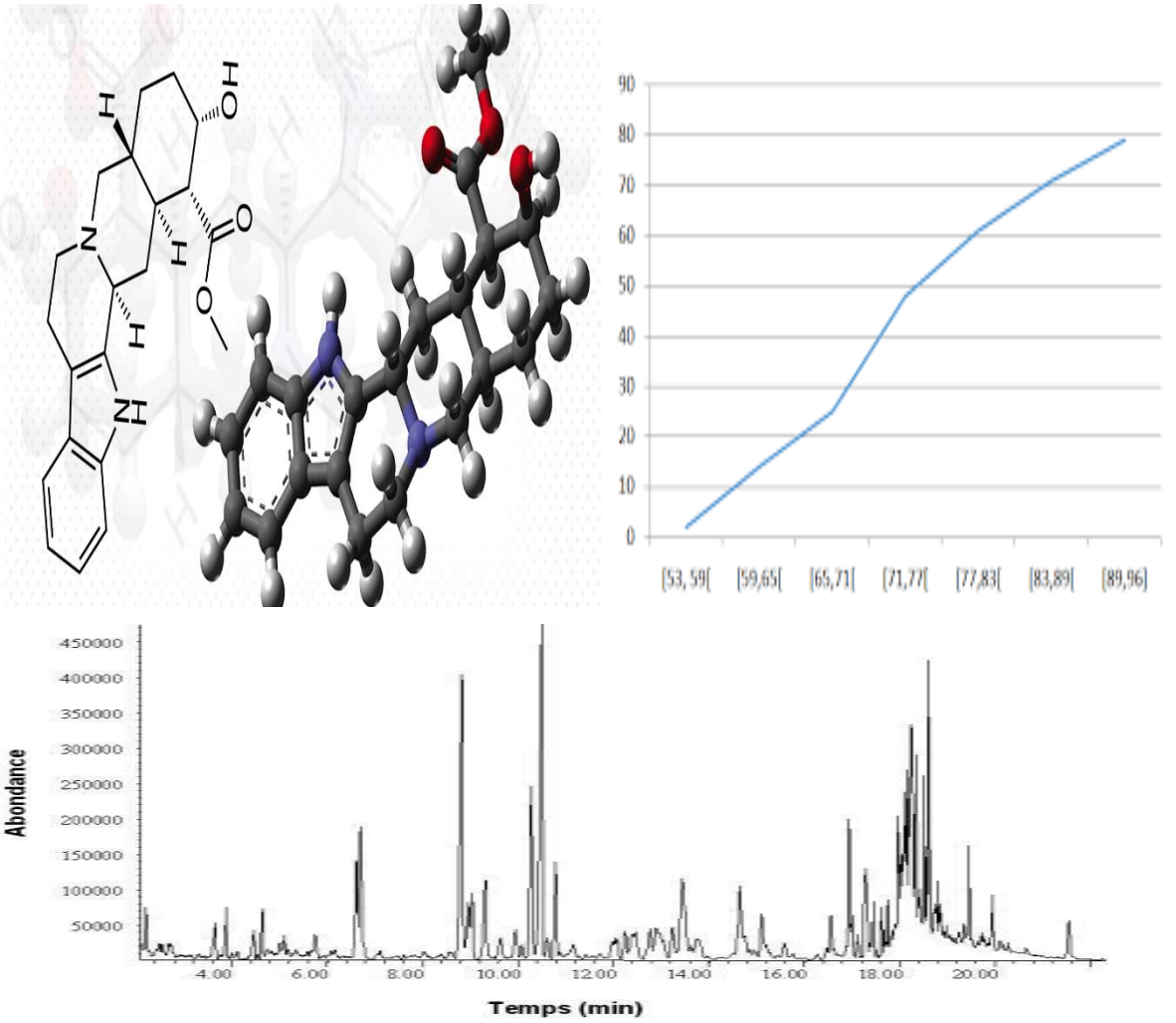
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Chadli Bendjedid El-Tarf
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Chimie

Polycopie de cours

Statistique pour la Chimie



Préparé par : Dr. BOUGHRARA Boudjema

Laboratoire de Physicochimie des Matériaux (LPCM)

Département de Chimie

Faculté des Sciences et de la Technologie

Université Chadli Bendjedid El-Tarf

Année universitaire 2025/2026

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Chadli Bendjedid El-Tarf
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Chimie

Statistique pour la chimie (souvent appelée chimiométrie lorsqu'elle est appliquée de manière avancée) est l'application des méthodes mathématiques pour extraire des informations pertinentes à partir de données expérimentales. Ce cours s'adresse aux étudiantes première année master chimie analytique (semestre 1), département de chimie, faculté des sciences et de la technologie Université Chadli Bendjedid El-Tarf désirant approfondir leurs connaissances dans les traitements statistiques, exploitation de plusieurs séries de déterminations et contrôle de la régression : Homogénéité des variances ; Validité droite de régression ; Pente significative.

Nous espérons qu'il est aussi clair, aussi précis et aussi simple.

Contenu de la matière :

1 - Exploitation d'une série de déterminations : Moyenne et écart type ; Recherche de valeurs aberrantes ; Intervalle de confiance de la moyenne ; Détection d'une erreur systématique ; Nombre de déterminations.

2 - Exploitation de plusieurs séries de déterminations : Test d'égalité des variances ; Test d'égalité de deux moyennes Test de comparaison des variances ; Test d'homogénéité des variances ; Test d'homogénéité des moyennes.

3 - Analyses répétitives : Intervalle de confiance, écart type connu.

4 - Etalonnage et régression linéaire : Calcul de la droite de régression ; Intervalle de confiance des coefficients ; Comparaison de l'ordonnée à l'origine à zéro ; Intervalle de confiance du résultat de l'analyse.

5 - Contrôle de la régression : Homogénéité des variances ; Validité droite de régression ; Pente significative.

6- Comparaison de pentes : Comparaison de la pente à une valeur de référence ; Comparaison de deux pentes.

1-Exploitation d'une série de déterminations : Moyenne et écart type ; Recherche de valeurs aberrantes ; Intervalle de confiance de la moyenne ; Détection d'une erreur systématique ; Nombre de déterminations.

I –La Moyenne

La moyenne est la somme des grandeurs mesurées divisée par le nombre d'individus. La moyenne d'une grandeur X est généralement notée $\overline{X}$

Pour un échantillon de **n** individus, la moyenne est calculée par :

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum X_i$$

Exemple

Soit un échantillon de 9 personnes dont le poids est : [45, 68, 89,74, 62, 56,49, 52, 63] le poids moyenne vaut :

$$\overline{X} = \frac{45 + 68 + 89 + 74 + 62 + 56 + 49 + 52 + 63}{9} = 62 \text{ Kg}$$

Pour des données groupées en classes, on peut calculer une valeur approximative de la moyenne en supposant que tous les individus d'une classe se situent au centre de celle-ci. Si x_i est le centre de la classe et f_i le nombre d'individus dans celle-ci, la formule approchée s'écrit :

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum x_i f_i$$

Exemple : Dans l'exemple précédent (9 personnes), la répartition est la suivante :

Classe	**Centre** = $\frac{X_i + X_F}{2}$	**Nombre**	$\overline{X} = \frac{(50*3)+(60*3)+(70*2)+(80*0)+(90*1)}{9} = 62{,}5$ Kg
45 - 55	50	3	
55 - 65	60	3	
65 - 75	70	2	
75-85	80	0	
85 - 95	90	1	

La formule approchée donnera des résultats d'autant meilleurs que :

- Les classes seront étroites.
- Le nombre d'individus par classe sera grand.

II - L'écart type

Toujours pour des raisons mathématiques, il est préférable, de diviser par n-1 plutôt que par n pour estimer précisément la dispersion d'une population à partir d'un échantillon.

On obtient alors l'écart type, qui est préférable à l'écart quadratique moyen (la même formule mais on divise par n), et l'on retiendra seulement la formule suivante :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x - \bar{X})^2}$$

Avec $(x - \bar{X})$ est l'écart à la moyenne

Exemple

Soient les 5 valeurs suivantes : 4, 6, 9, 10, 11

Valeur	**écart à la moyen**	**(écart à la moyen)** ^{2}	**écart type**
4	4 - 8 = - 4	16	$\sigma = \sqrt{\frac{16+4+1+4+9}{5-1}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \sqrt{8,5} \cong 2,9$
6	6 - 8 = - 2	4	
9	9 - 8 = 1	1	
10	10 - 8 = 2	4	
11	11 - 8 = 3	9	

L'écart type nous indique que nous ne pouvons pas estimer la dispersion dans la population ne comporte pas au moins 2 individus, (car on ne peut pas diviser par zéro).

*** Calcul de l'écart type pour un échantillon réparti en classes**

Soient : X : les centres des classes

f : Les effectifs

$\bar{X}$: La moyenne de l'échantillon

n : le nombre total d'individu

On peut calculer une valeur approchée de l'écart type en supposant que tous les individus d'une classe sont au centre de celle-ci :

$$s \cong \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum f\,(x - \bar{X})^2}$$

*** L'écart type sur la moyenne**

Lorsque la taille de l'échantillon est suffisamment grande (n > 15) la distribution de la moyenne a une forme approximativement normale.

L'écart type sur la moyenne est :

$$\sigma\,(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Quelle que soit la population, si on utilise des éléments suffisamment grands (au moins 10 à 20 individus), la précision de la valeur moyenne peut être calculée à partir de la loi normale.

- Il y a 68 % (>2/3) de chances que la vraie moyenne μ soit dans l'intervalle compris entre $\overline{X} - \sigma$ et $\overline{X} + \sigma$



Il y a 95 % de chances que la vraie moyenne μ soit dans l'intervalle compris entre $\overline{X} - 2\sigma(\overline{X})$ et $\overline{X} + 2\sigma(\overline{X})$.



III – Recherche de valeurs aberrantes

Les valeurs aberrantes sont des valeurs d'une variable continue X douteuses au sens d'un écart fort avec le reste de la distribution de X.

La plupart du temps les aberrants ont pour origine une erreur de saisie ou de mesure ce qui privilégierait leur suppression.

III - 1 - Test de Dixon : Le test de Dixon sera pratiqué si N < ou = 25

Le test Q de Dixon se base principalement sur la distance entre X_i, l'observation suspectée d'être aberrante, et celle qui la précède afin de déterminer s'il s'agit d'un aberrant ou non.

Supposons X trié, la formule du test Q de Dixon est,

- si $X_i \leq$ médiane (X) alors $Q = \frac{X_{i+1} - X_i}{X_n - X_1}$

- si $X_i \geq$ médiane (X) alors $Q = \frac{X_i - X_{i-1}}{X_n - X_1}$

Nous reportons ensuite Q à la table de Dixon ci-dessous selon un niveau de confiance α fixé,

Tableau 1 : **Table de Dixon**.

Nombre de valeurs	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\mathbf{Q_{90\%}}$	0.941	0.765	0.642	0.560	0.507	0.468	0.437	0.412
$\mathbf{Q_{95\%}}$	0.970	0.829	0.710	0.625	0.568	0.526	0.493	0.466
$\mathbf{Q_{99\%}}$	0.994	0.926	0.821	0.740	0.680	0.634	0.598	0.568

Si Q > $Q_{\alpha\,\%}$, alors l'observation i peut être considérée comme une aberrante.

Exemple

Soit l'échantillon suivant :

Tableau 2 : Test de Dixon pour la détection des valeurs aberrantes (minimum et maximum) sur un échantillon de 20 mesures

x	1.9593	2.5472	3.1386	4.1493	5.2575	9.3500	7.5456	8.9854	9.6160	3.1547
x	4.1254	19.1245	2.1475	3.5896	9.4578	9.5965	9.8308	8.1457	5.1235	5.2654

Nous cherchons à voir si la plus petite et la plus grande valeur de X sont des aberrants. Si nous regardons la table de Dixon, la valeur seuil pour n = 20 et au risque de 5 % est 0.450. Nous avons donc,

$$Q = \frac{2.1475-1.9593}{19.1245-1.9593} = \frac{0.1882}{17.1652} = 0.1882 < 0.450$$

$$Q = \frac{19.1245-9.8308}{19.1245-1.9593} = \frac{9.2937}{17.1652} = 0.5414268 > 0.450$$

Nous en déduisons, qu'au risque de 5 %, la valeur minimale (1.9593) n'est pas une aberrante contrairement à la valeur maximale (19.1245) qui en est aberrante.

III - 2 - Le critère de Chauvenet

Le critère de Chauvenet se base sur une approche stochastique pour la détermination des aberrants et considère les observations les unes après les autres. La procédure pour départager tous les aberrants consiste à supprimer les observations en partant de la valeur maximale ou minimale et de relancer le test à chaque nouvelle observation à vérifier.

Pour une observation X_i suspectée d'être une aberrante, le critère de Chauvenet est,

Sin.$erfc\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma_X}\right) < 0.5$ alors X_i est un aberrant.

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

Où que *erfc* est la fonction d'erreur complémentaire.

Exemple

Nous cherchons à voir si la plus petite et la plus grande valeur de X sont des aberrantes. Dans un premier temps nous calculons la moyenne et l'écart-type,

$\mu = 6.605515$ et $\sigma = 4.095388$

Nous pouvons maintenant calculer les éléments à soumettre au critère de Chauvenet. Nous avons alors,

$* \frac{1.9593-6.605515}{4.095388} = \frac{-4.646215}{4.095388} = -1.134499$

$\Rightarrow 20 * erfc(|-1.134499|) = 20 * 0.1086206525 = 2.1724130491$

$\Rightarrow 2.1724130491 > 0.5$, nous en concluons que la valeur minimale n'est pas une aberrante.

$* \frac{19.1245-6.605515}{4.095388} = \frac{12.51899}{4.095388} = 3.05685$

$\Rightarrow 20 * erfc(|3.05685|) = 20 * 0.0000153895 = 0.0003077894$

$\Rightarrow 0.0003077894 < 0.5$, nous en concluons que la valeur maximale est une aberrante.

IV –Intervalle de confiance

Les intervalles de confiance représentent la plage d'incertitude associée à l'estimation d'une statistique (moyenne, proportion ou écart-type etc…). Une estimation est forcément entachée d'un risque d'erreur d'échantillonnage. Les intervalles de confiance sont utiles pour établir des bornes pour l'estimation, notamment, de la moyenne ou d'un écart type, mais également des coefficients de régression, des proportions et des différences entre populations.

Un intervalle de confiance à 95% indique que pour 19 échantillons sur 20 prélevés à partir d'une même population, ces intervalles contiendront le paramètre étudié, avec une marge d'erreur de 5%.

Illustrons ces propos à l'aide d'un exemple. Un fabricant d'ampoules désire estimer combien de temps les ampoules fonctionnent. Il échantillonne au hasard 100 ampoules et enregistre le temps de combustion jusqu'à défaillance dans une feuille de calcul.

Des études permettent de calculer un intervalle de confiance à 95% de la moyenne, avec des bornes de [1230 – 1265] heures par exemple. L'intervalle de confiance indique que vous pouvez être sûr à 95% que la vraie moyenne pour l'ensemble de la population des ampoules se situe dans cette fourchette.

Dans l'exemple des ampoules, nous savons que la moyenne est susceptible de se situer dans l'intervalle, mais l'intervalle de confiance à 95% ne signifie pas que 95% des observations futures seront à l'intérieur de cet intervalle. Certes l'intervalle de confiance porte sur une moyenne, mais les valeurs individuelles sont forcément moins stables et plus bruitées qu'une valeur moyenne qui tend à lisser les points extrêmes. Pour tirer une telle conclusion, il faut donc utiliser un type d'intervalle différent.

Les intervalles de prédiction

Lorsque vous établissez un modèle statistique (à partir d'une régression ou un plan d'expérience), vous pouvez générer des prévisions. Un intervalle de prédiction est une plage de valeurs qui est susceptible de contenir une observation individuelle future à partir des valeurs des prédicteurs en entrée, qui sont pris en compte dans votre modèle.

Utilisons le même échantillon que ci-dessus, un calcule d'un intervalle de prédiction dont les bornes sont [1350 – 1500] heures pour des niveaux spécifiques des paramètres de fabrication en entrée. Nous pouvons être sûrs à 95% que cet intervalle comprendra le temps de combustion d'une prochaine ampoule produite avec des niveaux donnés des prédicteurs en entrée.

L'intervalle de prédiction est toujours plus large que l'intervalle de confiance à cause de l'incertitude supplémentaire liée à la prédiction d'une valeur individuelle. L'intervalle de prédiction dépend aussi de la qualité du modèle et de son adéquation dans la région que nous cherchons à étudier.

* **Intervalle de confiance de la moyenne**

Nous avons vu que la moyenne $\bar{X}$ d'un échantillon aléatoire permet d'estimer la vraie moyenne μ de la population. Nous voudrions estimer également la précision de cette moyenne, c'est-à-dire donner une marge d'erreur ou un intervalle de confiance. Nous pouvons utiliser les tables de la loi normale pour estimer ces intervalles de confiance. En général nous adopterons l'intervalle de confiance à 95 %, soit à $2\sigma(\bar{X})$.

Nous pouvons donc écrire, soit :

$$\mu = \bar{X} \mp 2\sigma(\bar{X})$$

C'est-à-dire Il y a 95 chances sur 100 que μ situé entre $\bar{X} - 2\sigma(\bar{X})$ et $\bar{X} + 2\sigma(\bar{X})$

Exemple

La taille moyenne d'un échantillon de 51 filles est de 167.9 cm. L'erreur de cet échantillon est de 5.3 cm.

Si nous supposons que cet échantillon est représentatif de la taille des filles belges âgées d'une vingtaine d'années, nous pouvons calculer la taille moyenne de cette population, avec sa marge d'erreur :

n = 51 $\quad \overline{X} = 167.9 \quad$ s = 5.3

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{5,3}{\sqrt{51}} = 0.74$$

$$2\,\sigma(\overline{X}) = 1,48 \cong 1.5 \text{ cm}$$

Avec 95 % de confiance, nous pouvons donc dire que la taille moyenne de la population vaut : $\mu = 167.9 \mp 1.5$ cm

Ce qui revient à montre qu'il y a 95 chances sur 100 pour que la taille moyenne des filles belges de 20 ans se situe entre 166.4 et 169.4 cm.

V – Détection d'une erreur systématique

L'erreur systématique ε se produit sur un résultat de mesure à partir d'un effet reconnu d'une grandeur d'influence ; cet effet, appelé effet systématique, peut être quantifié s'il est significatif par rapport à la précision requise du mesurage, une correction est appliquée au résultat. Une erreur est systématique lorsqu'elle contribue à toujours surévaluer (ou toujours sous-évaluer) la valeur réelle. Il s'agit d'une déviation, par rapport à la valeur la plus précise pouvant être mesurée.

Exemple 1 : Une règle dont il manque le premier centimètre. Toutes les mesures seraient sous-évaluées.

Exemple 2 : Si une balance indique déjà quelques grammes lorsque le plateau n'est pas chargé. Toutes les mesures seraient surévaluées. L'erreur systématique comprend des phénomènes comme l'erreur d'échantillonnage, l'erreur de préparation, l'erreur de lecture sur les appareils analogiques. Ces problèmes peuvent introduire une dispersion statistique ou bien un décalage des résultats si l'erreur commise est toujours la même.

Remarque : Les appareils dérivent avec le temps, ce qui rend nécessaire leur ré-étalonnage régulier. On peut avoir une très faible dispersion statistique, et avoir toutefois un résultat faux.

Sources de l'erreur systématique

* **L'appareil de mesure :** Celui-ci peut être défectueux, ou mal étalonné. Par exemple, l'affichage peut ne pas indiquer zéro pour une mesure nulle, ou encore les valeurs affichées peuvent être multipliées, par rapport aux « vraies » valeurs, par une constante ou une fonction dont la valeur est proche de l'unité.

*** Le mode d'utilisation de l'appareil :** Certaines pratiques influencent d'une manière reproductible les valeurs mesurées. Des exemples : observer la position d'un objet (comme une aiguille) devant des graduations sans maintenir sa ligne de vision perpendiculaire aux graduations (phénomène appelé parallaxe); mesurer un intervalle de temps en employant des procédures différentes au départ et à l'arrêt du chronomètre.

*** La présence d'un facteur non prévu** : Certains événements ou phénomènes, comme une modification à un montage ou à un appareil de mesure, peuvent venir modifier les résultats d'une partie des mesures.

Pour que le résultat d'une mesure se rapproche de la valeur vraie, il faut diminuer les erreurs systématiques et les erreurs aléatoires.

Résultat = Valeur vraie + erreur systématique + erreur aléatoire

On doit appliquer les deux règles fondamentales de la métrologie :

- On diminue les erreurs aléatoires en répétant la mesure,
- On diminue les E systématiques en appliquant des corrections.

Remarque : Les erreurs systématiques sont souvent difficiles à détecter a priori, mais elles peuvent dans les cas les plus simples être déduites a posteriori à partir de l'allure des résultats. Il est alors possible de corriger les valeurs mesurées en leur ajoutant une correction compensant pour l'erreur systématique. Un réexamen du montage permet parfois de trouver la source de l'erreur et d'évaluer directement la correction à effectuer.

Il existe de nombreuses sources d'erreurs systématiques, comme par exemple :

- l'effet des grandeurs d'influence (température, pression,....) ;
- l'erreur de justesse des instruments (décalage du zéro par exemple, chronomètre mal calibré,…) ;
- la position de l'objet mesuré ;
- la perturbation due à la présence des instruments d'observation.

Dans la pratique, différentes méthodes sont utilisées pour détecter et évaluer ces erreurs, comme par exemple :

* mesurer la même grandeur avec un instrument différent ;

* mesurer la même grandeur avec des méthodes différentes ;

* mesurer une grandeur étalon (contrôle de la justesse) ;

* mesurer un même mesurant dans des laboratoires différents.

L'erreur systématique peut être considérée comme une erreur « constante » qui affecte chacune des observations.

2- Exploitation de plusieurs séries de déterminations : Test d'égalité des variances ; Test d'égalité de deux moyennes Test de comparaison des variances ; Test d'homogénéité des variances ; Test d'homogénéité des moyennes

I – Test d'égalité des variances

Test d'égalité de deux variances

Ce test est très simple à réaliser. Il suffit de suivre les étapes suivantes

Étape 1 : Poser les hypothèses de départ (toujours les mêmes)

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$(Les variances sont égales)

$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$(Les variances ne sont pas égales : une est plus grande que l'autre)

NB : La plus grande variance d'échantillon sera notée S_1^2et la plus petite S_2^2

Étape 2 : Déterminer le risque d'erreur α généralement α=5% ou 1%

Étape 3 : Déterminer le critère de rejet d'un test d'égalité des variances.

Le rapport de deux variances suit une loi de Fisher. C'est pourquoi nous établirons la règle de décision en comparant le rapport des variances trouvées dans les échantillons à une valeur critique trouvée dans la table de Fisher avec α, $\upsilon_1 = n_1\text{-}1$ où n_1 est la taille de l'échantillon ayant la plus grande variance et $\upsilon_2 = n_2\text{-}1$, où n_2 est la taille de l'échantillon ayant la plus petite variance.

Calculer : $F_E = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{\text{La plus grande variance}}{\text{La plus petite variance}}$

Étape 4 : Règle de décision

Il faut maintenant trouver dans la table de Fisher la valeur critique $F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2}$où α est le risque d'erreur, υ_1 est le degré de liberté de l'échantillon ayant la plus grande variance et υ_2 est le degré de liberté de l'échantillon ayant la plus petite variance. Attention à ne pas les inverser !

La règle de décision s'énoncera alors ainsi : Si $F_E > F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2}$ alors on rejette H_0. Autrement on acceptera H_0.

Étape 5 : Conclusion

En mentionnant le risque d'erreur dire simplement si les variances sont égales ou pas.

Exemple

Comparaison de deux méthodes. Résultats bruts

Répétition	Méthode A	Méthode B
1	1.30	1.30
2	1.32	1.40
3	1.40	1.48
4	1.45	1.48
5	1.50	1.50
6	1.51	1.60
7	1.55	1.76
8	1.56	1.88
9		1.92
10		2.20

Pour la méthode A nous obtenons les statistiques suivantes : $\overline{X}_A = 1.499$ $n_A = 8$ $S_A = 0.0100125$

Pour la méthode B nous obtenons les statistiques suivantes : $\overline{X}_B = 1.499$ $n_B = 10$ $S_B = 0.0786844$

Réalisons le test d'égalité de deux variances avec un risque d'erreur de 5%

Étape 1 : Poser les hypothèses de départ

$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ (Les variances sont égales)

$H_1 : \sigma_B^2 > \sigma_A^2$ (Les variances ne sont pas égales : la variance de la méthode B est plus grande)

Étape 2 : Le risque d'erreur α sera de 5%

Étape 3 : Déterminer le critère de rejet d'un test d'égalité des variances.

$$F_E = \frac{0.0786844}{0.0100125} = \frac{\text{La plus grande variance}}{\text{La plus petite variance}} = 7.858$$

Étape 4 : Règle de décision

Il faut maintenant trouver dans la table de Fisher la valeur critique $F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2} = F_{0.05,9,7}$

NB : Degré de liberté de l'échantillon ayant la plus grande variance $\upsilon_1 = 10-1=9$ et le degré de liberté d'échantillon ayant la plus petite variance $\upsilon_2 = 8 - 1 = 7$.

Donc : $F_{0.05,9,7} = 3.68$

Si $F_E > 3.68$ on doit rejeter H_0 avec un risque d'erreur de 5%.

Puisque $7.858 > 3.68$ nous rejetons H_0.

Étape 5 : Conclusion

Avec un risque d'erreur de 5% on peut conclure que les variances ne sont pas égales.

II – Test d'égalité de deux moyennes

II – 1 - Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

$H_0 : \mu = \mu_0$ donc $\mu - \mu_0 = 0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

La moyenne de l'échantillon est m = estimation de μ

Test Z de l'écart réduit ($n \geq 30$) J

Test t de Student (hypothèse de normalité)

a) Grands échantillons N ≥ 30

La comparaison d'une moyenne m, observée sur n personnes / cas (échantillon), à une valeur moyenne théorique μ_0 est basée sur l'estimation de l'écart réduit

$$Z = \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

est l'écart type de l'échantillon

- Si $|z| < 1.96$ la différence entre les moyennes m et μ_0 n'est pas significative à 5 % ⇒ non rejet de H_0

- Si $|z| \geq 1.96$ la différence entre les moyennes m et μ_0 est significative à 5 % ⇒ rejet de H_0

Le risque Z est lu dans la table de l'écart réduit (ici 1.96 pour 5 %)

- Si $n \geq 30$ alors m suit une loi normale $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow m - \mu_0$ suit une loi normale centrée réduite $N\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

S^2 est une estimation de σ^2

Exemple

Soit un échantillon de 30 étudiants âgés de 18 ans et dont la moyenne des notes est de 43.5 sur 100.

- Sur le critère de la moyenne l'échantillon peut-il provenir d'une population P dont la moyenne est 44 et de $\sigma^2 = (2.54)^2$?

Choix de test de vérification des conditions d'utilisation

- on veut comparer la moyenne de l'échantillon à la moyenne d'une population P de référence.

- La taille de l'échantillon est > 30 et sa moyenne suit une loi normale

* La variable centrée réduite $z = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.

* On définit H_0 et H_1

$H_0 : \mu = \mu_0$ donc $\mu - \mu_0 = 0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

* On fixe le risque α à 5 %

* On cherche à savoir que si $\mu \neq \mu_0$ que μ soit inférieure ou supérieure (situation bilatérale).

Moyenne μ de la population est estimée par la **moyenne m** de l'échantillon donc au final on test $m \neq \mu_0$

* On rejettera H_0 si $|z| \geq 1.96$ et on acceptera H_1

* $|z| < 1.96$ on ne rejettera pas H_0

Calcul de la statistique

- $Z = \frac{43.5 - 44}{\frac{2.54}{\sqrt{30}}} = 1.078$

* $|z| < 1.96$ donc on ne rejettera pas $H_0 \Rightarrow$ la moyenne observée ne diffère pas significativement de la moyenne théorique.

b) petit échantillon

- Si la distribution de la variable aléatoire suit une loi normale et la variance est connue on revient au cas précédant de la loi centrée réduite avec le test z

$Z = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale centrée réduite N (0, 1).

- Si la distribution de la variable aléatoire suit une loi normale et la variance est inconnue

Test T de Student

- La comparaison de la moyenne m observée sur n cas à une valeur théorique μ_0 est basée sur le rapport : $\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

- S désigne l'écart type estimé sur l'échantillon

Dans ce test la valeur $|t|$ trouvée dans la table de student pour un risque fixé = le degré de signification.

- Si $|t|$ est inferieur à la valeur lue dans la table de t (loi de student) pour ddl = n – 1 et le risque 5 %, la différence n'est pas significative $\Rightarrow$ l'échantillon provient bien de la population au regard de la moyenne ;

- Si $|t|$ est supérieur ou égal à la valeur lue dans la table de t (loi de student) pour ddl = n – 1 et le risque 5 %, la différence est significative.

Exemple

Si la moyenne des notes statistique μ_0 est $\frac{45}{100}$

Sachant que pour 18 étudiants on a trouvé une moyenne (m) de $\frac{54}{100}$avec un écart type (s) de 9. Peut-on conclure que la moyenne (m) de cet échantillon est supérieure (test unilatéral) à la moyenne habituelle théorique μ_0 ?

- La moyenne des notes (m) suit une loi normale.

1 - Choix du test et vérification des conditions d'utilisation

2 – L'échantillon est petit (n < 30) mais la moyenne μ suit une loi normale dans la population dont est issue l'échantillon (test unilatéral).

3 – La statistique $t = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale de 18 – 1 = 17 ddl.

4- Définir H_0 et H_1

$H_0 : \mu = \mu_0$ donc $\mu - \mu_0 = 0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

5- fixer le risque α et définir la règle de décision

On s'intéresse seulement à savoir si $\mu > \mu_0$ donc situation unilatérale

Valeur seuil en situation bilatérale t (5 %, 17 ddl) = 2.11

*** Valeur seuil en situation unilatérale t (5 %, 17 ddl) ≥ 1.74**

Si H_1 avait été $\mu < \mu_0$ avec $H_0 : \mu \geq \mu_0$

*** Valeur seuil en situation unilatérale t (5 %, 17 ddl) ≤ 1.74**

- Si $t = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq 1.74$ on rejette H_0, on accepte H_1

- Si $t = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < 1.74$on ne rejette pas H_0

Calcul de la statistique :

$t = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{54-45}{\frac{9}{\sqrt{18}}} = \frac{9}{\frac{9}{4.24}} = 4.24$

4.24 (t calculé)≥ 1.74 (t seuil) on rejette H_0, on accepte H_1 au risque de 5 %

- Au regard des résultats la moyenne de la population représentée par ces étudiants est supérieure à la moyenne habituelle

* Définir H_0 et H_1

$H_0 : \mu_A = \mu_B$

$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

* Fixer le risque αet définir la règle de décision

- Risque bilatéral 5 %

* Rejet de H_0 si $|z| \geq 1.96$ et on acceptera H_1

* $|z| < 1.96$ on ne rejettera pas H_0

II – 2 - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

* Les données sont non appariées

– Moyenne sur 2 échantillons indépendants

* Taille de l'échantillon

– Grands échantillons ≥ 30

– Petits échantillons < 30

* La comparaison entre 2 moyennes observées m_A et m_B sur n_A et n_B individus respectivement (promotion de 2 facultés A et B)

Dans le cas des grands échantillons ⇒ n_A et $n_B \geq 30$: le test est basé sur l'écart réduit

$$Z = \frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}}$$

← Ecart type de la différence des moyennes

Où S_A^2 et S_B^2 sont les variances estimées sur l'échantillon

- Si $|z| < 1.96$ acceptation de H_0 à 5 %

- Si $|z| \geq 1.96$ rejet de H_0 à 5 %

Exemple

On compare la moyenne des notes de statistiques entre 2 facultés A et B

– On tire au sort 50 élèves (n_A et n_B) dans chacune des promotions et on compare la moyenne (note/100)

* m_A = 45 / 100 (d'écart type s = 3)

* m_B = 49 / 100(d'écart type s = 5)

- Est-ce que la moyenne est déférente entre les deux facultés (test bilatéral) ?

- Choix du test et vérification des conditions d'utilisation

* 2 échantillons de n ≥ 30

* Deux variables continues

* Moyennes m_A et m_B des notes suivent une loi normale

- Définir H_0 et H_1

$H_0 : \mu_A = \mu_B$

$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

- Fixer le risque alpha et définir la règle de décision

Risque bilatéral 5 %

Rejeter H0 si : $|Z| = \left| \frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \right| = \left| \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}} \right| \geq 1.96$

$$|Z| = \left| \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}} \right| = \left| \frac{45 - 49}{\sqrt{\frac{3^2}{50} + \frac{4^2}{50}}} \right| = \left| \frac{-4}{\sqrt{\frac{9}{50} + \frac{16}{50}}} \right| = 5.66$$

$5.66 \geq 1.96$ on conclut que les moyennes des notes différents entre la faculté A et B ⇒ m_B significativement supérieur à m_A

Dans le cas des petits échantillons ⇒n_A et (ou) $n_B < 30$ (au moins l'un est petit) on utilise le Test de student

$$t = \frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_A} + \frac{\sigma^2}{n_B}}} = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{S^2}{n_A} + \frac{S^2}{n_B}}}$$

S^2 estimation de la variance supposée commune ⇒ **test de l'égalité de la variance préalable**

$$S^2 = \frac{(n_A - 1) * S_A^2 + (n_B - 1) * S_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{\sum(x - m_A)^2 - \sum(x - m_B)^2}{n_A + n_B - 2}$$

Si $|t|$ est inférieur à la valeur lue dans la table de t pour un ddl = $n_A + n_B - 2$. On accepte H_0

2 hypothèse normalité et égalité de variance = test de robustesse en première approximation.

Exemple

On compare la moyenne des notes de statistiques entre 2 facultés A et B

– On tire au sort $n_A = 9$ et $n_B = 18$ dans chacune des promotions et on compare la moyenne

* $m_A = 45 / 100$ (d'écart type s = 3)

* $m_B = 49 / 100$(d'écart types = 5)

- Est-ce que la moyenne est déférente entre les deux facultés (test bilatéral) ?

- Choix du test et vérification des conditions d'utilisation

* 2 échantillons de n < 30

* Deux variables continues, loi normale, on suppose l'égalité de variance

* On doit faire le test d'égalité des variances au préalable le test de Fisher.

* Moyennes m_A et m_B des notes suivent une loi normale

Statistique $t = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{S^2}{n_A} + \frac{S^2}{n_B}}}$ suit une loi de student à (9 + 18 – 2) = 25 ddl

- Définir H_0 et H_1

$H_0 : \mu_A = \mu_B$

$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

- Fixer le risque alpha et définir la règle de décision

Risque bilatéral 5 %

Rejet de H_0 si

$t = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{S^2}{n_A} + \frac{S^2}{n_B}}}$ (5 %, ddl = 25) = 2.06

Rejet si $|t| > 2.06$

$$S^2 = \frac{(n_A - 1) * S_A^2 + (n_B - 1) * S_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{\sum(x - m_A)^2 - \sum(x - m_B)^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{(9-1) * 3^2 + (18-1) * 5^2}{9 + 18 - 2} = \frac{72 + 425}{25} = 19.88$$

$$t = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{\frac{S^2}{n_A} + \frac{S^2}{n_B}}} = \frac{45 - 49}{\sqrt{\frac{19.88}{9} + \frac{19.88}{18}}} = -2.20 \qquad \Rightarrow |t| \geq 2.06$$

Conclusion

1 - On rejette H_0 au risque alpha bilatéral de 5 %

2 - La moyenne des notes de faculté B est supérieure à celle de A ⇒ elle est différente

Remarque

Non avons supposé ici que les variances étaient égales.

- En réalité, il faut tester cette hypothèse d'égalité des variances.

- Si les variances ne sont pas égales et ou si les variables ne suivent pas une loi normale.

II – 3 - Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés

Les échantillons ne sont pas indépendants.

– 2 examinateurs corrigent les copies de 100 étudiants (mêmes échantillons de copie).

– Les tests précédents ne sont plus valables car ils présupposent l'indépendance des échantillons = ils corrigent les copies des mêmes étudiants.

*** Les échantillons appariés avec des effectifs ≥ 30.**

- Pour comparer les moyennes de deux échantillons appariés, on forme pour chaque paire la différence des deux mesures d_i et on compare la moyenne des n différences d_i à 0 par l'écart réduit.

$$Z = \frac{\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

m et s désignes la moyenne et l'écart type estimés sur l'échantillon des n différences.

- Si $|z| < 1.96$ les moyennes ne diffèrent pas significativement au seuil de 5 %

- Si $|z| \geq 1.96$ les moyennes diffèrent significativement et le risque correspondant à Z lu dans la table de l'écart réduit fixe le degré de signification

*** Les échantillons appariés avec des effectifs < 30.**

Pour comparer les moyennes de deux séries appariées de faible effectif, on forme pour chaque paire la différence des deux mesures et on compare la moyenne des différences à 0 par le rapport

$$t = \frac{\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{m - 0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

m et S désignent la moyenne et l'écart type estimés sur l'échantillon des n différences di.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

* Si |t| est inférieur à la valeur lue dans la table de t pour le nombre de degrés de liberté (n - 1) et le risque 5% les moyennes ne différent pas significativement au seuil de 5 % **accepté H_0**

* Si |t| est supérieur les moyennes différent significativement et le risque indiqué par la table pour la valeur |t| trouvée fixe le degré de signification **Rejeté H_0**

* Formule applicable si la différence est distribuée selon une loi normale

Exemple

On mesure l'effet du stress lié à l'examen sur la glycémie de 9 étudiants. La glycémie suit une loi normale dans la population dont sont issues les étudiants. Pour chaque étudiant 2 mesures sont faites avant et après les examens

Résultats

étudiant	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Avant	5.5	4.3	6.5	4.5	5.2	4.3	5.0	5.4	5.2
Après	5.4	6.7	6.5	6.0	5.2	5.0	4.8	4.7	4.5

Le stress dû à l'examen modifie t-il la glycémie des étudiants ?

- Choix du test et statistique et vérification des conditions d'utilisation

* Données appariées, un seul échantillon, loi normale

* Test de la différence à zéro

$t = \frac{\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{m-0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit une loide student à 9 – 1 = 8 ddl

- Définir les hypothèses

$H_0 : \mu = 0$

$H_1 : \mu \neq 0$

- Fixer le risque alpha et définir la règle de décision

* Alpha 5 % bilatéral

* Zone de rejet de H_0 : 2.306 sur la table de Student à 8 ddl

- Calcul de la statistique

étudiant	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Somme**
Avant	5.5	4.3	6.5	4.5	5.2	4.3	5.0	5.4	5.2	
Après	5.4	6.7	6.5	6.0	5.2	5.0	4.8	4.7	4.5	
di	- 0.1	2.4	0	1.5	0	0.7	- 0.2	- 0.7	- 0.7	2.9
di^2	0.01	5.76	0	2.25	0	0.49	0.04	0.49	0.49	9.53

$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{9.53 - \frac{8.41}{9}}{8} = 1.0744 = (1.036)^2$

$m = \frac{2.9}{9} = 0.32$ et $t = \frac{0.32}{\frac{1.036}{\sqrt{9}}} = 0.93$

* Appliquer les règles de décisions

- t < 2.306, on ne rejette pas H_0 : la différence de glycémie n'est pas différente de zéro.

- Conclusion : Le stress lié aux examens ne semble pas agir sur la glycémie.

Conclusion générale

1 - Vérifier les conditions d'application des tests :

* Distribution de la variable

* Effectifs

* Indépendance / appariement

2 - Question à formuler sous la forme d'hypothèses

* Unilatérale / bilatérale

3 - Choisir les bonnes tables statistiques

III –Test d'homogénéité (comparaison de deux valeurs observées) des variances

Supposons que les données suivantes ont été obtenues dans une expérimentation portant sur deux traitements A et B :

Traitement	Taille de l'échantillon	Variance de l'échantillon
A	$n_a = 10$	= 15.28
B	$n_b = 8$	= 28.20

Pour tester l'hypothèse nulle H_0: " Variance (A) = Variance(B) " contre l'hypothèse alternative H_1 " Variance(A) – Variance(B) ", on calcule les deux variances, puis on fait le rapport de la plus grande sur la plus petite.

Ce rapport constitue le F de Snedecor. Ici : $F_{obs} = \frac{(28.20)^2}{(15.28)^2} = 3.276$.

La valeur de F est comparée, dans une table de Snedecor, à une valeur théorique et doit lui être inférieure pour un seuil de risque choisi, pour conserver l'hypothèse d'homogénéité des variances. Le degré de liberté qui correspond à la variance la plus élevée est porté au numérateur (colonnes de la table F), celui qui correspond à la variance la plus faible, est porté au dénominateur (lignes de la table F).

On note : $F_{95}(7, 9)$ — 7 : ddl du numérateur ; 9 : ddl du dénominateur ; 95 : seuil d'erreur

Le test t de Student est relativement robuste. Une distorsion modérée d'avec la loi normale et d'avec l'hypothèse d'homogénéité des variances est acceptable.

Pour tester l'homogénéité des variances dans l'exemple, $V_a = V_b$ opposé à $V_a – V_b$

Nous avons $F_{obs} = \frac{(28.20)^2}{(15.58)^2} = 3.276$. pour (n_a-1) ddl = 9, (n_b-1) ddl = 7.

La valeur critique de rejet de $F_{0,95}(7,9) = 3,29$. Comme F_{obs} est inférieur à cette valeur, l'hypothèse d'égalité des variances est acceptée.

On peut donc appliquer le test de Student à ces échantillons.

IV – Test d'homogénéité des moyennes

On étudie deux variables X et Y et on cherche à savoir si les observations (deux échantillons de taille n_X et n_Y, de moyennes observées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ et de variances observées s_X^2 et s_Y^2, issues respectivement d'une population de moyenne μ_X et de variance σ_X^2 et d'une population de moyenne μ_Y et de variance σ_Y^2), proviennent de la même loi théorique de moyenne μ. Les hypothèses sont donc :

$H_0 : \mu_X = \mu_Y$

$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$

Il faut toujours que les observations dans les deux échantillons soient indépendantes.

Les statistiques des tests sont résumées dans la table suivante :

Tableau : Paramètres et statistiques des tests de comparaison pour deux échantillons indépendants

Variances σ_X^2 et σ_Y^2	**Effectifs**	**Homoscédasticité**	**Statistique**	**Seuil**
Connues	Quelconques	Non nécessaire	$t_{obs} = \left\| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_y}}} \right\|$	t_α
Estimées (test de Fisher, voir plus bas).	$n_X \geq 30$ et $n_Y \geq 30$	non nécessaire	$t_{obs} = \left\| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n_x} + \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{n_y}}} \right\|$	$t_{\alpha, n_X + n_Y - 2}$
	$n_X < 30$ ou $n_Y < 30$	$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ et $\hat{\sigma}^2 = \frac{n_X s_X^2 + n_Y s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$	$t_{obs} = \left\| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}} \right\|$	$t_{\alpha, n_X + n_Y - 2}$
		$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$	Statistiques non paramétriques	

Le test de Fisher sert à vérifier l'égalité de deux variances (homoscédascticité). Les hypothèses du test sont :

$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

La statistique du test est : $F_{obs} = \frac{\frac{n_X s_X^2}{n_X - 1}}{\frac{n_Y s_Y^2}{n_Y - 1}}$

Si $s_X^2 > s_Y^2$, et l'inverse sinon. La valeur seuil de ce test est $F_{\alpha, n_{X-1}, n_Y - 1}$.

Exercice

On a mesuré les dimensions d'une tumeur chez des souris traitées ou non avec une substance antitumorale. On a obtenu les résultats suivants :

	Effectifs (n_i)	**Valeur moyenne ($\overline{x}_i$)**	**Variance**
Souris témoins	20	7.075 cm ²	σ_1^* = 0.576 cm ²
Souris traitées	18	5.850 cm ²	σ_2^* = 0.614 cm ²

La différence observée est-elle significative ?

1°/ Proposition du problème.

S'agissant de recherche si la substance antitumorale a, ou non, un effet de diminution sur la tumeur, nous utiliserons ici un **test unilatéral**. Les hypothèses à tester l'une contre l'autre sont :

$(H_0) : \mu_1 = \mu_2$

$(H_1) : \mu_1 > \mu_2$

Avec μ_1 est la moyenne de la population dont est tiré l'échantillon témoin, $\mu_2$est la moyenne de la population dont est tiré l'échantillon 2.

Comme les variances des populations sont inconnues, pour comparer les moyennes des deux populations, on peut utiliser un test de Student : il faut faire l'hyptohèse que les populations sont normales. De plus, il faut teste l'homogénéité des variances. S'il s'avère possible de faire une estimation commune de la variance des deux populations :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)\,\hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\,\hat{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Le test des hypothèses (H_0) et (H_1) utilisera : $t_{obs} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

Dans l'hypothèse (H_0) nous suivant la loi de Student à ($n_1 + n_2 - 2$) degrés de liberté.

2°/ Test d'homogénéité des variances

Pour tester l'homogénéité des variances on fait le rapport de la plus grande estimation ponctuelle de variance à la plus petite.

$$F = \frac{0.614^{2}}{0.576^{2}} = 1.136$$

La table de la loi *F* de Fischer-Snedecor à (n_{2-1} , n_{1-1}) (17 ; 19) degrés de liberté donne une valeur seuil comprise est égale à 2.2. Donc, de toute façon, la valeur observée appartient à l'intervalle d'acceptation (au seuil de 5 %) : on accepte l'hypothèse d'égalité des variances.

On peut alors grouper les deux échantillons pour avoir une estimation ponctuelle de la variance commune :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)\,\hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\,\hat{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)\,\hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\,\hat{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{19\ (0.576)^2 + 17\ (0.614)^2}{36} = 0.3531$$

$$\boldsymbol{\sigma^* = 0.5942}$$

3°/ Test d'égalité des moyennes.

Le test utilise la fonction de t_{obs} suivante :

$$t_{obs} = \frac{7.075 - 5.850}{0.5942\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{18}}} = 6.345$$

La table de Student à 36 ($n_1 + n_2 - 2$) degrés de liberté donne $t_{36} = 2.0546$

$t_{obs} > t_{36}$ on accepte H1 donc la différence est significative.

3 - Analyses répétitives : Intervalle de confiance, écart type connu.

En statistique, une analyse répétitive est une série de mesures répétées de la même grandeur, ce qui nous amène à l'estimation de la moyenne vraie de cette série avec un intervalle de confiance.

Intervalle de confiance d'une analyses répétitives

Si l'analyse est répété n fois, on va trouver les résultats X_1, X_2,…X_n

La moyenne expérimentale de cette série sera :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Supposons que la population est caractérisée par un écart-type connu (σ) et les mesures suivent une loi normale centrée en la moyenne réelle (μ).

Distribution de la moyenne

La moyenne des mesures $\overline{X}$ suit :

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

L'erreur standard est comme suit :

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Intervalle de confiance (IC)

Il est noté que cet intervalle se rétrécit si :

- Le nombre de répétitions n augmente
- La dispersion (σ) est diminue

Le niveau de confiance est souvent 95%, la formule sera :

$$IC = \overline{X} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\overline{X}$: Moyenne des analyses répétitives

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: Quantile de la loi normale (1.96 pour 95%)

σ : écart-type connu de la population

n : Nombre de répétitions

Example

Pour un nombre de répétitions (n = 10), la moyenne de mesure est $\overline{X}$ = 50.4, et écart-type connu ($\sigma = 2$), avec un niveau de confiance 95%

L'intervalle de confiance

$IC_{95\%} = 50.4 \mp 1.96 \frac{2}{\sqrt{10}} = 50.4 \mp 1.96\ (0.632) = 50.4 \mp 1.24$

$IC_{95\%}$ = [49.16 ; 51,64].

4-Etalonnage et régression linéaire : Calcul de la droite de régression ; Intervalle de confiance des coefficients ; Comparaison de l'ordonnée à l'origine à zéro ; Intervalle de confiance du résultat de l'analyse.

I - Calcul de la droite de régression

Dans le cas particulier où l'on a pu mettre en évidence l'existence d'une relation linéaire significative entre deux caractères quantitatifs continus X et Y, on peut chercher à formaliser la relation moyenne qui unit ces deux variables à l'aide d'une des 2 équations suivantes :

(1) Y = a.X + b : droite de régression de Y en fonction de X

(2) X = a.Y + b : droite de régression de X en fonction de Y

Les deux équations proposées ci-dessus correspondent à deux droites différentes, deux résumés différents du nuage de points (X, Y). La différence entre les deux droites vient du fait que les deux équations proposées correspondent à deux objectifs différents :

- La première droite de régression de Y en fonction de X introduit l'hypothèse que les valeurs de Y dépendent de celles de X, c'est-à-dire postulent que la connaissance des valeurs de X permet de prévoir les valeurs de Y. Il s'agit donc d'un modèle de prévision et l'objectif est de minimiser l'erreur de prévision c'est-à-dire la distance entre les valeurs Y_i observées et les valeurs Y^*_i estimés par la relation $Y^*=aX+b$. Les résidus seront donc la distance à la droite par rapport à l'axe Oy.

- La deuxième droite de régression de X en fonction de Y introduit l'hypothèse inverse que les valeurs de X dépendent de celles de Y, c'est-à-dire postulent que la connaissance des valeurs de Y permet de prévoir les valeurs de X. Il s'agit donc cette fois-ci de minimiser l'erreur de prévision sur X c'est-à-dire la distance entre les valeurs X_i observées et les valeurs X^*_i estimés par la relation $X^* = a\,Y + b$. Les résidus seront donc la distance à la droite par rapport à l'axe Ox et non plus par rapport à l'axe Oy comme dans le cas précédent.

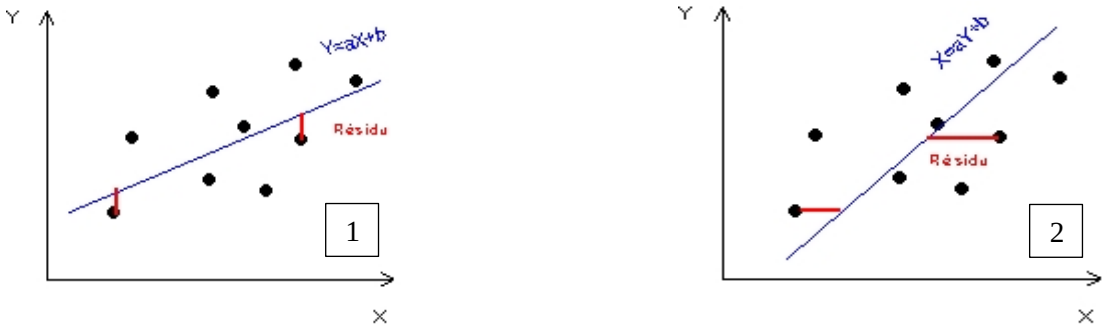


Figure 1 : Deux manières différentes de résumer un nuage de point

(1) Droite exprimant Y en fonction de X (2) Droite exprimant X en fonction de Y

Dans ces deux cas on s'intéresse à une modélisation à visée prédictive puisque l'on suppose que la connaissance de l'une des variables (appelée variable indépendante) permet d'estimer la valeur de l'autre variable (appelée variable dépendante).

1 - Détermination de la droite de régression par le critère des moindres carrés

Lorsque l'on cherche à exprimer Y en fonction de X, on peut affecter à chaque valeur observée Y_i une valeur estimée par la droite de régression $Y^*_i = a\ X_i + b$. L'erreur d'estimation sur l'individu i est donc égal au résidu $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ défini par :

$$\boldsymbol{\varepsilon_i = (Y_i - Y^*_i) = Y_i - (a\ X_i + b)}$$

Comme on souhaite obtenir un ajustement global qui soit optimal pour l'ensemble des stations, il faut définir un critère général définissant la qualité d'ajustement de l'ensemble des valeurs à la droite proposée.

1 -La première solution (ERR_1) qui vient à l'esprit est la minimisation de la somme des résidus :$\boldsymbol{ERR_1 = \sum \varepsilon_i}$

Mais ce critère est à l'évidence discutable car des résidus positifs et négatifs peuvent se compenser et l'on pourrait obtenir un ajustement optimal (ERR_1=0) alors même que la droite ne passerait pas par tous les points du nuage.

2 - La seconde solution (ERR_2) consiste alors évidemment la minimisation de la somme des valeurs absolues des résidus :$\boldsymbol{ERR_2 = \sum|\varepsilon_i|}$

Il s'agit cette fois-ci d'un bon critère, mais qui a le défaut de ne pas posséder de solution analytique et qui impose une recherche itérative (habituel) sur toutes les droites du plan.

3 - La troisième solution (ERR_3) qui est la plus souvent retenue en statistique est appelée critère des moindres carrés et consiste à minimiser de la somme des carrés des résidus $\boldsymbol{ERR_3 = \sum(\varepsilon_i)^2}$

Comme dans le cas précédent, le critère est correct puisqu'il n'y a pas de compensation entre les résidus positifs et négatifs et la valeur ERR_3 ne s'annule que si tous les points du nuage sont alignés le long d'une droite. Mais ce critère possède l'immense avantage d'aboutir à une solution analytique très simple. En effet l'équation de la droite de régression Y=a X + b qui minimise le carré des écarts entre valeurs observées et valeurs estimées est obtenue très simplement à l'aide des deux formules suivantes :

Les valeurs optimales d'ajustement des paramètres de la droite Y=a X + b pour le critère des moindres carrés sont données par les relations :

$$a = \frac{\mathrm{Cov}\,(x,y)}{(\sigma_x)^2} = \frac{n\,(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\,(\sum x_i^2) - (\sum x_i^2)}$$

b = $\bar{y}$ - a. $\bar{x}$

Avec $\bar{y}$ et $\bar{x}$ sont les moyennes des x et des y respectivement.

2 – **Calcule de l'équation d'une droite de régression linéaire**

Cet outil détermine l'équation de la droite de régression linéaire (ou ajustement affine) d'une série statistique (ou nuage de points) de la forme (x_i; y_i). L'équation de la droite de régression linéaire est de la forme Y = a X + b

L'équation de la droite de régression est obtenue par la méthode des moindres carrés. Grâce à la droite de régression linéaire, il est possible de prévoir une tendance pour une valeur donnée X. De plus, l'outil calcule le coefficient de corrélation.

II – Intervalle de confiance des coefficients

Théorème

Les Intervalles de confiance bilatéraux au niveau de confiance 1 − α pour b et a :

a) Intervalle de confiance sur la pente

$$\beta_1 = \widehat{\beta_1} \pm t_{n-2,\,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{CMR}{SCE_X}}$$

Avec :

$$\text{CMR} = \frac{\text{SCER}}{\text{n}-2}$$

SCER = $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2$

$$SCE_X = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Exemple

x	**x-x̄**	**(x-x̄) ²**	**y_0**	**$\hat{y}$**	**ei**	**ei^2**	**SCER/3**
1	- 2	4	26	25.4	0.6	0.36	
2	- 1	1	32	32.4	- 0.4	0.16	
3	0	0	40	39.4	0.6	0.36	
4	1	1	44	46.4	- 2.4	5.76	
5	2	4	55	53.4	1.6	2.56	
x̄ = 3		**SOMME = 10**				**SOMME = 9.2**	3.067
		SCEX = 10				**SCER = 9.2**	**CMR = 3.067**

$$\beta_1 = \widehat{\beta_1} \pm 3.18\sqrt{\frac{3.067}{10}} = \widehat{\beta_1} \pm 3.18\,(0.554) = \widehat{\beta_1} \pm 1.761$$

b) Intervalle de confiance sur l'ordonnée à l'origine

$$\beta_0 = \widehat{\beta_0} \pm t_{n-2,\,1-\alpha/2}\sqrt{CMR\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{SCE_X}\right]}$$

$$\beta_0 = \widehat{\beta_0} \pm 3.18\sqrt{3.067\left[\frac{1}{5} + \frac{9}{10}\right]}$$

III – comparaison de l'ordonnée à l'origine zéro

On vérifie que la valeur 0 est comprise dans l'intervalle de confiance de l'ordonnée à l'origine construit autour de la valeur a.

Le test est bilatéral pour un risque α choisi.

Pour x = 0 la valeur de l'ordonnée correspondante est généralement différente de zéro. Cette différence est-elle significative ?

On compare l'écart entre a et zéro à la dispersion des résultats

Hypothèse à contrôler

a – 0 = 0 **soit : a = 0**

$$t = \frac{|a|}{s_a}$$

$$s_a = \sqrt{s_a^2} \quad \text{avec} \quad s_a^2 = \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right] s_r^2$$

$s_r^2 = [(1 - r^2)/ (n - 2)]$ SCEt avec SCEt = $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$

On va comparer la valeur de t avec la valeur critique $t_{1-\alpha/2;n-2}$lue dans la table de Student

- Si t > $t_{1-\alpha/2;n-2}$ l'hypothèse est rejetée avec un risque d'erreur global α, le niveau de confiance est P = 1 – α

Conclusion

Si t $\leq t_{1-\alpha/2,\ n-2}$ on déclarera que la droite passe par l'origine.

Si t > $t_{1-\alpha/2,\ n-2}$ on déclarera que la droite ne passe pas par l'origine.

Exemple d'application

Symbole	Valeur
n	20
$\bar{x}$	100,174
B	12.997
A	- 15.737
R	0.9973567
$\sum (x_i - \bar{x})^2 = (n-1)\, S_x^2$	16124.86
$\sum (y_i - \bar{y})^2 = (n-1)\, S_y^2$	2738333.58

$s_r^2 = \left(\frac{(1-0.9973567)^2}{20-2}\right) 2738333.58 = 803.2$

$s_a^2 = \left[\frac{1}{20} + \frac{(100.174)^2}{16124.86}\right] 803.2 = (0.67937276)\ (803.2) = 545.662441$

$s_a = \sqrt{545.662441} = 23.3594187$

$t = \frac{|a|}{s_a} = \frac{|-15.737|}{23.359} = 0.67368971 \Rightarrow t < t_{18,0,975}$ on déclarera que la droite passe par l'origine.

IV – Intervalle de confiance du résultat de l'analyse

Intervalles de confiance pour la droite de régression

Il s'agit d'un intervalle de confiance pour $E(Y_0|x_0)$, la réponse moyenne à la valeur x_0. Pour x_0 donné soit $\widehat{Y_0} = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} x_0$ l'estimateur de $E(Y_0|x_0)$.

Théorème

Intervalle de confiance pour $E(Y_0|x_0)$ au niveau de confiance $1 - \alpha$:

$$E\ (Y_0/x_0) = \hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2;n-2} \sqrt{CMR\ \left[\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - x_0)^2}{SCE_X}\right]}$$

Exemple

$$E\ (Y_0/x_0) = \hat{Y}_0 \pm 3{,}18 \sqrt{3{,}067\ \left[\frac{1}{5} + \frac{(3 - x_0)^2}{10}\right]}$$

5- Contrôle de la régression : Homogénéité des variances ; Validité droite de régression ; Pente significative.

I - Homogénéité de la variance

Pour beaucoup de tests paramétriques par exemple la régression, l'homogénéité des variances est une condition nécessaire. Homogénéité des variances = homoscédasticité. Plusieurs méthodes existent pour tester l'homogénéité des variances dans plusieurs groupes

qui n'ont pas nécessairement le même nombre d'objets. Un test très utilisé est le test de Bartlett. Ce test est valide si les distributions des objets sont Normales. Le test donne un résultat global et ne permet pas d'estimer les différences de variances des sous-catégories deux à deux. Il est très sensible à la non-normalité

Loi du khi deux à un degré de liberté :

Soit une variable aléatoire suit la loi normale, la variable aléatoire définie par : $Y = X^2$ suit la loi du khi-deux à un degré de liberté.

Loi du khi deux à n degré de liberté :

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Désignant n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi normale, soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, On dit que la variable aléatoire Y suit la loi du khi-deux à n degrés de liberté

Test de Bartlett

Hypothèses

(H_0) : $H_0 : \sigma_1^2 = \cdots = \sigma_j^2$

(H_1) : les σ_j^2 ne sont pas toutes égales

Statistique de test :

Bartlett a proposé le test suivant. Posons

$$B = (\sum(n_i - 1))(\ln S_p^2) - \sum\left((n_i - 1)\ln s_i^2\right)$$

$$s_p^2 = \frac{\sum((n_i - 1))\, s_i^2}{\sum(n_i - 1)}$$

Avec s_i^2 est la variance.

$$c = 1 + \frac{1}{3\,(k-1)}\left(\left(\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{1}{n_i - 1}\right)\right) - \frac{1}{\sum_{i=1}^{j}(n_i - 1)}\right)$$

$$B_{obs} = \frac{B}{c}$$

et B_{obs} suit une loi de χ^2 à $(k - 1)$ degrés de liberté (ddl)

Décision

Si $B_{obs} < \chi^2_{0,05;2}$, soit 5,99 on accepte l'hypothèse (H_0)

Exemple

La densité (nombre / km^2) de sapins poussant dans 3 (k = 3) forêts différentes (groupes)

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
	45	78	354
	34	69	338
	35	86	351
	29	58	332
	42	57	341
	37	64	358
	44		347
	28		
Variance	42.214	131.867	86.476

Question : à un niveau de risque de 5 %, les variances de ces trois groupes sont-elles homogènes ?

Test

H_0 : Toutes les variances sont égales

H_1 : Au moins une des variances est différente des autres

Calcul du test

$$s_p^2 = \frac{(7)\ 42.214 + (5)\ 131.867 + (6)\ 86.476}{7+5+6} = 81.872$$

$$B = (7+5+6)\ \ln 81.872 - (7\ \ln 42.214 + 5\ \ln 131.867 + 6\ \ln 86.476) = 1.925$$

$$c = 1 + \frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{7+5+6}\right) = 1.076$$

$$B_{obs} = \frac{1{,}925}{1{,}076} = 1.789$$

Décision : $B_{obs} < 5{,}99 \Rightarrow H_0$ est acceptée donc Les trois variances sont homogènes.

II - Validité de la droite de régression

Test de validité de la droite de régression

On compare la dispersion des valeurs de y_{ij} ($y_{\text{élément, groupe}}$) pour x_j donné autour de leur valeur moyenne (indice E), à la dispersion des moyennes de y autour de la droite de régression (indice L)

Hypothèse à contrôler $\sigma_E^2 \leq \sigma_L^2$

$$F = \frac{s_L^2}{s_E^2}$$

$$s_L^2 = \frac{\sum_j n_j \left(\overline{y_j} - y_{j\ recalculé}\right)^2}{k-2} \qquad et \qquad s_E^2 = \frac{\sum_j \sum_i \left(y_{ij} - \overline{y_j}\right)^2}{n-k}$$

Conclusion

- Si $F \leq F\ (1-\alpha, k-2, n-k)$ on déclarera que y et x sont liés par une relation linéaire
- Si $F > F\ (1-\alpha, k-2, n-k)$ on déclarera que y et x ne sont pas liés par une relation linéaire

III - Test d'existence d'une pente significative

L'objectif est de comparer les variations dues à la régression et celles dues aux erreurs expérimentales et aux erreurs d'ajustement. Pour cela, il faut prouver que variance de régression > variance résiduelle.

Hypothèse à contrôler $\sigma_R^2 \leq \sigma_I^2$

- variance due à la régression linéaire : s_I^2; qui représente la différence entre la valeur théorique et la valeur réelle ;
- variance totale : s_T^2. La vérification de l'existence d'une pente significative est établie à l'aide du test de Fisher F en montrant que les variances s_I^2 et s_R^2 sont significativement différentes au risque a choisi (α %) :

$$F = \frac{s_I^2}{s_R^2}$$

$$s_I^2 = a_I^2 \sum_j n_j \left(x_j - \bar{x}\right)^2$$

$$s_R^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2 - a_I^2 \sum_{j=1}^{k} n_j \left(x_j - \bar{x}\right)^2}{N-2}$$

- Si $F > F_{(1-\alpha, 1, N-2)}$ l'hypothèse est rejetée avec le risque d'erreur α donc on déclarera que la pente est significative.
- Si $F \leq F_{(1-\alpha, 1, N-2)}$ on déclarera qu'il n'y a pas dépendance linéaire.

IV – Comparaison de pente

IV – 1 - Comparaison de la pente à une valeur de référence

Hypothèse à contrôler

La différence entre la pente et la valeur de référence est nulle

$$t = \frac{|a_1 - p|}{s_{a1}}$$

Conclusion

Si $t \leq t_{(1-\alpha/2,\ n-2)}$ on déclarera que la valeur de la pente expérimentale est identique à la valeur de référence.

Si $t > t_{(1-\alpha/2,\ n-2)}$, on déclarera que la valeur de la pente expérimentale est différente de la valeur de référence.

IV – 2 - Comparaison de deux pentes

Hypothèse à contrôler

La différence des deux pentes est nulle

$$t = \frac{|a_1 - a_2|}{\sqrt{s_{a1}^2 + s_{a2}^2}}$$

Test

si $t > t_{(1-\alpha/2,\ n1 + n2 - 4)}$

Conclusion

Si $t \leq t_{(1-\alpha/2,\ n1 + n2 - 4)}$, on déclarera que les deux pentes sont égales

Si $t > t_{(1-\alpha/2,\ n1 + n2 - 4)}$, on déclarera que les deux pentes sont différentes (l'interférence de l'aluminium est donc ainsi mise en évidence).

6- Comparaison de pentes : Comparaison de la pente à une valeur de référence ;

Comparaison de deux pentes.

La comparaison de pente peut se faire soit en comparant une pente calculée à une valeur de référence à l'aide de tests statistiques (comme le test t), soit en comparant deux pentes distinctes pour voir si la différence est statistiquement significative. La méthode utilisée dépend du contexte, qu'il s'agisse de régression linéaire, de mesures physiques ou de terrain, et vise à déterminer si les différences observées sont réelles ou dues au hasard.

1. Comparaison de la pente à une valeur de référence

Principe : On compare une pente estimée (calculée par exemple par régression linéaire) à une valeur théorique ou prédéfinie.

Méthodologie :

- On calcule la différence entre la pente estimée (a_1) et la valeur de référence (p).
- On compare cette différence à la dispersion de la pente estimée, souvent en utilisant un test statistique comme un test t

- Le test *t* compare le ratio de la différence à la dispersion au seuil de Student pour un certain degré de liberté et un certain niveau de confiance.

Exemple : Vérifier si l'électrode d'un appareil suit la loi de Nernst en comparant la pente expérimentale à la valeur théorique de la pente de Nernst.

2. Comparaison de deux pentes

Principe : On compare deux pentes issues de deux ensembles de données différents pour savoir si elles sont significativement différentes.

Méthodologie :

Comparaison visuelle :

Tracer les droites de régression correspondantes pour comparer visuellement les pentes et les ordonnées à l'origine.

Tests statistiques :

- Effectuer des tests d'hypothèses pour déterminer si la différence entre les deux pentes est statistiquement significative ou due à une erreur d'échantillonnage.
- Des logiciels statistiques peuvent être utilisés pour effectuer ce test.

Exemple : Déterminer si l'interférence d'un aluminium affecte le dosage par absorption atomique en comparant la pente d'une courbe sans interférence avec celle d'une courbe avec interférence.

Conclusion : Si la différence est significative, on conclut que les pentes sont différentes. Si elle ne l'est pas, on peut estimer que les pentes sont égales et qu'une régression commune peut être calculée à partir de l'ensemble des données

Tableaux des tests statistiques à imprimer pour étudiants

Table d'intervalle de confiance de la moyenne

La table suivante donne les bornes inférieures des intervalles de confiance de niveau $1-\alpha = 0,95$ pour une proportion, où n est la taille de l'échantillon et $p = k / n$ la proportion observée. L'intervalle de confiance est $[p_{n,k}, 1-p_{n,n-k}]$ où les $p_{n,k}$ sont les valeurs lues dans le tableau et $p_{n,0} = 0$.

k / n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0126	0,1581								
3	0,0084	0,0943	0,2924							
4	0,0063	0,0676	0,1941	0,3976						
5	0,0050	0,0527	0,1466	0,2836	0,4782					
6	0,0042	0,0433	0,1181	0,2228	0,3588	0,5407				
7	0,0036	0,0367	0,0990	0,1841	0,2904	0,4213	0,5904			
8	0,0032	0,0318	0,0852	0,1570	0,2449	0,3491	0,4735	0,6306		
9	0,0028	0,0281	0,0749	0,1370	0,2120	0,2993	0,3999	0,5175	0,6637	
10	0,0025	0,0252	0,0667	0,1215	0,1871	0,2624	0,3475	0,4439	0,5550	0,6915
11	0,0023	0,0228	0,0602	0,1093	0,1675	0,2338	0,3079	0,3903	0,4822	0,5872
12	0,0021	0,0209	0,0549	0,0992	0,1517	0,2109	0,2767	0,3489	0,4281	0,5159
13	0,0019	0,0192	0,0504	0,0909	0,1386	0,1922	0,2513	0,3158	0,3857	0,4619
14	0,0018	0,0178	0,0466	0,0839	0,1276	0,1766	0,2304	0,2886	0,3514	0,4190
15	0,0017	0,0166	0,0433	0,0779	0,1182	0,1634	0,2127	0,2659	0,3229	0,3838
16	0,0016	0,0155	0,0405	0,0727	0,1102	0,1520	0,1975	0,2465	0,2988	0,3543
17	0,0015	0,0146	0,0380	0,0681	0,1031	0,1421	0,1844	0,2298	0,2781	0,3292
18	0,0014	0,0137	0,0358	0,0641	0,0969	0,1334	0,1730	0,2153	0,2602	0,3076
19	0,0013	0,0130	0,0338	0,0605	0,0915	0,1258	0,1629	0,2025	0,2445	0,2886
20	0,0013	0,0123	0,0321	0,0573	0,0866	0,1189	0,1539	0,1912	0,2306	0,2720

k / n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	0,7151									
12	0,6152	0,7353								
13	0,5455	0,6397	0,7529							
14	0,4920	0,5719	0,6613	0,7684						
15	0,4490	0,5191	0,5954	0,6805	0,7820					
16	0,4134	0,4762	0,5435	0,6165	0,6977	0,7941				
17	0,3833	0,4404	0,5010	0,5657	0,6356	0,7131	0,8049			
18	0,3575	0,4099	0,4652	0,5236	0,5858	0,6529	0,7270	0,8147		
19	0,3350	0,3836	0,4345	0,4880	0,5443	0,6042	0,6686	0,7397	0,8235	
20	0,3153	0,3605	0,4078	0,4572	0,5090	0,5634	0,6211	0,6830	0,7513	0,8316

Exemples : Pour un échantillon de taille n = 5 sur lequel une proportion observée est 3 / 5, on trouve pour bornes de l'intervalle de confiance 0, 1466 et 1 − 0,0527 = 0,9473, et, pour n = 20 et une proportion 12 / 20, on a pour bornes 0,3605 et 1 − 0,1912 = 0,8088.

Table de la loi de Dixon Valeur de $r_{1-\alpha}$

n \ α	**0,010**	**0,050**
3	0,988	0,941
4	0,889	0,765
5	0,780	0,642
6	0,698	0,560
7	0,637	0,507
8	0,590	0,468
9	0,555	0,437
10	0,527	0,412
11	0,745	0,637
12	0,704	0,600
13	0,670	0,570
14	0,641	0,546
15	0,616	0,525
16	0,595	0,507
17	0,577	0,490
18	0,561	0,475
19	0,547	0,462
20	0,535	0,450
21	0,524	0,440
22	0,514	0,430
23	0,505	0,421
24	0,497	0,413
25	0,489	0,406
26	0,486	0,399
27	0,475	0,393
28	0,469	0,387
29	0,463	0,381
30	0,457	0,376

Valeur F de la variable de Fisher-Snedecor F ($\nu 1$; $\nu 2$) pour = α 0.05

Teste d'égalité de la variance

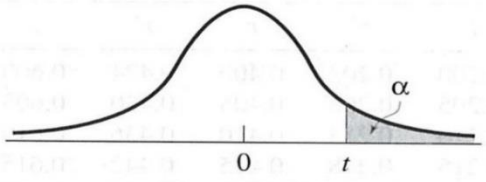
$\nu 1$: degrés de liberté du numérateur

$\nu 2$: degrés de liberté du dénominateur

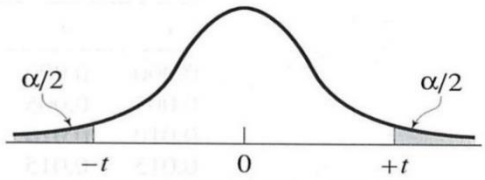
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	161.5	200	215.7	224.6	230.2	234	236.8	238.9	240.5	241.9	243	244	244.7	245.4	246	246.5	246.9	247.3	247.7	248
2	18.51	19	19.16	19.25	19.3	19.33	19.35	19.37	19.38	19.4	19.4	19.4	19.42	19.42	19.43	19.43	19.44	19.44	19.44	19.45
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.7	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.8
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.7	4.68	4.66	4.64	4.62	4.6	4.59	4.58	4.57	4.56
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.1	4.06	4.03	4	3.98	3.96	3.94	3.92	3.91	3.9	3.88	3.87
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.6	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.5	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.2	3.19	3.17	3.16	3.15
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.1	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94
10	4.96	4.1	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83	2.81	2.8	2.79	2.77
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.2	3.09	3.01	2.95	2.9	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.7	2.69	2.67	2.66	2.65
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3	2.91	2.85	2.8	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.6	2.58	2.57	2.56	2.54
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.6	2.58	2.55	2.53	2.51	2.5	2.48	2.47	2.46
14	4.6	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.7	2.65	2.6	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.4	2.39
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.9	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.4	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.4	2.37	2.35	2.33	2.32	2.3	2.29	2.28
17	4.45	3.59	3.2	2.96	2.81	2.7	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22	2.2	2.19
19	4.38	3.52	3.13	2.9	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.2	2.18	2.17	2.16
20	4.35	3.49	3.1	2.87	2.71	2.6	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.2	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12

Table de Stude

Table t : points de pourcentage supérieurs de la distribution t



Test unilatéral



Test bilatéral

	Seuil de signification pour le test unilatéral								
	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.0005
	Seuil de signification pour le test bilatéral								
dl	.50	.40	.30	.20	.10	.05	.02	.01	.001
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.620
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

4,50

nt

Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

Teste d'homogénéité de la variance (test de Bartlett)

LOI DU KHI-DEUX AVEC K DEGRÈS DE LIBERTÈ

QUANTILES D'ORDRE $1 - \gamma$

	γ										
k	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.94	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.81	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.28	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

Si k est entre 30 et 100 mais n'est pas un multiple de 10, on utilise la table ci-haut et on fait une interpolation linéaire.

Table de Student Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants

TABLE III

TABLE DE STUDENT

La table donne la probabilité α pour que t égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (ddl).

Exemple : avec ddl = 10, pour t = 2,228, la probabilité est $\alpha = 0,05$

α / ddl	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	**12,706**	31,821	**63,656**	636,578
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	**4,303**	6,965	**9,925**	31,600
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	**3,182**	4,541	**5,841**	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	**2,776**	3,747	**4,604**	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	**2,571**	3,365	**4,032**	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	**2,447**	3,143	**3,707**	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	**2,365**	2,998	**3,499**	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	**2,306**	2,896	**3,355**	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	**2,262**	2,821	**3,250**	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	**2,228**	2,764	**3,169**	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	**2,201**	2,718	**3,106**	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	**2,179**	2,681	**3,055**	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	**2,160**	2,650	**3,012**	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	**2,145**	2,624	**2,977**	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	**2,131**	2,602	**2,947**	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	**2,120**	2,583	**2,921**	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	**2,110**	2,567	**2,898**	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	**2,101**	2,552	**2,878**	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	**2,093**	2,539	**2,861**	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	**2,086**	2,528	**2,845**	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	**2,080**	2,518	**2,831**	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	**2,074**	2,508	**2,819**	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	**2,069**	2,500	**2,807**	3,768
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	**2,064**	2,492	**2,797**	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	**2,060**	2,485	**2,787**	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	**2,056**	2,479	**2,779**	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	**2,052**	2,473	**2,771**	3,689
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	**2,048**	2,467	**2,763**	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	**2,045**	2,462	**2,756**	3,660
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	**2,042**	2,457	**2,750**	3,646
40	0,126	0,681	1,050	1,303	1,684	**2,021**	2,423	**2,704**	3,551
80	0,126	0,678	1,043	1,292	1,664	**1,990**	2,374	**2,639**	3,416
120	0,126	0,677	1,041	1,289	1,658	**1,980**	2,358	**2,617**	3,373
∞	0,126	0,675	1,037	1,282	1,645	**1,960**	2,327	**2,577**	3,293

Teste d'homogénéité de comparaison de deux pentes

LOI DE STUDENT AVEC *K* DEGRÈS DE LIBERTÈ

QUANTILES D'ORDRE 1 – γ

	γ										
k	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0025	0.0010	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291