϱ .

3.5.1 Problème discrétisé

Soit N un nombre naturel qui n'est pas inférieur à 2. Nous posons

$$\xi_i = \frac{i}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (4.43)$$

Considérons deux fonctions $v(t, \xi)$ et $\varrho(t, \xi)$ définies sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ telle que $\varrho(t, \xi) > 0$ pour tout $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ et que $v(t, \cdot) \in C^2([0, 1])$ et $\varrho(t, \cdot) \in C^1([0, 1])$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Si on pose

$$\widehat{v}_i(t) = v(t, \xi_i), \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$\widehat{\varrho}_i(t) = \varrho(t, \frac{\xi_i + \xi_{i-1}}{2}), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\delta = \frac{1}{N},$$

$$R_N^{[1,i]} = \partial_\xi v \Big|_{\xi=\frac{\xi_{i-1}+\xi_i}{2}} - \frac{1}{\delta} (\widehat{v}_i(t) - \widehat{v}_{i-1}(t)), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$R_N^{[2,i]} = \partial_\xi (\varrho^\gamma) \Big|_{\xi=\xi_i} - \frac{1}{\delta} ((\widehat{\varrho}_{i+1}(t))^\gamma - (\widehat{\varrho}_i(t))^\gamma) \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$R_N^{[3,i]} = \partial_\xi v \Big|_{\xi=\frac{\xi_i+\xi_{i-1}}{2}} - \frac{1}{\delta} (\widehat{v}_i - \widehat{v}_{i-1}),$$

alors on a

$$R_N^{[1,i]} \rightarrow 0, \quad R_N^{[2,i]} \rightarrow 0, \quad R_N^{[3,i]} \rightarrow 0, \quad \text{pour } N \rightarrow \infty.$$

En d'autres terme, les approximations

$$\begin{aligned} \partial_\xi(\varrho \partial_\xi v) \Big|_{\xi=\xi_i} &\approx \frac{1}{\delta} [\widehat{\varrho}_{i+1} \frac{\widehat{v}_{i+1} - \widehat{v}_i}{\delta} - \widehat{\varrho}_i \frac{\widehat{v}_i - \widehat{v}_{i-1}}{\delta}] \\ &= \frac{1}{\delta^2} (\widehat{\varrho}_{i+1} \widehat{v}_{i+1} - (\widehat{\varrho}_{i+1} + \widehat{\varrho}_i) \widehat{v}_i + \widehat{\varrho}_i \widehat{v}_{i-1}), \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\partial_\xi(\varrho^\gamma) \Big|_{\xi=\xi_i} \approx \frac{1}{\delta} ((\widehat{\varrho}_{i+1})^\gamma - (\widehat{\varrho}_i)^\gamma), \quad (4.45)$$

$$\partial_\xi v \Big|_{\xi=\frac{\xi_i+\xi_{i-1}}{2}} \approx \frac{1}{\delta} (\widehat{v}_i - \widehat{v}_{i-1}), \quad (4.46)$$

sont valables dans le sens que le deuxième membre de ces égalités approximatives tendent vers les premiers membre quand N tend vers l'infini. Rappelons également que les approximations (4.44)-(4.46) sont du même type que celles communément utilisées dans le calcul numérique. D'après les équations (4.44)-(4.46), notre problème devient

$$\begin{aligned} dv_i &= \left[\frac{\eta}{\delta^2} (\varrho_{i+1} v_{i+1} - (\varrho_{i+1} + \varrho_i) v_i + \varrho_i v_{i-1}) - \frac{h}{\delta} ((\varrho_{i+1})^\gamma - (\varrho_i)^\gamma) \right] dt \\ &\quad + \lambda_i dW_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\delta} [v_i - v_{i-1}], \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.48)$$

où les λ_i , $i = 1, \dots, N-1$, sont des constantes positives et les W_i , $i = 1, \dots, N-1$, sont des mouvements browniens canoniques à valeurs réelles définis sur une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$; on suppose que W_i , $i = 1, \dots, N-1$, sont indépendants. Il s'agit donc d'un système d'équations pour $2N-1$ inconnues $v_1, \dots, v_{N-1}$, $\varrho_1, \dots, \varrho_N$, un problème approché donnée par l'équation (4.47)-(4.48) ainsi nous avons également les conditions aux limites

$$v_0 = v_N = 0. \quad (4.49)$$

3.5.2 Problème régularisé

Soit $\varepsilon > 0$. Au lieu de (4.48) nous considérons l'équation

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\delta} [v_i - v_{i-1}] + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\varrho_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Donc, en définitive, le système d'équations et les conditions que nous allons considérer sont

$$\begin{aligned} dv_i &= \left[\frac{\eta}{\delta^2} (\varrho_{i+1} v_{i+1} - (\varrho_{i+1} + \varrho_i) v_i + \varrho_i v_{i-1}) - \frac{h}{\delta} ((\varrho_{i+1})^\gamma - (\varrho_i)^\gamma) \right] dt \\ &\quad + \lambda_i dW_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\delta} [v_i - v_{i-1}] + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\varrho_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.51)$$

avec

$$v_0 = v_N = 0, \quad (4.52)$$

Lorsque nous considérons le système (4.50)-(4.51) avec une condition initiale, en outre la condition naturelle pour la densité

$$\varrho_i(0) > 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

nous exigeons également que

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(0)} = 1. \quad (4.53)$$

Si $\varrho_i > 0$ (ϱ_i devant correspondre à la densité à un point, nous voulons que $\varrho_i > 0$), alors, en posant

$$\sigma_i = \log \varrho_i,$$

on peut transformer le système (4.50)-(4.51) en

$$\begin{aligned} dv_i = & \left[\frac{\eta}{\delta^2} (e^{\sigma_{i+1}} v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i}) v_i + e^{\sigma_i} v_{i-1}) - \frac{h}{\delta} ((e^{\sigma_{i+1}})^\gamma - (e^{\sigma_i})^\gamma) \right] dt \\ & + \lambda_i dW_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_i = -\frac{e^{\sigma_i}}{\delta} [v_i - v_{i-1}] - \varepsilon (e^{\sigma_i} - 1), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.55)$$

Le système (4.50)-(4.51) est considéré à valeurs dans $\mathbb{R}^{N-1} \times (\mathbb{R}_+)^N$, tandis que le système (4.54)-(4.55) est à considérer à valeurs dans $\mathbb{R}^{2N-1}$. Donc, du point de vue technique, il est plus convenable de considérer le système d'équations (4.54)-(4.55).

On rappelle que l'équation (4.28), jointe à la condition (4.29), entraîne la relation

$$\int_0^1 \frac{1}{\varrho(\xi, t)} d\xi = \int_0^1 \frac{1}{\varrho(\xi, 0)} d\xi, \quad \forall t \geq 0.$$

Comme dans les coordonnées lagrangiennes massiques, $\frac{1}{\varrho(\xi, t)}$ représente le volume occupé par le gaz, cette égalité signifie que l'espace (longueur de l'intervalle) occupé par le gaz de masse totale 1 reste invariant. Si on normalise la longueur de l'intervalle occupé par le gaz, on aura $\int_0^1 (\varrho(\xi, t))^{-1} d\xi = \int_0^1 (\varrho(\xi, 0))^{-1} d\xi = 1$. Ce fait, dans notre problème discrétisé, correspond à la relation

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(t)} = 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.56)$$

En effet, si on somme les deux membres de (4.51) pour $i = 1, \dots, N$, en tenant compte des conditions (4.52), on a

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(t)} = \varepsilon - \varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(t)};$$

si on considère cette équation comme une équation différentielle ordinaire pour $y(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(t)}$ et on résout le problème de Cauchy consistant à cette équation avec la condition initiale (4.53), on trouve (4.56).

Pour l'expression en σ_i , la condition (4.53) s'exprime évidemment par

$$\delta \sum_{i=1}^N e^{-\sigma_i(0)} = 1 \quad (4.57)$$

et la relation (4.56) sera exprimée par

$$\delta \sum_{i=1}^N e^{-\sigma_i(t)} = 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.58)$$

3.6 Existence et unicité de la solution du problème approché

On considère le système d'équations (4.54)-(4.55) avec la condition (4.52) et les conditions initiales

$$v_i(0) = v_{0i}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad \sigma_i(0) = \sigma_{0i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.59)$$

où $X_0 = (v_{01}, \dots, v_{0N-1}, \sigma_{01}, \dots, \sigma_{0N})$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{2N-1}$ satisfaisant à la condition

$$\delta \sum_{i=1}^N e^{-\sigma_{0i}} = 1 \quad \text{p.s..} \quad (4.60)$$

Pour ce problème on démontre l'existence et l'unicité de la solution.

Proposition 3.2. On suppose que la variable aléatoire $X_0 = (v_{01}, \dots, v_{0N-1}, \sigma_{01}, \dots, \sigma_{0N})$ vérifie, outre (4.60), la condition

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} v_{0i}^2 < \infty, \quad \mathbb{E} \sum_{i=1}^N e^{\sigma_{0i}} < \infty. \quad (4.61)$$

Alors, quelque soit $t_1 > 0$, le système d'équations (4.54)-(4.55) avec les conditions (4.52) et (4.59) admet, dans l'intervalle $[0, t_1]$, une solution $(v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$ et une seule. En outre elle vérifie la relation

$$\delta \sum_{i=1}^N e^{-\sigma_i(t)} = 1 \quad \text{p.s.,} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.62)$$

Preuve 3.2. La démonstration de la proposition consiste à construire une suite de solutions approchées, qui converge vers la solution cherchée.

Soit $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 1$. On introduit la fonction θ_ν définie par

$$\theta_\nu = \theta_\nu(\{\sigma_i^{(\nu)}\}_{i=1}^N) = \min(1, \frac{\nu}{\sum_{i=1}^N e^{\sigma_i^{(\nu)}}}) \quad (4.63)$$

et on considère le système d'équations en $v_i^{(\nu)}, \sigma_i^{(\nu)}$

$$dv_i^{(\nu)} = [\frac{\eta}{\delta^2} \theta_\nu (e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}} v_{i+1}^{(\nu)} - (e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}} + e^{\sigma_i^{(\nu)}}) v_i^{(\nu)} + e^{\sigma_i^{(\nu)}} v_{i-1}^{(\nu)}) \quad (4.64)$$

$$- \frac{h}{\delta} \theta_\nu^\gamma ((e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma)] dt + \lambda_i dW_i, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_i^{(\nu)} = - \frac{\theta_\nu^\gamma e^{\sigma_i^{(\nu)}}}{\delta} [v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)}] - \varepsilon \theta_\nu (e^{\sigma_i^{(\nu)}} - 1), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.65)$$

avec

$$v_0^{(\nu)} = v_N^{(\nu)} = 0, \quad (4.66)$$

$$v_i^{(\nu)}(0) = v_{0i}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad \sigma_i^{(\nu)}(0) = \sigma_{0i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.67)$$

Lemme 3.1. *Quelque soit $t_1 > 0$, le système d'équations (4.64)-(4.65) avec les conditions (4.66)-(4.67) admet, dans l'intervalle $[0, t_1]$, une solution $(v_1^{(\nu)}, \dots, v_{N-1}^{(\nu)}, \sigma_1^{(\nu)}, \dots, \sigma_N^{(\nu)})$ et une seule et elle vérifie l'inégalité*

$$\frac{\delta}{2} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^{(\nu)}(t))^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1} \mathbb{E} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \leq C_0 + C_1 t, \quad \forall t \in [0, t_1], \quad (4.68)$$

où C_0 et C_1 sont deux constantes positives indépendantes de ν .

Preuve 3.3. 3.1 .

De la définition (4.63) de θ_ν il résulte immédiatement que

$$0 < \theta_\nu \leq 1, \quad 0 < \theta_\nu e^{\sigma_i^{(\nu)}} \leq \nu.$$

On constate facilement que ces inégalités impliquent que les seconds membres de (4.64) et de (4.65) vérifient la condition de Lipschitz pour $(v_1^{(\nu)}, \dots, v_{N-1}^{(\nu)}, \sigma_1^{(\nu)}, \dots, \sigma_N^{(\nu)}) \in \mathbb{R}^{2N-1}$. Donc, d'après le théorème classique d'existence et d'unicité (voir Chap. 1), quelque soit $t_1 > 0$, le problème en considération admet, dans l'intervalle $[0, t_1]$, une solution $(v_1^{(\nu)}, \dots, v_{N-1}^{(\nu)}, \sigma_1^{(\nu)}, \dots, \sigma_N^{(\nu)})$ et une seule.

Pour démontrer l'inégalité (4.68), on considère la fonction

$$\psi(t) = \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^{(\nu)}(t))^2. \quad (4.69)$$

Comme

$$\frac{\partial \psi}{\partial v_i^{(\nu)}} = \delta v_i^{(\nu)},$$

en appliquant la formule d'Ito à $\psi(t)$, on a

$$\psi(t) - \psi(0) = \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} G_i^{(\nu)} dt' + \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} \lambda_i dW_i + \frac{1}{2} \Lambda t, \quad (4.70)$$

où

$$G_i^{(\nu)} = \frac{\eta}{\delta^2} \theta_\nu (e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}} v_{i+1}^{(\nu)} - (e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}} + e^{\sigma_i^{(\nu)}}) v_i^{(\nu)} + e^{\sigma_i^{(\nu)}} v_{i-1}^{(\nu)}) - \frac{h}{\delta} \theta_\nu^\gamma ((e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma),$$

$$\Lambda = \delta \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2.$$

On remarque que, à l'aide de la relation (4.66), on a

$$\begin{aligned} & \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} \frac{\eta}{\delta^2} \theta_\nu (e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}} v_{i+1}^{(\nu)} - (e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}} + e^{\sigma_i^{(\nu)}}) v_i^{(\nu)} + e^{\sigma_i^{(\nu)}} v_{i-1}^{(\nu)}) \\ &= - \sum_{i=2}^{N-1} \frac{\eta}{\delta} \theta_\nu e^{\sigma_i^{(\nu)}} (v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)})^2 \\ &+ \frac{\eta}{\delta} \theta_\nu e^{\sigma_N^{(\nu)}} (v_N^{(\nu)} - v_{N-1}^{(\nu)}) v_{N-1}^{(\nu)} - \frac{\eta}{\delta} \theta_\nu e^{\sigma_1^{(\nu)}} (v_1^{(\nu)} - v_0^{(\nu)}) v_1^{(\nu)} \\ &= - \sum_{i=1}^N \frac{\eta}{\delta} \theta_\nu e^{\sigma_i^{(\nu)}} (v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)})^2. \end{aligned}$$

En outre, en utilisant toujours la relation (4.66), on a

$$-\delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} \frac{h}{\delta} \theta_\nu^\gamma ((e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma) = h\delta \sum_{i=1}^N \frac{\theta_\nu^\gamma}{\delta} (v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)}) e^{\sigma_i^{(\nu)}} (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}.$$

En y substituant l'expression de $\frac{\theta_\nu^\gamma}{\delta} (v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)}) e^{\sigma_i^{(\nu)}}$ qui résulte de (4.65) et en utilisant l'égalité $(e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1} \frac{d}{dt} \sigma_i^{(\nu)} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{d}{dt} (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} & -\delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} \frac{h}{\delta} \theta_\nu^\gamma ((e^{\sigma_{i+1}^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma) \\ &= -\frac{h\delta}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1} - h\varepsilon\delta\theta_\nu \sum_{i=1}^N ((e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}). \end{aligned}$$

En substituant ces relations dans l'expression de $\delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} G_i^{(\nu)}$ dans (4.70), on obtient

$$\begin{aligned} \psi(t) - \psi(0) &= -\int_0^t \eta \sum_{i=1}^N \frac{\theta_\nu e^{\sigma_i^{(\nu)}}}{\delta} (v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)})^2 dt' \\ &\quad - \frac{h}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N \delta (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} + \frac{h}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N \delta (e^{\sigma_i^{(\nu)}(0)})^{\gamma-1} \\ &\quad - \int_0^t h\varepsilon\delta\theta_\nu \sum_{i=1}^N ((e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}) dt' + \frac{1}{2}\Lambda t + \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} \lambda_i dW_i, \end{aligned}$$

ou bien, en rappelant l'expression de $\psi(t)$ et la condition initiale (4.67),

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^{(\nu)}(t))^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \\ &= \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{0i})^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1} - \eta \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{\theta_\nu e^{\sigma_i^{(\nu)}}}{\delta} (v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)})^2 dt' \\ &\quad - \int_0^t h\varepsilon\theta_\nu \sum_{i=1}^N \delta ((e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}) dt' + \frac{1}{2}\Lambda t + \int_0^t \delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^{(\nu)} \lambda_i dW_i. \end{aligned} \tag{4.71}$$

En prenant l'espérance mathématique de cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{2} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^{(\nu)}(t))^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1} \mathbb{E} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \\ &= \frac{\delta}{2} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{0i})^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1} \mathbb{E} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1} - \eta \mathbb{E} \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{\theta_\nu e^{\sigma_i^{(\nu)}}}{\delta} (v_i^{(\nu)} - v_{i-1}^{(\nu)})^2 dt' \\ &\quad - \mathbb{E} \int_0^t h\varepsilon\delta\theta_\nu \sum_{i=1}^N ((e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}) dt' + \frac{1}{2}\Lambda t. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Comme

$$-((e^{\sigma_i^{(\nu)}})^\gamma - (e^{\sigma_i^{(\nu)}})^{\gamma-1}) \leq \sup_{s>0} (s^{\gamma-1} - s^\gamma) = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\gamma-1} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^\gamma, \tag{4.73}$$

en posant

$$C_0 = \frac{\delta}{2} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{0i})^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1} \mathbb{E} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1},$$

$$C_1 = h\varepsilon \left(\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^{\gamma-1} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^{\gamma} \right) + \frac{1}{2} \Lambda,$$

on déduit de (4.72) l'inégalité (4.68). $\square$

Lemme 3.2. *On a*

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq t_1} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)} \geq \nu - 1 \right\} \rightarrow 0 \quad \text{pour } \nu \rightarrow \infty.$$

Preuve 3.4. .

Comme l'inégalité (4.73) est valable indépendamment de $\omega \in \Omega$, de (4.71) on déduit également que

$$\begin{aligned} & \frac{h}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N \delta (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)})^{\gamma-1} \\ & \leq \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{0i})^2 + \frac{h\delta}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N (e^{\sigma_{0i}})^{\gamma-1} + C_1 t + \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \delta v_i^{(\nu)} dW_i, \end{aligned}$$

où C_1 est la même constante que l'on a introduite ci-dessus pour (4.68). Il s'ensuit que

$$\mathbb{E} \frac{h}{\gamma-1} \sup_{0 \leq t \leq t_1} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)(\gamma-1)} \leq C_0 + C_1 t_1 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq t_1} \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \delta v_i^{(\nu)} dW_i, \quad (4.74)$$

avec la même constante C_0 utilisée pour (4.68).

Or, d'après l'inégalité de Doob, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq t_1} \int_0^t \delta v_i^{(\nu)} dW_i \leq (\mathbb{E} (\sup_{0 \leq t \leq t_1} |\int_0^t \delta v_i^{(\nu)} dW_i|^2))^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 2(\mathbb{E} (\int_0^{t_1} \delta v_i^{(\nu)} dW_i)^2)^{\frac{1}{2}} = 2(\mathbb{E} \int_0^{t_1} (\delta v_i^{(\nu)})^2 dt)^{\frac{1}{2}} = 2\delta(\mathbb{E} \int_0^{t_1} (v_i^{(\nu)})^2 dt)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Donc, en rappelant la relation $\Lambda = \delta \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2$ et l'inégalité (4.68), on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq t_1} \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \delta v_i^{(\nu)} dW_i \leq 2 \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \delta (\mathbb{E} \int_0^{t_1} (v_i^{(\nu)})^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 2\Lambda^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E} \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{N-1} \delta (v_i^{(\nu)})^2 dt)^{\frac{1}{2}} \leq 2\Lambda^{\frac{1}{2}} (2C_0 t_1 + C_1 t_1^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En substituant cette inégalité dans (4.74), on obtient

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq t_1} \frac{h}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N \delta (e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)(\gamma-1)}) \leq C_0 + C_1 t_1 + 2\Lambda^{\frac{1}{2}} (2C_0 t_1 + C_1 t_1^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.76)$$

Comme $0 < \gamma - 1 < 1$, on a

$$\sum_{i=1}^N e^{\sigma_i^{(\nu)}} \leq \left(\sum_{i=1}^N e^{\sigma_i^{(\nu)}(\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

on déduit de (4.76) que

$$\delta^{2-\gamma} \mathbb{E} \sup_{0 < t < t_1} \left(\sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)} \right)^{\gamma-1} \leq \mathbb{E} \sup_{0 < t < t_1} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)(\gamma-1)} \leq K_1, \quad (4.77)$$

où

$$K_1 = \frac{\gamma-1}{h} (C_0 + C_1 t_1 + 2\Lambda^{\frac{1}{2}} (2C_0 t_1 + C_1 t_1^2)^{\frac{1}{2}}).$$

D'après l'inégalité de Markov, on déduit de (4.77) que

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 < t < t_1} \left(\sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)} \right)^{\gamma-1} \geq (\nu-1)^{\gamma-1} \right\} \leq \frac{1}{(\nu-1)^{\gamma-1}} \cdot \frac{K_1}{\delta^{2-\gamma}}. \quad \square$$

Preuve 3.5. (Preuve de la Proposition 3.2)

Ayant démontré l'existence et l'unicité de la solution approchée $(v_1^{(\nu)}, \dots, v_{N-1}^{(\nu)}, \sigma_1^{(\nu)}, \dots, \sigma_N^{(\nu)})$ pour chaque ν , on est maintenant en mesure de démontrer la proposition 3.2.

La définition (4.63) de θ_ν implique que, si $0 < \nu < \nu'$, on a

$$v_i^{(\nu)} = v_i^{(\nu')}, \quad \sigma_i^{(\nu)} = \sigma_i^{(\nu')} \quad p.s.$$

sur $\{\sup_{0 \leq t \leq t_1} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)} \leq \nu-1\}$. Or, d'après le lemme 3.2, on a

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq t_1} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i^{(\nu)}(t)} > \nu-1 \right\} \rightarrow 0 \quad \text{pour } \nu \rightarrow \infty,$$

ce qui entraîne que la suite $\{(v_1^{(\nu)}, \dots, v_{N-1}^{(\nu)}, \sigma_1^{(\nu)}, \dots, \sigma_N^{(\nu)})\}_{\nu=1}^\infty$ converge presque sûrement vers une limite notée $(v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$. On voit aisément que $(v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$ vérifie le système d'équations (4.54)-(4.55).

L'unicité de la solution $(v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$ résulte de l'argumentation standard; en effet, il suffit de remarquer que, étant donné $t_1 > 0$, sur $\{\sup_{0 \leq t \leq t_1} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i(t)} \leq \nu-1\}$ les deux éventuelles solutions doivent coïncider et que

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq t_1} \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i(t)} \leq \nu-1 \right\} \rightarrow 1 \quad \text{pour } \nu \rightarrow \infty.$$

Pour démontrer (4.62) on rappelle le raisonnement qui a conduit à (4.58); on constate facilement que ce raisonnement est valable pour la solution $(v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N)$ que nous venons de construire. Il en résulte (4.62), ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque 3.2. Si on pose $\varrho_i = e^{\sigma_i}$, $i = 1, \dots, N$, alors il est clair que $(v_1, \dots, v_{N-1}, \varrho_1, \dots, \varrho_N)$ est la solution du système d'équations (4.50)-(4.51) avec la condition (4.52) et les conditions initiales

$$v_i(0) = v_{0i}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad \varrho_i(0) = \varrho_{0i} \equiv e^{\sigma_{0i}}, \quad i = 1, \dots, N$$

et on aura

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta}{\varrho_i(t)} = 1 \quad p.s., \quad \forall t \geq 0.$$

3.7 Existence d'une mesure invariante pour le problème approché

On va maintenant démontrer l'existence d'une mesure invariante pour notre système d'équations.

Théorème 3.1. [5] *Il existe une mesure invariante μ définie sur $\mathbb{R}^{2N-1}$ pour le système d'équations (4.54)-(4.55) (avec (4.52)).*

Preuve 3.6. *On va le démontrer, en appliquant le Théorème de Has'minski pour l'existence d'une mesure invariante (voir Chap. 2). Pour ce faire, en posant formellement*

$$X = (v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \mathbb{R}^{2N-1},$$

nous réécrivons notre système d'équations dans la forme

$$dX = B(X)dt + QdW, \quad (4.78)$$

où

$$B(x) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}^{2N-1},$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\eta}{\delta^2} (e^{\sigma_{i+1}} v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i}) v_i + e^{\sigma_i} v_{i-1}) - \frac{h}{\delta} (e^{\gamma \sigma_{i+1}} - e^{\gamma \sigma_i}), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \beta_i &= \frac{-e^{\sigma_i}}{\delta} (v_i - v_{i-1}) - e^{\sigma_i} \varepsilon + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N, \quad v_0 = v_N = 0, \end{aligned}$$

($x = (x_1, \dots, x_{2N-1})$ est l'élément générique de $\mathbb{R}^{2N-1}$; toutefois pour la commodité de la présentation nous écrivons v_i au lieu de x_i , $i = 1, \dots, N-1$, et σ_i au lieu de x_{i+N-1} , $i = 1, \dots, N$), tandis que Q est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, 0, \dots, 0$$

et $W = W(t)$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^{2N-1}$ tel que chaque composante $W_i(t)$ soit un mouvement brownien canonique à valeurs réelles (c'est-à-dire $\mathbb{E}|W_i(t)|^2 = t$, donc $\mathbb{E}|W(t)|^2 = (2N-1)t$).

Maintenant après avoir démontré l'existence et l'unicité de la solution, nous allons démontrer l'existence d'une mesure invariante, on applique le théorème de Hs'minski (Chapitre 2). Il suffit qu'il existe une fonction $V(x)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{2N-1}$ telle que

$$V(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \delta \frac{v_i^2}{2} + \frac{h}{\gamma-1} \sum_{i=1}^N \delta e^{(\gamma-1)\sigma_i} + \sum_{i=1}^N \delta e^{-\sigma_i} \quad (4.79)$$

pour $x = (v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \mathbb{R}^{2N-1}$. On remarque que la fonction $V(x)$ vérifie la condition

$$V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2N-1},$$

D'autre part, comme

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = \delta v_i, \quad \frac{\partial V}{\partial \sigma_i} = h \delta e^{(\gamma-1)\sigma_i} - \delta e^{-\sigma_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial v_i^2} = \delta,$$

en appliquant l'opérateur L donné comme suit

$$L = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \frac{\partial}{\partial v_i} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i \frac{\partial}{\partial \sigma_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i^2 \frac{\partial^2}{\partial v_i^2}; \quad (4.80)$$

à la fonction $V(x)$, on a

$$LV(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{\eta}{\delta^2} (e^{\sigma_{i+1}} v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i}) v_i + e^{\sigma_i} v_{i-1}) - \frac{h}{\delta} (e^{\gamma \sigma_{i+1}} - e^{\gamma \sigma_i}) \right] \delta v_i \quad (4.81)$$

$$+ \sum_{i=1}^N \left[\frac{-e^{\sigma_i}}{\delta} (v_i - v_{i-1}) - e^{\sigma_i} \varepsilon + \varepsilon \right] (h \delta e^{(\gamma-1)\sigma_i} - \delta e^{-\sigma_i}) + \frac{1}{2} \Lambda.$$

On remarque que

$$\sum_{i=1}^{N-1} v_i (e^{\sigma_{i+1}} v_{i+1} - (e^{\sigma_{i+1}} + e^{\sigma_i}) v_i + e^{\sigma_i} v_{i-1})$$

$$= - \sum_{i=2}^{N-1} e^{\sigma_i} (v_i - v_{i-1})^2 + e^{\sigma_N} (v_N - v_{N-1}) v_{N-1} - e^{\sigma_1} v_1 (v_1 - v_0)$$

$$= - \sum_{i=1}^N e^{\sigma_i} (v_i - v_{i-1})^2.$$

D'autre part on a

$$- \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h}{\delta} (e^{\gamma \sigma_{i+1}} - e^{\gamma \sigma_i}) \delta v_i - \sum_{i=1}^N \frac{e^{\sigma_i}}{\delta} (v_i - v_{i-1}) h \delta e^{(\gamma-1)\sigma_i}$$

$$= - \sum_{i=1}^N h (e^{\gamma \sigma_{i+1}} v_i - e^{\gamma \sigma_i} v_{i-1}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{e^{\sigma_i}}{\delta} (v_i - v_{i-1}) \delta e^{-\sigma_i} = \sum_{i=1}^N (v_i - v_{i-1}) = 0.$$

Donc, l'égalité (4.81) se réduit à

$$LV(x) = \frac{-\eta}{\delta} \sum_{i=1}^{N-1} (v_i - v_{i-1})^2 e^{\sigma_i} + h \varepsilon \sum_{i=1}^N \delta e^{\sigma_i (\gamma-1)} \quad (4.82)$$

$$- h \varepsilon \sum_{i=1}^N \delta e^{\gamma \sigma_i} - \sum_{i=1}^N \delta \varepsilon e^{-\sigma_i} + \delta \varepsilon + \frac{1}{2} \Lambda.$$

Or, sur Γ_1 on a $\delta \sum_{i=1}^N e^{-\sigma_i} = 1$ et donc

$$e^{\sigma_i} \geq \delta,$$

ce qui, joint à la condition $v_0 = v_N = 0$, implique qu'il existe une constante k_δ telle que

$$\sum_{i=1}^N (v_i - v_{i-1})^2 e^{\sigma_i} \geq k_\delta \sum_{i=1}^{N-1} v_i^2. \quad (4.83)$$

On remarque également qu'il existe deux constantes $k_0 \in \mathbb{R}$ et $k_1 > 0$ telles que

$$\varepsilon h (e^{(\gamma-1)\sigma_i} - e^{\gamma \sigma_i}) - \varepsilon \delta e^{-\sigma_i} \leq k_0 - k_1 \sigma_i^2. \quad (4.84)$$

Des relations (4.82), (4.83) et (4.84) on déduit qu'il existe des constantes M_0, M_1, M_2 telles que, pour $x = (v_1, \dots, v_{N-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \Gamma_1$, on ait

$$LV(x) \leq M_0 - M_1 \sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 - M_2 \sum_{i=1}^N \sigma_i^2. \quad (4.85)$$

L'inégalité (4.85) montre que la condition

$$\sup_{|x| > R, x \in \Gamma_1} LV(x) \rightarrow -\infty \quad \text{pour } R \rightarrow \infty, \quad (4.86)$$

est vérifiée. □

Conclusion et perspectives

Après avoir étudié l'existence d'une mesure invariante pour l'équation stochastique qui décrit le mouvement d'un gaz visqueux barotropique en une dimension spatiale, il reste à identifier la limite de suite des mesures invariantes obtenues, i.e., étudier la convergence des mesures invariantes quand le pas de discrétisation tend vers 0 et voir si la limite des mesures invariantes représente la mesure invariante pour notre problème initial. Il y a également plusieurs problèmes ouverts à savoir le problème de l'unicité de la mesure invariante pour notre problème approché et le problème d'un gaz visqueux barotropique en dimension 2 et 3, étude qui, pour l'instant, n'a jamais été faite dans la littérature.

Bibliographie

- [1] H. Atoui : **Mouvement Brownien Exité, Mémoire Magistère**, Université 20 Aout 55 de skikda, 2009-2010.
- [2] I.Abi ayad :**Introduction aux equations differentielles stochastiques**, Mémoire de Master, Université Aboubkr belkaid-Tlemcen 2012.
- [3] S. Albeverio, A.B. Cruzeiro : **Global flows with invariant (Gibbs) measures for Euler and Navier-Stokes two dimensional fluids**. Comm. Math. Phys., vol. 129, pp. 431-444, 1990.
- [4] M. Baxter et A. Rennie : **Financial Calculus, an introduction to derivative pricing**, Cambridge university press. 1996.
- [5] R. Benseghir et H. Fujita Yashima : **Mesure invariante pour l'équation stochastique du mouvement d'un gaz visqueux en une dimension avec la discrétisation du domaine**. Revue Roumaine de Mathématiques Pures et appliquées, 2013, pp. 149-162.
- [6] R.Bensghir : **Cours d'Introduction au calcul stochastique**, université d'El-Taref, 2019-2020.
- [7] R.Bensghir : **Thèse de doctorat**, université annaba 2014.
- [8] R. Benseghir, A. Benchettah : **Existence and estimate of the solution for the approximate stochastic equation to the viscous barotropic gas**, AJMAA, vol. 16, mars 2019.
- [9] A.B. Cruzeiro : **Solutions et mesures invariantes pour des équations stochastiques du type Navier-Stokes**. Expos. Math., vol. 7, pp. 73-82, 1989.
- [10] G. Da Prato : **An Introduction to Infinite-Dimensional Analysis**, Springer-Verlag, 2006.
- [11] G. Da Prato, J. Zabczyk : **Stochastic equations in infinite dimensions**, Cambridge University Press, 1992.
- [12] G. Da Prato, J. Zabczyk : **Ergodicity for infinite dimensional systems**. Cambridge Univ. Press, 1996.
- [13] A. Friedman : **Stochastic Differential Equation and Application**, New York, Academic Press, 1975-1976. ., vol. 46, pp. 255-283, 1997.
- [14] H. Fujita Yashima : **Fluides newtoniens, Cours**, Univ. Guelma, 2012-2013.
- [15] F. Flandoli and F. Gozzi : **Kolmogorov Equation Associated to a Stochastic Navier-Stokes Equation**, Journal of Functional Analysis vol. 160, pp. 312-336, 1998.
- [16] F. Flandoli : **Dissipativity and invariant measures for stochastic Navier-Stokes equations**, Nonlinear Differential Equations Appl., vol 1, pp. 403- 423, 1994.

- [17] I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod : **Equations différentielles stochastiques** (en russe), Izd. Naukova Dumka, 1968. Traduction anglaise, SpringerVerlag, 1972.
- [18] R. Z. Has' minski : **Stochastic stability of differential equations** (translated from Russian), Sijthoff et Noordhoff, 1980.
- [19] A. V. Kazhikhov : **Sur la stabilisation de la solution du problème aux conditions initiales et aux limites pour les équations d'un gaz visqueux barotropique** (en russe). Di . Uravn., vol. 15, pp. 662-667, 1979.
- [20] P-L. Lions : **Mathematical topics in fluid mechanics**. Oxford Univ. Press. Oxford, vol. 1, 1996 ; vol. 2, 1998.
- [21] L. D. Landau, E. M. Lifchitz : **Mécanique des fluides** (Physique théorique, tome 6) (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.
- [22] Fu. M. M et Liu. Z. X :**Square-mean almost automorphic solutions for some stochastic differential equations**, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 138, no. 10, pp. 3689-3701, 2010.
- [23] C. Prévét, M. Réckner : **A concise course on stochastic partial differential equations**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [24] E. Pardoux : **Intégrales stochastiques hilbertiennes**, Publ. interne Univ. Paris - Dauphine, 1976.
- [25] E. Tornatore, H. Fujita Yashima : **Equazione stocastica monodimensionale di un gas viscoso barotropico**. Ricerche Mat., vol. 46, pp. 255-283, 1997.
- [26] Chang. Y. -K, Zhao. Z. -H et NéGuérékata. G. M :**A new composition theorem for square-mean almost automorphic functions and applications to stochastic differential equations**, Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications A, vol. 74, no. 6, pp. 2210-2219, 2011.
- [27] Chang. Y.-K, Zhao. Z.-H, NéGuérékata. G. M and Ma. R : **Stepanov-like almost automorphy for stochastic processes and applications to stochastic differential equations**, Nonlinear Analysis : Real World Applications, vol. 12, no. 2, pp. 1130-1139, 2011.
- [28] Bao. J, Hou. Z and Yuan. C :**Stability in distribution of mild solutions to stochastic partial differential equations**, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 138, no. 6, pp.2169-2180, 2010.
- [29] N. Kryloff, N. Bogoliuboff : **La théorie générale de la mesure dans son application é léétude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire**. Annals Math., vol. 38, pp. 65-113, 1937.
- [30] H. Fujita Yashima : **Equations stochastiques déun gaz visqueux isotherme dans un domaine monodimensionnel infini**, Acta Math. Vietnamica, vol. 26, pp. 147-168, 2001.