



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et informatiques

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Etude d'une classe de systèmes différentiels non
linéaires fractionnaires à retards.

Présenté par :

Rabia Selmi

Devant le Jury :

Dr. Halima Mechri	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. Asma Bouaziz	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Amina Bounouala	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2020-2021

Etude d'une classe de systèmes différentiels non
linéaires fractionnaires à retards.

Rabia Selmi

Département de Mathématiques, Université de Chadli Bendjedid El-Tarf

Juin 2021

Encadrée par : Dr. Asma Bouaziz

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	9
1	Chapitre préliminaires	11
1	Espaces des fonctions intégrables	11
2	Espaces des fonctions continues	12
3	Espaces des fonctions continues et absolument continues	12
4	Fonctions utiles	13
4.1	La fonction Gamma	13
4.2	La fonction Beta	15
5	Théorème du point fixe de Banach	15
2	Introduction au calcul fractionnaire	18
1	Intégrale de Riemann-Liouville	18
2	Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	21
3	Dérivée fractionnaire de Caputo	24
3	Etude d'un problème fractionnaire à retards variables	26
1	Existence et unicité de la solution	27
2	Stabilité de la solution	32
3	Exemples	36

REMERCIEMENT

Je tiens à remercier mon encadreur Madame Bouaziz Asma, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'elle a consacrées à la réalisation de ce travail.

Je remercier sincèrement les membres du jury :

Madame Halima Mechri, pour avoir accepté la présidence du jury.

Madame Amina Bounouala, pour avoir accepté d'être l'examinatrice du jury.

J'adresse un grand merci à toutes ma famille qui était toujours présente, en particulier à mon père et à ma mère.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents qui ont toujours soutenue

A mes frères et mes sœurs

A mes amies

A tous les étudiants de 2^{ième} année MASTER MATHÉMATIQUE 2021
Et tous ceux qui m'ont encouragé au cours de notre carrière universitaire.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة نظام المعادلات التفاضلية الكسرية ذات التأخيرات المتغيرة. نثبت وجود الحلول وتفردھا باستخدام مبدأ باناخ في الانكماش. ندرس أيضاً الاستقرار المنتظم للحل. نختتم بأمثلة توضيحية.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الكسرية، التأخيرات المتغيرة، مبدأ باناخ في الانكماش، الاستقرار المنتظم.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier un système d'équations différentielles fractionnaires avec des retards variables. Nous prouvons l'existence et l'unicité des solutions en utilisant le principe de contraction de Banach. Nous étudions également la stabilité uniforme de la solution. Nous concluons par des exemples illustratifs.

Mots clés : système d'équations différentielles fractionnaires, retards variables, principe de contraction de Banach, stabilité uniforme.

Abstract

The objective of this work is to study a system of fractional differential equations with variable delays. We prove the existence and uniqueness of the solutions using the Banach contraction principle. We also study the uniform stability of the solution. We conclude with illustrative examples.

Keywords : system of fractional differential equations, variable delays, Banach contraction principle, uniform stability.

Notations

- \mathbb{N} : ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- \mathbb{R} : ensemble des nombres réels.
- \mathbb{R}^+ : ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
- \mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.
- $[a, b]$: intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémité a et b .
- $C([a, b], \mathbb{R}^+)$: l'espace des fonctions continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^+ .
- $L^p[a, b]$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [1, \infty)$ intégrables sur $[a, b]$.
- $AC[a, b]$: espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.
- $AC^n[a, b]$: ($n \geq 2$), espace des fonctions $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u^{(n-1)} \in AC[a, b]$ et $u^{(k)} \in C[a, b]$, $k = 1, \dots, n - 1$.
- Γ : fonction Gamma d'Euler.
- B : fonction Bêta.
- $I_{a+}^\alpha f(t)$: intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$.
- $D_a^\alpha f(t)$: dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction $f(t)$.
- ${}^c D_a^\alpha f(t)$: dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction $f(t)$.

1 Introduction

La théorie du calcul fractionnaire est aussi vieille que le calcul différentiel classique. Ses origines remontent au 17^{ème} siècle l'époque où Newton et Leibniz ont développé les bases de ce type de calcul. En particulier, Leibniz introduisit le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{\text{ème}}$ dérivée d'une fonction f . Lorsqu'il l'annonça dans une lettre à l'Hôpital, celui-ci répondit : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est maintenant acceptée comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire.

Le calcul fractionnaire est devenu une branche importante des mathématiques grâce à sa grande application dans différents domaines tels que la physiologie, l'ingénierie, la finance et d'autres sciences, voir la monographie [2], [5], [7], [9], [11] et les papiers [3], [4], [6], [8] et les références qu'il contient.

Plusieurs méthodes sont utilisées pour résoudre les problèmes fractionnaires. Cependant, les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un grand rôle. Ce sont les outils mathématiques de base, montrant l'existence de solutions dans différents types d'équations. Dans ce document, on utilise le théorème de Banach qui assure l'existence d'un point fixe unique pour une application contractante d'un espace métrique complet en lui-même. Il a été prouvé pour la première fois par Banach en 1922.

L'objectif de ce mémoire est une étude introductive du calcul fractionnaire ainsi que la mise en détail d'un problème fractionnaire de l'article [8]. Nous nous intéressons à étudier le système d'équations différentielles fractionnaires avec retards variables suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_i(t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))), & i = 1, 2, \dots, n, t > 0, \\ x(t) = \Phi(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

où ${}^c D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in (0, 1)$,

$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))'$, où $'$ désigne la transposée du vecteur et $f_{ij} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues pour $i, j = 1, 2, \dots, n$, τ_j sont des fonctions à valeurs réelles continues définies sur \mathbb{R}^+ , tels que $\tau = \max \{ \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \tau_j(t) : j = 1, 2, \dots, n \} > 0$, et $\Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))'$ est un vecteur de fonction défini sur $[-\tau, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Cette thèse se compose de trois chapitres répartis comme suit :

Dans le premier chapitre nous donnons des notions préliminaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit.

Le deuxième chapitre présente une base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour le développement du chapitre qui suit.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution d'un système d'équations différentielles fractionnaires à retard. Nous terminons le chapitre par des exemples illustratifs.

CHAPITRE 1

Chapitre préliminaires

L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques définitions et résultats qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire. Pour plus de détails, voir [1] et [5].

1 Espaces des fonctions intégrables

Soit $\Omega = (a, b)$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) un intervalle fini ou infini de \mathbb{R} .

Définition 1.1 1. Pour $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes des) fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq +\infty \quad (1.1)$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classes des) fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω .

Définition 1.2 [1] Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}. \quad (1.2)$$

On note

$$\| f \|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} | f(x) |^p dx \right]^{1/p}. \quad (1.3)$$

Définition 1.3 [1] On pose

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et il existe une constante } c \text{ telle que } \left. \begin{array}{l} | f(x) | \leq c \text{ p.p sur } \Omega \end{array} \right\}.$$

On note

$$\| f \|_{L^\infty} = \inf \{ c, | f(x) | \leq c \text{ p.p sur } \Omega \}. \quad (1.4)$$

2 Espaces des fonctions continues

Définition 2.1 L'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω est noté par $C^n(\Omega)$, $Tq : \Omega = [a, b] (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et $n \in \mathbb{N}$, muni de la norme :

$$\| f \|_{C^n} = \sum_{k=0}^n \| f^{(k)} \|_C = \max_{x \in \Omega} | f^{(k)}(x) |, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

Si $n = 0$; $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ est l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\| f \|_C = \max_{x \in \Omega} | f(x) | \quad (1.6)$$

3 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Soit $\Omega = [a, b] (-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini.

Définition 3.1 *L'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables noté par $AC([a, b])$,*

$$AC([a, b]) = \left\{ f / \exists \varphi \in L([a, b]), f(x) = c + \int_a^b \varphi dt \right\}, \quad (1.7)$$

et on appelle $AC([a, b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

Définition 3.2 *On note par $AC^n([a, b])$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace des fonctions f définies sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{C} qui ont des dérivées continues sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre $n - 1$ et telles que*

$$f^{(n-1)} \in AC([a, b]),$$

$$AC^n([a, b]) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f^k \in C([a, b]), k = 0 \dots n, f^{(n-1)} \in AC([a, b]) \}. \quad (1.8)$$

Remarque 3.1 : *Pour $n = 1$, on a*

$$AC^n([a, b]) = AC([a, b]). \quad (1.9)$$

4 Fonctions utiles

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelques propriétés de certaines fonctions : la fonction Gamma et la fonction Béta. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications.

4.1 La fonction Gamma

Définition 4.1 *La fonction Gamma est le prolongement naturel de la fonction factorielle des nombres réels, et même des nombres complexes à partie réelle positive,*

considérée comme une fonction spéciale, définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (1.10)$$

Proposition 4.1 Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, (telle que $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$), On a pour tout $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha). \quad (1.11)$$

Preuve. Utilisant la définition (4.1), on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{\infty} t^{\alpha+1-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

On intègre par parties

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt &= [-e^{-t} t^{\alpha}]_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

■

Proposition 4.2 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad (1.12)$$

Preuve. D'après la proposition (4.1) et par récurrence, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)\cdots 2\Gamma(1) \\ &= n!\end{aligned}$$

Alors :

$$\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

4.2 La fonction Beta

Pour $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(p) \geq 0$ et $q \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(q) \geq 0$, la fonction Beta; notée $\beta(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est définie par :

$$\beta(p, q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx. \quad (1.13)$$

La fonction Beta est liée a la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}; \operatorname{Re}(p) \geq 0, \operatorname{Re}(q) \geq 0. \quad (1.14)$$

5 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est également le théorème de l'application contractante. Ce théorème garantit l'existence d'un point fixe unique d'une application définie dans un espace métrique complet dans lui-même.

Définition 5.1 Soient (X, d) un espace métrique complet et T une application de X dans X , On dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive k telle que l'on ait :

$$\forall x, y \in X : d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

Si $k < 1$; T est appelée contraction.

Théorème 5.1 Soit T une application continue sur un espace de Banach X , alors les assertions suivantes sont vraies :

1) S'il existe $X ; Y \in X$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x) = y;$$

alors y est un point fixe de T ; i.e.

$$T(y) = y.$$

2) Si $T(x)$ est un ensemble compact dans X et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $x_\varepsilon \in X$

tel que $\| T(x_\varepsilon) - x_\varepsilon \| < \varepsilon$, alors T admet un point fixe.

Preuve.

1. Soit $y_n = T^n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ Si T est une application continue, alors

$$\begin{aligned} T(y) &= T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(y_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{n+1} = y. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la première assertion.

2. Supposons que les hypothèses de (2) sont vérifiées, alors pour $n = 1, 2, \dots$, on a $x_n \in X$ tel que :

$$\| T(x_n) - x_n \| < \frac{1}{n}.$$

$T(x)$ est un ensemble compact implique qu'il existe une sous suite convergente

5. Théorème du point fixe de Banach

$T(x_{n_k})_{n=1}^{+\infty}$ de $(T(x_n))_{n=1}^{+\infty}$ de limite x , alors en exploitant $(A,1)$ et le fait que T est continue on déduit que x est un point fixe de T

■

CHAPITRE 2

Introduction au calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous allons mentionner les définitions élémentaires et quelques propriétés de l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, ainsi que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Ce chapitre est basé sur la documentation trouvée dans (voir [5], [7]).

1 Intégrale de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} ; on pose :

$$(If)(t) = \int_a^t f(s) ds. \quad (2.1)$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$(I^2f)(t) = \int_a^t (If)(x) dx = \int_a^t \left(\int_a^x f(s) ds \right) dx. \quad (2.2)$$

1. Intégrale de Riemann-Liouville

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire :

$$(I^2 f)(t) = \int_a^t (t-x)f(x)dx. \quad (2.3)$$

En répétant n fois, on obtient la relation suivante :

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds. \quad (2.4)$$

En utilisant la fonction Gamma (4.1), pour $\text{Re}(\alpha) > 0$, l'opérateur I_a^α défini sur $L^1[a, b]$ par :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad \alpha > 0,$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

Exemple 1.1 On calcule l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f telle que :

$$f(t) = (t-a)^m \text{ ou } a \in \mathbb{R}, m > -1.$$

On a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{(s-a)^m}{(t-s)^{1-\alpha}} ds. \end{aligned}$$

On fait un changement de variable $s = a + (t - a)x$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^m ds \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, m+1) \\ &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Alors : $I_a^\alpha (t-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1+\alpha)} (t-a)^{m+\alpha}$.

Exemple 1.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α , ($\alpha \in \mathbb{R}$), d'une fonction constante $f(t) = c$ est

$$I_a^\alpha f(t) = I_a^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} c ds = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^\alpha, \quad a \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Théorème 1.1 [2] Soit $f \in L^1[a, b]$ et $m, n > 0$, on a :

$$I_a^n I_a^m f(t) = I_a^{m+n} f(t) \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.6)$$

Preuve. Soit $f \in L^1[a, b]$, on a :

$$I_a^n I_a^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \int_a^t (t-s)^{n-1} \int_a^s (s-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau ds.$$

Les intégrales existent et par le théorème de Fubini, nous pouvons interchanger l'ordre d'intégration et obtenir :

$$I_a^n I_a^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \int_a^t f(\tau) \int_\tau^t (t-s)^{n-1} (s-\tau)^{m-1} ds d\tau.$$

2. Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

On fait un changement de variable $s = \tau + z(t - \tau)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 I_a^n I_a^m f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \int_a^t f(\tau)(t - \tau)^{n+m-1} \int_0^1 (1 - z)^{n-1} z^{m-1} dz d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n+m)} \int_a^t f(\tau)(t - \tau)^{n+m-1} d\tau \\
 &= I_a^{n+m} f(t).
 \end{aligned}$$

■

2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n-1 \leq \alpha < n$; la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f est définie par :

$$D_a^\alpha f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad t > 0, \quad (2.7)$$

où $D^n = \left(\frac{d}{dt}\right)^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

Définition 2.2 La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche est donnée par :

$$\forall t > a ; D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds. \quad (2.8)$$

Définition 2.3 La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite est donnée par :

$$\forall t < b ; {}_b D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (s - t)^{n-\beta-1} f(s) ds. \quad (2.9)$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}_a D_t^\alpha f(t)$ et ${}_b D_t^\beta f(t)$ sont bien définis.

Exemple 2.1 Soit $f(t) = (t - a)^m$ avec $m > -1$ et $\alpha \leq 0$ et tel que $n - 1 \leq \alpha < n$; d'après l'exemple (1.1) on a :

$$D_a^\alpha f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(m + n - \alpha + 1)} D^n (t - a)^{n-(\alpha-m)}.$$

Pour le cas $(\alpha - m) \in \mathbb{N}$, on a :

$$D_a^\alpha f(t) = 0, (\alpha - m) \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Par ailleurs si $(\alpha - m) \notin \mathbb{N}$, on a :

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(m - \alpha + 1)} (t - a)^{m-\alpha}.$$

Proposition 2.1 Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ on a :

$$D_a^\alpha f(x) = D^m I_a^{m-\alpha} f(t), \quad m > \alpha. \quad (2.10)$$

Preuve. Comme $m > n$, on a :

$$\begin{aligned} D^m I_a^{n-\alpha} f(t) &= D^n D^{m-n} I_a^{m-n} I_a^{m-n} I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_a^n f(x). \end{aligned}$$

2. Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Car

$$D^{m-n} I_a^{m-n} = I.$$

■

Théorème 2.1 Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville existent, pour $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ on a :

$$D_a^\alpha (c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 D_a^\alpha f(t) + c_2 D_a^\alpha g(t). \quad (2.11)$$

Lemme 2.1 Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a, b]$ alors on a l'égalité

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t), \quad (2.12)$$

pour presque tout $t \in [a, b]$.

Preuve. Utilisant la proposition (2.1), on trouve :

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(t) = D^n I_a^n f(t) = f(t),$$

pour presque tout $t \in [a, b]$. ■

Une condition suffisante pour l'existence de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée par le résultat suivant :

Lemme 2.2 Si f est de classe C^n ; alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées on obtient :

$$D_a^\alpha f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(1+i-\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-n+1} f^{(n)}(s) ds. \quad (2.13)$$

3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Les dérivées de Riemann-Liouville possèdent certains inconvénients dans la modélisation des phénomènes du monde réel. Les problèmes étudiés exigent une définition des dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales. Caputo a introduit une dérivée fractionnaire (qui porte son nom) qui répond à ces exigences.

Définition 3.1 Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 \leq \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$), et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a, b]$. La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est défini par :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(s) ds. \quad (2.14)$$

Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville :

1. Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 \leq \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$), supposons que f est une fonction telle que ${}^c D_t^\alpha f(t)$ et ${}_a D_t^\alpha f(t)$ existent alors :

$${}^c D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t - a)^{i - \alpha}}{\Gamma(1 + i - \alpha)}.$$

On déduit que si $f^{(i)} = 0$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, on aura ${}^c D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t)$.

Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :

Si f est une fonction continue on a :

$${}^c D^\alpha I_a^\alpha f = f,$$

et

$$I_a^{\alpha c} D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t - a)^{i - \alpha}}{i!}.$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

3. Dérivée fractionnaire de Caputo

Exemple 3.1 1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$${}^c D^\alpha c = 0.$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^p$ au sens de Caputo. Soit α un entier et $0 < n-1 < \alpha < n$ avec $pn > -1$ alors on a :

$$f^{(n)}(s) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(s-a)^{p-n}.$$

D'où

$${}^c D^\alpha (t-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha) + \Gamma(p-n+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{p-n} ds.$$

Effectuant le changement de variable $s = a + \tau(t-a)$, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha (t-a)^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha) + \Gamma(p-n+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{p-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha) + \Gamma(p-n+1)} (t-a)^{p-\alpha} \int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{p-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(p+1) \beta(n-\alpha, p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(p-n+1)} (t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(n-\alpha) \Gamma(p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(p-n+1) \Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(n-\alpha) \Gamma(p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(p-n+1) \Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha}. \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

Etude d'un problème fractionnaire à retards variables

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de solutions du système d'équations différentielles fractionnaires avec des retards variables de la forme suivante :

$${}^c D^\alpha x_i(t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$x(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (3.2)$$

où ${}^c D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in (0, 1)$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))'$, où $'$ désigne la transposée du vecteur et $f_{ij} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues pour $i, j = 1, 2, \dots, n$, τ_j sont des fonctions à valeurs réelles continues définies sur \mathbb{R}^+ , tels que $\tau = \max \{ \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \tau_j(t) : j = 1, 2, \dots, n \} > 0$, et $\Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))'$ est un vecteur de fonction défini sur $[-\tau, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n . Puis, nous montrerons la stabilité uniforme de la solution du problème (3.1)-(3.2). Enfin, nous donnerons quelques exemples illustratifs. Ces résultats sont dus à L. Nisse et A. Bouaziz [8].

1 Existence et unicité de la solution

Pour l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1)(3.2), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1 *La fonction vecteur $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ est une solution du problème (3.1)-(3.2) si et seulement si*

$$x_i(t) = \begin{cases} \phi_i(0) + \sum_{j=1}^n I^\alpha f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))), & t > 0 \\ \phi_i(t), & t \in [-\tau, 0], \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.3)$$

Preuve. Pour $t > 0$ et $i = 1, 2, \dots, n$, on peut écrire l'équation (3.1) comme

$$I^{1-\alpha} D x_i(t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))).$$

On applique l'opérateur I^α sur les deux côtés et on utilise $I^\alpha D^\alpha = I$

$$\begin{aligned} I D x_i(t) &= \sum_{j=1}^n I^\alpha f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))). \\ x_i(t) - x_i(0) &= \sum_{j=1}^n I^\alpha f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))). \end{aligned}$$

D'où

$$x_i(t) = \phi_i(0) + \sum_{j=1}^n I^\alpha f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))).$$

■

Maintenant, On considère l'espace $E = [C([-τ, +∞), \mathbb{R})]^n$ la classe de toutes les fonctions n -vecteurs colonnes continues, muni de la norme

$$\|x\|_N = \sum_{i=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \{e^{-Nt} |x_i(t)|\}, \quad x \in E,$$

ou $N \in \mathbb{R}^+$ sera choisi par la suite. Et on définit l'opérateur intégral $F : E \rightarrow E$ par

$$Fx_i(t) = \begin{cases} \phi_i(0) + \sum_{j=1}^n I^\alpha f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))), & t > 0 \\ \phi_i(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases}.$$

Nous allons maintenant énoncer le théorème le plus important de ce chapitre qui est basé sur le théorème de point fixe de Banach :

Théorème 1.1 *On suppose que :*

(H₁) Soient $f_{ij} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et satisfont la condition de Lipschitz

$$|f_{ij}(t, x_i, y_j) - f_{ij}(t, u_i, v_j)| \leq k_i |x_i - u_i| + h_j |y_j - v_j|,$$

où $k_i, h_j > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

(H₂) Pour $j = 1, 2, \dots, n$, $\tau_j \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$\tau_j(t) > -\tau, \quad t > 0.$$

(H₃) Pour $j = 1, 2, \dots, n$, $\exists t_j > 0 :$

$$\begin{cases} \tau_j(t) \geq t, & \forall t \in [0, t_j] \\ \tau_j(t) < t, & \forall t \in]t_j, +\infty[\end{cases}$$

(H₄)

$$n\tau^\alpha \left[\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{j=1}^n h_j e \right] < 1,$$

1. Existence et unicité de la solution

alors le problème (3.1)-(3.2) admet une solution unique.

Preuve. Soient $x, y \in E$, pour $i = 1, 2, \dots, n$ on a

$$\begin{aligned} & |Fx_i(t) - Fy_i(t)| \\ = & \left| \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \{f_{ij}(s, x_i(s), x_j(s - \tau_j(s))) - f_{ij}(s, y_i(s), y_j(s - \tau_j(s)))\} ds \right| \\ \leq & \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_{ij}(s, x_i(s), x_j(s - \tau_j(s))) - f_{ij}(s, y_i(s), y_j(s - \tau_j(s)))| ds \quad , \end{aligned}$$

pour simplifier, nous posons $r_j(s) = s - \tau_j(s)$. d'après les hypothèses (H_1) et (H_3) on a

$$\begin{aligned} |Fx_i(t) - Fy_i(t)| & \leq \sum_{j=1}^n k_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_i(s) - y_i(s)| ds + \\ & + \sum_{j=1}^n h_j \int_0^{t_j} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |\phi_j(r_j(s)) - \phi_j(r_j(s))| ds \\ & + \sum_{j=1}^n h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_j(r_j(s)) - y_j(r_j(s))| ds \\ & \leq nk_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_i(s) - y_i(s)| ds + \\ & + \sum_{j=1}^n h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_j(r_j(s)) - y_j(r_j(s))| ds \quad . \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & e^{-Nt} |Fx_i(t) - Fy_i(t)| \\ \leq & nk_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} |x_i(s) - y_i(s)| ds + \\ & + \sum_{j=1}^n h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-r_j(s))} e^{-Nr_j(s)} |x_j(r_j(s)) - y_j(r_j(s))| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq nk_i \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |x_i(\xi) - y_i(\xi)|\} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} ds + \\ &+ \sum_{j=1}^n h_j \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-Nr_j(\xi)} |x_j(r_j(\xi)) - y_j(r_j(\xi))|\} \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-r_j(s))} ds \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $u = N(t-s)$, on aura

$$\begin{aligned} &e^{-Nt} |Fx_i(t) - Fy_i(t)| \\ &\leq nk_i \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |x_i(\xi) - y_i(\xi)|\} \frac{1}{N^\alpha} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} du + \\ &+ \sum_{j=1}^n h_j \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |x_j(\xi) - y_j(\xi)|\} \frac{1}{N^\alpha} \int_0^{N(t-t_j)} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-u} e^{-N\tau_j(t-\frac{u}{N})} du \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (H_2) , nous avons

$$\begin{aligned} &e^{-Nt} |Fx_i(t) - Fy_i(t)| \\ &\leq nk_i \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |x_i(\xi) - y_i(\xi)|\} \frac{1}{N^\alpha} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} du + \\ &+ \sum_{j=1}^n h_j \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |x_j(\xi) - y_j(\xi)|\} \frac{1}{N^\alpha} \int_0^{N(t-t_j)} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-u} e^{N\tau} du \\ &\leq \frac{nk_i}{N^\alpha} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |x_i(\xi) - y_i(\xi)|\} + \sum_{j=1}^n \frac{h_j e^{N\tau}}{N^\alpha} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |x_j(\xi) - y_j(\xi)|\} \\ &\leq \frac{nk_i}{N^\alpha} \|x - y\|_N + \sum_{j=1}^n \frac{h_j e^{N\tau}}{N^\alpha} \|x - y\|_N. \end{aligned}$$

1. Existence et unicité de la solution

Donc

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \{e^{-Nt} |Fx_i(t) - Fy_i(t)|\} \\
 & \leq \left[\sum_{i=1}^n \frac{nk_i}{N^\alpha} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{h_j e^{N\tau}}{N^\alpha} \right] \|x - y\|_N \\
 & \leq \frac{n}{N^\alpha} \left[\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{j=1}^n h_j e^{N\tau} \right] \|x - y\|_N.
 \end{aligned}$$

On choisit $N = \frac{1}{\tau}$, on a

$$\sum_{i=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \{e^{-Nt} |Fx_i(t) - Fy_i(t)|\} \leq n\tau^\alpha \left[\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{j=1}^n h_j e \right] \|x - y\|_N.$$

De l'hypothèse (H_4) on a

$$n\tau^\alpha \left[\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{j=1}^n h_j e \right] < 1.$$

Alors, $F : E \rightarrow E$ est une contraction, d'où F a un unique point fixe $x = Fx$ qui est l'unique solution du problème (3.1)-(3.2). Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 1.1 *On remarque que, si pour j la fonction à retard $\tau_j(t)$ prend des valeurs négatives, ce qui est possible dans les hypothèses (H_2) et (H_3) , alors (3.1) sont des équations avec des arguments avancés. Ainsi, les fonctions à retard étant des fonctions variables (ayant signe arbitraire), les équations du système considéré (3.1) peut contenir les deux types de déviation de l'argument c'est à dire le retard et l'avance.*

2 Stabilité de la solution

Dans cette partie nous allons établir la stabilité de la solution du problème(3.1)-(3.2). Tout d'abord, nous donnons la définition de la stabilité uniforme de la solution.

Définition 2.1 Soit $x(t)$ et $\tilde{x}(t)$ les deux solutions du problème (3.1)-(3.2), tq : $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))'$ et $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$ avec la condition initiale (3.1) et $\tilde{x}(t) = \tilde{\Phi}(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$, on dit que est stable si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left\| \Phi - \tilde{\Phi} \right\| \leq \delta, \text{ alors } \|x - \tilde{x}\|_N \leq \epsilon \text{ pour tout } t > 0.$$

Où $\|\cdot\|$ est la norme supremum défini par $\|\Psi\| = \sum_{i=1}^n \max_{t \in [-\tau, 0]} |\psi_i(t)|$, pour tout vecteur de fonction bornée ψ de $[-\tau, 0]$ vers \mathbb{R}^n .

Théorème 2.1 Supposons que les hypothèses (H_1) - (H_4) du Théorème (1.1) sont vérifiées, alors la solution du problème(3.1)-(3.2) est uniformément stable.

Preuve. Soient $x(t)$ et $\tilde{x}(t)$ les solutions du système (3.1) sous les conditions(3.2) et $\{\tilde{x}(t) = \tilde{\Phi}(t) \text{ pour } t \in [-\tau, 0]\}$ respectivement, alors pour $t > 0$, de (3.3), on a

$$\begin{aligned} & x_i(t) - \tilde{x}_i(t) \\ &= \phi_i(0) - \tilde{\phi}_i(0) + \sum_{j=1}^n I^\alpha \{f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))) - f_{ij}(t, \tilde{x}_i(t), \tilde{x}_j(t - \tau_j(t)))\} \end{aligned}$$

2. Stabilité de la solution

D'après les hypothèses (H_1) et (H_3) on a

$$\begin{aligned}
& |x_i(t) - \tilde{x}_i(t)| \\
\leq & \left| \phi_i(0) - \tilde{\phi}_i(0) \right| + \\
& + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_{ij}(s, x_i(s), x_j(s - \tau_j(s))) - f_{ij}(s, \tilde{x}_i(s), \tilde{x}_j(s - \tau_j(s)))| ds \\
\leq & \left| \phi_i(0) - \tilde{\phi}_i(0) \right| + \sum_{j=1}^n k_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_i(s) - \tilde{x}_i(s)| ds + \\
& + \sum_{j=1}^n h_j \int_0^{t_j} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left| \phi_j(s - \tau_j(s)) - \tilde{\phi}_j(s - \tau_j(s)) \right| ds \\
& + \sum_{j=1}^n h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_j(s - \tau_j(s)) - \tilde{x}_j(s - \tau_j(s))| ds \\
\leq & \max_{s \in [-\tau, 0]} \left| \phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s) \right| + nk_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_i(s) - \tilde{x}_i(s)| ds + \\
& + \sum_{j=1}^n \max_{s \in [-\tau, 0]} \left| \phi_j(s) - \tilde{\phi}_j(s) \right| h_j \int_0^{t_j} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \\
& + \sum_{j=1}^n h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_j(s - \tau_j(s)) - \tilde{x}_j(s - \tau_j(s))| ds
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
& e^{-Nt} |x_i(t) - \tilde{x}_i(t)| \\
\leq & e^{-Nt} \max_{s \in [-\tau, 0]} \left| \phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s) \right| + nk_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} |x_i(s) - \tilde{x}_i(s)| ds + \\
& + e^{-Nt} \sum_{j=1}^n \max_{s \in [-\tau, 0]} \left| \phi_j(s) - \tilde{\phi}_j(s) \right| \frac{h_j}{\Gamma(\alpha+1)} [t^\alpha - (t - t_j)^\alpha]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^n h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-r_j(s))} e^{-Nr_j(s)} |x_j(r_j(s)) - \tilde{x}_j(r_j(s))| ds \\
& \leq \max_{s \in [-\tau, 0]} \left| \phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s) \right| + \sum_{j=1}^n \max_{s \in [-\tau, 0]} \left| \phi_j(s) - \tilde{\phi}_j(s) \right| \frac{h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& + nk_i \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} |x_i(\xi) - \tilde{x}_i(\xi)| \right\} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} ds \\
& + \sum_{j=1}^n h_j \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-Nr_j(\xi)} |x_j(r_j(\xi)) - \tilde{x}_j(r_j(\xi))| \right\} \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-r_j(s))} ds
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $u = N(t-s)$ pour les deux dernières lignes, on aura

$$\begin{aligned}
& e^{-Nt} |x_i(t) - \tilde{x}_i(t)| \\
& \leq \max_{s \in [-\tau, 0]} \left| \phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s) \right| + \sum_{j=1}^n \max_{s \in [-\tau, 0]} \left| \phi_j(s) - \tilde{\phi}_j(s) \right| \frac{h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \\
& + nk_i \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} |x_i(\xi) - \tilde{x}_i(\xi)| \right\} \frac{1}{N^\alpha} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-u} du \\
& + \sum_{j=1}^n h_j \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} |x_j(\xi) - \tilde{x}_j(\xi)| \right\} \frac{1}{N^\alpha} \int_0^{N(t-t_j)} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-u} e^{-N\tau_j(t-\frac{u}{N})} du
\end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse (H_2) on a

$$\begin{aligned}
& e^{-Nt} |x_i(t) - \tilde{x}_i(t)| \\
& \leq \max_{s \in [-\tau, 0]} \left| \phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s) \right| + \sum_{j=1}^n \left\| \Phi - \tilde{\Phi} \right\| \frac{h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}
\end{aligned}$$

2. Stabilité de la solution

$$\begin{aligned}
& + \frac{nk_i}{N^\alpha} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |x_i(\xi) - \tilde{x}_i(\xi)|\} + \sum_{j=1}^n \frac{h_j e^{N\tau}}{N^\alpha} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |x_j(\xi) - \tilde{x}_j(\xi)|\} \\
& \leq \max_{s \in [-\tau, 0]} |\phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s)| + \sum_{j=1}^n \|\Phi - \tilde{\Phi}\| \frac{h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{nk_i}{N^\alpha} \|x - \tilde{x}\|_N + \sum_{j=1}^n \frac{h_j e^{N\tau}}{N^\alpha} \|x - \tilde{x}\|_N
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \{e^{-Nt} |x_i(t) - \tilde{x}_i(t)|\} \\
& \leq \sum_{i=1}^n \max_{s \in [-\tau, 0]} |\phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|\Phi - \tilde{\Phi}\| \frac{h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{nk_i}{N^\alpha} \|x - \tilde{x}\|_N + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{h_j e^{N\tau}}{N^\alpha} \|x - \tilde{x}\|_N \\
& \leq \|\Phi - \tilde{\Phi}\| + \frac{n \sum_{j=1}^n h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|\Phi - \tilde{\Phi}\| + \frac{n \sum_{i=1}^n k_i}{N^\alpha} \|x - \tilde{x}\|_N + \frac{n \sum_{j=1}^n h_j e^{N\tau}}{N^\alpha} \|x - \tilde{x}\|_N \\
& \leq \left[1 + \frac{n \sum_{j=1}^n h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \|\Phi - \tilde{\Phi}\| + \frac{n [\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{j=1}^n h_j e^{N\tau}]}{N^\alpha} \|x - \tilde{x}\|_N
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\left[1 - \frac{n \left[\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{j=1}^n h_j e^{N\tau} \right]}{N^\alpha} \right] \|x - \tilde{x}\|_N \leq \left[1 + \frac{n \sum_{j=1}^n h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \|\Phi - \tilde{\Phi}\|.$$

On choisit $N = \frac{1}{\tau}$, on a

$$\left[1 - n\tau^\alpha \left[\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{j=1}^n h_j e \right] \right] \|x - \tilde{x}\|_N \leq \left[1 + \frac{n \sum_{j=1}^n h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \|\Phi - \tilde{\Phi}\|.$$

Par conséquent, pour $\epsilon > 0$ et en utilisant l'hypothèse (H_4) , on peut trouver

$$\delta = \left[1 - n\tau^\alpha \left[\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{j=1}^n h_j e \right] \right] \left[1 + \frac{n \sum_{j=1}^n h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right]^{-1} \quad \epsilon > 0$$

telle que $\|\Phi - \tilde{\Phi}\| < \delta$. Par conséquent $\|x - \tilde{x}\|_N \leq \epsilon$, ce qui prouve que la solution du problème (3.1)-(3.2) est uniformément stable. ■

3 Exemples

Exemple 3.1 *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_1(t) = \frac{10^{-3}}{x_1^2(t)+1} + \frac{10^{-2}}{x_2^2(t-\tau_2(t))+1} \\ {}^c D^\alpha x_2(t) = \frac{10^{-1}}{x_2^2(t)-x_2(t)+1} + \frac{10^{-2}}{x_3^2(t-\tau_3(t))-x_3(t-\tau_3(t))+1} \\ {}^c D^\alpha x_3(t) = \frac{10^{-3}}{x_3^2(t)+1} + \frac{10^{-2}}{x_1^2(t-\tau_1(t))+1} \end{cases}, \quad t > 0$$

et

$$x(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0].$$

Dans ce problème on a :

$$\alpha = 0.8, \quad \tau_j(t) = \frac{4}{3} - \frac{1}{j+t} \text{ pour } j = 1, 2, 3. \quad \tau = \max_{t \in \mathbb{R}^+} \tau_j(t) = \frac{4}{3}.$$

Il est clair que les hypothèses (H_1) et (H_2) du théorème (1.1) sont satisfaites. De plus, $\exists t_j = \frac{4-3j+\sqrt{9j^2+24j-20}}{6}$ telle que

$$\begin{cases} \tau_j(t) \geq t, & \forall t \in [0, t_j] \\ \tau_j(t) < t, & \forall t \in]t_j, +\infty[\end{cases}.$$

D'autre part, on a :

$$3\tau^\alpha \left[\sum_{i=1}^3 k_i + \sum_{j=1}^3 h_j e \right] = 0.9523063402 < 1,$$

où $k_1 = k_3 = 10^{-3}$, $k_2 = 10^{-1} \frac{8\sqrt{3}}{9}$, $h_1 = h_2 = 10^{-2}$ et $h_3 = 10^{-2} \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Alors le

3. Exemples

problème a une solution unique.

Comme toutes les hypothèses du Théorème (1.1) sont satisfaites, Ainsi, le problème a une solution unique, aussi par le théorème (2.1) la solution est uniformément stable. En conclusion, le problème a une solution unique uniformément stable.

Exemple 3.2 Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_1(t) = 10^{-1} \left\{ \sqrt{x_1^2(t) + 1} + \sqrt{x_2^2(t - \tau_2(t)) + 1} \right\}, & t > 0 \\ {}^c D^\alpha x_2(t) = 10^{-2} \{x_2(t) + x_1(t - \tau_1(t))\} \end{cases}$$

et

$$x(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0],$$

où $\alpha = 0.4$, $\tau_j(t) = \frac{5}{4} - \frac{1}{j+t}$ pour $j = 1, 2$. $\tau = \max_{t \in \mathbb{R}^+} \tau_j(t) = \frac{5}{4}$

Il est clair que les hypothèses (H_1) et (H_2) du théorème (1.1) sont satisfaites. De plus, $\exists t_j = \frac{-4j + \sqrt{16j^2 + 8}}{8}$ telle que

$$\begin{cases} \tau_j(t) \geq t, & \forall t \in [0, t_j] \\ \tau_j(t) < t, & \forall t \in]t_j, +\infty[\end{cases}.$$

D'autre part, on a

$$2\tau^\alpha \left[\sum_{i=1}^2 k_i + \sum_{j=1}^2 h_j e \right] = 0.8943942329 < 1,$$

où $k_1 = h_2 = 10^{-1}$ et $k_2 = h_1 = 10^{-2}$. Donc le problème a une solution unique

Comme toutes les hypothèses du Théorème (1.1) sont satisfaites, Ainsi, le problème a une solution unique, aussi par le théorème (2.1) la solution est uniformément stable. En conclusion, le problème a une solution unique uniformément stable.

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions d'un système d'équations différentielles fractionnaires avec des retards variables. ces résultats ont été obtenus par l'application de théorème de point fixe de Banach. On a également prouvé la stabilité uniforme de la solution.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications*, Masson, Paris (1983).
- [2] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer. (2004).
- [3] A.M.A. El-Sayed, F.M. Gaafar, Stability of a nonlinear non-autonomous fractional order systems with different delays and non-local conditions, *Advances in Difference Equations*, (2011), 1-9.
- [4] F.M. Gaafar, Cauchy type problems of functional diffeintegral equations with advanced arguments, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 5(2) July (2014), 71-77.
- [5] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential Equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).
- [6] P. Kumar, D.N. Pandey and D. Bahuguna, Impulsive boundary value problems for fractional differential equations with deviating arguments, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 5(1) Jan. (2014), 146-155.
- [7] K.S, Miller and B, Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, (1993).

- [8] L. Nisse, A. Bouaziz, Existence and stability of the solutions for systems of nonlinear fractional differential equations with deviating arguments. *Advances in Difference Equations*, (2014), 2014 :275. doi : 10.1186/1687-1847-2014-275.
- [9] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, London, (1974).
- [10] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, (1999).
- [11] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives ; Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon, (1993). differential equations with an advanced argument, *Adv. Differ. Equ.* (2011). doi :10.1186/1687-1847-2013-43.