



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف  
Université Chadli Bendjedid – El Tarf  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
قسم الرياضيات  
Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Spécialité:** Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

### Thème

**Solution d'un problème aux valeurs propres  
engendré par l'opérateur  $p(x)$ -Laplacien**

Présenté par:

**LEKOUAGHET RAHMA**

Devant le Jury :

<b>Dr. MECHRI Halima</b>	<b>MCB</b>	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
<b>Dr. BOUNOUALA Amina</b>	<b>MCB</b>	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
<b>Dr. BOUSELSAL Naila</b>	<b>MCB</b>	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

**Année Universitaire 2021-2022**

Solution d'un problème aux valeurs propres  
engendré par l'opérateur  $p(x)$ -Laplacien

LEKOUAGHET.R

2022



# Remerciement

*Au nom d'Allah le miséricordieux.*

Tout d'abord je remercie notre Dieu « **ALLAH** » le tout puissant de m'avoir donné la force, la volonté et la santé, pour effectuer ce modeste travail.

Ainsi, je tiens également à exprimer ma vifs et ma reconnaissance à mon encadreur de mémoire **Dr. BOUNOUALA Amina**. Je le remercie de m'avoir encadrée, orientée, aidée et conseillée sa disponibilité et ses précieuses remarques.

J'adresse mes sincères remerciements à **Dr.MECHRI Halima** pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury.

Je remercie également **Dr.BOUSELSAL Naila** pour leur participation au jury ce modeste travail. de thèse d'avoir accepté de juger

Mes vifs remerciements aussi à tous les membres du départements de mathématiques de l'université **Chadli. Ben-Djdid. El-Taref**, particulièrement, mes professeurs ceux qui m'ont enseigné en Licence et en Master.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues lesquels j'ai partagé ces années.

Enfin, je remercie profondément mes enseignant **LAKRIAI Adel, TALHI Wided** et **BOUTEFNOUCHET Mahmoud** de m'avoir toujours encouragé.

*MERCI ...*

# Dédicace

Avec joie, fierté et respect, je dédie ce modeste travail :

À l'âme que j'ai toujours voulu à mes cotés en ce moment, au premier qui m'accompagne dans mon parcours académique et la volonté de Dieu qu'il ne soit pas au bout de celui-ci, mon **Grand-père " Hacen "**.

À celle qui m'a élevé et m'a aidé avec des conseils et des prières, à la plus précieuse, la plus gentille ma **Grand-mère " Zaineb "**.

*" Que dieu aie son âme "*.

À celle qui est restée debout et a travaillé dur à mes côtés, à celle qui s'est sacrifiée pour moi, à celle qui a été la raison de mon voir exceller, je souhaite et je prie Dieu que je réalise son rêve et qu'elle soit fière et heureuse de moi et de ma réussite, À mon ange dans la vie, la prunelle des yeux **ma mère " Nafissa "**.

*" Oue Dieu leur présente une bonne santé et une longue vie "*.

À ceux qui m'a inclus avec bienveillance et m'a aidé pour progresser, ma deuxième mère est **ma tante " Mounia "**.

À ceux qui se sont engagés à m'élever, à m'aider et à me guider. À mon deuxième père est **mon oncle " Kader "**.

À ceux qui ont partagé mon enfance et ma jeunesse avec moi, à qui ont été à la place d'un frère et d'une sœur. À **" Zinou "** et **" Marwa "**.

À qui m'ont courage, à qui ont toujours été là pour moi dans les instants délicats, mes chère tantes la défunte **" Dalila "**, **" Nabila "**, **" Aicha "**, et leur enfants.

*" Que Dieu les garder pour moi "*.

**RAHMA**

## ملخص

في هذا العمل، ندرس المشكلة الموائية :

$$\begin{cases} -div((|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2})\nabla u) = f(x, u) & , \quad \Omega \\ u = 0 & , \quad \partial\Omega \end{cases}$$

حيث  $\Omega$  هو مجموعة محدودة من  $\mathbb{R}^N$  ،  $N \in \mathbb{N}^*$  .

و  $f$  معرفة كما يلي:

$$f(x, u) = f_{\pm} = \pm(-\lambda |u|^{m(x)-2} u + |u|^{q(x)-2} u)$$

نأخذ:  $m(x) := \max\{p_1(x), p_2(x)\} < q(x) < \frac{N \cdot m(x)}{N - m(x)}$  ، مهما يكن  $x \in \bar{\Omega}$  .

في المحور الأول ، نظهر وجود عدد لا نهائي من الحلول في حالة  $\lambda > 0$  .  
في المحور الثاني ، نثبت أنه إذا كان  $\lambda$  كبيرا ، فهناك حل وحيد لهذا المشكل .  
لإثبات الحالتين السابقتن نعتمد على نظرية كول وبعض النظريات المناسبة.

## Résumé

---

Dans ce travail, nous étudions le problème aux limites :

$$\begin{cases} -div((|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2})\nabla u) = f(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Et  $f$  est définie par :

$$f(x, u) = f_{\pm} = \pm(-\lambda |u|^{m(x)-2} u + |u|^{q(x)-2} u), \text{ telle que :} \\ m(x) := \max\{p_1(x), p_2(x)\} < q(x) < \frac{N \cdot m(x)}{N - m(x)}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Dans le premier chapitre, nous montrons l'existence d'une infinité de solutions faibles pour tout  $\lambda > 0$ .

Dans le deuxième chapitre, nous prouvons que si  $\lambda$  est suffisamment grand, alors il existe une solution faible non triviale du problème (3.1).

Notre approche utilisée pour démontrer les deux cas précédents, est la théorie des espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable, combinée avec la version  $\mathbb{Z}_2$ -symétrique pour les fonctionnelles impliquant le théorème du Col et une méthode variationnelles adéquate.

**Mots clés :** Opérateur  $p(x)$ -Laplacien, espace de Lebesgue-Sobolev généralisé, point critique, Solution faible, fluides électro-rhéologiques.

## Abstract

---

In this travel we study the boundary value problem:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2})\nabla u = f(x, u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where  $\Omega$  is a smooth bounded domain in  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ .

We focus on the cases when:

$$f(x, u) = f_{\pm} = \pm(-\lambda |u|^{m(x)-2} u + |u|^{q(x)-2} u), \text{ where :} \\ m(x) := \max\{p_1(x), p_2(x)\} < q(x) < \frac{N \cdot m(x)}{N - m(x)}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

In the first chapter, we show the existence of infinitely many weak solutions for any  $\lambda > 0$ .

In the second chapter, we prove that if  $\lambda$  is large enough then there exists a non-trivial weak solution.

Our approach relies on the variable exponent theory of generalized Lebesgue-Sobolev spaces, combined with a  $\mathbb{Z}_2$ -symmetric version for even functionals of the Mountain Pass Lemma and some adequate variational methods.

**Key words:**  $p(x)$ -Laplace operator, generalized Lebesgue-Sobolev space, critical point, weak solution, electrorheological fluids.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Notations</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>7</b>
1.1 Définitions : . . . . .	7
1.2 Convergence faible et convergence forte : . . . . .	9
1.3 Dérivées d'une fonctionnelle et points critiques : . . . . .	9
1.3.1 Dérivé au sens de Gâteaux : . . . . .	9
1.3.2 Dérivé au sens de Fréchet : . . . . .	10
1.3.3 Point critique : . . . . .	11
1.4 Espace modulaire : . . . . .	11
1.5 Espaces de Lebesgue-Sobolev a exposant variables : . . . . .	15
1.5.1 Espace $L^{p(x)}(\Omega)$ : . . . . .	15
1.5.2 Espace de Sobolev à exposant variable : . . . . .	19
1.6 Théorème de Col : . . . . .	20
<b>2 Solutions faibles d'un problème contenant l'opérateur <math>p(x)</math>-Laplacien dans le cas où <math>\lambda &gt; 0</math></b>	<b>22</b>
2.1 Étude du problème de $p(x)$ -Laplacien dans le cas où $\lambda > 0$ : . . . . .	22
<b>3 Solutions faibles d'un problème contenant l'opérateur <math>p(x)</math>-Laplacien</b>	

<b>    dans le cas où <math>\lambda &lt; 0</math></b>	<b>33</b>
3.1 Étude du problème de $p(x)$ -Laplacien avec $\lambda < 0$ : . . . . .	33
<b>Conclusion</b>	<b>39</b>

- $\Omega$  : Un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  non vide.  
 $\partial\Omega$  : La frontière de  $\Omega$ .  
 $\bar{\Omega}$  : L'adhérence de  $\Omega$ .  
 $\Omega_{<}$  :=  $\{x \in \Omega; |u(x)| < 1\}$ .  
 $\Omega_{\geq}$  :=  $\Omega \setminus \Omega_{<}$ .  
 $\operatorname{div} u$  :=  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$  = La divergence de  $u$ .  
 $\nabla u$  :=  $\left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^t$  =  $\operatorname{grad} u$ .  
 $-\Delta_{p(x)} f$  : Le  $p(x)$  - Laplacien :=  $-\operatorname{div} (|\nabla f|^{p(x)-2} \nabla f)$   
 $\rho_{p(x)}(u)$  :=  $\int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx$  le module .  
 $L^0(\Omega)$  : L'espace des fonctions mesurables .  
 $L^{p(x)}(\Omega)$  : L'espace de Lebesgue à exposant variable .  
 $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  : L'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ .  
 $W^{1,p(x)}(\Omega)$  : L'espace de Sobolev à exposant variable .  
 $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$  : La fermeture de  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  dans  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ .  
 $h^+$  :=  $\sup_{x \in \Omega} h(x)$ .  
 $h^-$  :=  $\inf_{x \in \Omega} h(x)$ .  
 $p^+$  :=  $\sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} p(x)$ .  
 $p^-$  :=  $\inf_{x \in \Omega} \operatorname{ess} p(x)$ .  
 $m(x)$  :=  $\max\{p_1(x), p_2(x)\}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}$ .

Les fluides électro-rhéologiques sont des suspensions de particules solides dispersées dans une phase liquide, leurs performances dépendent des matériaux utilisées lors de leurs fabrications. Ils sont des fluides particuliers de grand intérêt technologique dont la viscosité apparente change de manière réversible en réponse à un champ électrique. Tels fluides on été intensivement étudiés des années 1940 à nos jours, découverts pour la première fois par **W. M. Winslow** en 1947.

L'équation du mouvement constitutif d'un fluide électro-rhéologique est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} s(u) + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = f$$

où  $u : \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est la vitesse du fluide en un point,  $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$  est l'opérateur gradient,  $\pi$  est la pression et  $f$  est une force externe.

Le tenseur  $s$  est de la forme :

$$s(u)(x) = \mu(x)(1 + |Du(x)|^2)^{\frac{p-2}{2}} Du(x),$$

où  $p = p(x)$  et  $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top)$  est la partie symétrique du gradient de  $u$ .

La modélisation mathématique des fluides électro-rhéologiques a déterminé l'étude des espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variables  $L^{p(x)}$  et de  $W^{1,p(x)}$ , où  $p(x)$  est une fonction à valeurs réelles. Les espaces de Lebesgue à exposant variable sont apparus pour la première fois en 1931 dans l'article de **W. Orlicz** [21] où définie et

donner leurs propriétés de base avec son preuve comme la complétude, la réflexivité et la séparabilité. Plus tard, les mathématiciens polonais ont étudié les espaces fonctionnels modulaires.

À présent, la théorie des espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable est bien développée mais il existe tout de même certaines difficultés liées à leur applicabilité aux équations aux dérivées partielles.

Dans cette thèse, nous allons étudier des équations aux dérivées partielles d'un type non standard est un sujet intéressant ces dernières années. Il s'agit des équations où figure l'opérateur dit  $p(x)$ -Laplacien soumises à condition au bord nécessitant l'introduction des espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable.

L'opérateur  $p(x)$ -Laplacien noté  $\Delta_{p(x)}$  défini par :

$$\Delta_{p(x)}u := \operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u),$$

n'est en aucun cas une généralisation de l'opérateur classique  $p$ -Laplacien malgré que les deux opérateurs coïncident lorsque  $p$  est constant. Il apparaît dans certains problèmes physiques, comme, dans la théorie de l'élasticité et de la mécanique des fluides...

Le problème modèle que nous allons aborder dans ce mémoire est de la forme :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2})u = f(x, u) & \text{pour } x \in \Omega \\ u = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^N (n \geq 3)$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  à assez régulier et  $1 < p_i(x)$ ,  $p_i(x) \in C(\Omega)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Nous recherchons des solutions faibles non triviales du problème (1) dans l'espace de Sobolev généralisé  $W^{1,m(x)}(\Omega)$ , où  $m(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\} \forall x \in \bar{\Omega}$ . Nous rappelons que le types des problèmes (1) ont été intensivement étudiés au cours des dernières années. Nous nous référons à [3, 11, 12] pour quelques résultats intéressants.

Ce mémoire se compose de trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions et outils de base. En plus, nous donnons les propriétés

élémentaires des espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable et nous mentionnons certains théorèmes importants et quelques résultats fondamentaux qui nous seront utiles dans l'étude de ce problème. Le second chapitre nous étudions l'existence des solutions faibles dans  $W_0^{1,p(x)}$  pour  $\lambda > 0$ .

Le dernier chapitre, est consacré à étudier l'existence d'une solution faible non triviale dans le cas où  $\lambda$  négatif.

# CHAPITRE 1

## NOTIONS PRÉLIMINAIRES

**D**ans ce chapitre, on présente quelques définitions et notions préliminaires, qu'on a utilisées dans la suite de ce mémoire.

### 1.1 Définitions :

Dans cette section, on rappelle quelques définitions et propriétés nécessaires pour la suite de ce travail.

**Définition 1.1.1.** *Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle norme sur  $E$  et on la note  $\|\cdot\|$  toute applications définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  vérifier :*

1.  $\|x\| = 0 \implies x = 0$ .
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  ,  $\forall x, y \in E$ .

Le couple  $(E, \|\cdot\|)$  est appelé espace vectoriel normé.

**Définition 1.1.2** (Espace de Banach). *On dit qu'un espace normé de  $E$  est de Banach, si toute suite de Cauchy est convergente.*

*C'est-à-dire  $E$  est complet en tant qu'un espace métrique muni de la distance associée.*

**Remarque 1.1.1.** *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.*

**Définition 1.1.3** (Espace réflexif). [2]

Soit  $X$  un espace de Banach, et soit  $J$  une injection canonique de  $X$  dans  $X'$ . On dit que  $X$  est réflexif si  $J$  est surjective, c-à-d  $J(X) = X'$ .

**Remarque 1.1.2.** Tout espace réflexif  $X$  est complet puisque le dual d'un espace vectoriel normé quelconque est toujours complet.

**Remarque 1.1.3.** Si  $(X, \|\cdot\|_X)$  est réflexif, alors  $(X, \|\cdot\|_X)$  est un Banach.

**Proposition 1.1.1.** Pour tout  $p \in ]1, +\infty[$ , l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  est un espace réflexif.

**Définition 1.1.4** (Espace séparable). [2] On dit qu'un espace métrique  $X$  est séparable s'il existe un sous ensemble  $D \subset X$  dénombrable et dense dans  $X$ .

**Définition 1.1.5** (Valeur propre). Un scalaire  $\lambda$  est une valeur propre de l'opérateur  $L$  s'il existe une fonction  $f$  non nulle tel que  $Lf = \lambda f$ .

Les valeurs propres de  $L$  sont donc les scalaires  $\lambda$  tels que  $L - \lambda.Id$  n'est pas injectif.

**Définition 1.1.6** (Fonction propre). Soit  $f$  une fonction non nulle sur un espace fonctionnelle (espace de fonctions),  $f$  est une fonction propre d'un opérateur linéaire  $L$  s'il existe un scalaire  $\lambda$  tel que  $Lf = \lambda f$ . On dit que  $f$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda$ .

**Définition 1.1.7** (Valeur propre simple). Une valeur propre  $\lambda$  de l'opérateur  $L$  est dite simple si sa multiplicité algébrique  $m_l(\lambda) = 1$ .

**Définition 1.1.8** (Valeur propre double). On dit qu'une valeur propre  $\lambda$  est double si une racine multiple de l'équation caractéristique de  $Lf = \lambda f$ .

**Lemme 1.1** (Lemme de Fatou). [34] Soit  $\varphi \in \varphi(A, \mu)$  et  $f_k, f, g \in L^0(A, \mu)$ .

1. Si  $f_k \rightarrow f$   $\mu$ -presque partout, alors  $\rho_\varphi(f) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \rho_\varphi(f_k)$ .
2. Si  $|f_k| \nearrow |f|$   $\mu$ -presque partout, alors  $\rho_\varphi(f) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \rho_\varphi(f_k)$ .
3. Si  $f_k \rightarrow f$   $\mu$ -presque partout et  $|f_k| \leq |g|$   $\mu$ -presque partout, et  $\rho_\varphi(\lambda g) < \infty$  pour tout  $\lambda > 0$ , alors  $f_k \rightarrow f$  dans  $L^\varphi$ .

Ces propriétés sont appelées le Lemme de Fatou (pour le module), la convergence monotone et la convergence dominée respectivement.

## 1.2 Convergence faible et convergence forte :

Nous sommes maintenant en mesure de définir la convergence faible et la convergence forte.

Soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace normé,  $X'$  son dual (topologique). On définit désigne le crochet de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  entre  $X'$  et  $X$ .

**Définition 1.2.1** (La convergence faible). *Soit  $(x_n)_n$  une suite d'éléments de  $X$ . On dit que  $(x_n)_n$  converge faiblement dans  $X$  vers  $x \in X$  si*

$$\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in X',$$

et on note  $x_n \rightharpoonup x$ .

**Définition 1.2.2** (La convergence forte). *Soit  $(x_n)_n$  une suite d'éléments de  $X$ . On dit que  $(x_n)_n$  converge fortement dans  $X$  vers  $x \in X$  si*

$$\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0,$$

et on note  $x_n \longrightarrow x$ .

**Proposition 1.2.1.** *Soit  $(x_n)_n$  une suite d'éléments de  $X$  et  $x \in X$ . On a*

$$x_n \longrightarrow x \implies x_n \rightharpoonup x.$$

*Démonstration.* Voir [2]. □

## 1.3 Dérivées d'une fonctionnelle et points critiques :

### 1.3.1 Dérivé au sens de Gâteaux :

**Définition 1.3.1.** *Soient  $V$  une partie d'un espace de Banach  $X$  et  $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs réelles. Si  $u \in V$  et  $z \in X$  sont tels que pour  $t > 0$  assez petit on a  $(u + tz) \in V$ , on dit alors que  $F$  admet (au point  $u$ ) une dérivée dans la direction  $z$  si la limite*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u + tz) - F(u)}{t} \quad \text{existe.}$$

On notera cette limite  $F'(u)$ .

On notera qu'une fonction  $F$  peut avoir une dérivée directionnelle dans toute direction  $z \in X$ , sans pour autant être continue.

**Définition 1.3.2.** Soient  $V$  une partie d'un espace de Banach  $X$  et  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $u \in V$ , on dit que  $F$  est dérivable au sens de Gâteaux (ou  $G$ -Différentiable en  $u$ ), s'il existe  $l \in X'$  tel que dans chaque direction  $z$  où  $F(u + tz)$  existe pour  $t > 0$  assez petit, la dérivée directionnelle  $F'_z(u)$  existe et on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u + tz) - F(u)}{t} = \langle l, z \rangle .$$

On posera  $F'(u) = l$ . L'espace de toutes les fonctionnelles dérivables au sens de Gâteaux sur un espace de Banach  $X$  est noté  $C^1(X, \mathbb{R})$  où  $C^1(X)$  tout simplement.

### 1.3.2 Dérivé au sens de Fréchet :

**Définition 1.3.3.** [33] Soit  $E$  un espace de Banach,  $\Omega \subseteq E$  un ensemble ouvert et  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle. On dit que  $I$  est différentiable au sens de Fréchet en  $u \in \Omega$ , s'il existe  $A \in E'$  tel que :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{I(u + v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0,$$

où

$$I(u + v) - I(u) = Av + o(\|v\|).$$

Si  $I$  est différentiable, alors  $A$  est unique et on note  $I' = A$ . L'ensemble des fonctions différentiables sera noté  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

**Proposition 1.3.1.** [33] Soit  $\Omega$  un ouvert d'un espace de Banach  $E$ .

Soit  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle Gâteaux différentiable dans un voisinage de  $u \in \Omega$ , alors si l'application  $u \mapsto I'_G(u)$  est continue au voisinage de  $u$ . Alors  $I$  est Fréchet différentiable et on a :  $I'_G(u) = I'(u)$ .

**Remarque 1.3.1.** L'importance de la proposition (1.3.1) réside dans le fait qu'il est souvent techniquement plus facile de calculer la dérivée au sens de Gâteaux et ensuite de prouver qu'il est continu, plutôt que de prouver directement la différentiabilité au sens de Fréchet.

### 1.3.3 Point critique :

**Définition 1.3.4.** Soient  $X$  un espace de Banach,  $W \subset X$  un ouvert et  $f \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R})$ . On dit que  $x \in W$  est un point critique de  $f$ , si  $f'(x) = 0$ .  $f'(x)$  désigne la différentielle au sens de Gâteaux de  $f$  au point  $x$ .

Si  $c \in \mathbb{R}$ , on dit que  $c$  est une **valeur critique** de  $f$ , s'il existe  $x \in W$  tel que  $f(x) = c$  et  $f'(x) = 0$ .

**Remarque 1.3.2.** 1. Si  $x$  est un point d'extrémum de  $f$ , alors  $x$  est un point critique.

2. Si  $x$  n'est pas un point critique de  $f$ , on dit que  $x$  est un point régulier de  $f$ .

## 1.4 Espace modulaire :

Maintenant, on va définir l'espace modulaire et leurs propriétés de base.

**Définition 1.4.1.** Soit le module  $\rho$  défini par :

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx. \quad (1.1)$$

**Définition 1.4.2.** Soit  $X$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . L'application  $\rho : X \rightarrow [0, +\infty]$  est dite semi-modulaire sur l'espace  $X$  si elle vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\rho(0) = 0$ .
2.  $\rho(-f) = \rho(f)$ .
3.  $\rho(\lambda f) = 0 \implies f = 0 \quad \forall \lambda > 0$ .
4.  $\lambda \mapsto \rho(\lambda f)$  est continue à gauche sur  $[0, +\infty[$  pour tout  $f \in X$ .  
(c-à-d  $\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \rho(\lambda f) = \rho(f)$ ,  $\forall f \in X$ ).
5.  $\rho$  est convexe autrement dit  $\rho(\theta f + (1 - \theta)g) \leq \theta \rho(f) + (1 - \theta)\rho(g)$ ,  
 $\forall f, g \in X, \theta \in [0, 1]$ .

**Définition 1.4.3.** Un semi-modulaire  $\rho$  est dit continue si :  $\forall f \in X$  l'application  $\lambda \mapsto \rho(\lambda f)$  est continue sur  $[0, +\infty]$ .

Un semi-modulaire  $\rho$  est dit modulaire si  $\rho(f) = 0 \implies f = 0$ .

**Remarque 1.4.1.** *Un semi-module est toujours convexe.*

**Proposition 1.4.1.** *Soit  $\rho$  un semi-modulaire sur  $X$ . Alors,  $\forall f \in X$  on a :*

$$\rho(\mu f) \leq \mu \rho(f), \quad \forall \mu \in [0, 1]. \quad (1.2)$$

*Démonstration.* On a d'après la convexité de  $\rho$  et le fait que  $\rho(0) = 0$ , il donne :

$$\begin{aligned} \rho(\mu f) &= \rho(\mu f + (1 - \mu)(0)) \\ &\leq \mu \rho(f) + (1 - \mu)\rho(0) \\ &\leq \mu \rho(f). \end{aligned}$$

□

**Définition 1.4.4.** *Si  $\rho$  est un semi modulaire (resp. un modulaire) sur  $X$ , alors :*

$$X_\rho := \{f \in X \quad : \quad \exists \lambda > 0, \quad \rho(\lambda f) < \infty\}. \quad (1.3)$$

*est appelé espace semi-modulaire (resp. modulaire) associé à  $\rho$ .*

**Proposition 1.4.2.** *Soit  $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ , la fonction  $\rho_{p(\cdot)}$  satisfait les propriétés suivantes :*

1.  $\rho_{p(\cdot)}(f) \geq 0$  pour tous fonction  $f$ .
2.  $\rho_{p(\cdot)}(f) = 0$  si et seulement si  $f = 0$  p.p dans  $\Omega$ .
3.  $\rho_{p(\cdot)}(-f) = \rho_{p(\cdot)}(f) \quad \forall f$ .
4.  $\rho_{p(\cdot)}$  est convexe.
5. Si  $|f(x)| > |g(x)|$  p.p,  $x \in \Omega$  et si  $\rho_{p(\cdot)}(f) < \infty$  alors  $\rho_{p(\cdot)}(f) > \rho_{p(\cdot)}(g)$ .
6. Si  $0 < \rho_{p(\cdot)}(f) < \infty$ , alors la fonction  $\lambda \mapsto \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right)$  est continue et décroissante dans  $[1, \infty[$ .
7.  $\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leq 1$ , pour tout  $f$  avec  $0 \leq \|f\|_{p(\cdot)} < \infty$ .
8. Si  $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ , alors  $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$ .
9. Si  $f$  est une fonction mesurable sur  $\Omega$  et  $\Omega' \subset \Omega$  est vérifier la condition  $\Omega' \subset \Omega_\infty$  ou bien  $\Omega' \subset (\Omega_\infty)^c$  on a :

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')} \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

*Démonstration.* (1) , (2) et (3) sont faciles à vérifier.

(4) Soient  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions mesurables. On utilise la convexité de la fonction  $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto t^p, p \geq 1$ , il vient :

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)|^{p(x)} \leq \alpha |f(x)|^{p(x)} + \beta |g(x)|^{p(x)}.$$

$\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$ , avec  $\alpha + \beta = 1$ , p.p.  $x \in \Omega$  En intégrant sur  $\alpha, \beta$  on obtient :

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |\alpha f + \beta g|^{p(x)} dx \leq \alpha \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f|^{p(x)} dx + \beta \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |g|^{p(x)} dx.$$

Et on a

$$|\alpha f + \beta g| \leq \alpha |f| + \beta |g|,$$

donc

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega_\infty} (|\alpha f + \beta g|) &\leq \sup_{\Omega_\infty} \text{ess}(\alpha |f| + \beta |g|) \\ &\leq \sup_{\Omega_\infty} \text{ess}(\alpha |f|) + \sup_{\Omega_\infty} \text{ess}(\beta |g|) \\ &\leq \alpha \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |f| + \beta \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |g|. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(\alpha f + \beta g) &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |\alpha f + \beta g|^{p(x)} dx + \sup_{\Omega_\infty} (|\alpha f + \beta g|) \\ &\leq \alpha \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f|^{p(x)} dx + \beta \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |g|^{p(x)} dx + \alpha \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |f| + \beta \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |g| \\ &\leq \alpha \left( \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f|^{p(x)} dx + \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |f| \right) + \beta \left( \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |g|^{p(x)} dx + \sup_{\Omega_\infty} \text{ess} |g| \right) \\ &\leq \alpha \rho_{p(\cdot)}(f) + \beta \rho_{p(\cdot)}(g). \end{aligned}$$

(5) Soient  $f, g$  deux fonctions mesurables telles que :  $|f(x)| \geq |g(x)|$  p.p.  $x \in \Omega$

Pour  $p : \Omega \rightarrow [1, +\infty[$  une fonction mesurable, on a :

$$|f(x)|^{p(x)} \geq |g(x)|^{p(x)}.$$

En intégrant sur  $\Omega$  on obtient :

$$\int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx \geq \int_{\Omega} |g(x)|^{p(x)} dx,$$

ce qui veut dire :

$$\rho_{p(\cdot)}(f) \geq \rho_{p(\cdot)}(g).$$

(6) Soit  $\lambda$  un point de l'intervalle  $[1, +\infty[$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset [1, +\infty[$  une suite tendant vers  $\lambda$ .

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x)}{\lambda_n} \right|^{p(x)} = \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)},$$

et on a :

$$\left| \frac{f(x)}{\lambda_n} \right|^{p(x)} \leq \|f(x)\|^{p(x)} \in L^1(\Omega).$$

Alors, le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda_n} \right|^{p(x)} dx = \int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx,$$

ce qui montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\lambda_n} \right) = \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\lambda} \right)$ .

Donc la fonction  $\lambda \rightarrow \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\lambda} \right)$  est continue. Soit maintenant  $\lambda_1 > \lambda_2$  deux nombres appartenant à  $[1, \infty[$ . On a :

$$\left| \frac{f(x)}{\lambda_1} \right|^{p(x)} \leq \left| \frac{f(x)}{\lambda_2} \right|^{p(x)}.$$

En intégrant sur  $\Omega$ , on obtient  $\rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\lambda_1} \right) \leq \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\lambda_2} \right)$  ce qui montre que la fonction  $\lambda \rightarrow \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\lambda} \right)$  est décroissante.

(7) En utilisant la propriété caractéristique de la borne inférieure, on voit qu'il existe une suite  $E_f = \{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  de points de l'ensemble  $\{\lambda > 0 \mid \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\lambda} \right) \leq 1\}$  tendant vers  $\|f\|_{p(\Delta)}$ . En utilisant le lemme de Fatou, la propriété (6) et la définition de la norme  $\|\Delta\|_{p(\Delta)}$ , on obtient :

$$\rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}} \right) = \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\gamma_n} \right) \leq 1.$$

(8) Comme  $\|f\|_{p(\Delta)} \leq 1$ , en utilisant la convexité de  $\rho_{p(\Delta)}(f)$  on obtient :

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \rho_{p(\cdot)} \left( \|f\|_{p(\cdot)} \frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}} \right) \leq \|f\|_{p(\cdot)} \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}} \right) \|f\|_{p(\cdot)}.$$

par ce que  $\rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}} \right) \leq 1$ .

(9) Soit  $u$  une fonction mesurable sur  $\Omega$  et  $\Omega' \subset \Omega$  et vérifie la condition  $\Omega' \subset \Omega_\infty$  ou bien  $\Omega' \subset (\Omega_\infty)^c$  on a :

$$\rho_{p(\cdot)}^{\Omega'}(f) = \int_{\Omega' \setminus \Omega'_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \sup_{\Omega'_\infty} |f(x)| \leq \rho_{p(\cdot)}(f),$$

donc

$$\{\lambda > 0 | \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\} \subset \{\lambda > 0 | \rho_{p(\cdot)}^{\Omega'}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\},$$

donc

$$\inf\{\lambda > 0 | \rho_{p(\cdot)}^{\Omega'}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\} \leq \inf\{\lambda > 0 | \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\},$$

ce qui implique :

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')} \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

□

## 1.5 Espaces de Lebesgue-Sobolev a exposant variables :

Dans cette section, nous définissons les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable  $L^{p(\cdot)}$  et  $W^{1,p(x)}$  et quelques propriétés. Ces espaces diffèrent des espaces  $L^p$  et  $W^{1,p}$  classiques lorsque l'exposant  $p$  n'est pas une constante mais une fonction  $p : \Omega \rightarrow [1, \infty]$ .

### 1.5.1 Espace $L^{p(x)}(\Omega)$ :

**Définition 1.5.1.** Soit  $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ . On définit l'espace de Lebesgue à exposant variable  $L^{p(x)}$  par :

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ f \text{ est une fonction mesurable sur } \Omega : \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}. \quad (1.4)$$

muni de la norme dite de **Luxembourg** :

$$|u|_{p(x)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}. \quad (1.5)$$

**Théorème 1.1.** voir [17], [13]

1. L'espace  $L^{p(x)}(\Omega)$  est de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .

2. L'espace  $L^{p(x)}(\Omega)$  est réflexif si  $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ .

3. L'espace  $L^{p(x)}(\Omega)$  est séparable si  $p^+ < \infty$ .

**Proposition 1.5.1.** L'application :

$$\begin{aligned} L^{p(\cdot)}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \|f\|_{p(\cdot)}, \end{aligned}$$

est une norme sur  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ .

*Démonstration.* 1. Si  $f = 0$  p.p. alors

$$|0|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{0}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} = \inf \{ \lambda > 0 \} = 0.$$

Et si  $|f|_{p(\cdot)} = 0$ , on a :

$$\rho_{p(\cdot)}(f) \leq |f|_{p(\cdot)},$$

(comme  $|f|_{p(\cdot)} \leq 1$  alors  $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq |f|_{p(\cdot)}$  präsident ce qui implique que de la Proposition  $\rho_{p(\cdot)}(f) = 0$ )

donc  $|f|_{p(\Delta)} = 0$  si et seulement si  $f = 0$  p.p.

2. Pour prouver que :

$$|\alpha f|_{p(\cdot)} = |\alpha| |f|_{p(\cdot)},$$

on remarque que si  $\alpha = 0$  l'égalité est vraie. Si  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} |\alpha f|_{p(\cdot)} &= \inf \left\{ \lambda > 0, \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{\alpha f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\ &= |\alpha| \inf \left\{ \frac{\lambda}{|\alpha|} > 0, \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{\lambda/|\alpha|} \right) \leq 1 \right\} \\ &= |\alpha| |f|_{p(\cdot)}. \end{aligned}$$

3. L'inégalité triangulaire est évidemment vraie si l'une des fonctions  $f$  ou  $g$  est nulle.

Supposons donc que  $f \neq 0$  et  $g \neq 0$ .

Grâce à la convexité de  $\rho_{p(\cdot)}$  et la propriété (7), on a :

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f+g}{|f|_{p(\cdot)} + |g|_{p(\cdot)}} \right) &= \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{|f|_{p(\cdot)}}{|f|_{p(\cdot)} + |g|_{p(\cdot)}} \frac{f}{|f|_{p(\cdot)}} + \frac{|g|_{p(\cdot)}}{|f|_{p(\cdot)} + |g|_{p(\cdot)}} \frac{g}{|g|_{p(\cdot)}} \right) \\ &= \frac{|f|_{p(\cdot)}}{|f|_{p(\cdot)} + |g|_{p(\cdot)}} \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{f}{|f|_{p(\cdot)}} \right) + \frac{|g|_{p(\cdot)}}{|f|_{p(\cdot)} + |g|_{p(\cdot)}} \rho_{p(\cdot)} \left( \frac{g}{|g|_{p(\cdot)}} \right) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

□

**Proposition 1.5.2** (Inégalité de Hölder généralisé). [35, 36]

Soit  $(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)})$  un espace de Banach, séparable, uniformément et convexe.  $L^{q(\cdot)}(\Omega)$  est l'espace conjugué de  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ , pour tout  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$  et  $g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$  tel que  $\frac{1}{q(\cdot)} + \frac{1}{p(\cdot)} = 1$ , on a :

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right) \|f\|_{p(\cdot)} \cdot \|g\|_{q(\cdot)}. \quad (1.6)$$

**Proposition 1.5.3.** Si la fonction  $p(x) = p$  est une constante alors :

$$\|\cdot\|_{p(x)} = \|\cdot\|_p, \quad (1.7)$$

où  $\|\cdot\|_p$  est la norme usuelle de l'espace  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

*Démonstration.* Si  $f = 0$ , c'est immédiat. Supposons que  $f \neq 0$ . Donc,

$$\begin{aligned} \|f\|_{p(x)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho \left( \frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda^{p(x)}} |f(x)|^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\lambda^p} \|f\|_p^p \leq 1 \right\} \\ &= \inf \{ \lambda > 0 : \|f\|_p \leq \lambda \} \\ &= \|f\|_p. \end{aligned}$$

□

**Proposition 1.5.4.** [13] Soit  $p \in \mathcal{P}$ ,  $(f_n) \subset (L^{p(\cdot)}(\Omega))$  et  $f \in (L^{p(\cdot)}(\Omega))$  alors :

1.

$$\|f\|_{p(x)} < 1 (= 1; > 1) \iff \rho(f) < 1 (= 1; > 1). \quad (1.8)$$

2.

$$\|f\|_{p(x)} > 1 \implies \|f\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(f) \leq \|f\|_{p(x)}^{p^+}. \quad (1.9)$$

3.

$$\|f\|_{p(x)} < 1 \implies \|f\|_{p(x)}^{p^-} \geq \rho(f) \geq \|f\|_{p(x)}^{p^+}. \quad (1.10)$$

4.

$$|f - f_n|_{p(x)} \longrightarrow 0 \iff \rho_{p(\cdot)}(f - f_n) \longrightarrow 0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

*Démonstration.* 1. Soit  $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ .

Si  $f = 0$ , c'est immédiat. On suppose que  $f \neq 0$ .

Si  $|f|_{p(x)} = 1 \iff \rho_{p(\cdot)}(f) = 1$ ,

2. Supposons que  $|f|_{p(x)} = a > 1$ , alors on a  $\rho\left(\frac{f}{a}\right) = 1$ . Notons que  $\frac{1}{a} < 1$ .

Si  $\lambda > 1$ , on a

$$\rho(f) \leq \lambda \rho(f) \leq \lambda_p^- \rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda_p^+ \rho(f).$$

Si maintenant  $0 < \lambda < 1$ , alors on a

$$\lambda_p^- \rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda_p^- \rho(f) \leq \lambda \rho(f) \leq \rho(f).$$

De cela, il découle que

$$\frac{1}{a^{p^+}} \rho(f) \leq \rho\left(\frac{f}{a}\right) = 1 \leq \frac{1}{a^{p^-}} \rho(f).$$

d'où le résultat.

3. De même on trouve (3).

4. Pour démontrer (4), il est facile de voir que  $(f_n)$  converge vers  $f$  dans  $\Omega$ .

Ainsi  $|f_n|^{p(x)}$  converge vers  $|f|^{p(x)}$  et en utilisant l'inégalité :

$$|f_n|^{p(x)} \leq 2^{p^+-1} (|f_n - f|^{p(x)} + |f|^{p(x)}),$$

et le théorème de la convergence de l'intégrale de Vitali,

on en déduit que  $\rho(f_n) \longrightarrow \rho(f)$ .

D'autre part, si  $(f_n)$  converge vers  $f$  dans  $\Omega$ , on peut déduire que  $|f_n - f|^{p(x)}$  converge vers 0 dans  $\Omega$ .

D'après l'inégalité :

$$|f_n - f|^{p(x)} \leq 2^{p^+-1} (|f_n|^{p(x)} + |f|^{p(x)}),$$

et par le fait que  $\rho(f_n) \longrightarrow \rho(f)$ ,

on trouve que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n - f) = 0$ .

□

### 1.5.2 Espace de Sobolev à exposant variable :

**Définition 1.5.2.** On définit l'espace de Sobolev à exposant variable  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  par :

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{f \in L^{p(x)}(\Omega) \quad : \quad |\nabla f| \in L^{p(x)}(\Omega)\}, \quad (1.12)$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{1,p(x)} = |f|_{p(x)} + |\nabla f|_{p(x)} \quad ; \quad \forall f \in W^{1,p(x)}(\Omega). \quad (1.13)$$

**Corollaire 1.5.1** (Inégalité de Poincaré). [2] Soit  $p \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  telle que  $p^- > 1$ . Alors, il existe  $c > 0$  tel que :

$$|f|_{p(x)} \leq c |\nabla f|_{p(x)} \quad , \quad \forall f \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty. \quad (1.14)$$

En particulière l'expression  $|\nabla f|_{p(x)}$  est une norme sur  $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$  qui est équivalent à la norme  $\|f\|_{1,p(x)}(\Omega)$ .

**Proposition 1.5.5** (L'injection continue et compact). Soit  $r \in \mathcal{C}_+(\bar{\Omega})$ , si  $r(x) < p^*(x)$  pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ , on a l'injection  $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$  est compact et continue.

*Démonstration.* (Voir [17]). □

**Proposition 1.5.6.** [2]

1. L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .
2. L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .

**Théorème 1.2.** [2] Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , alors  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  si et seulement si  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

**Définition 1.5.3.** Étant donné  $1 \leq p < \infty$ , on désigne par  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$  **c'est-à-dire**  $W_0^{1,p}(\Omega) = \mathcal{D}(\bar{\Omega})^{W^{1,p}(\Omega)}$ .

L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est muni de la norme induite par  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Proposition 1.5.7.** L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

**Proposition 1.5.8.** Soient  $1 \leq p < \infty$  et  $f \in W^{1,p}(\Omega)$  tel que le support de  $f$  est un sous-ensemble compact de  $\Omega$ . Alors  $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

**Remarque 1.5.1.** Si  $p_1(x), p_2(x) \in \mathcal{C}_+(\bar{\Omega})$ , il est clair que  $m(x) \in \mathcal{C}_+(\bar{\Omega})$  où  $m(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\}$  pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ .

D'autre part, depuis  $p_1(x), p_2(x) \leq m(x)$ , pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ , il s'ensuit que  $W_0^{1,m(x)}(\Omega)$  est continuellement plongé dans  $W_0^{1,p_i(x)}(\Omega)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

## 1.6 Théorème de Col :

Avant donner le théorème de Col, on va définir les conditions de P-S.

**Définition 1.6.1** (Condition de Palais-Smale). Soient  $X$  un espace de Banach et  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Si  $c \in \mathbb{R}$ , on dit  $J$  vérifier la condition de Palais-Smale (P-S) au niveau  $c$ , si toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$  telle que :

$$\begin{cases} J(u_n) \rightarrow c & \text{dans } \mathbb{R} \\ J'(u_n) \rightarrow 0 & \text{dans } X' \end{cases} \quad \text{contient une sous-suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergente.}$$

**Théorème 1.3** (Théorème du Col). [27] Soient  $X$  un espace de Banach et  $J \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$  vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que  $J(0) = 0$  et que :

1. Il existe  $R > 0$  et  $a > 0$  tels que si  $\|u\| = R$ , alors  $J(u) \geq a$  ;
2. Il existe  $u_0 \in X$  tel que  $\|u_0\| > R$  et  $J(u_0) < a$ .

Alors  $J$  possède une valeur critique  $c$  telle que  $c \geq a$ .

De façon plus précise, si on pose :

- $P := \{p([0, 1]); p \in \mathcal{C}([0, 1], X), p(0) = 0, p(1) = u_0\}$ ,
- $c := \inf_{A \in P} \max_{t \in [0;1]} J(p(t))$ ,

Alors  $c$  est une valeur critique de  $J$ .

*Démonstration.* Soient  $P$  (qui est évidemment non vide) et  $c$  définis comme dans le théorème. Tout d'abord notons que par connexité, pour tout  $A \in P$ , l'intersection  $A \cap \{u \in X; \|u\| = R\}$  est non vide et par conséquent  $\max_{t \in [0;1]} J(p(t)) > a$  et finalement  $c > a$ . Si  $c$  n'est pas une valeur critique de  $J$ , pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , on peut trouver

## 1.6. THÉORÈME DE COL :

---

$A \in P$  tel que :

$$A := p([0, 1]), \quad c \leq \max_{t \in [0;1]} J(p(t)) \leq c + \varepsilon.$$

En posant  $\psi(\tau) := \eta(1, \varphi(\tau))$  et  $B := \psi([0, 1])$ , on a  $B \in P$ . Par définition de  $c$ , on a  $\max_{t \in [0;1]} J(p(t)) \geq c$ .

On en conclut que  $c$  est une valeur critique de  $J$  (et nous avons vu que  $c \geq a$ ).  $\square$

## CHAPITRE 2

# SOLUTIONS FAIBLES D'UN PROBLÈME CONTENANT L'OPÉRATEUR $P(X)$ -LAPLACIEN DANS LE CAS OÙ $\lambda > 0$

**D**ans ce chapitre, nous étudions le problème du  $p(x)$ -Laplacien avec des conditions de Dirichlet aux limites. Nous avons présenté la définition de la solution faible, et nous introduisons quelques hypothèses pour résoudre notre problème. Ils ont prouvés moyennant le théorème du Col que le problème (1) admet une suite de solutions faibles.

### 2.1 Étude du problème de $p(x)$ -Laplacien dans le cas où $\lambda > 0$ :

Dans cette section, nous étudions le problème (1) du  $p(x)$ -Laplacien dans le cas où la valeur propre  $\lambda > 0$ , et la fonction  $f(x, u)$  définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2})\nabla u = f(x, u) & \text{Si } x \in \Omega \\ = -\lambda |u|^{m(x)-2} u - |u|^{q(x)-2} u & \\ u = 0 & \text{Si } x \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.1)$$

2.1. ÉTUDE DU PROBLÈME DE  $P(X)$ -LAPLACIEN DANS LE CAS OÙ  $\lambda > 0$  :

---

où  $\Omega$  est bornée de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ .

Et  $m(x)$  définie par :

$$m(x) := \max\{p_1(x), p_2(x)\} < q(x), \quad (2.2)$$

telle que :

$$q(x) < \begin{cases} \frac{N \cdot m(x)}{N - m(x)} & \text{si } m(x) < N \\ +\infty & \text{si } m(x) \geq N \end{cases}$$

### Définition de la solution faible :

**Définition 2.1.1** (Solution faible du problème (2.1)). *On dit que  $u \in W_0^{1,m(x)}(\Omega)$  est une solution faible du problème (2.1) si :*

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2}) |\nabla u \nabla v| dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^{m(x)-2} u \cdot v - \int_{\Omega} |u|^{q(x)-2} u \cdot v dx = 0,$$

pour tout  $v \in W_0^{1,m(x)}(\Omega)$ .

### Hypothèse :

$$(H_1) : 2 \leq p_i^- \text{ pour } i \in \{1, 2\}.$$

$$(H_2) : m^+ < q^-.$$

$$(H_3) : q^+ < \frac{N \cdot m^-}{N - m^-}.$$

Le résultat principale de ce chapitre est le théorème suivant :

**Théorème 2.1.** *Pour tout  $\lambda > 0$ , le problème (2.1) admet plusieurs solutions faibles, si :  $2 \leq p_i^-$  pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $m^+ < q^-$  et  $q^+ < \frac{N \cdot m^-}{N - m^-}$ .*

### Preuve du théorème (2.1) :

Pour démontrer le théorème (2.1), on utilise la version  $\mathbb{Z}_2$ -symétrique du théorème de Col suivant :

2.1. ÉTUDE DU PROBLÈME DE  $P(X)$ -LAPLACIEN DANS LE CAS OÙ  
 $\lambda > 0$  :

---

**Théorème 2.2.** *Soit  $X$  un espace de Banach réel de dimension infinie et soit  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ , satisfait la condition de Palais-Smal (c'est-à-dire toute suite  $\{x_n\} \subset X$  telle que  $\{I(x_n)\}$  est bornée et  $I'(x_n) \rightarrow c$  dans  $X^*$  a une sous-suite convergente) et  $I(0) = 0$ .*

*Supposons que :*

(I<sub>1</sub>) *il existe deux constantes  $\rho, a > 0$  tel que  $I(x) \geq a$  si  $\|x\| = \rho$ .*

(I<sub>2</sub>) *pour chaque sous-espace de dimension finie  $X_1 \subset X$ ,*

*l'ensemble  $\{x \in X_1 : I(x) \geq 0\}$  est borné.*

*Alors,  $I$  admet une suite infinie des valeurs critiques.*

**Définition 2.1.2.** *Soit  $E$  l'espace de Sobolev à exposant variable  $W_0^{1,m(x)}(\Omega)$ .*

*On définit la fonctionnelle d'énergie correspondant au problème (2.1) par :*

$J_\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$  ;

$$J_\lambda(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p_1(x)} |\nabla u|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_2(x)} |\nabla u|^{p_2(x)} dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx. \quad (2.3)$$

Un calcul simple basé sur la remarque (1.5.1) , les relations (1.9), (1.10) et le plongement compact de  $E$  dans  $L^{s(x)}(\Omega)$  pour tout  $s \in C_+(\bar{\Omega})$  avec  $s(x) < m^*(x)$  sur  $\bar{\Omega}$  montre que  $J_\lambda$  est bien définie sur  $E$  et  $J_\lambda \in C^1(E, \mathbb{R})$  telle que la dérivée définie par :

$$\langle J'_\lambda(u), v \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2}) |\nabla u \cdot \nabla v| dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^{m(x)-2} u \cdot v dx - \int_{\Omega} |u|^{q(x)-2} u \cdot v dx. \quad (2.4)$$

Pour tout  $u, v \in E$ .

Les solutions faibles de (2.1) sont exactement les points critiques de  $J_\lambda$ .

Pour démontrer le théorème (2.1), on a besoin de quelques lemmes auxiliaires :

**Lemme 2.1.** *Il existe  $\eta > 0$  et  $\alpha > 0$  tel que  $J_\lambda(u) \geq \alpha > 0$ , pour tout  $u \in E$  avec  $\|u\|_{m(x)} = \eta$ .*

*Démonstration.* Notons d'abord que  $m(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\}$  pour tout  $x \in \bar{\Omega}$  alors :

$$|\nabla u(x)|^{p_1(x)} + |\nabla u(x)|^{p_2(x)} \geq |\nabla u(x)|^{m(x)}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (2.5)$$

2.1. ÉTUDE DU PROBLÈME DE  $P(X)$ -LAPLACIEN DANS LE CAS OÙ  
 $\lambda > 0$  :

---

D'autre part, on a :

$$|u(x)|^{q^-} + |u(x)|^{q^+} \geq |u(x)|^{q(x)}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (2.6)$$

En utilisant (2.5) et (2.6), on en déduit que :

$$J_\lambda(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p_1(x)} |\nabla u|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_2(x)} |\nabla u|^{p_2(x)} dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \quad (2.7)$$

$$\geq \frac{1}{\max\{p_1(x), p_2(x)\}} \cdot \int_{\Omega} |\nabla u|^{p_1(x)} + |\nabla u|^{p_2(x)} dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} (|u|^{q^-} + |u|^{q^+}) dx \quad (2.8)$$

$$\geq \frac{1}{\max\{p_1(x), p_2(x)\}} \cdot \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx - \frac{1}{q^-} \left( \int_{\Omega} |u|^{q^-} dx + \int_{\Omega} |u|^{q^+} dx \right) \quad (2.9)$$

$$\geq \frac{1}{\max\{p_1^+, p_2^+\}} \cdot \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx - \frac{1}{q^-} \left( \int_{\Omega} |u|^{q^-} dx + \int_{\Omega} |u|^{q^+} dx \right) \quad (2.10)$$

$$\geq \frac{1}{m^+} \cdot \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx - \frac{1}{q^-} \left( \int_{\Omega} |u|^{q^-} dx + \int_{\Omega} |u|^{q^+} dx \right), \quad (2.11)$$

pour tout  $u \in E$ .

Comme  $m^+ < q^- \leq q^+ < m^*(x)$  pour tout  $x \in \bar{\Omega}$  et l'injection de  $E$  dans  $L^{q^-}(\Omega)$  et dans  $L^{q^+}(\Omega)$ , il s'ensuit qu'il existe deux constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  telles que :

$$\|u\|_{m(x)} \geq c_1 \|u\|_{q^+}, \quad \|u\|_{m(x)} \geq c_2 \|u\|_{q^-}, \quad \forall u \in E. \quad (2.12)$$

Supposons que  $u \in E$  et  $\|u\|_{m(x)} < 1$ .

Ainsi, d'après (1.10) :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx \geq \|u\|_{m(x)}^{m^+}. \quad (2.13)$$

Les relations (2.11), (2.12) et (2.13) donne :

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{m^+} \|u\|_{m(x)}^{m^+} - \frac{1}{q^-} \left[ \left( \frac{1}{c_1} \|u\|_{m(x)} \right)^{q^+} + \left( \frac{1}{c_2} \|u\|_{m(x)} \right)^{q^-} \right] \\ &= \left( \beta - \gamma \|u\|_{m(x)}^{q^+ - m^+} - \sigma \|u\|_{m(x)}^{q^- - m^+} \right) \|u\|_{m(x)}^{m^+}, \end{aligned}$$

pour tout  $u \in E$  avec  $\|u\|_{m(x)} < 1$ , où  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\sigma$  sont des constantes positives.

On remarque que la fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$g(t) = \beta - \gamma.t^{q^+ - m^+} - \sigma.t^{q^- - m^+}$$

est positive au voisinage de l'origine.

Nous concluons que le lemme 2.1 qui est vrai.  $\square$

**Lemme 2.2.** *Soit  $E_1$  un sous-espace de dimension finie de  $E$ .*

*Alors, l'ensemble  $S = \{u \in E_1 : J_\lambda(u) \geq 0\}$  est borné.*

*Démonstration.* On montre d'abord que :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p_1(x)} |\nabla u|^{p_1(x)} dx \leq K_1 \left( \|u\|_{m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{m(x)}^{p_1^+} \right), \forall u \in E. \quad (2.14)$$

où  $K_1$  est une constante positive.

En effet, en utilisant les relations (1.9) et (1.10) on trouve :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p_1(x)} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|_{p_1(x)}^{p_1^-} + \int_{\Omega} |\nabla u|_{p_1(x)}^{p_1^+} \quad (2.15)$$

$$\leq \|u\|_{1,p_1(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,p_1(x)}^{p_1^+}. \quad (2.16)$$

d'un autre part, la remarque (1.5.1) implique qu'il existe une constante positive  $K_0$  tel que :

$$\|u\|_{1,p_1(x)} \leq K_0 \|u\|_{1,m(x)}, \forall u \in E, \quad (2.17)$$

d'après les inégalités (2.16) et (2.17) donnent :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{p_1(x)} |\nabla u|^{p_1(x)} dx &\leq \frac{1}{p_1(x)} \left( \|u\|_{1,p_1(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,p_1(x)}^{p_1^+} \right) \\ &\leq \frac{1}{p_1(x)} \left( (K_0 \|u\|_{1,m(x)})^{p_1^-} + (K_0 \|u\|_{1,m(x)})^{p_1^+} \right) \\ &\leq \left( \frac{1}{p_1(x)} (K_0^{p_1^-} + K_0^{p_1^+}) \right) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^+} \right) \\ &\leq K_1 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^+} \right), \forall u \in E. \end{aligned}$$

Et donc (2.14) est vrai .

De même la manière, on en déduit qu'il existe une constante positive  $K_2$  tel que :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p_2(x)} |\nabla u|^{p_2(x)} dx \leq K_2 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right), \forall u \in E. \quad (2.18)$$

2.1. ÉTUDE DU PROBLÈME DE  $P(X)$ -LAPLACIEN DANS LE CAS OÙ  
 $\lambda > 0$  :

---

D'après les relations (1.9) et (1.10) on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u|^{p_2(x)} dx &\leq |\nabla u|_{p_2(x)}^{p_2^-} + |\nabla u|_{p_2(x)}^{p_2^+} \\
&\leq |\nabla u|_{p_2(x)}^{p_2^-} + |\nabla u|_{p_2(x)}^{p_2^+} \\
&\leq \|u\|_{1,p_2(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,p_2(x)}^{p_2^+} \\
&\leq (K_0 \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-})^{p_2^-} + (K_0 \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+})^{p_2^+} \quad (\text{d'après (2.17)}) \\
&\leq K_0^{p_2^-} \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + K_0^{p_2^+} \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \\
&\leq (K_0^{p_2^-} + K_0^{p_2^+}) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right) \\
&\leq K_2 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right).
\end{aligned}$$

On utilise les relations (1.9) et (1.10) on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx \leq \frac{1}{m(x)} |u|_{m(x)}^{m^-} + \frac{1}{m(x)} |u|_{m(x)}^{m^+},$$

avec  $m(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\}$ .

Comme on a l'injecte continue de  $E$  dans  $L^{m(x)}(\Omega)$ , il existe une constante  $\bar{K}$  positive telle que :

$$|u|_{m(x)} \leq \bar{K} \|u\|_{m(x)}, \quad \forall u \in E.$$

On remplace, et on obtient  $\forall \lambda > 0, \exists K_3(\lambda)$  positive :

$$\lambda \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |\nabla u|^{m(x)} dx \leq \frac{1}{m(x)} (\bar{K} \|u\|_{1,m(x)})^{m^-} + \frac{1}{m(x)} (\bar{K} \|u\|_{1,m(x)})^{m^+} \quad (2.19)$$

$$\leq \frac{\bar{K}^{m^-}}{1, m(x)} \|u\|_{m(x)}^{m^-} + \frac{\bar{K}^{m^+}}{m(x)} \|u\|_{1,m(x)}^{m^+} \quad (2.20)$$

$$\leq K_3(\lambda) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{m^+} \right), \quad \forall u \in E. \quad (2.21)$$

En remplaçant les inégalités (2.14), (2.18) et (2.21) dans la fonctionnelle d'énergie (2.3), on trouve :

$$\begin{aligned}
J_{\lambda} &\leq K_1 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^+} \right) + K_2 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right) \\
&\quad + K_3(\lambda) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{m^+} \right) - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \\
&\leq K_1 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^+} \right) + K_2 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right) \\
&\quad + K_3(\lambda) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{m^+} \right) - \frac{1}{q^+} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \quad \forall u \in E.
\end{aligned}$$

2.1. ÉTUDE DU PROBLÈME DE  $P(X)$ -LAPLACIEN DANS LE CAS OÙ  
 $\lambda > 0$  :

---

Soit  $u \in E$  un arbitraire mais fixé. Nous définissons :

$$\Omega_{<} = \{x \in \Omega ; |u(x)| < 1\},$$

$$\Omega_{\geq} = \Omega \setminus \Omega_{<},$$

Donc :

$$\begin{aligned} J_\lambda &\leq K_1 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^+} \right) + K_2 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right) \\ &\quad + K_3(\lambda) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{m^+} \right) - \frac{1}{q^+} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \\ &\leq K_1 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^+} \right) + K_2 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right) \\ &\quad + K_3(\lambda) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{m^+} \right) - \frac{1}{q^+} \int_{\Omega_{\geq}} |u|^{q(x)} dx \\ &\leq K_1 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^+} \right) + K_2 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right) \\ &\quad + K_3(\lambda) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{m^+} \right) - \frac{1}{q^+} \int_{\Omega_{>}} |u|^{q^-} dx \\ &\leq K_1 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^+} \right) + K_2 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right) \\ &\quad + K_3(\lambda) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{m^+} \right) - \frac{1}{q^+} \int_{\Omega} |u|^{q^-} dx + \frac{1}{q^+} \int_{\Omega_{<}} |u|^{q^-} dx \\ &\leq K_1 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^+} \right) + K_2 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right) \\ &\quad + K_3(\lambda) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{m^+} \right) - \frac{1}{q^+} \int_{\Omega} |u|^{q^-} dx + K_4, \quad \forall u \in E, \end{aligned}$$

où  $\frac{1}{q^+} \int_{\Omega_{<}} |u|^{q^-} dx \leq K_4$  ,  $\forall u \in E$  et  $K_4$  une constant positive.

Le fonctionnel  $|\cdot|_{q^-} : \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$|u|_{q^-} = \left( \int_{\Omega} |u|^{q^-} dx \right)^{\frac{1}{q^-}}$$

est une norme dans  $E$ . Dans le sous-espace de dimension finie  $E_1$  les normes  $|\cdot|_{q^-}$  et  $\|\cdot\|_{m(x)}$  sont équivalentes, donc il existe une constante positive  $K = K(E_1)$  telle que :

$$\|u\|_{1,m(x)} \leq K |u|_{q^-}, \quad \forall u \in E_1. \quad (2.22)$$

Alors, il existe une constante positive  $K_5$  telle que :

$$J_\lambda(u) \leq K_1 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^+} \right) + K_2 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right) \\ + K_3(\lambda) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{m^+} \right) - K_5 \|u\|_{1,m(x)}^{q^-} + K_4.$$

Ainsi,

$$K_1 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_1^+} \right) + K_2 \left( \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{p_2^+} \right) \\ + K_3(\lambda) \left( \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} + \|u\|_{1,m(x)}^{m^+} \right) - K_5 \|u\|_{1,m(x)}^{q^-} + K_4 \geq 0 \quad , \forall u \in S,$$

d'où  $q^- > m^+$  , on conclut que  $S$  est borné dans  $E$ .

La preuve de lemme 2.2 est complet. □

**Lemme 2.3.** *Supposons que  $\{u_n\} \subset E$  est une suite qui satisfait les propriétés suivantes :*

$$|J_\lambda(u_n)| < M. \tag{2.23}$$

$$J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \tag{2.24}$$

où  $M$  est une constante positive. Alors,  $\{u_n\}$  possède une sous-suite convergente.

*Démonstration.* **Premièrement**, nous montrons que  $\{u_n\}$  est borné dans  $E$ .

Supposons par contradiction le contraire. **Puis**, en posant éventuellement à une sous-suite, notées encore par  $\{u_n\}$ , on peut supposer que  $\|u_n\|_{1,m(x)} \longrightarrow \infty$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On peut donc considérer que  $\|u_n\|_{1,m(x)} > 1$  pour tout entier  $n$ .

D'après, (2.24) on en déduit qu'il existe  $N_1 > 0$  tel que pour tout  $n > N_1$ , on a :

$$\|J'_\lambda(u_n)\| \leq 1. \tag{2.25}$$

D'autre part, pour tout  $n > N_1$  fixé, l'application :

$$E \ni v \longrightarrow \langle J'_\lambda(u_n), v \rangle \quad \text{est linéaire et continue.} \tag{2.26}$$

2.1. ÉTUDE DU PROBLÈME DE  $P(X)$ -LAPLACIEN DANS LE CAS OÙ  
 $\lambda > 0$  :

---

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
| \langle J'_\lambda(u_n), v \rangle | &= \int_{\Omega} (| \nabla u |^{p_1(x)-2} + | \nabla u |^{p_2(x)-2}) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\
&\quad + \lambda \int_{\Omega} | u |^{m(x)-2} u \cdot v \, dx - \int_{\Omega} | u |^{q(x)-2} u \cdot v \, dx \\
&\leq \left( \int_{\Omega} (| \nabla u |^{p_1(x)-2} + | \nabla u |^{p_2(x)-2}) \nabla u \, dx + \lambda \int_{\Omega} | u |^{m(x)-2} \cdot u \, dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} | u |^{m(x)-2} u \, dx \right) \cdot \int_{\Omega} \nabla v \, dx \\
&\leq \| J'_\lambda(u_n) \| \cdot \| v \|_{1,m(x)} \\
&\leq \| v \|_{1,m(x)} \quad , \forall v \in E, \quad n > N_1.
\end{aligned}$$

Si on pose,  $v = u_n$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
- \| u_n \|_{1,m(x)} &\leq \int_{\Omega} (| \nabla u_n |^{p_1(x)-2} + | \nabla u_n |^{p_2(x)-2}) \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx \\
&\quad + \lambda \int_{\Omega} | u_n |^{m(x)-2} u_n \cdot u_n \, dx - \int_{\Omega} | u_n |^{q(x)-2} u_n \cdot u_n \, dx \\
&\leq \int_{\Omega} | \nabla u_n |^{p_1(x)} \, dx + \int_{\Omega} | \nabla u_n |^{p_2(x)} \, dx \\
&\quad + \lambda \int_{\Omega} | u_n |^{m(x)} \, dx - \int_{\Omega} | u_n |^{q(x)} \, dx \\
&\leq \| u_n \|_{1,m(x)} \cdot
\end{aligned}$$

$\forall n \in N_1$ , on obtient :

$$- \| u_n \|_{1,m(x)} - \int_{\Omega} | \nabla u_n |^{p_1(x)} \, dx - \int_{\Omega} | \nabla u_n |^{p_2(x)} \, dx - \lambda \int_{\Omega} | u_n |^{m(x)} \, dx \leq - \int_{\Omega} | u_n |^{q(x)} \, dx \quad (2.27)$$

En supposant que  $\| u_n \|_{m(x)} > 1$ , les relation (2.23) , (2.27) et (1.9) impliquent que :

$$\begin{aligned}
M > J_\lambda(u_n) &\geq \left( \frac{1}{m^+} - \frac{1}{q^-} \right) \cdot \int_{\Omega} (| \nabla u_n |^{p_1(x)} + | \nabla u_n |^{p_2(x)}) \, dx \\
&\quad + \lambda \left( \frac{1}{m^+} - \frac{1}{q^-} \right) \int_{\Omega} | u_n |^{m(x)} \, dx - \frac{1}{q^-} \| u_n \|_{1,m(x)} \\
&\geq \left( \frac{1}{m^+} - \frac{1}{q^-} \right) \int_{\Omega} | \nabla u_n |^{m(x)} \, dx - \frac{1}{q^-} \| u_n \|_{1,m(x)} \\
&\geq \left( \frac{1}{m^+} - \frac{1}{q^-} \right) \| u_n \|_{1,m(x)}^{m^-} - \frac{1}{q^-} \| u_n \|_{1,m(x)} \cdot
\end{aligned}$$

En laissant  $n \rightarrow \infty$ , on obtient une contradiction. Il s'ensuit que  $\{u_n\}$  est borné dans  $E$ .

2.1. ÉTUDE DU PROBLÈME DE  $P(X)$ -LAPLACIEN DANS LE CAS OÙ  
 $\lambda > 0$  :

---

Puisque  $\{u_n\}$  est borné dans  $E$ , il existe une sous-suite, encore notée  $\{u_n\}$ , et  $u_0 \in E$  telle que  $\{u_n\}$  converge faiblement vers  $\{u_0\}$  dans  $E$ , comme on a l'injection compacte de  $E$  dans  $L^{m(x)}(\Omega)$  et dans  $L^{q(x)}(\Omega)$  il s'ensuit que  $\{u_n\}$  converge fortement vers  $\{u_0\}$  dans  $L^{m(x)}(\Omega)$  et  $L^{q(x)}(\Omega)$ . Les informations ci-dessus et la relation (2.24) impliquent que :

$$\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u_0), u_n - u_0 \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

D'autre part, d'après (2.4) nous avons :

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u_0), u_n - u_0 \rangle &= \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p_1(x)-2} \nabla u_n + |\nabla u_n|^{p_2-2} \nabla u_n \\ &\quad - |\nabla u_0|^{p_1(x)-2} \nabla u_0 - |\nabla u_0|^{p_2(x)-2} \nabla u_0) (\nabla u_n - \nabla u_0) dx \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} (|u_n|^{m(x)-2} u_n - |u_0|^{m(x)-2} u_0) (u_n - u_0) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u_0|^{q(x)-2} u_0) (u_n - u_0) dx \\ \Leftrightarrow \langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u_0), u_n - u_0 \rangle &- \lambda \int_{\Omega} (|u_n|^{m(x)-2} u_n - |u_0|^{m(x)-2} u_0) (u_n - u_0) dx \\ &+ \int_{\Omega} (|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u_0|^{q(x)-2} u_0) (u_n - u_0) dx \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p_1(x)-2} \nabla u_n + |\nabla u_n|^{p_2-2} \nabla u_n \\ &\quad - |\nabla u_0|^{p_1(x)-2} \nabla u_0 - |\nabla u_0|^{p_2(x)-2} \nabla u_0) (\nabla u_n - \nabla u_0) dx \end{aligned} \quad (2.29)$$

En utilisant le fait que  $\{u_n\}$  converge fortement vers  $u_0$  dans  $L^{p(x)}(\Omega)$  et l'inégalité (1.6) on trouve :

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} (|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u_0|^{q(x)-2} u_0) (u_n - u_0) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} |u_n|^{q(x)-2} u_n (u_n - u_0) dx \right| + \left| \int_{\Omega} |u_0|^{q(x)-2} u_0 (u_n - u_0) dx \right| \\ &\leq c_3 \left| |u_n|^{q(x)-1} \right|_{\frac{q(x)}{q(x)-1}} \cdot |u_n - u_0|_{q(x)} + c_4 \left| |u_0|^{q(x)-1} \right|_{\frac{q(x)}{q(x)-1}} \cdot |u_n - u_0|_{q(x)}. \end{aligned}$$

où  $c_3$  et  $c_4$  sont des constantes positives.

Comme  $|u_n - u_0|_{q(x)} \longrightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|u_n|^{q(x)-1} u_n - |u_0|^{q(x)-1} u_0) (u_n - u_0) dx = 0. \quad (2.30)$$

avec des arguments similaires, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow 0} \int_{\Omega} (|u_n|^{m(x)-1} u_n - |u_0|^{m(x)-1} u_0) (u_n - u_0) dx = 0. \quad (2.31)$$

Par (2.29), (2.30) et (2.31) on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p_1(x)-2} \cdot \nabla u_n + |\nabla u_n|^{p_2(x)-2} \nabla u_n \\ - |\nabla u_0|^{p_1(x)-2} \cdot \nabla u_0 - |\nabla u_0|^{p_2(x)-2} \nabla u_0) (\nabla u_n - \nabla u_0) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ensuite, on applique l'inégalité élémentaire suivante (voir [4]) :

$$(|\xi|^{r-2} \xi - |\psi|^{r-2} \psi) \cdot (\xi - \psi) \geq C |\xi - \psi|^r, \quad \forall r \geq 2, \xi, \psi \in \mathbb{R}^N. \quad (2.33)$$

Les relations (2.32) et (2.33) donnent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_0|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_0|^{p_2(x)} dx = 0. \quad (2.34)$$

Ou en utilisant la relation (2.5), on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_0|^{m(x)} dx = 0. \quad (2.35)$$

Ce fait et la relation (1.11) implique  $\|u_n - u_0\|_{m(x)} \rightarrow 0$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

La preuve du lemme 2.3 est complet.  $\square$

**Preuve de théorème 2.1** : Il est claire que la fonctionnelle  $J_\lambda$  vérifier  $J_\lambda(0) = 0$  et le lemme 2.3 implique que  $J_\lambda$  satisfait le Palais-Smale.

D'autre part, les lemme 2.1 et 2.2 montrent que les conditions  $(I_1)$  et  $(I_2)$  du Théorème 2.2 sont satisfaites.

En appliquant le théorème 2.2 à la fonctionnelle  $J_\lambda$ , nous concluons que l'équation (2.1) admet une infinité de solutions faibles dans  $E$ .

La preuve du théorème 2.1 est complet.  $\square$

## CHAPITRE 3

# SOLUTIONS FAIBLES D'UN PROBLÈME CONTENANT L'OPÉRATEUR $P(X)$ -LAPLACIEN DANS LE CAS OÙ $\lambda < 0$

**D**ans ce chapitre, nous étudions le deuxième problème du  $p(x)$ -Laplacien avec condition de Dirichlet aux limites dans le cas où  $\lambda$  négative. Nous avons présenté le problème et la définition de la solution faible. Après, nous présentons les principaux résultats avec son démonstrations.

### 3.1 Étude du problème de $p(x)$ -Laplacien avec

$\lambda < 0$  :

Dans cette section, nous étudions le problème (1) du  $p(x)$ -Laplacien dans le cas où la valeur propre  $\lambda < 0$ , et la fonction  $f(x, u)$  définie comme suit :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2})\nabla u = f(x, u) \\ \quad = +\lambda |u|^{m(x)-2} u - |u|^{q(x)-2} u & \text{Si } x \in \Omega \\ u = 0 & \text{Si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\Omega$  est bornée de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ .

## Définition de la solution faible :

**Définition 3.1.1** (Solution faible du problème (3.1)). *On dit que  $u \in W_0^{1,m(x)}(\Omega)$  est une solution faible du problème (3.1) si :*

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2}) |\nabla u \nabla v| dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{m(x)-2} u \cdot v dx + \int_{\Omega} |u|^{q(x)-2} u \cdot v dx = 0,$$

pour tout  $v \in W_0^{1,m(x)}(\Omega)$ .

## Hypothèse :

Nous étudions le problème (3.1) sous les hypothèses suivants :

$$(H_1) : m^+ < q^-.$$

$$(H_2) : q^+ < \frac{N \cdot m^-}{N - m^-},$$

où  $m(x)$  définie par (2.2).

Le résultat principale de cette section est énoncer dans le théorème suivant :

**Théorème 3.1.** *Il existe  $\lambda^* > 0$  tels que pour tout  $\lambda > \lambda^*$  le problème (3.1) admet une solution faible non triviale, si :  $m^+ < q^-$  et  $q^+ < \frac{N \cdot m^-}{N - m^-}$ .*

## Preuve du théorème (3.1) :

**Définition 3.1.2.** *On définit la fonctionnelle énergétique associée au problème (3.1) par  $I_{\lambda} : E \rightarrow \mathbb{R}$  :*

$$\begin{aligned} I_{\lambda}(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p_1(x)} |\nabla u|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_2(x)} |\nabla u|^{p_2(x)} dx \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les mêmes arguments que ceux utilisés pour la fonctionnelle  $J_{\lambda}$  montre que  $I_{\lambda}$  est bien défini sur  $E$  et  $I_{\lambda} \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$  avec la dérivée définie par :

$$\begin{aligned} \langle I'_{\lambda}(u), v \rangle &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2}) |\nabla u \cdot \nabla v| dx \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} |u|^{m(x)-2} u \cdot v dx + \int_{\Omega} |u|^{q(x)-2} u \cdot v dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.1. ÉTUDE DU PROBLÈME DE  $P(X)$ -LAPLACIEN AVEC  
 $\lambda < 0$  :

---

Pour tout  $u, v \in E$ .

Les solutions faibles de (3.1) sont les points critiques de  $I_\lambda$ .

La recherche de la solution faible du (3.1) découle à la recherche des points critiques de  $I_\lambda$ .

Maintenant, l'objectif de ce chapitre est de montrer que  $I_\lambda$  possède un minimum global non trivial dans  $E$ . Dans ce but, pour démontrer ce résultat, nous commençons à prouver des résultats auxiliaires énoncer sur les lemmes 3.1 et 3.2 :

**Lemme 3.1.** *La fonctionnelle  $I_\lambda$  est coercitive sur  $E$ .*

*Démonstration.* A fin de prouver le lemme 2.1, nous montrons d'abord que pour tout  $a, b > 0$  et  $0 < k < l$ , l'inégalité suivante est vrai.

$$a.t^k - b.t^l \leq a \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{k}{l-k}} , \forall t \geq 0. \quad (3.4)$$

En effet, puisque la fonction :  $[0, \infty) \ni t \longrightarrow t^\theta$  est croissante pour tout  $\theta > 0$  il s'ensuit que :

$$(a - b) t^{l-k} < 0 , \forall l > \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{(l-k)}} . \quad (3.5)$$

et

$$t^k \cdot ((a - b) \cdot t^{l-k}) \leq a.t^k < a \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{k}{(l-k)}} , \forall t \in \left[ 0, \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{l-k}} \right] . \quad (3.6)$$

Les deux derniers inégalités (3.5) et (3.6) les montrent que (3.4) est vrai.

En utilisant (3.4), on en déduit que pour tout  $x \in \Omega$  et  $u \in E$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{m^-} |u(x)|^{m(x)} - \frac{1}{q^+} |u(x)|^{q(x)} &\leq \frac{\lambda}{m^-} \left[ \frac{\lambda \cdot q^+}{m^-} \right]^{\frac{m(x)}{q(x)-m(x)}} \\ &\leq \frac{\lambda}{m^-} \left[ \left( \frac{\lambda \cdot q^+}{m^-} \right)^{\frac{m^+}{q^- - m^+}} + \left( \frac{\lambda \cdot q^+}{m^-} \right)^{\frac{m^-}{q^+ - m^-}} \right] \\ &= C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $u$  et  $x$ . Intégrant la dernière inégalité ci-dessus sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\frac{\lambda}{m^-} \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx - \frac{1}{q^+} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \leq D. \quad (3.7)$$

3.1. ÉTUDE DU PROBLÈME DE  $P(X)$ -LAPLACIEN AVEC  
 $\lambda < 0$  :

---

Où  $D$  est une constante positive indépendante de  $u$ .

En utilisant les inégalités (2.5) et (3.7) on obtient que pour tout  $u \in E$  avec  $\|u\|_{m(x)} > 1$  nous avons :

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{m^+} \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx - \frac{\lambda}{m^-} \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx + \frac{1}{q^+} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{m^+} \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} - \frac{\lambda}{m^-} \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx - \frac{1}{q^+} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{m^+} \|u\|_{1,m(x)}^{m^-} - D. \end{aligned}$$

Donc  $I_\lambda$  est coercitif. Donc la preuve de lemme 3.1 est complet.  $\square$

**Lemme 3.2.** *La fonctionnelle  $I_\lambda$  est faiblement semi-continue inférieure.*

*Démonstration.* Premièrement, nous montrons que les fonctionnelles  $\Lambda_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ , défini par :

$$\Lambda_i(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p_i(x)} |\nabla u|^{p_i(x)} dx, \forall i \in \{0, 1\} \text{ est convexe.}$$

En effet, puisque la fonction  $[0, \infty) \ni t \rightarrow t^\theta$  est convexe  $\forall \theta > 0$ , on en déduit que pour chaque  $x \in \Omega$  fixé, on obtient :

$$\left| \frac{\xi + \psi}{2} \right|^{p_i(x)} \leq \left| \frac{|\xi| + |\psi|}{2} \right|^{p_i(x)} \leq \frac{1}{2} |\xi|^{p_i(x)} + \frac{1}{2} |\psi|^{p_i(x)}, \forall \xi, \psi \in \mathbb{R}^N, i \in \{1, 2\}. \quad (3.8)$$

En utilisant l'inégalité (3.8), on trouve :

$$\left| \frac{\nabla u + \nabla v}{2} \right|^{p_i(x)} \leq \left| \frac{|\nabla u| + |\nabla v|}{2} \right|^{p_i(x)} \leq \frac{1}{2} |\nabla u|^{p_i(x)} + \frac{1}{2} |\nabla v|^{p_i(x)}, \quad (3.9)$$

$\forall u, v \in E, x \in \Omega, i \in \{1, 2\}$ .

En multipliant par  $\frac{1}{p_i(x)}$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p_i(x)} \left| \frac{\nabla u + \nabla v}{2} \right|^{p_i(x)} dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{p_i(x)} |\nabla u|^{p_i(x)} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{p_i(x)} |\nabla v|^{p_i(x)} dx$$

Alors,

$$\Lambda_i \left( \frac{u + v}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \Lambda_i(u) + \frac{1}{2} \Lambda_i(v), \forall u, v \in E, i \in \{1, 2\}. \quad (3.10)$$

Ainsi,  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont convexes. Il s'ensuit que  $\Lambda_1 + \Lambda_2$  est convexe. En suite, nous montrons que la fonctionnelle  $\Lambda_1 + \Lambda_2$  est faiblement semi-continue inférieurement

3.1. ÉTUDE DU PROBLÈME DE  $P(X)$ -LAPLACIEN AVEC  
 $\lambda < 0$  :

---

sur  $E$ . Comme  $\Lambda_1 + \Lambda_2$  est convexe, d'après le corollaire 3.8 de [2] il suffit de montrer que  $\Lambda_1 + \Lambda_2$  est fortement semi-continue inférieure sur  $E$ . On fixe  $u \in E$  et  $e > 0$ .

Soit  $v \in E$  arbitraire et  $\Lambda_1 + \Lambda_2$  est convexe et l'inégalité (1.6) est vraie, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(v) + \Lambda_2(v) &\geq \Lambda_1(u) + \Lambda_2(u) + \langle \Lambda_1'(u) + \Lambda_2'(u), v - u \rangle \\
&\geq \Lambda_1(u) + \Lambda_2(u) + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p_1(x)-1} |\nabla(v - u)| dx \\
&\quad - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p_2(x)-1} |\nabla(v - u)| dx \\
&\geq \Lambda_1(u) + \Lambda_2(u) - D_1 \left| |\nabla u|^{p_1(x)-1} \right| \frac{p_1(x)}{p_1(x) - 1} \cdot |\nabla(u - v)|_{p_1(x)} \\
&\quad - D_2 \left| |\nabla u|^{p_2(x)-1} \right| \frac{p_2(x)}{p_2(x) - 1} \cdot |\nabla(u - v)|_{p_2(x)} \\
&\geq \Lambda_1(u) + \Lambda_2(u) - D_3 \|u - v\|_{m(x)} \\
&\geq \Lambda_1(u) + \Lambda_2(u) - e.
\end{aligned}$$

pour tout  $v \in E$ .

Avec  $\|u - v\|_{m(x)} < e / \left[ \left| |\nabla u|^{p_1(x)-1} \right| \frac{p_1(x)}{p_1(x) - 1} + \left| |\nabla u|^{p_2(x)-1} \right| \frac{p_2(x)}{p_2(x) - 1} \right]$ ,

où  $D_1, D_2$  et  $D_3$  sont des constantes positives. Il s'ensuit que  $\Lambda_1 + \Lambda_2$  est fortement semi-continue inférieurement et comme il est convexe, alors  $\Lambda_1 + \Lambda_2$  est faiblement semi-continue inférieurement. Enfin, on remarque que si  $\{u_n\} \subset E$  est une suite qui converge faiblement vers  $u$  dans  $E$  en  $\{u_n\}$  converge fortement vers  $u$  dans  $L^{m(x)}(\Omega)$  et  $L^{q(x)}(\Omega)$ . Ainsi  $I_{\lambda}$  est faiblement semi-continue inférieurement.

La preuve du lemme 3.2 est complet.  $\square$

**Preuve du théorème 3.1.** D'après les lemmes 3.1 et 3.2 on en déduit que  $I_{\lambda}$  est coercitif et faiblement semi-continue inférieurement sur  $E$ . Alors, le théorème 1.2 de [27] implique qu'il existe  $u_{\lambda} \in E$  qui représente un minimum global de  $I_{\lambda}$  et donc une solution faible du problème (3.1).

Il reste à démontrer que la solution faible est non triviale.

On montre que  $u_{\lambda}$  n'est pas triviale pour  $\lambda$  assez grand. En effet, en laissant  $t_0 > 1$  un réel fixé et  $\Omega_1$  un sous ensemble ouvert de  $\Omega$  avec  $|\Omega_1| > 0$  on en déduit qu'il

3.1. ÉTUDE DU PROBLÈME DE  $P(X)$ -LAPLACIEN AVEC  
 $\lambda < 0$  :

---

existe  $u_0 \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega) \subset E$  tel que  $u_0(x) = t_0$  pour tout  $x \in \bar{\Omega}$  et  $0 \leq u_0(x) \leq t_0$  dans  $\Omega \setminus \Omega_1$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_0) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p_1(x)} |\nabla u_0|^{p_1(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p_2(x)} |\nabla u_0|^{p_2(x)} dx \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |u_0|^{m(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u_0|^{q(x)} dx \\ &= L - \frac{\lambda}{m^+} \int_{\Omega_1} |u_0|^{m(x)} dx \\ &= L - \frac{\lambda}{m^+} t_0^{m^-} |\Omega_1|. \end{aligned}$$

où  $L$  est une constante positive. Ainsi, il existe  $\lambda^* > 0$  tel que  $I_\lambda(u_0) < 0$  pour tout  $\lambda \in [\lambda^*, \infty)$ . Il s'ensuit que  $I_\lambda(u_\lambda) < 0$  pour tout  $\lambda \geq \lambda^*$  et donc  $u_\lambda$  est une solution faible non triviale du problème (3.1) pour  $\lambda$  assez grand. La preuve de théorème 3.1 est complet.  $\square$

## CONCLUSION :

Dans ce mémoire, nous avons présenter et étudier quelque propriétés des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables de chercher la résolution des problème de type  $p(x)$ -Laplacien avec des conditions aux limites de Dirichlet.

- L'outil principale pour trouver les solutions faibles des problèmes de ce type est basé sur le théorème de Col, et une méthode variationnelle qui assure l'existence d'une solution faible non triviale.

En perspective, On peut étudier ces problèmes en utilisant d'autre méthodes, comme le théorème de la Fontaine et le dual du théorème de la Fontaine, les degrés topologiques.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Acerbi and G. Mingione, Regularity results for a class of functionals with nonstandard growth, Arch. Rational Mech. Anal., 156 (2001), 121-140.
- [2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle : théorie et Applications, Masson, Paris, 1992.
- [3] J. chabrowski et Y. Fu, Existence of solutions  $p(x)$ -Laplacian problems on a bounded domain, J. Math. Anal. Appl., 306(2005), 604-618.
- [4] J. I. Diaz, Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries. Elliptic Equations, Research Notes in Mathematics, 106, Pitman, Boston, London, Melbourne, 1986.
- [5] L. Diening, Theoretical and numerical results for electrorheological fluids, Ph.D. Thèse, Université de Frieburg, Germany, 2002.
- [6] P. Drabek. A. Kufner et F. Nicolosi, Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities, Gruyter séries dans Non linéaire. Analyse et applications. Vol. 5, Walter de gruyter & Co, Berlin, 1997.
- [7] D. E. Edmunds, J. Long et A. Nekirnda, On  $L^{p(x)}$  norms, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 455 (1995), 219-225.
- [8] D. E. Edmunds et J. Ràkosnik, Density of functions in  $W^{k,p(x)}(\Omega)$ , Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 437 (1992) , 229-236.

- [9] D. E. Edmunds et J. Ràkosnik, Sobolev embedding with variable exponent, *Studia Math.* 143 (2000), 267-293.
- [10] X. Fan, J. Shen et D. Zhao, Sobolev Embedding Theorems for Spaces  $W^{k,p(x)}(\Omega)$ , *J. Math. Anal. Appl.*, 262 (2001) 749-760.
- [11] X. L. Fan et Q. H. Zhang, Existence of solutions for  $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problem, *Nonlinear Anal.*, 52 (2003), 1843-1852.
- [12] X. L. Fan. Q. H. Zhang et D.Zhao, Eigenvalues of  $p(x)$ -Laplacian Dirichlet, *J. Math. Anal. Appl.* 302 (2005), 306-317.
- [13] X. L. Fan et D. Zhao, On the Spaces  $L^{p(x)}(\Omega)$  and  $W^{m,p(x)}(\Omega)$ , *J. Math Anal. Appl* 263 (2001), 424-446.
- [14] D. Gilbarg et N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Ordre*, Springer. Berlin, 1998.
- [15] T. C. Halsey, Electrorheological fluids, *Sciences*, 258 (1992), 761-766.
- [16] D. Hyers, G. Isac et T. Rassias, *Topics in Nonlineare Analysis and Applications*, World Scientific Publishing CO., Inc., River Edge, NJ, 1997.
- [17] O. Kovacik et J. Rakosnik, On spaces  $L^{p(x)}$  and  $W^{1,p(x)}$  Czechoslovak *Math. J.*, 41 (1991), 592-618.
- [18] A. Kufner et L. E. Persson, *Weighted Inequalities of Hardy Type*, World Scientific Publishing CO., Inc., River Edge, NJ, 2003.
- [19] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, notes de cours en mathématiques, Vol 1034, Springer, Berlin, 1983.
- [20] H. Nakano, *Modulared Semi-ordered Linear Spaces*, Maruzen CO., Ltd., Tokyo, 1950.
- [21] W. Orlicz, Über konjugierte Exponentenfolgen, *Studia Math*, 3 (1931), 200-212.
- [22] K. Perera, Multiple positive solutions for a classe of quasilinear elliptic boundary-value problems, *Journal Électronique des équations différentielles*, 7 (2003), 1-5.

- [23] C. Pfeiffer, C. Mavroidis, Y. Bar-Cohen et B. Dolgin, Electrorheological Fluid based force feedback device, dans les procédures de 1999 SPIE. Technologies de télépressence VI Conférence(Boston, MA), 3840 (1999), 88-99.
- [24] P. Rabinowitz, Minimax methodes in critical point theory with applications to differential equations, conférences explicatives CBMS de la conférence regional Tenue à l'université de Miami, American société mathématique, providence, RI, 1984.
- [25] M. Ruzicka, Electrorheological Fluids Modeling and Mathematical Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [26] I. Sharapuddinov, On the topology of the space  $L^{p(t)}$  ( $[0; 1]$ ), Matem Zametki, 26 (1978), 613-632.
- [27] M. Struwe, Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Springer, Heidelberg, 1996.
- [28] I. Tsenov, Generalization of the problem of best approximation of a function in the space  $L^s$ , Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ., 7 (1961). 25-37.
- [29] M. Willem, Minimax Theorems, Birkhauser, Boston, 1996.
- [30] W. M. Winslow, Induced Fibration of Suspensions, J. Appl. Phys., 20 (1949), 1137-1140.
- [31] V. Zhikov. Averaging of functionals in the calculus of variations and elasticity, Math. USSR Izy., 29 (1987), 33-66.
- [32] V. Zhikov, On passing to the limit in nonlinear variational problem, Math. Sh., 183 (1992), 47-84.
- [33] O. Kavian. Introduction à la Théorie des Points Critiques, et application aux problèmes elliptiques. O.K. Nancy, le 20 Juillet 1993.
- [34] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto, M Ruzicka, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Springer's 2010.

- [35] D. Zhao, X.L. Fan, On the generalized Orlicz-Sobolev space  $W^{k,p(x)}(\Omega)$ ,  
J. GansuEdu c. College 12 (1) (1998) 1 - 6.
- [36] D. Zhao, X. L. Fan, W.J. Qiang, On generalized Orlicz spaces  $L^{p(x)}(\Omega)$ ,  
J. Gansu Sci. 9(2)(1996) 1 - 7.