



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Introduction à la théorie de la stabilité

Présentée par:

Khenouchi Rayane

Devant le Jury :

Dr. Adjmi Salim	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Président
Dr. Chidouh Amar	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Bouaziz Asma	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2023-2024

Remerciements

Au début et avant tout, je remercie ALLAH qui m'a donné la patience, la volonté et le courage à achever ce travail.

Je remercie Dr. Chidouh Amar, mon directeur de mémoire, pour sa guidance précieuse, sa disponibilité constante et ses conseils avisés tout au long de ce travail.

Je souhaite également remercier Dr. Adjmi Salim, pour avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Enfin, mes sincères remerciements vont à Dr. Bouaziz Asma, d'avoir accepté de faire partie de jury.

J'adresse également mes sincères remerciements à tous les enseignants du Département de Mathématiques de l'Université Chadli Bendjedid - El Tarf.

Dédicace

À mon père,

Dans l'ombre de ton absence, chaque succès est teinté de tristesse, car tu n'es pas là pour le partager. Mais aujourd'hui, plus que jamais, je sens ta présence à mes côtés. Ce mémoire, qui marque la fin de mes études, est un hommage à toi. Je dédie ce triomphe à ta mémoire éternelle, avec l'espoir que, tu puisses ressentir toute la fierté et l'amour que je garde pour toi.

Et à ma mère, ma soeur et mes frères,

Votre soutien indéfectible, votre amour et votre encouragement au cours de ces dernières années ont été les piliers de ma réussite. Sans votre aide précieuse, ce chemin aurait été bien plus difficile. Ce triomphe. Merci d'avoir été à mes côtés, de m'avoir soutenu dans les moments difficiles et de m'avoir aidé à persévérer jusqu'à ce que ce rêve devienne réalité.

Avec toute ma gratitude et mon amour infini.

Résumé

Dans ce travail, nous donnons une approche simplifiée des mouvements stables et instables. Nous présentons le domaine d'application de la théorie de la stabilité, en particulier la méthode de Lyapounov. La stabilité d'un satellite artificiel sera étudiée en détail après avoir eu les définitions nécessaires et quelques critères de stabilité.

ملخص

في هذا العمل، نقدم دراسة مبسطة للحركات المستقرة وغير المستقرة حيث نقدم مجال تطبيق نظرية الاستقرار، ولا سيما طريقة ليابونوف. سيتم دراسة استقرار قمر صناعيا بالتفصيل بعد الحصول على التعريفات اللازمة وبعض معايير الاستقرار.

Abstract

In this work, we give a simplified approach to stable and unstable movements. We present the field of application of the stability theory, in particular the Lyapounov method. The stability of an artificial satellite will be studied in detail after having the necessary definitions and some stability criteria.

Table des matières

Remerciements	1
Dédicace	2
Résumé	3
Table des matières	6
Introduction	8
1 STABILITÉ AU SENS DE LIAPOUNOV	10
1.1 Notions fondamentales et définitions	10
1.2 Stabilité de points de repos	16
2 STABILITÉ ET FONCTION DE LIAPOUNOV	23
2.1 Méthode des fonctions de Liapounov :	23
2.2 Théorème de Liapounov de la stabilité	25
2.3 Théorème de Liapounov de la stabilité asymptotique	25
2.4 Théorème de Liapounov de l'instabilité	27
2.5 Théorème de Tchétaev de l'instabilité	28
3 CRITÈRES DE STABILITÉ	30
3.1 Stabilité en première approximation	30
3.2 Critère de Routh et Hurwitz	35
3.3 Critère géométrique de stabilité (Critère de Mikhaïlov)	37
4 Stabilité d'un satellite artificiel de la terre	40
Conclusion	53

Bibliographie

55

Introduction

La théorie de la stabilité du mouvement a été créée à la fin du XIX^{ème} siècle par Liapounov. Cette théorie a trouvé une large application dans divers domaines de la physique et de la technique.

D'un point de vue mathématique, la théorie de la stabilité présente un cas particulier de la théorie qualitative des équations différentielles.

Nous exposons, dans cette présente étude le domaine d'application de cette théorie et les différentes méthodes de la recherche de la stabilité.

La théorie de la stabilité du mouvement étudie l'influence des facteurs de perturbation sur le mouvement d'un système matériel. Ces forces ne sont pas prises en considération dans la description du mouvement car leurs effets sont négligeables par rapport aux forces principales.

Ces forces perturbatrices sont d'habitude inconnues et peuvent agir instantanément ; ce qui entraîne un léger changement dans les valeurs des coordonnées et les vitesses du système.

Cependant, ces forces peuvent agir continuellement, ce qui signifie que les équations différentielles du mouvement obtenues se distinguent des équations exactes parce que, dans ces dernières, nous n'avons pas encore considéré les petits paramètres correctifs.

Il est bien connu que l'influence des petits facteurs de perturbation sur le mouvement d'un système matériel, ne sera pas la même pour les différents mouvements et pour certains d'entre eux, cette influence est insignifiante de sorte que le mouvement perturbé se distingue peu du mouvement non-perturbé.

Toutefois, il existe des mouvements où l'influence des perturbations se fait sentir considérablement à tel point que le mouvement perturbé se distingue fort du mouvement non-perturbé.

La théorie de la stabilité du mouvement s'intéresse à l'établissement des critères permettant de juger la stabilité ou l'instabilité du mouvement considéré.

Comme, en réalité, les perturbations sont inévitables, il est évident que le problème de la stabilité du mouvement a une importance significative, théorique et pratique.

Nous avons donné ci-dessus une approche simplifiée des mouvements stable et instable, cependant, il est certain que ces notions exigent une définition plus rigoureuse. D'ailleurs, plusieurs auteurs ont traité ces notions de manière différente [2-5].

Notons que A. Liapounov a accordé une importance particulière à l'étude de la stabilité des mouvements [1].

STABILITÉ AU SENS DE LIAPOUNOV

1.1 Notions fondamentales et définitions

Soit donné un système d'équations différentielles :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Une solution $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, du système (1.1) satisfaisant aux conditions initiales :

$$\varphi_i(t) = \varphi_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

est dite Stable au sens de Liapounov pour $t \rightarrow +\infty$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que toute solution $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, du système (1.1) dont les valeurs initiales satisfont aux conditions :

$$|x_i(t_0) - \varphi_{i0}| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2)$$

l'on ait les inégalités :

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varphi, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

pour $t \geq t_0$.

La solution φ_t est dite instable si pour un $\delta > 0$ aussi petit que l'on veut, les inégalités (1.3) ne sont pas vérifiées pour au moins une solution $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Si, sous la condition (1.2), en plus des inégalités (1.3) est aussi vérifiée la condition :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

la solution $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, est dite asymptotiquement stable.

L'étude de la stabilité de la solution $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ du système (1.1) peut être ramenée à celle de la solution nulle (triviale) $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, d'un certain système, analogue au système (1.1) :

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.5)$$

avec

$$F_i(0, 0, \dots, 0, t) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

on dit que le point $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, est le point de repos de système (1.5).

Concernant le point de repos, les définitions de la stabilité et de l'instabilité peuvent être énoncées de la façon suivante :

Le point de repos $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, est stable au sens de Liapounov si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que toute solution $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, dont les valeurs initiales $x_{i0} = x_i(t_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, satisfont à la condition :

$$|x_{i0}| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.6)$$

doit vérifier les inégalités

$$|x_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.7)$$

pour tous les $t \geq t_0$.

Dans le cas ($n = 2$), on peut en donner l'interprétation géométrique suivante : Quelque que soit le rayon ε d'un cylindre d'axe Ot , il existe dans le plan $t = t_0$ un voisinage δ du point $(0, 0, t_0)$ tel que toutes les courbes intégrales $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ issues de ce voisinage seront confinées, pour tous $t \geq t_0$, à l'intérieur de ce cylindre (FIGURE 1.1).

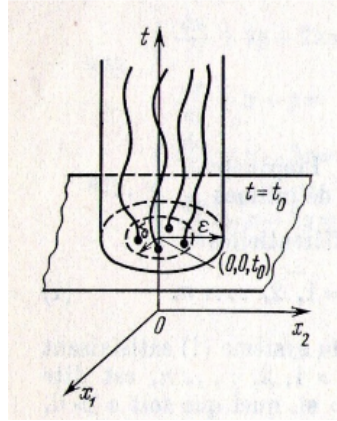


FIGURE 1.1 –

Si, en plus des inégalités (1.3) est aussi satisfaite la condition :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

on aura la stabilité est asymptotique.

Un point de repos $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$, est dit instable si pour un $\delta > 0$ aussi petit que l'on veut, l'une au moins des solutions $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, ne satisfait pas à la condition (1.7).

Exemple 1.1

En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov, on étudie la stabilité de la solution de l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t - x, \quad (1.8)$$

qui satisfait à la condition initiale :

$$x(0) = 0.$$

En effet, L'équation (1.8) est une équation linéaire non homogène.

Sa solution générale est :

$$x(t) = Ce^{-t} + t, \quad \text{si} \quad x(0) = 0,$$

la solution est :

$$\varphi(t) = t. \quad (1.9)$$

Considérons la condition initiale $x(0) = x_0$ satisfait une solution :

$$x(t) = x_0 e^{-t} + t, \quad (1.10)$$

faisons alors, la différence des solutions (1.10) et (1.9) de l'équation (1.8) et écrivons-la sous la forme :

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-t} + t - t = (x_0 - 0) e^{-t}.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ (par exemple $\varepsilon = \delta$) tel que toute solution $x(t)$ de l'équation (1.8), dont les valeurs Initiales satisfont à la condition :

$$|x_0 - 0| < \delta,$$

vérifie l'inégalité :

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0| e^{-t} < \varepsilon,$$

pour tous les $t \geq 0$.

Par suite, la solution $\varphi(t)$ est stable. De plus, puisque :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_0 - 0| e^{-t},$$

la solution $\varphi(t)$ est asymptotiquement stable.

Exemple 1.2

En partant de la définition de la stabilité au sens de Liapounov, montrons qu'une solution du système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \quad (1.11)$$

qui satisfait aux conditions initiales $x(0) = 0, y(0) = 0$ est stable.

La solution du système (1.11) satisfaisant aux conditions initiales données est :

$$x(t) = 0, \quad y(t) = 0.$$

Toute solution de ce système satisfaisant aux conditions $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ est de la forme :

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Prenons un $\varepsilon > 0$ quelconque et montrons qu'il existe un $\delta > 0$ tel que pour :

$$|x_0 - 0| < \delta, \quad |y_0 - 0| < \delta,$$

on l'ait les inégalités :

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon,$$

$$|y(t) - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon,$$

pour tous $t \geq 0$.

Cela signifiera justement, en vertu de la définition même, que la solution nulle $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ du système est stable au sens de Liapounov.

On a évidemment :

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| \leq |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leq |x_0| + |y_0|,$$

$$|x_0 \sin t + y_0 \cos t| \leq |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \leq |x_0| + |y_0|, \quad (1.12)$$

pour tous les t .

Donc, si $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$, on a à plus forte raison :

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon, \quad |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon, \quad (1.13)$$

pour tous les t .

Par conséquent, si l'on prend par exemple $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$, alors pour $|x_0| < \delta$ et $|y_0| < \delta$ on aura, en raison de (1.12) les inégalités (1.13) pour tous les $t \geq 0$, c'est-à-dire que réellement

la solution nulle du système (1.11) est stable au sens de Liapounov, mais cette stabilité n'est pas asymptotique.

Théorème 1.1

Les solutions d'un système d'équations différentielles linéaires :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sont toutes soit simultanément stables soit instables.

Cette assertion n'est pas vraie pour des systèmes non linéaires dont certaines solutions peuvent être stables et d'autres instables.

Exemple 1.3

Considérons une équation non linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2(t), \tag{1.14}$$

elle a des solutions évidentes $\varphi(t) = -1$ et $\varphi(t) = 1$.

La solution $\varphi(t) = -1$ de cette équation est instable alors que la solution $\phi(t) = 1$ est asymptotiquement stable. En effet, lorsque $t \rightarrow +\infty$, toutes les solutions de l'équation (1.14) :

$$x(t) = \frac{(1 + x_0) e^{2(t-t_0)} - (1 - x_0)}{(1 + x_0) e^{2(t-t_0)} + (1 - x_0)}, \quad (x_0 \neq -1),$$

tendent vers $+1$.

Par définition, cela signifie que la solution $\varphi(t) = 1$ de l'équation est asymptotiquement stable.

1.2 Stabilité de points de repos

Soit donné un système de deux équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11} x + a_{12} y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21} x + a_{22} y, \end{cases} \quad (1.15)$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

le point $x = 0, y = 0$ en lequel s'annulent les seconds membres des équations du système (1.15) s'appelle point de repos du système (1.15).

Pour étudier le point de repos de système (1.15) il faut établir l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.16)$$

et chercher ses racines λ_1 et λ_2 .

Les cas suivants peuvent se présenter :

1. Les racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique (1.16) sont réelles et distinctes :
 - a. $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, le point de repos est asymptotiquement stable (FIGURE 1.2).



FIGURE 1.2 –

b. $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, le point de repos est instable (FIGURE 1.3).

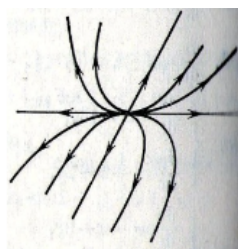


FIGURE 1.3 –

c. $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$, le point de repos est instable (FIGURE 1.4).



FIGURE 1.4 –

2. Les racines de l'équation caractéristique (1.16) sont complexes ($\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$) :

a. $p < 0$ et $q \neq 0$, le point de repos est asymptotiquement stable (FIGURE 1.5).



FIGURE 1.5 –

b. $p > 0$ et $q \neq 0$, le point de repos est instable (FIGURE 1.6).



FIGURE 1.6 –

c. $p = 0$ et $q \neq 0$, le point de repos est stable (FIGURE 1.7).

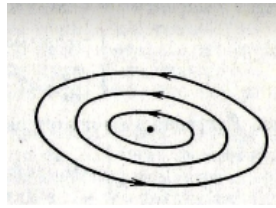


FIGURE 1.7 –

3. Les racines λ_1, λ_2 sont multiples :

a. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, le point de repos est asymptotiquement stable (FIGURE 1.8 , 1.9).



FIGURE 1.8 –

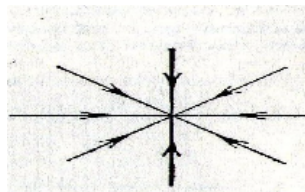


FIGURE 1.9 –

b . $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, le point de repos est instable (FIGURE 1.10, 1.11).



FIGURE 1.10 –

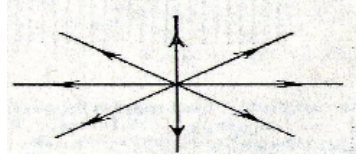


FIGURE 1.11 –

Exemple 1.4

Définir la nature du point de repos $(0,0)$ du système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$$

En effet, Ecrivons l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0,$$

ses racines $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} > 0$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2} > 0$ sont réelles, distinctes et positives.

Par suite, le point de repos $(0,0)$ est un nœud instable.

La relation qui existe entre les types de points de repos et les valeurs des racines de l'équation caractéristique (1.16) peut être visualisée.

A cet effet, introduisons les désignations $\Delta = -(a_{11} + a_{12})$, $\Delta = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$. Alors, l'équation caractéristique (1.16) s'écrira sous la forme $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$.

Considérons un plan muni de coordonnées cartésiennes rectangulaires Δ et σ et indiquons dans ce plan les régions correspondant aux divers types de points de repos. De la classification donnée plus haut il résulte que les conditions de stabilité d'un point de repos sont $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$. Elles sont réalisées pour $\Delta > 0$ et $\sigma > 0$, c'est-à-dire pour des points situés dans le premier quadrant.

Si λ_1 et λ_2 sont complexes, le point de repos sera du type d'un foyer. A cette condition satisfont des points qui se situent entre les branches de la parabole $\sigma^2 = 4\Delta$ et n'appartiennent pas à l'axe 0, $\Delta(\sigma^2 < 4\Delta, \sigma \neq 0)$.

Les points situés sur le demi-axe $\sigma = 0$ pour lesquels $\Delta > 0$ correspondent à des points du type d'un centre. Les points situés en dehors de la parabole $\sigma^2 = 4\Delta$ ($\sigma^2 \geq 4\Delta$) correspondent à des points du type d'un nœud.

En faisant abstraction des cas particuliers (passage par l'origine de coordonnées), remarquons qu'un col peut se transformer en un nœud stable ou instable (FIGURE 1.12).

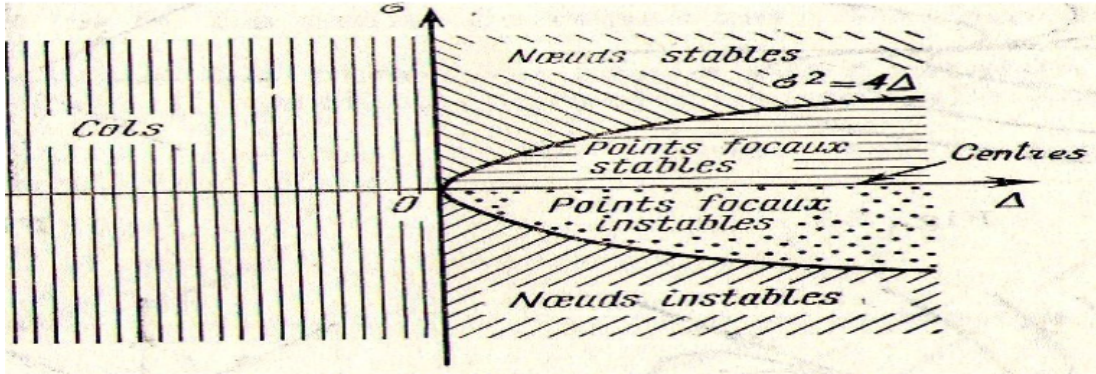


FIGURE 1.12 –

Un nœud stable peut se transformer soit en un col soit en un foyer stable. Le cas des racines égales $\lambda_1 = \lambda_2$ correspond à la frontière entre les nœuds et les foyers, c'est-à-dire à la parabole $\sigma^2 = 4\Delta$.

Exemple 1.5

Etudier l'équation des oscillations élastiques :

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \beta^2 x = 0, \quad (1.17)$$

tenant compte du frottement et de la résistance du milieu (pour $\alpha > 0$).

En effet, Passons l'équation (1.17) au système d'équations équivalent :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -2\alpha y - \beta^2 x. \end{cases} \quad (1.18)$$

Pour établir la nature du point de repos (0,0) du système (1.18), formons l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta^2 & -2\alpha\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \beta^2 = 0,$$

d'où

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (1.19)$$

Considérons les cas suivants :

1. $\alpha = 0$ (la résistance du milieu est nulle), de (1.19) on obtient $\lambda_{1,2} = -\mp i\beta$, le point de repos est stable et représente un centre (tous les mouvements sont périodiques).
2. $\alpha > 0$, $\alpha^2 - \beta^2 < 0$, les racines λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $Re \lambda < 0$, le point de repos est un foyer stable (les oscillations s'amortissent).
3. $\alpha < 0$ (cas d'un «frottement négatif»), $\alpha^2 - \beta^2 < 0$, les racines λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $Re \lambda > 0$, le point de repos est un foyer instable.
4. $\alpha > 0$, $\alpha^2 - \beta^2 \geq 0$ (la résistance du milieu est grande $\alpha \geq \beta$), les racines λ_1 et λ_2 sont réelles et négatives. Le point de repos est un nœud stable (tous les mouvements sont amortis et non oscillatoires).
5. $\alpha < 0$, $\alpha^2 - \beta^2 \geq 0$ (cas d'un «frottement négatif» élevé), les racines λ_1 et λ_2 sont réelles et positives. Le point de repos est un nœud instable.

Soit un système d'équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients constants :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \ (n \geq 2). \quad (1.20)$$

On constate que ce système se caractérise par des types analogues de disposition des courbes intégrales au voisinage de l'origine des coordonnées (col généralisé, nœud généralisé, ..., etc.).

Théorème 1.2

Si toutes les racines de l'équation caractéristique du système (1.20) possèdent une partie réelle négative, alors le point repos $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ de ce système est asymptotiquement stable.

Si au moins une racine de l'équation caractéristique a une partie réelle positive, le point de repos est instable.

Exemple 1.6

Soit donné le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + z, \\ \frac{dy}{dt} = -2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = y - z. \end{cases}$$

son point de repos $(0, 0, 0)$ sera-t-il stable ?

Etablissons l'équation caractéristique $(1 + \lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 0$.

Les racines de cette équation $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ont des parties réelles négatives. Par conséquent, le point de repos de ce système sera asymptotiquement stable.

2 STABILITE ET FONCTION DE LIAPOUNOV

D'habitude, La recherche de la stabilité ne présente pas de difficultés dans le cas où les équations différentielles du mouvement perturbé peuvent être résolues. Mais, ce sont des cas exceptionnels qui, pratiquement, n'existent presque pas. C'est pourquoi les efforts des chercheurs ont été consacrés à l'établissement de méthodes permettant la solution du problème de la stabilité sans passer à résoudre les équations différentielles.

2.1 Méthode des fonctions de Liapounov :

La méthode des fonctions de Liapounov consiste à étudier directement la stabilité de la position d'équation du système :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

à l'aide d'une fonction convenablement choisie $V(t, x_1, \dots, x_n)$ que l'on appelle fonction de Liapounov et ceci sans rechercher au préalable les solutions du système.

Bornons-nous à examiner des systèmes autonomes :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

pour lesquels $x \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ est un point de repos.

On dit qu'une fonction $V(t, x_1, \dots, x_n)$ définie dans un certain voisinage de l'origine des coordonnées est de signe défini (définie positive ou définie négative), si dans un domaine :

$$|x_i| \leq h, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

avec h est nombre positif suffisamment petit, elle ne peut prendre que des valeurs de signe défini et ne s'annule que pour $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. C'est ainsi que dans le cas de $n = 3$ les fonctions :

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \text{et} \quad V = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2,$$

seront des fonctions définies positives et la valeur de $h > 0$ peut être prise ici aussi grande que l'on veut.

On dit qu'une fonction $(t, x_1, \dots, x_n)$ est de signe constant (positive ou négative) si, dans le domaine (2.2) elle ne peut prendre que des valeurs d'un seul signe déterminé, mais peut s'annuler aussi pour $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$. Par exemple, la fonction :

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2,$$

est une fonction de signe constant (positive). En effet, la fonction $V = (x_1, x_2, x_3)$ peut se mettre sous la :

$$V = (x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2,$$

qui montre qu'elle s'annule aussi pour $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$, à savoir pour $x_3 = 0$ et pour des x_1 et x_2 tels que $x_1 = -x_2$.

Soit $V = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction dérivable de ses arguments et soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ certaines fonctions du temps qui satisfont au système d'équations différentielles (2.1). Alors, la dérivée totale :

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dV}{dx_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dV}{dx_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.3)$$

La grandeur $\frac{dV}{dt}$ définie par la formule (2.3) s'appelle dérivée totale de la fonction V par rapport au temps composée en raison du système d'équation (2.1).

2.2 Théorème de Liapounov de la stabilité

Théoreme 2.1

Si pour le système d'équations différentielles (2.1) il existe une fonction $V = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de signe défini (fonction de Liapounov) dont la dérivée totale par rapport au temps $\frac{dV}{dt}$ composée en vertu du système (2.1) est une fonction de signe constant, inverse de V ou est identiquement nulle, alors le point de repos $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ du système (2.1) est stable.

2.3 Théorème de Liapounov de la stabilité asymptotique

Théoreme 2.2

Si pour le système d'équations différentielles (2.1) il existe une fonction $V = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de signe défini dont la dérivée totale par rapport au temps, composée en vertu du système (2.1), est aussi une fonction de signe défini inverse de V , alors le point de repos $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ du système (2.1) est asymptotiquement stable.

Exemple 2.1

Considérons le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (2.4)$$

Prenons pour $V(x, y)$ la fonction $V = x^2 + y^2$. C'est une fonction définie positive. La dérivée de la fonction V en vertu du système (2.4) est :

$$\frac{dV}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2xy - 2xy \equiv 0,$$

du Théorème 2.1 il résulte que le point de repos $O(0, 0)$ du système (2.4) est stable.

Pourtant sa stabilité n'est pas asymptotique : les trajectoires du système(2.4) sont des circonférences et elles ne tendent pas vers le point $O(0,0)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Exemple 2.2

Considérons le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y^3. \end{cases} \quad (2.5)$$

En prenant toujours $V = x^2 + y^2$, on trouve :

$$\frac{dV}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - 3y^3) = 2(x^4 + 3y^4),$$

Ainsi, $\frac{dV}{dt}$ est une fonction définie négative. En vertu du Théorème 2.2 le point de repos $O(0,0)$ du système (2.5) est asymptotiquement stable.

Une méthode générale permettant de former les fonctions de Liapounov n'existe pas.

Dans les cas les plus simples, on peut chercher la fonction de Liapounov sous la forme :

$$V(x, y) = a x^2 + b y^2, \quad V(x, y) = a x^4 + b y^4,$$

$$V(x, y) = a x^4 + b y^4, \quad (a > 0, b > 0), \dots, etc.$$

Exemple 2.3

Etudier à l'aide d'une fonction de Liapounov la stabilité de la solution nulle $x \equiv 0, y \equiv 0$ du système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2y^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{y}, \end{cases}$$

Cherchons la fonction de Liapounov sous la forme :

$$V(x, y) = a x^2 + b y^2, \quad \text{ou} \quad a > 0, b > 0,$$

sont des paramètres arbitraires.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = 2 a x (-2 y + x^2 y^2) + 2 b y (x - 12 y - 12 x^3 y) \\ &= (2 a x^2 + b y^2) + (2 x y - x^3 y^2)(b - 2 a), \end{aligned}$$

en posant $b = 2 a$, on obtient $\frac{dV}{dt} = -2 a (x^2 + y^2) \leq 0$ Ainsi, pour tout $a > 0$ et $b = 2 a$ la fonction $V = a x^2 + 2 a y^2$ sera une fonction définie positive et sa dérivée $\frac{dV}{dt}$ formée en vertu du système donné sera une fonction définie négative. Du Théorème 2.2 de Liapounov il résulte que la solution nulle $x \equiv 0, y \equiv 0$ du système donné est asymptotiquement stable.

Si l'on ne parvient pas à trouver la fonction $V(x, y)$ sous la forme indiquée plus haut, il convient de la chercher sous la forme $V = a x^4 + b y^2$ ou $V = a x^4 + b y^4, \dots$, ect.

2.4 Théorème de Liapounov de l'instabilité

Théorème 2.3

Supposons que pour le système d'équations différentielles (2.1) il existe une fonction :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dérivable au voisinage de l'origine des coordonnées et telle que $V(0, 0, \dots, 0) = 0$, Si sa dérivée totale $\frac{dV}{dt}$ formée en vertu du système (2.1) est une fonction définie positive et s'il existe aussi près que l'on veut de l'origine des coordonnées des points en lesquels la fonction $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ prend des valeurs positives, alors le point de repos $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ est instable.

2.5 Théorème de Tchétaev de l'instabilité

Théorème 2.4

Supposons que pour le système d'équations différentielles (2.1) il existe une fonction :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

continument dérivable dans un certain voisinage du point de repos $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$, et satisfaisant, dans un certain voisinage fermé du point de repos, aux conditions suivantes :

- 1) Dans le voisinage Ω aussi petit que l'on veut du point $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$, il existe un domaine Ω_1 dans lequel $V(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ et $V = 0$ en des points frontières de Ω_1 qui sont intérieurs pour Ω_1 .
- 2) Le point $O(0, 0, \dots, 0)$ de repos est un point frontière du domaine Ω_1 .
- 3) Dans le domaine Ω_1 la dérivée $\frac{dV}{dt}$ formée en vertu du système (2.1) est une fonction définie positive.

Alors, le point de repos $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ du système (2.1) est instable.

Exemple 2.4

Etudier la stabilité du point de repos $x = 0, y = 0$ du système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = -y, \end{cases}$$

Prenons la fonction $V(x, y) = x^2 - y^2$, Alors :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = 2x^2 + 2y^2,$$

est une fonction définie positive.

Puisqu'il existe des points situés aussi près que l'on veut de l'origine des coordonnées en lesquels $V > 0$ (par exemple $V = x^2$ le long de la droite $y = 0$), toutes les conditions du

Théorème 2.3 sont réalisées et donc le point de repos $O(0,0)$ est instable.

Exemple 2.5

Etudier la stabilité du point de repos $x = 0, y = 0$ du système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^5 + y^3, \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + y^5. \end{cases}$$

La fonction $V(x, y) = x^4 - y^4$ satisfait aux conditions du Théorème de Tchétaev :

1) $V > 0$ pour $|x| > |y|$.

2) $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = 4(x^8 - y^8)$, est une fonction définie positive dans domaine

$|x| > |y|$.

Par suite le point de repos $x = 0, y = 0$ est instable.

3.1 Stabilité en première approximation

Soit un système d'équations différentielles :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

et soit $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, est point de repos du système (3.1).

C'est-à-dire $f_i(0, 0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Nous supposons que les fonctions $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$i = 1, 2, \dots, n$ sont un nombre de fois suffisant dérivables à l'origine des coordonnées.

Développons la fonctions f_i en série de Taylor suivant x dans le voisinage de l'origine des coordonnées :

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ici, $a_{ij} = \frac{\partial f_i(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_1}$ et R_i sont des termes du deuxième ordre de petitesse par rapport à

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Alors, le système initial (3.1) prend la forme :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Considérons au lieu du système (3.2) le système :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, (a_{ij} \text{ const}), \quad (3.3)$$

appelé système d'équations en première approximation du système (3.1).

On peut énoncer les propositions suivantes :

1. Si toutes les racines de l'équation caractéristique possèdent des parties réelles négative, la solution nulle $x_i \equiv 0$, du système (3.3) et celle du système (3.2) sont asymptotiquement stable.
2. Si au moins une racine de l'équation caractéristique possède une partie réelle positive, la solution nulle du système (3.3) et celle du système (3.2) sont instable.

On dit que dans les cas 1 et 2 il est possible d'étudier la stabilité en première approximation.

Dans des cas critiques, où les parties réelles de toutes les racines de l'équation caractéristique sont non positives et la partie réelle d'au moins une racine est nulle, l'étude de la stabilité en première approximation est en général impossible (l'influence due aux termes non linéaires R_i devient considérable).

Exemple 3.1

Etudier la stabilité en première approximation du point de repos du système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 5y^2, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y + \frac{x^3}{2}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Le système en première approximation est :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y, \end{cases} \quad (3.5)$$

et les termes non linéaires satisfont aux conditions énoncées : leur ordre est supérieur ou égal à deux. Ecrivons l'équation caractéristique du système (3.5) :

$$\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0, \quad (3.6)$$

les racines de l'équation caractéristique (3.6) $\lambda_1 = 1 + \frac{\sqrt{13}}{3}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ sont réelles et $\lambda_1 > 0$. Par suite, la solution nulle $x = 0$, $y = 0$ du système (3.4) est instable.

Exemple 3.2

Considérons le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x - y^3. \end{cases} \quad (3.7)$$

Le point de repos $x = 0$, $y = 0$ du système (3.7) est asymptotiquement stable car pour ce système la fonction $V = x^2 + y^2$ satisfait à toutes les conditions du Théorème de Liapounov sur la stabilité asymptotique. En particulier :

$$\frac{dV}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0.$$

En même temps, le point de repos $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ du système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y^3, \end{cases} \quad (3.8)$$

est instable en vertu du Théorème de Tchétaev : en prenant $V = x^2 + y^2$, on aura $2(x^4 + y^4)$. Les systèmes (3.7) et (3.8) ont le même système en première approximation :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \end{cases} \quad (3.9)$$

l'équation caractéristique du système (3.9), $\lambda^2 + 1 = 0$ possède des racines imaginaires pures de sorte que les parties réelles de ses racines sont nulles.

Pour le système en première approximation (3.9) l'origine de coordonnées sert de centre. Les systèmes (3.7) et (3.8) sont obtenus par suite de petites perturbations des seconds membres du système (3.9) au voisinage de l'origine des coordonnées. Pourtant ces petites perturbations ont pour résultat la transformation des trajectoires fermées en des spirales.

Dans le cas (3.7), ces spirales s'approchent de l'origine des coordonnées et forment un foyer stable au point $O(0,0)$, alors que dans le cas (3.8) elles s'éloignent de l'origine des coordonnées et forment au point un foyer instable. Ainsi, dans un cas critique, les termes non linéaires peuvent influencer sur la stabilité du point de repos.

Exemple 3.3

Considérons un circuit électrique fermé comprenant des éléments non linéaires (FIGURE 3.1) ; l'équation de ce circuit est :

$$L \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + \frac{1}{C} + g\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad (3.10)$$

ici x est la charge électrique du condensateur et donc $\frac{dx}{dt}$, le courant dans le circuit : R , la résistance ; L , l'inductance ; C , la capacité ; $g\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ sont des termes non linéaires de degré non inférieur à deux, $g(0,0)$. L'équation (3.10) est équivalente au système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{LC}x - \frac{R}{L}y - \frac{1}{L}g(x, y). \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour lequel l'origine des coordonnées $O(0,0)$ est point de repos.

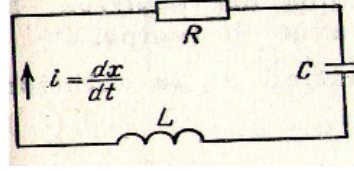


FIGURE 3.1 –

Considérons le système en première approximation :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{LC}x - \frac{R}{L}y. \end{cases} \quad (3.12)$$

L'équation caractéristique du système (3.12) est de la forme :

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0. \quad (3.13)$$

Si $\frac{R^2}{L^2} < \frac{4}{LC}$, c'est-à-dire si $R^2 < \frac{4L}{C}$, l'équation (3.13) a des racines complexes à partie réelle négative $p = -\frac{R}{4L}$ et donc pour les systèmes (3.12) et (3.11) l'origine des coordonnées est asymptotiquement stable.

Si $R^2 > \frac{4L}{C}$, l'origine des coordonnées est aussi asymptotiquement stable (tous les paramètres R, L, C sont positives).

La stabilité asymptotique du point de repos découle des considérations physiques : lorsque la résistance ohmique est positive, le courant finit inévitablement par disparaître avec le temps.

3.2 Critère de Routh et Hurwitz

Soit une équation différentielle linéaire à coefficients réelles constants :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (a_0, a_1, \dots, a_n = \text{const}, \quad a_0 > 0). \quad (3.14)$$

La solution nulle $y \equiv 0$ de l'équation (3.14) est asymptotiquement stable si toutes les racines de l'équation caractéristique :

$$a_0 \lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_n = 0, \quad (3.15)$$

ont leur partie réelle négative.

Critère de Routh et Hurwitz

Pour que toutes les racines de l'équation (3.15) aient leurs parties réelles négatives, il faut et il suffit que tous les mineurs diagonaux principaux de la matrice de Hruwitz soient positifs.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

La matrice de Hruwitz est formée comme suit. Suivant la diagonale principale on écrit les coefficients du polynome (3.15) en commençant par a_1 et an finissant par a_n . Les colonnes sont constituées alternativement de coefficients affectés de seuls indices impairs ou de seuls indices pairs, le coefficient a_0 étant compris au nombre de ceux derniers. Tous les autres éléments de la matrice correspondant aux coefficients d'indices supérieurs à n ou inférieurs à 0 sont supposés nuls. Les mineurs diagonaux principaux de la matrice de Hurwitz sont de la forme :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1, & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, & \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} \dots & a_n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi la condition de Hruwitz s'énonce : pour que la solution $y \equiv 0$ de l'équation (3.15) soit stable il faut et il suffit que soient vérifiées les relations :

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_{n-1}, \Delta_n > 0, \quad (3.17)$$

puisque $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, la condition $\Delta_n > 0$ peut être remplacée par celle de $a_n > 0$.

Exemple 3.4

Etudier la stabilité de la solution nulle de l'équation :

$$y^{(4)} + 5 y^{(3)} + 13 y^{(2)} + 19 y^{(1)} + 10 y = 0. \quad (3.18)$$

Etablissons l'équation caractéristique :

$$\lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda + 10\lambda = 0,$$

ici, $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 13, a_3 = 19, a_4 = 10$.

Ecrivons les mineurs diagonaux de la matrice de Hruwitz :

$$\begin{aligned} \Delta_1 = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0, \\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0. \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$.

On voit donc, que la solution triviale $y \equiv 0$ de l'équation (3.18) est asymptotiquement stable.

Le calcul peut se faire, par exemple, comme suit. On forme d'abord le mineur d'indice le plus élevé Δ_n de la matrice de Hruwitz. A partir de lui, on écrit sans peine tous les mineurs d'ordre inférieur $\Delta_{n-1}, \dots, \Delta_1$. Puis, on commence à calculer successivement $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, etc.

Si l'on rencontre un mineur négatif, c'est le signe que la solution est instable de sorte que le calcul ultérieur devient inutile.

3.3 Critère géométrique de stabilité (Critère de Mikhailov)

Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre à coefficients réels constants :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (3.19)$$

son équation caractéristique est :

$$a_0 \lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_n = 0. \quad (3.20)$$

Le critère de Mikhailov permet de résoudre la question relative à la disposition des racines de l'équation caractéristique (3.20) sur le plan complexe et donc d'établir si la solution nulle de l'équation (3.19) est stable ou ne l'est pas. En posant $\lambda = i\omega$, on obtient :

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega),$$

où

$$u(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots,$$

$$v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots,$$

la quantité $f(i\omega)$ peut être représentée pour une valeur donnée du paramètre ω sous la forme d'un vecteur sur le plan complexe u, v ayant son origine à l'origine des coordonnées. Lorsque le paramètre ω varie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ l'extrémité de ce vecteur décrit une certaine courbe appelée courbe de Mikhailov (FIGURE 3.2).

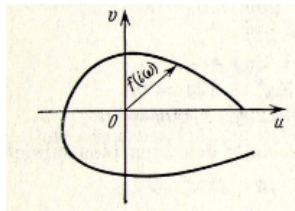


FIGURE 3.2 –

La fonction $u(\omega)$ étant paire, la courbe de Mikhaïlov est symétrique par rapport à l'axe Ou si bien qu'il suffit de construire seulement une partie de la courbe correspondant à la variation du paramètre ω dans les limites de 0 à $+\infty$.

Si le polynôme $f(\lambda)$ de degré m racines ayant leur partie réelle positive et $n - m$ racines ayant leur partie réelle négative, l'angle de rotation φ de vecteur $f(i\lambda)$, sera $\varphi = (n - 2m)\frac{\pi}{2}$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$.

Il est clair que pour la stabilité de la solution de l'équation (3.19) il faut et il suffit que $m = 0$.

Critère de Mikhaïlov. Pour que la solution nulle $y \equiv 0$ de l'équation (3.19) soit stable il faut et il suffit :

1. que le vecteur $f(i\omega)$ tourne d'un angle $\varphi = n\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire fasse $\frac{n}{4}$ tours en sens antihoraire lorsque ω varie de 0 à $+\infty$.

2. que l'hodographe de $f(i\omega)$ ne passe pas par l'origine $(0, 0)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$.

Il en résulte que pour la stabilité de la solution de l'équation (3.19) il faut que toutes les racines des équations $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$ soient réelles et alternées, c'est-à-dire qu'entre deux racines, quelles qu'elles soient, d'une équation doit se trouver une racine de l'autre équation.

Exemple 3.5

Etudier la stabilité de la solution nulle $y \equiv 0$ de l'équation :

$$y^{(4)} + y^{(3)} + 4y^{(2)} + y^{(1)} + y = 0.$$

Formons le polynôme caractéristique :

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda^1 + y + 1.$$

Puis,

$$f(i\omega) = \omega^4 - i\omega^3 - 4\omega^2 + i\omega + 1,$$

$$u(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 1,$$

$$\begin{aligned} v(\omega) &= -i\omega^3 + i\omega \\ &= \omega(1 - \omega)(1 + \omega). \end{aligned}$$

Considérons la courbe (FIGURE 3.3)

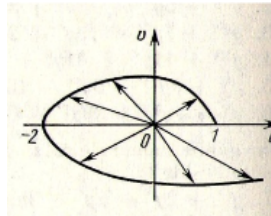


FIGURE 3.3 –

$$\begin{cases} u = u(\omega), \\ v = v(\omega). \end{cases} \quad 0 \leq \omega \leq +\infty,$$

ω	0	$\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	1	$\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
u	1	0	-2	0
v	0	+	0	-

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{v}{u} = 0.$$

L'angle de rotation du rayon -vecteur est $\varphi = 4 \frac{\pi}{2} = (n - 2m) \frac{\pi}{2}$, On en tire $4 = n - 2m$ et puisque $n = 4$ on a $m = 0$, c'est-à-dire que toutes les racines de l'équation caractéristique se situent dans le demi-plan à gauche. La solution triviale $y \equiv 0$ est donc asymptotiquement stable.

4 Stabilité d'un satellite artificiel de la terre

Considérons le mouvement uniforme du centre de masse d'un satellite artificiel de la terre gravitant selon une orbite circulaire de rayon r_0 disposé dans le plan P .

Un tel mouvement est appelé mouvement stationnaire. Supposons que le satellite se déplace seulement sous l'action de la force d'attraction de la terre appliquée au centre de masse du satellite artificiel de la terre.

En projetant l'équation différentielle du mouvement du centre de masse du satellite sur la normale principale, on aura :

$$\overrightarrow{ma_n} = \overrightarrow{F_n}. \quad (4.1)$$

La force d'attraction de la terre conformément à la loi de l'attraction universelle :

$$F_n = \mu \frac{m^2}{r_0^2},$$

Avec :

$\mu = g R^2 = f M$ est le paramètre gravitationnel de la terre.

R est le rayon de la terre.

g est l'accélération de la pesanteur sur la surface de la terre.

M est la masse de la terre.

f est la constante gravitationnelle.

$r_0 = (OC)$ est distance du centre de la terre.

O est jusqu'au centre de masse C du satellite.

La masse du satellite est m .

L'accélération normale :

$$a_n = r_0 \omega^2.$$

Avec ω : la vitesse angulaire de rotation du rayon vecteur r_0 .

La relation (4.1) aura la forme :

$$m r_0 \omega^2 = \mu \frac{m^2}{r_0} \quad (4.2)$$

Où :

$$r_0^3 \omega^2 = \mu.$$

Supposons qu'à l'instant où il s'est détaché du dernier étage de sa fusée, le satellite en mouvement soit soumis à quelques perturbations transgressant légèrement les conditions qui doivent assurer un mouvement sur une orbite circulaire qui soit disposée dans le plan P .

A cause de ces perturbations, le satellite commencera à avoir un mouvement perturbé, c'est-à-dire que l'orbite ne sera pas circulaire et le mouvement ne s'effectuera pas dans le plan P , la vitesse angulaire ($\omega = \varphi$) de la rotation du rayon-vecteur r_0 ne sera pas égale à $\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}$.

Pour former les équations du mouvement perturbé du satellite, choisissons le système de référence $Oxyz$ dont le plan de coordonnées (o, x, y) coïncide avec le plan de l'orbite dans le mouvement stationnaire, c'est à dire coïncidant avec le plan P .

La position du centre de masse C du satellite dans le mouvement perturbé se déterminera à l'aide des coordonnées sphériques : r, φ, θ (voir figure suivante) :

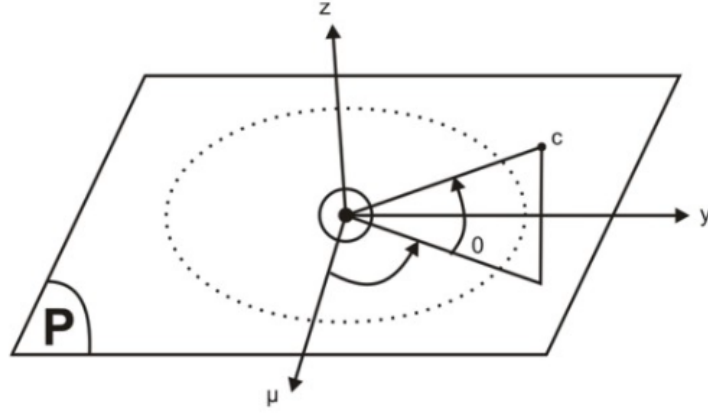


FIGURE 4.1 –

L'énergie cinétique du satellite est :

$$E_c = \frac{1}{2} m V_c^2. \quad (4.3)$$

Les coordonnées du centre des masses du satellite :

$$\begin{cases} X = r \cos \theta \cos \varphi, \\ Y = r \cos \theta \sin \varphi, \\ Z = r \sin \theta. \end{cases}$$

Les composantes de la vitesse (V_c^2) correspondantes sont :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \cos \theta \sin \varphi - r \dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi, \\ \dot{z} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta. \end{cases}$$

$$V_0^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta.$$

$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (4.4)$$

Calculons l'énergie potentielle du satellite. Sachant que :

$$\begin{aligned}\vec{F}_n &= \vec{F} = \mu \frac{m \vec{r}}{r^2}, \\ F_{nx} &= -\mu \frac{m x}{r^2}, \quad F_{ny} = -\mu \frac{m y}{r^2}, \quad F_{nz} = -\mu \frac{m z}{r^2}.\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}dE_p &= -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ dE_p &= \mu \frac{m}{r^2} (x dx + y dy + z dz) \\ dE_p &= \mu m \frac{dr}{r^2} \\ E_p &= -\frac{\mu m}{r}\end{aligned}\tag{4.5}$$

Les équations de Lagrange de deuxième espèce :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial r} &= -\frac{\partial E_p}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} &= -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right.\tag{4.6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r}, \\ \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} &= m r^2 \dot{\theta}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) = m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta}, \\ \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} &= m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m r^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} + 2 m r \dot{r} \sin^2 \theta \dot{\varphi} + 2 m r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} &= 0. \end{aligned} \right.\tag{4.7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} &= m r^2 \dot{\theta}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) = m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta}, \\ \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} &= m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m r^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} + 2 m r \dot{r} \sin^2 \theta \dot{\varphi} + 2 m r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} &= 0. \end{aligned} \right.\tag{4.8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (mr^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}), \\ \frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

En introduisant les relations (4.7), (4.8) et (4.9) dans les équations (4.6), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu m}{r^2}, \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0, \\ \frac{d}{dt} (r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}) = 0. \end{array} \right.$$

Donc, les équations différentielles du mouvement du centre des masses du satellite seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \\ r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0, \\ \frac{d}{dt} (r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}) = 0. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Posons : $r = r_0 + x$ et $\dot{\varphi} = \omega + y$.

Les équations du mouvement perturbé du satellite deviendront :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{X} - (r_0 + x)\dot{\theta}^2 - (r_0 + x)\cos^2\theta(\omega + y)^2 = -\frac{\mu}{(r_0 + x)^2}, \\ (r_0 + x)\ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta} + (r_0 + x)\cos\theta\sin\theta(\omega + y)^2 = 0, \\ \frac{d}{dt}((r_0 + x)^2\cos^2\theta(\omega + y)) = 0. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Posons : $x = x_1$:

$$\dot{x} = x_2; \quad \theta = x_3; \quad \dot{\theta} = x_4; \quad y = x_5.$$

Et introduisons ces expressions dans les relations (4.11).

Résolvons ces relations (4.11) par rapport aux dérivées, nous obtenons les équations du mouvement perturbé sous la forme normale.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = (r_0 + x_1)[x_2^4 + (\cos^2 x_3)(\omega + x_5)^2] - \frac{\mu}{(r_0 + x_1)^2}, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4, \\ \frac{dx_4}{dt} = -2\frac{x_2 x_4}{r_0 + x_1} - \frac{1}{2}(\omega + x_5)^2 \sin 2x_3, \\ \frac{dx_5}{dt} = -2\frac{x_2}{r_0 + x_1}(\omega + x_5) + 2x_4(\omega + x_5) \operatorname{tg}(x_5). \end{array} \right. \quad (4.12)$$

En développant en séries les parties droites des équations (4.12) et en retenant les termes du premier ordre par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_5$, on obtient les équations différentielles du mouvement perturbé du satellite de la première approximation.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3\omega x_1 + 2r_0\omega x_5, \\ \frac{dx_3}{dt} = -\omega^2, \\ \frac{dx_4}{dt} = x_4, \\ \frac{dx_5}{dt} = -2\frac{\omega}{r_0}x_2. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

L'équation caractéristique correspondant au système (4.13) est :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & -\lambda & 0 & 0 & 2r_0\omega \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & -\lambda & 0 \\ 0 & -2\frac{\omega}{r_0} & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4.14)$$

$$= -\lambda \left[-\lambda(-\lambda^3 - \lambda\omega^2) - 2r_0\omega \left(-\lambda^2 2\frac{\omega}{r_0} - 2\frac{\omega^3}{r} \right) \right] + [3\omega^2(-\lambda^3 - \lambda\omega^2) - 2r_0\omega(0)]$$

$$= -\lambda^5 - \lambda^3\omega^2 - 4\omega^2\lambda^3 - 4\omega^4\lambda + 3\omega^2\lambda^3 + 3\omega^4\lambda$$

$$= -\lambda^5 - \lambda^3(\omega^2 + 4\omega^2 - 3\omega^2) - \lambda(4\omega^4 - 3\omega^4)$$

$$= -\lambda^4 + \lambda^2 2\omega^2 + \omega^4 = 0.$$

Soit pour $X = \lambda^2$:

$$-X^2 + 2\omega^2 X + \omega^4 = 0.$$

Dont les racines sont :

$$X_{1,2} = -\omega^2 \pm \sqrt{\omega^4 - \omega^4} = -\omega^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega \text{ (racines doubles imaginaires pures).}$$

L'équation caractéristique (4.14) peut être présentée sous ta forme :

$$\lambda^5 + 2\omega^2\lambda^3 + \omega^4\lambda = 0. \quad (4.15)$$

Sous forme générale, l'équation précédente se présente selon :

$$a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0, \quad (4.16)$$

La matrice formée des coefficients de l'équation (4.16) est :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Les coefficients de cette matrice sont :

$$a_0 = 1; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = 2\omega^2; \quad a_3 = 0; \quad a_4 = \omega^4; \quad a_5 = 0.$$

Les mineurs principaux diagonaux de la matrice (4.17) sont :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 = 0, \\ \Delta_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2\omega^2 \end{bmatrix} = 0, \\ \Delta_3 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\omega^2 & \omega^4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \\ \Delta_4 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\omega^2 & \omega^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\omega^2 & \omega^4 \end{bmatrix} = 0, \end{aligned}$$

$$\Delta_5 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\omega^2 & \omega^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\omega^2 & \omega^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

Donc, conformément au critère d'Hurwitz, nous ne pouvons pas affirmer que toutes les racines de l'équation (4.15) auront des parties réelles positives et par conséquent le mouvement n'est pas asymptotiquement stable. Ici, nous avons montré comment il faut employer le critère d'Hurwitz mais, pour le cas considéré, nous pouvons directement trouver les racines de l'équation (4.15).

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = -\omega i,$$

$$\lambda_3 = +\omega i,$$

$$\lambda_4 = -\omega i,$$

$$\lambda_5 = +\omega i,$$

Alors, le mouvement considéré n'est pas asymptotiquement stable, il peut être seulement strictement stable ou instable.

Pour déterminer la stabilité de ce mouvement, employons la méthode des fonctions de A. Liapounov.

Construisons la fonction de Liapounov à l'aide d'un réseau d'intégrales. Puisque la force agissante sur le satellite est potentielle, on peut appliquer, alors la loi de la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_P + E_c = cte.$$

Compte tenu des expressions (4.4) et (4.5), nous obtenons :

$$E_c + E_p = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\dot{\varphi}^2) - \mu\frac{m}{r} = \frac{m}{2}h$$

h : constante

Ou bien, en utilisant les expressions :

$$r = r_0 + x_1, \quad \dot{r}^2 = x_2, \quad \theta = x_3, \quad \dot{\theta} = x_4, \quad \dot{\varphi} = \omega + x_5. \quad (4.18)$$

Nous pouvons écrire :

$$F_1 = x_2^2 + (r_0 + x_1)^2 x_4^2 + (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 (\omega + x_5)^2 - 2\frac{\mu}{r_0 + x_1} = \eta. \quad (4.19)$$

Les équations de Lagrange dans le cas des forces potentielles s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0, \quad m = 1, 2, 3. \quad (4.20)$$

La fonction de Lagrange étant :

$$L = E_c - E_p.$$

Pour le cas considéré, nous aurons :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\dot{\varphi}^2) + \mu\frac{m}{r},$$

le mouvement du satellite se détermine en utilisant les coordonnées sphériques r, θ et φ .

La coordonnée φ est une coordonnée cyclique (elle n'est pas contenue dans la fonction de Lagrange).

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Et l'équation :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Aura la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0.$$

D'où

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m}{2} r^2 \cos^2 \theta \cdot 2\dot{\varphi} = \text{const}$$

$$r^2 \cos^2 \theta \cdot 2\dot{\varphi} = \eta, \quad \eta = \text{const.}$$

Compte tenu des expressions (4.18), nous obtenons :

$$F_2 = (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 (\omega + x_5) = \eta. \quad (4.21)$$

Donc, il existe deux intégrales du mouvement (4.19) et (4.21).

Passons à l'étude du mouvement non perturbé du satellite.

Les intégrales F_1 et F_2 ne sont pas des fonctions définies des grandeurs x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 .

C'est pourquoi, nous cherchons la fonction de Liapounov V sous la forme d'un réseau d'intégrales.

$$V = F_1 + F_1(0) + [F_2 + F_2(0)] + x [F_2^2 + F_2^2(0)], \quad (4.22)$$

où λ et x sont des constantes.

Introduisons dans l'expression (4.22) les valeurs de F_1 et F_2 ,

Nous aurons :

$$\begin{aligned} V = & x_2^2 + (r_0 + x_1^2)x_4^2 + (r_0 + x_1^2)\cos^2 x_3 \cdot (\omega + x_5)^2 - 2\frac{\mu}{r_0 + x_1} - r_0^2 \omega^2 + 2\frac{\mu}{r_0} \\ & + \lambda[(r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 (\omega + x_5) - r_0^2 \omega] + x[(r_0 + x_1)^4 \cos^4 x_3 (\omega + x_5)^2 - r_0^4 \omega^2], \end{aligned} \quad (4.23)$$

Développons la partie droite de l'expression (4.23) en série suivant les puissances de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

Nous aurons :

$$\cos^2 x_3 = \left(1 - \frac{x_3^2}{2} + \dots\right)^2 = 1 - x_3^2 + \dots,$$

$$\cos^4 x_3 = \left(1 - \frac{x_3^2}{2} + \dots\right)^4 = 1 - 2x_3^2 + \dots,$$

$$\frac{\mu}{r_0 + x_1} = \frac{\mu}{r_0} - \mu \frac{x_1}{r_0^2} + \mu \frac{x_1^2}{r_0^3} + \dots, \dots,$$

Introduisons les expressions obtenues dans l'expression (4.23) en tenant compte de l'expression :

$$\omega^2 r_0^2 = \mu$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} V = & \omega(-\omega + \lambda + 6xr_0^2\omega)x_1^2 + x_2^2 - r_0^2\omega(\omega + \lambda + 2xr_0^2\omega)x_3^2 + r_0^2x_4^2 + r_0^2(1 + xr_0^2)x_5^2 \\ & + 2r_0\omega(2\omega + \lambda + 2xr_0^2\omega)x_1 + r_0^2(2\omega + \lambda + 2xr_0^2\omega)x_5 \\ & + 2r_0^2(2\omega + \lambda + 4xr_0^2\omega)x_1x_5 + \dots, . \end{aligned}$$

Pour que la fonction V soit positive, il faut évaluer à zéro les coefficients des termes contenant les grandeurs x_1x_5 à la première puissance :

$$2\omega + \lambda + 2xr_0^2\omega = 0. \quad (4.24)$$

D'ici, nous obtenons :

$$\lambda = -2\omega + 2xr_0^2\omega.$$

Introduisons cette valeur de λ dans l'expression (4.23) Nous aurons :

$$V = \omega^2(4xr_0^2 - 3)x_1^2 + x_2^2 + r_0^2\omega^2x_3^2 + r_0^2x_4^2 + r_0(1 + xr_0^2)x_5^2 + 4xr_0^3\omega x_1x_5 + \dots, .$$

Désignons les termes quadratiques par :

$$V_1 = x_2^2 + r_0^2\omega^2x_3^2 + r_0^2x_4^2$$

$$V_2 = \omega^2(4xr_0^2 - 3)x_1^2 + 4xr_0^3\omega x_1x_5 + r_0^2(1 + xr_0^2)x_5^2.$$

La fonction V_1 est définie positive pour les grandeurs x_2, x_3 et x_4 .

La fonction V sera définie positive dans le cas où nous trouverons une telle grandeur x pour laquelle la fonction V_2 sera définie positive pour x_1 et x_5 .

Le critère de Sylvester pour la fonction V_2 nous donne :

$$\Delta_1 = \omega^2(4xr_0^2 - 3) > 0, \quad (4.25)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \omega^2(4xr_0^2 - 3) & 2r_0^3\omega x \\ 2r_0^3\omega x & r_0^2(1 + xr_0^2) \end{vmatrix} = \omega^2 r_0^2 (xr_0^2 - 3) > 0, \quad (4.26)$$

Les conditions (4.25) et (4.26) seront satisfaites quand :

$$x > \frac{3}{r_0^2},$$

et dans ce fait, la fonction V_2 sera définie positive par rapport à x_1 et x_5 et la fonction V sera définie positive par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 .

V est une fonction de signe défini et sa dérivée $\frac{dV}{dt}$, en vertu des équations du mouvement, est égale à zéro, dans ce cas, conformément au Théorème de A. Liapounov de la stabilité du mouvement, le mouvement du satellite sera stable par rapport aux grandeurs x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 , où par rapport aux grandeurs $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$.

Conclusion

Après Liapounov, la théorie de la stabilité se développait dans de différentes directions. Un grand nombre de recherches ont été consacrés aux questions de la stabilité asymptotique pour le cas où le domaine des perturbations initiales, pour lesquelles doit être satisfait la condition les perturbations ne peuvent être considéré comme petites. De telles questions ont été étudiées dans les travaux de [2] et [5].

La stabilité aux perturbations agissants constamment a été étudiée dans les travaux [3] et [5]. La méthode de Liapounov a été examiné particulièrement dans les travaux de [4], [5] et [13]. La stabilité de mouvement à un intervalle fini du temps à été étudiée par G.Kamenkov [6]. La stabilité de mouvement du corps de masse variable a été étudiée par A Gallioline [4]. La théorie de la stabilité de mouvement de Liapounov a été développée dans les travaux de I. Malkine [9], N.Tchétaèv [10] et V.Roumiantzev [11].

En conclusion, dans ce présent travail, on a fait une introduction à la théorie de la stabilité, ainsi nous avons étudié la stabilité du mouvement (au sens la Liapounov) de corps à une masse constante, et précisément la stabilité d'un satellite artificiel.

Bibliographie

- [1] J.J. Moreau, Masson et Cie, Ed. Mécanique Classique, Paris, (1971).
- [2] Komornik, V, Chin. Ann of Math, On the nonlinear boundary stabilization equation, 14B(2), 153-164,(1993) .
- [3] J. Hubbard, B. Equations différentielles et systèmes dynamiques, West, traduit par V.Gautheron, Ed. Cassini, Paris, (1999).
- [4] F.Galliouline. Quelques Compléments de Mécanique générale, Edition Mir 2002 Moscou, (1997).
- [5] Zuazua, E, SIAM J. Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback, Control Opt, 28 , 446-477, (1990).
- [6] G.Kamenkov, N. Yebari et A. Elkhattat, Stabilisation uniforme d'une équation des poutres d'Euler-Bernoulli, Annales mathématiques Blaise, Pascal, Vol 10, No1 ,161-180, (2003).
- [7] N. Baoutine,Samko S. G. Kilbas A. A and O. I. Marichev, Fractional Integrals and derivatives,Amsterdam : Gordon and Breach 1993, Engl Transfrom the Russian, 1987.

-
- [8] P. Kouzmine, I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol 198, Academic Press, (1999).
- [9] I. Malkine, C. M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity, Arch. Rational Mech Anal, Vol 37, 297-308, (1970).
- [10] N. Tchétaev, Dautray, J. L. Lions, Analyse mathématiques et calcul numérique, Masson, Paris, 1998.
- [11] V. Roumiantzev, G. Duvaut, J. L. Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Lions, Paris, 1972.
- [12] F. Conrad and Ö. Morgül, Siam J On the stabilization on the beam. Control and Optimization, Vol 36, No 6, 1962-1986, (2000).
- [13] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, Recueil de problèmes sur les équations différentielles, Mir 2, Moscou, I-110, Gsp, U.R.S.S.