

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ CHADLI BEN DJEDID EL-TARF
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et Calcul stochastique

Par

GHERS AMMAR

Thème :

La Stabilité du système de Timoshenko

Devant le Jury :

Dr. Chidouh A	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Président
Mr. Adjmi S	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Bounouala A	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2021-2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mon père, qui n'a jamais cessé de m'encourager dans la poursuite de mes études en m'apportant tout son soutien, que dieu le garde.

Ma très chère mère qui m'encouragé et aider durant tout le cycle d'études en lui souhaitant longue vie et que dieu la protège.

Mes soeurs et les enfants de mes soeurs.

Toute la famille : Ghers, Boughrara, Bouchoata et Harbi.

Tous mes amis et tous les étudiants Master 2 Mathématique 2022.

REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout à remercier ALLAH tout puissant qui m'a donné la patience, la volonté et le courage pour bien achever mes études.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur Monsieur Adjmi Salim pour ses aides et sa disponibilité.

Je remercie Dr. Chidouh Amar pour avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie mon examinatrice Dr. Bounouala Amina pour son aide et ses conseils et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, je remercie aussi mes très chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin.

Résumé(Arabe)

في هذا العمل نحتبر جملة تيموشنكو التالية

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi) = 0, \text{ dans } [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t) \psi_t = 0, \text{ dans } [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, t \in \mathbb{R}_+, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), \\ \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), x \in [0, 1]. \end{array} \right.$$

نبرهن أن هذه الجملة مستقرة أسياً

$$\exists C, w > 0 / E(t) \leq Ce^{-wt}, \forall t \geq 0.$$

حيث $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ هي طاقة الجملة

طريقة البرهان تعتمد على طريقة المضاعفات و عدة متراجحات

Résumé

Dans ce travail, nous considérons le système de Timoshenko suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi) = 0, \text{ dans } [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t) \psi_t = 0, \text{ dans } [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, t \in \mathbb{R}_+, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), \\ \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), x \in [0, 1]. \end{array} \right.$$

Nous montrons, que ce système est exponentiellement stable : c'est à dire

$$\exists C, w > 0 / E(t) \leq C e^{-wt}, \forall t \geq 0.$$

où $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'énergie du système.

La méthode de la démonstration est basée sur la méthode des multiplicateurs et quelque inégalités.

Mots clés : Stabilité exponentielle, théorème de Hille-Yosida, l'existence et l'unicité, système de Timoshenko.

Abstract

In this work, we consider the following Timoshenko system :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi) = 0, \text{ dans } [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t) \psi_t = 0, \text{ dans } [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, t \in \mathbb{R}_+, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), \\ \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), x \in [0, 1]. \end{array} \right.$$

We establish that, this system is exponentially stable : that is

$$\exists C, w \succ 0 / E(t) \leq C e^{-wt}, \forall t \geq 0.$$

where $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ is the energy of system.

The method of proof is based on the multiplier method and some inequalities.

Keys words : exponential stability, Hille-Yosida theorem, existence and uniqueness, Timoshenko system.

Notation

Ω	: un ouvert borné de \mathbb{R}^n .
H	: l'espace de Hilbert.
$L^p(\Omega)$: l'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$C^k(\Omega)$: l'espace des fonctions k fois dérivable et la dérivé d'ordre k est continue.
$W^{m,p}(\Omega)$: l'espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.
$p.p$: Presque par tout.
$D(A)$: domaine de l'opérateur A .
A^*	: l'adjoint de l'opérateur A .
φ_t	: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'$ la dérivée de φ par rapport à t .
ψ_t	: $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi'$ la dérivée de ψ par rapport à t .
φ_{tt}	: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à t .
ψ_{tt}	: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ la dérivée d'ordre 2 de ψ par rapport à t .
φ_x	: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ la dérivée de φ par rapport à x .
ψ_x	: $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ la dérivée de ψ par rapport à x .
φ_{xx}	: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à x .
ψ_{xx}	: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ la dérivée d'ordre 2 de ψ par rapport à x .
φ_{xt}	: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à x par rapport à t .
ψ_{xt}	: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}$ la dérivée d'ordre 2 de ψ par rapport à x par rapport à t .

Table des matières

Remerciements	ii
Résumé Arabe	iii
Résumé	iv
Abstract	v
Notation	vi
Table des matières	vii
Introduction	1
1 Rappels et notion préliminaire	4
1.1 Espace de Lebesgue dans $L^p(\Omega)$	4
1.2 Espaces de sobolev dans \mathbb{R}	8
1.2.1 Espace de sobolev $W^{m,p}(I)$	9
1.2.2 Espace de sobolev $W_0^{m,p}(I)$	10
1.2.3 L'inégalité de sobolev-poincaré	10
2 Théorème de Lax-Milgram	13

2.1	Quelque propriété des espaces de Hilbert	13
2.2	Théorème de Hille-Yosida	14
2.2.1	Opérateur maximal monotone	14
2.2.2	Résolution du problème d'évolution	15
2.2.3	Régularité	16
2.2.4	Le cas autoadjoint	19
2.3	Formulation variationnelle générale	21
3	Comportement asymptotique d'un système de Timoshenko	24
3.1	Introduction	24
3.2	Existence et unicité	25
3.3	Stabilisation d'un système de type Timoshenko :	31
3.3.1	Calcul de l'énergie	31
3.3.2	Résultats principaux	33
	Conclusion	44
	Bibliographie	44

Introduction

Le système de Timoshenko est introduit par le mathématicien Ukrainien Stephen Timoshenko né le 22 décembre 1878 en Ukraine et mort le 29 mai 1972 en Allemagne, qui est considéré comme un père de mécanique, il a développé la théorie de l'élasticité des plaques et des coques.

Timoshenko, a définit son système à travers de deux équations hyperboliques couplées :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = (K(u_x - \varphi))_x, & \text{dans}(0, L) \times (0, +\infty), \\ I_\rho \varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + K(u_x - \varphi), & \text{dans}(0, L) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (1)$$

C'est un modèle simple décrivant les vibrations d'une poutre où t est le variable du temps, x est le variable de l'espace au long du poutre de longueur L , u est le déplacement transversale de la poutre et φ représente l'angle du filament du poutre. Les coefficients ρ , I_ρ , E , I et K sont respectivement, la masse linéaire, le moment polaire d'inertie, le coefficient d'élasticité, le moment d'inertie et le module d'étirement.

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feedback), elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation.

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste

à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e.

$$E(t) \rightarrow 0, \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance la plus rapide de l'énergie, c'est à dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e.

$$E(t) \leq Ce^{-wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

où C et w sont constantes positives avec C qui dépend des données initiale.

Quant au troisième, on étudie des situations intermédiaires dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial, par exemple,

$$E(t) \leq Ct^{-\alpha}, \quad \forall t \geq 0.$$

où C et α sont constantes positives avec C qui dépend des données initiale.

Pour les résultats de stabilité, on utilise la méthode des multiplicateurs basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov \mathcal{L} équivalente à l'énergie E de la solution. On désigne par $\mathcal{L} \sim E$ l'équivalence

$$\alpha_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 E(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

pour deux constantes positives α_1 et α_2 . Pour établir la stabilité exponentielle, alors il suffit de montrer que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c\mathcal{L}(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

pour un certain $c > 0$. Une intégration simple de (3) sur $[0, t]$ avec (2) mène au

résultat souhaite de la stabilité exponentielle.

Ce système a été étudié par beaucoup d'auteur, par exemple :

_ Kim et Renardy [4] ont considéré (1) avec deux contrôles au bord de la forme

$$\begin{aligned} K \left(\varphi(L, \cdot) - \frac{\partial u}{\partial x}(L, \cdot) \right) &= \alpha \frac{\partial u}{\partial t}(L, \cdot), \quad \forall t \geq 0 \\ EI \frac{\partial \varphi}{\partial x}(L, \cdot) &= -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial t}(L, \cdot), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

_ Ammar-Khodja et al [6]. Ils ont considéré le système :

$$\begin{cases} \alpha u_{tt} = (\beta(u_x + \varphi))_x, & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty), \\ \gamma \varphi_{tt} = (\delta \varphi_x)_x - K(u_t + \varphi), & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, \cdot) = u(L, \cdot) = 0, \varphi_x(0, \cdot) = c \varphi_t(0, \cdot), \varphi_x(L, \cdot) = -d \varphi_t(L, \cdot), \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

où α, β, γ et δ sont des fonctions positives de classe C^1 et ont prouvé que la stabilité uniforme de (4) est obtenue si et seulement si les vitesses des ondes sont égales ($\delta/\gamma = \beta/\alpha$ dans $(0, L)$), sinon seulement la stabilité asymptotique a été prouvée.

Ce mémoire se divise en trois chapitre constituées de :

Le premier chapitre est consacré aux définitions et quelque inégalités importants pour notre étude, les espaces L^p , les espaces des sobolev.

Le deuxième chapitre nous présentons, théorème de Lax-Milgram, l'opérateur maximal monotone, théorème de Hille-Yosida.

Le troisième chapitre, on a montré l'existence et l'unicité de la solution de notre problème, et on a aussi montré la stabilité exponentielle de la solution.

Chapitre 1

Rappels et notion préliminaire

1.1 Espace de Lebesgue dans $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, on définit :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

Définition 1.1.2 on définit sur $L^p(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.1.3 on pose : $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$,
on note $\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C, |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$,

$\|\cdot\|_{L^\infty}$ est une norme.

Remarque 1.1.1 l'espace $L^2(I)$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_a^b uv dx, \quad u, v \in L^2(I)$$

est un espace de Hilbert.

L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$

Lemme 1.1.1 (Inégalité de Young) soient $a, b \geq 0$ deux réels, Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En particulier si $u, v \in L^2(\Omega)$. alors

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |v|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Démonstration.

La conclusion est évidente si $a = 0$ ou $b = 0$, donc on peut supposer que $a, b > 0$. la fonction \exp est convexe ce qui veut dire que pour tout x, y et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, nous avons

$$\exp(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(y).$$

En particulier :

$$\begin{aligned} ab &= \exp\left(\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q\right) \\ &\leq \frac{1}{p} \exp(\ln a^p) + \frac{1}{q} \exp(\ln b^q) \\ &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Hölder) soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p \leq \infty$,

Alors $f, g \in L^1$ et

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Démonstration.

La conclusion est évidente si $p = 1, p = \infty$, Autrement, nous appliquons l'inégalité de Young

$$|f| |g| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \quad p \cdot q,$$

il en résulte que $f, g \in L^1$ et que

$$\int_{\Omega} |f| |g| \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|g\|_{L^q}^q$$

remplaçant f par $\lambda f (\lambda > 0)$, il vient

$$\int_{\Omega} |f| |g| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_{L^q}^q$$

on choisit $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^q}^{\frac{q}{p}}$, la preuve est achevée.

Corollaire 1.1.1 (Inégalité de Minkovski) soit $1 \leq p \leq \infty$ pour f, g mesurable

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Démonstration.

Les cas $p = 1$, et $p = \infty$ sont faciles.

supposons maintenant que $1 < p < \infty$ comme l'inégalité est triviale si $\|f + g\|_{L^p} = 0$

on peut supposer que $\|f + g\|_{L^p} \neq 0$, Alors

$$\int_{\Omega} |f + g|^p dx \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f| dx + \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |g| dx.$$

en appliquant successivement l'inégalité de Hölder à $|f + g|^{p-1}$ avec l'exposant p' et f avec l'exposant p puis g avec l'exposant p , on obtient

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq \|f + g\|_{L^p}^{p-1} (\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q})$$

ce qui prouve l'inégalité.

Définition 1.1.4 soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable, on dit que f localement intégrable si $f \in L^1(K)$ pour tout compact K de Ω . on note $L^1_{loc}(\Omega)$ l'espace des classes des fonctions localement intégrables sur Ω , ie

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \int_K |f(x)| dx < \infty, \text{ pour tout } K \text{ de } \Omega \right\}$$

Définition 1.1.5 soit $1 \leq p \leq +\infty$ on dit qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f|_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$

Dérivée faible

soit I un ouvert de \mathbb{R} une fonction $u \in L^1_{loc}(I)$ a une dérivée faible dans $L^1_{loc}(I)$ s'il existe $v \in L^1_{loc}(I)$ telle que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(I)$ on ait

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx.$$

Cela revient à dire que v est la dérivée de u au sens des distributions, on écrira

$$u' = v$$

1.2 Espaces de sobolev dans \mathbb{R}

Les espaces de sobolev sont des espaces vectoriels normés qui sont bien adaptés à la résolution de nombreux problèmes d'équation différentielles aux dérivées partielles. par ailleurs les problèmes concret rencontrés en physique, mécanique, ... comportent en général des conditions au bord du domaine.

Espace de sobolev $W^{1,p}(I)$

Définition 1.2.1 soit $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ un espaces de sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par :

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ telle que } \int_I u \varphi' dx = \int_I g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}$$

on pose :

$$H^1(I) = W^{1,2}(I),$$

Notation 1.2.1 l'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

l'espace H^1 est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

la norme associé :

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Exemple 1.2.1 soit $I =]-1, 1[$. vérifier à titre d'exercice que :

1. La fonction $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ appartient à $W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et que $u' = H$ où

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

plus généralement une fonction continue sur I et continument dérivable par morceaux sur \bar{I} appartient à $W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

2. La fonction H n'appartient pas à $W^{1,p}$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$,

Théorème 1.2.1 (Densité) soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p < \infty$, Alors il existe une suite u_n dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_n|_I \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$.

Corollaire 1.2.1 (Intégration par parties) soient $v, u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $v, u \in W^{1,p}(I)$ et $(uv)' = u'v + uv'$. De plus. on a la formule d'intégration par parties

$$\int_x^y u'v = -u(x)v(x) + u(y)v(y) - \int_x^y uv', \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

1.2.1 Espace de sobolev $W^{m,p}(I)$

Définition 1.2.2 Étant donné un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I) \right\}$$

on pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I)$$

l'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

1.2.2 Espace de sobolev $W_0^{m,p}(I)$

Définition 1.2.3 Étant donné $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$. on désigne par $W_0^{m,p}(I)$ la fermeture de $C_c^m(I)$ dans $W^{m,p}(I)$ on note $H_0^m(I) = W_0^{m,p}(I)$.

l'espace $W_0^{1,p}$ muni de la norme induit par $W^{1,p}$ est un espace de banach séparable, il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$.

l'espace H_0^1 muni du produit scalaire induit par H^1 est un espace de Hilbert séparable

Remarque 1.2.1 lorsque $I = \mathbb{R}$ on sait que $C_c^1(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$ et par conséquent $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Théorème 1.2.2 soit $u \in W^{m,p}(I)$ alors $u \in W_0^{m,p}(I)$ si et seulement si $u = 0$ sur ∂I .

1.2.3 L'inégalité de sobolev-poincaré

Théorème 1.2.3 soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n que l'on suppose borné, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que, pour tout fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration.

On a $\Omega = [a, b]$, on peut écrire, pour $x \in [a, b]$,

$$u(x) = \int_a^x u'(y) dy,$$

alors :

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \left(\int_a^x u'(y) dy \right)^2, \\ &\leq \int_a^x (u'(y))^2 dy \int_a^x dy, \end{aligned}$$

donc :

$$\Rightarrow \int_a^b u^2(x) \leq \int_a^b \left[\int_a^x (u'(y))^2 dy \times (x-a) \right] dx \leq \|u'\|_{L^2(a,b)}^2 \times \int_a^b (x-a) dx$$

cela implique :

$$\|u\|_{L^2(a,b)}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|u'\|_{L^2(a,b)}^2 \Rightarrow \|u\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(a,b)},$$

d'où

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

L'espace dual de $W_0^{1,p}$

On désigne par $W^{-1,p'}(I)$ L'espace dual de $W_0^{1,p}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et par $H^{-1}(I)$

L'espace dual de $H_0^1(I)$. On a la conclusion

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1}$$

avec injections continues et denses.

si I est bornée, on a

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \text{ pour tout } 1 \leq p < \infty$$

avec injections continues et denses.

si I n'est pas bornée, on a seulement

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \text{ pour tout } 1 \leq p \leq 2$$

avec injections continues et denses.

Chapitre 2

Théorème de Lax-Milgram

2.1 Quelques propriétés des espaces de Hilbert

Définition 2.1.1 un opérateur $A : H \rightarrow H$ dit positif ($A \succ 0$) si

$$(Au, u) \geq 0 \quad \forall u \neq 0.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Le produit scalaire (\cdot, \cdot) vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H.$$

Théorème de Lax-Milgram

Définition 2.1.2 On dit qu'une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est

1. continue s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$$

2. coercive s'il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que

$$|a(u, v)| \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H.$$

Théorème 2.1.1 (Lax-Milgram)

Soit $a(., .)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H . Alors pour $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle_{(H', H)}, \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

2.2 Théorème de Hille-Yosida

2.2.1 Opérateur maximal monotone

Définition 2.2.1 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non borné. On dit que

A est monotone si

$$(Av, v) \geq 0, \quad \forall v \in D(A).$$

A est maximal monotone si de plus $R(I + A) = H$, i.e

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ telle que } u + Au = f.$$

2.2.2 Résolution du problème d'évolution

Soit le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, & t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

où A est un opérateur défini sur un espace de Hilbert H .

Théorème 2.2.1 (Hille-Yosida)

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction

$$u \in C([0, +\infty[; D(A)) \cap C^1([0, +\infty[; H)$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, & [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0, & \text{(donnée initiale)}. \end{cases} \quad (2.1)$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \forall t \geq 0.$$

Remarque 2.2.1 *L'intérêt principal du théorème de Hille-Yosida réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution on se ramène à vérifier que A est maximal monotone, c'est-à-dire, à étudier l'équation stationnaire $u + \lambda Au = f$.*

2.2.3 Régularité

On va maintenant compléter le résultat du théorème (Hille-Yosida)(2.1) en montrant que la solution u de (2.1) est de plus régulier moyennant des hypothèses supplémentaires sur la donnée initiale u_0 .

Définition 2.2.2 *On définit par récurrence l'espace*

$$D(A^k) = \{v \in D(A^{k-1}) : Av \in D(A^{k-1})\} \quad k \text{ (entier)} \geq 2.$$

$D(A^k)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^k (A^j u, A^j v).$$

La norme correspondante est

$$\|u\|_{D(A^k)} = \left(\sum_{j=0}^k \|A^j u\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 2.2.2 *On suppose que $u_0 \in D(A^k)$ avec $k \geq 2$. Alors la solution u du problème*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, & [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

obtenue au théorème de Hille-Yosida vérifie, de plus

$$u \in C^{k-j}([0, +\infty[: D(A^j)) \text{ pour } j = 0, 1, \dots, k.$$

Démonstration. Commençons par supposer que $k = 2$.

On considère l'espace de Hilbert $H_1 = D(A)$ muni du produit scalaire $(u, v)_{D(A)}$. On vérifie aisément que

l'opérateur $A_1 : D(A_1) \subset H_1 \rightarrow H_1$ définie par

$$\begin{cases} D(A_1) = D(A^2) \\ A_1 u = Au \quad \text{pour } u \in D(A_1) \end{cases}$$

est maximal monotone dans H_1 . Applique le théorème 2.2.1 à l'opérateur A_1 dans l'espace

H_1 on voit qu'il existe une fonction

$$u \in C([0, +\infty[; D(A_1)) \cap C^1([0, +\infty[; H_1)$$

telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A_1 u = 0, \text{ sur } [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

En particulier u satisfait (2.1), grâce à l'unicité il s'agit donc la solution de (2.1). Il reste seulement à vérifier

que $u \in C^2([0, +\infty[; H)$. Comme

$$A \in \mathcal{L}(H, H) \text{ et que } u \in C^1([0, +\infty[; H_1)$$

il en résulte que $Au \in C^1([0, +\infty[; H)$ et que

$$\frac{d}{dt}(Au) = A \left(\frac{du}{dt} \right). \quad (2.2)$$

Appliquant (2.1), on voit que $\frac{du}{dt} \in C^1([0, +\infty[; H)$, c'est-à-dire $u \in C^2([0, +\infty[; H)$ et que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) + A \left(\frac{du}{dt} \right) = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[. \quad (2.3)$$

Passons maintenant au cas général $k \geq 3$. On raisonne par récurrence sur k : admettons le résultat jusqu'à l'ordre $k - 1$ et supposons que $u_0 \in D(A^k)$. D'après ce qui précède on sait que la solution u de (2.1) appartient à $u \in C^2([0, +\infty[; H) \cap C^1([0, +\infty[; D(A))$ et que u vérifie (2.3).

Posant

$$v = \frac{du}{dt}$$

on obtient

$$v \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A)),$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = 0, \text{ sur } [0, +\infty[, \\ v(0) = -Au_0. \end{cases}$$

Autrement dit, v est la solution de (2.1) qui correspond à la donnée initial $v(0) = -Au_0$.

Comme $v_0 \in D(A^{k-1})$ on sait, d'après l'hypothèse de récurrence que

$$v \in C^{k-1-j}([0, +\infty[; D(A^j)) \quad \text{Pour } j = 0, 1, \dots, k-1, \quad (2.4)$$

i.e

$$u \in C^{k-j}([0, +\infty[; D(A^j)) \quad \text{Pour } j = 0, 1, \dots, k-1,$$

Il reste seulement à vérifier que

$$u \in C([0, +\infty[; D(A^k)). \quad (2.5)$$

Appliquent (2.4) avec $j = k - 1$, on obtient que

$$\frac{du}{dt} \in C([0, +\infty[; D(A^{k-1})). \quad (2.6)$$

On déduit de (2.6) et de l'équation (2.1) que

$$Au \in C([0, +\infty[; D(A^{k-1}))$$

i.e.(2.7).

2.2.4 Le cas autoadjoint

Soit $AD(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non borné avec $\overline{D(A)} = H$. Si l'on fait l'identification $H' = H$ on peut considérer A^* comme un opérateur non-borné dans H .

Définition 2.2.3 *On dit que :*

A est symétrique si $(Au, v) = (u, Av) \forall u, v \in D(A)$.

A est autoadjoint si $A^* = A$, ce qui sous-entend $D(A^*) = D(A)$.

Proposition 2.2.1 *Soit A un opérateur maximal monotone, symétrique. Alors A est autoadjoint.*

Démonstration. Soit $J_1 = (I + A)^{-1}$. Montrons d'abord que J_1 est autoadjoint. Il suffit de vérifier-puisque $J_1 \in \mathcal{L}(H)$ - que

$$(J_1 u, v) = (u, J_1 v) \quad \forall u, v \in H. \quad (2.7)$$

Posons $u_1 = J_1 u, v_1 = J_1 v$ de sorte que

$$u_1 + Au_1 = u$$

$$v_1 + Av_1 = v.$$

Comme $(u_1, Av_1) = (Au_1, v_1)$, il en résulte que $(u_1, v) = (u, v_1)$ i.e.(2.7).

Soit $u \in D(A^*)$ et posons $f = u + A^*u$. On a

$$(f, v) = (u, v + Av) \quad \forall v \in D(A)$$

i.e.

$$(f, J_1 w) = (u, w) \quad \forall w \in H.$$

Par conséquent $u = J_1 f$ et donc $u \in D(A)$.

Conclusion : $D(A^*) = D(A)$.

Théorème 2.2.3 *Soit A un opérateur maximal monotone autoadjoint. Alors pour*

tout $u_0 \in H$, il existe une fonction

$$u \in C([0, +\infty[; H) \cap C^1(]0, +\infty[; H) \cap C(]0, +\infty[; D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, & [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t} |u_0|, \forall t \geq 0.$$

2.3 Formulation variationnelle générale

Soit V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de norme $\|\cdot\|_V$. Et on a la forme bilinéaire a définit par :

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \rightarrow a(u, v).$$

On considère le problème variationnelle général suivant : Etant donné $L \in V'$, trouver $u \in V$ solution de

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V. \tag{2.8}$$

Dans cette section, on montre comment écrire certains problèmes concrets sous la forme variationnelle(2.8).

On prend pour Ω l'intervalle réel $]0, 1[$. Etant donné $f \in L^2(\Omega)$. on veut trouver la solution u du problème

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

On suppose que la solution u de (2.9) existe et qu'elle est suffisamment régulière :

Disons $u \in H^2(\Omega)$.

Alors en multipliant l'équation du problème par une "fonction test" $v \in H^1(\Omega)$, on obtient :

$$-\int_0^1 u''(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

En intégrant par parties dans le premier membre de cette identité, on obtient

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx + u'(0) v(0) - u'(1) v(1) = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

Comme il n'y a aucune raison que les termes de bord soient nuls, on prend $v \in H_0^1(\Omega)$, cette dernière identité implique alors

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.10)$$

Comme les conditions de bord $u(0) = u(1) = 0$ impliquent que $u \in H_0^1(\Omega)$, on voit que le bon choix est de prendre :

$$V = H_0^1(\Omega)$$

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx.$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

On a aussi montré que si $u \in H^2(\Omega)$ est solution de (2.9), alors elle est solution de (2.10), ou de manière équivalente, solution de (2.8) avec le choix fait ci-dessus. Grâce au théorème de Lax-Milgram, on va maintenant montrer que le problème (2.10)

admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$. Vérifions-en les hypothèses : La bilinéarité de a et la linéarité de L découlent de linéarité de l'intégrale, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on vérifie que la forme a et L sont continues. En effet

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

et

$$|a(u, v)| \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall v, w \in H_0^1(\Omega).$$

Reste à vérifier la coercivité de forme a sur $H_0^1(\Omega)$ qui découle de l'inégalité de Poincaré puisque

$$a(u, u) = |u|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Le théorème de Lax-Milgram assure donc l'existence d'une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ de (2.10).

Montrons maintenant qu'elle solution du problème de départ(2.9) : Les conditions de bord sont satisfaites puisque $u \in H_0^1(\Omega)$, et comme $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ le problème (2.10) implique

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \forall v \in D(\Omega).$$

En conséquence, u satisfait

$$u'' = -f \text{ dans } D'(\Omega).$$

Comme par hypothèse, $f \in L^2(\Omega)$, on en déduit que $u, u', u'' \in L^2(\Omega)$ ce qui prouve que $u \in H^2(\Omega)$. l'équation (2.9) est donc satisfait au sens de $L^2(\Omega)$.

Chapitre 3

Comportement asymptotique d'un système de Timoshenko

3.1 Introduction

considérons le système de timoshenko suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi) = 0, \text{ dans } [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t) \psi_t = 0, \text{ dans } [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, t \in \mathbb{R}_+, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), \\ \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), x \in [0, 1], \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où φ est le déplacement transversal d'un point matériel de référence x dans une poutre de longueur 1, et ψ l'angle de rotation du filament, α est une fonction borné sur $[0, \infty[$.

3.2 Existence et unicité

Dans cette section, en utilisant le théorème de Hille-Yosida, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution du système (3.1).

On peut se reformuler le système (3.1) comme un système du premier ordre. Pour cela, on pose $u = \varphi_t$ et $v = \psi_t$, le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} \varphi_t - u = 0, \\ u_t - (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \psi_t - v = 0, \\ v_t - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t)v = 0, \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

ainsi le système (3.2) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} U_t + AU = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

où $U = (\varphi, u, \psi, v)^T$, $U_0 = (\varphi_0, u_0, \psi_0, v_0)^T$ et l'opérateur A est défini par :

$$AU = \begin{pmatrix} -u, \\ -(\varphi_x + \psi)_x, \\ -v, \\ -\psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t)v, \end{pmatrix}$$

soit l'espace de Hilbert suivant :

$$H = H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1),$$

L'espace H muni du produit scalaire :

$$\langle U, U' \rangle_H = \int_0^1 [u u' + v v' + (\varphi_x + \psi)(\varphi'_x + \psi') + \psi_x \psi'_x] dx,$$

tel que $U = (\varphi, u, \psi, v)^T, U' = (\varphi', u', \psi', v')^T \in H$.

La norme de H correspondante est donnée par :

$$\|U\|_V^2 = \int_0^1 [u^2 + v^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \psi_x^2] dx.$$

Le domaine de l'opérateur A est donné par :

$$D(A) = [H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)]^2.$$

Ainsi nous obtenons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 3.2.1 Soit $(\varphi_0, u_0, \psi_0, v_0)^T \in D(A)$, le système (3, 1) admet une solution forte unique, (φ, ψ) satisfaisant :

$$\varphi \in C[(0, +\infty), H^2([0, 1]) \cap H_0^1([0, 1])] \cap C^1[(0, +\infty), H_0^1([0, 1])] \cap C^2[(0, +\infty), L^2([0, 1])].$$

$$\psi \in C[(0, +\infty), H^2([0, 1]) \cap H_0^1([0, 1])] \cap C^1[(0, +\infty), H_0^1([0, 1])] \cap C^2[(0, +\infty), L^2([0, 1])].$$

Démonstration. Pour obtenir le résultat ci-dessus, nous allons prouver que A est un opérateur monotone maximal.

Monotone de A :

pour tout A appartient $D(A)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_H &= \int_0^1 -u(\varphi_x + \psi)_x dx + \int_0^1 v[-\psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t)v] dx, \\ &+ \int_0^1 (-u_x - v)(\varphi_x + \psi) dx - \int_0^1 \psi_x v_x dx, \\ &= \int_0^1 -u(\varphi_x + \psi)_x dx - \int_0^1 \psi_{xx} v dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi) v dx + \int_0^1 \alpha(t)v^2 dx, \\ &- \int_0^1 (u_x + v)(\varphi_x + \psi) dx - \int_0^1 v_x \psi_x dx. \end{aligned}$$

en utilisant une intégration par parties et les conditions au bord, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_H &= \int_0^1 u_x (\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 \psi_x v_x dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi) v dx + \int_0^1 \alpha(t) v^2 dx, \\ &\quad - \int_0^1 (u_x + v) (\varphi_x + \psi) dx - \int_0^1 v_x \psi_x dx. \end{aligned}$$

Donc A est monotone.

Maintenant, on démontre que $A + I$ est surjectif : (ie $R(A + I) = H$).

soit $G = (g_1, g_2, g_3, g_4)^T \in H$. Il faut trouver $U = (\varphi, u, \psi, v)^T \in D(A)$ tel que :

$$(A + I)U = G, \tag{3.4}$$

l'équation (3,4) est équivalente à :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi - u = g_1, & (1) \\ u - (\varphi_x + \psi)_x = g_2, & (2) \\ \psi - v = g_3, & (3) \\ v - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t)v = g_4, & (4) \end{array} \right. \tag{3.5}$$

En substituant $\varphi - g_1 = u$ et $\psi - g_3 = v$ dans la deuxième et la quatrième équations du système (3.5), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi - (\varphi_x + \psi)_x = g_2 + g_1 = h_1 \in L^2(0, 1), & (1) \\ (1 + \alpha(t))\psi - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) = (1 + \alpha(t))g_3 + g_4 = h_2 \in L^2(0, 1), & (2) \end{array} \right. \tag{3.6}$$

multipliant respectivement les équations du système (3.6) par des fonctions $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in H_0^1(0, 1)$ et intégrant par parties sur $[0, 1]$, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx + \int_0^1 \tilde{\varphi}_x (\varphi_x + \psi) dx = \int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx, & (1) \\ \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx + \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \tilde{\psi} dx + \int_0^1 \alpha(t) \psi \tilde{\psi} dx = \int_0^1 h_2 \tilde{\psi} dx, & (2) \end{array} \right. \tag{3.7}$$

additionnons (1) et (2) de(3.7) , on obtient :

$$\int_0^1 \left(h_1 \tilde{\varphi} + h_2 \tilde{\psi} \right) dx = \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \left(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \right) dx + \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \int_0^1 (1 + \alpha(t)) \psi \tilde{\psi} dx,$$

Pour $X = (\varphi, \psi)$, $\tilde{X} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in [H_0^1(0, 1)] \times [H_0^1(0, 1)]$, on définit sur $[H_0^1(0, 1)] \times [H_0^1(0, 1)]$ une forme bilinéaire $a(X, \tilde{X})$ et une forme linéaire $L(\tilde{X})$ par :

$$\begin{aligned} a(X, \tilde{X}) &= \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \left(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \right) dx + \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \int_0^1 (1 + \alpha(t)) \psi \tilde{\psi} dx, \\ L(\tilde{X}) &= \int_0^1 \left(h_1 \tilde{\varphi} + h_2 \tilde{\psi} \right) dx. \end{aligned}$$

Pour q'on prouve que (1) et(2) de (3.7) admet une solution, on applique le théorème de Lax-Milgram, sur l'espace $H_0^1(0, 1)$ pour la forme bilinéaire $a(U, U)$ et la forme linéaire $L(U)$, il suffit montrer que a est continue et coercive, et que L est continue.

1. Continuité de $a(.,.)$:

On a :

$$\left| a(X, \tilde{X}) \right| = \left| \int_0^1 \left[\varphi \tilde{\varphi} + (\varphi_x + \psi) \left(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \right) + \psi \tilde{\psi} + \psi_x \tilde{\psi}_x + \alpha(t) \psi \tilde{\psi} \right] dx \right|,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| a(X, \tilde{X}) \right| &\leq \|\varphi\|_{L^2} \|\tilde{\varphi}\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2} \|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2} \|\tilde{\psi}\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \|\tilde{\psi}\|_{L^2}, \\ &\quad + \|\psi\|_{L^2} \|\tilde{\psi}\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} \|\tilde{\psi}_x\|_{L^2} + |\sup \alpha(t)| \|\psi\|_{L^2} \|\tilde{\psi}\|_{L^2}, \\ &\leq C \left(\|\varphi\|_{H_0^1} + \|\psi\|_{H_0^1} \right) \left(\|\tilde{\varphi}\|_{H_0^1} + \|\tilde{\psi}\|_{H_0^1} \right), \\ &\leq C \|X\|_{[H_0^1]^2} \|\tilde{X}\|_{[H_0^1]^2}. \end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

2. Coercivité de $a(.,.)$:

$$a(X, X) = \int_0^1 \varphi^2 dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \int_0^1 \psi^2 dx + \int_0^1 \alpha(t) \psi^2 dx,$$

$$\begin{aligned} &\geq C \left(\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \|\psi\|_{H_0^1}^2 \right), \\ &\geq C \|X\|_{H_0^1}^2. \end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est coercive.

3. Continuité de L :

$$\begin{aligned} \left| L(\tilde{X}) \right| &= \left| \int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx + \int_0^1 h_2 \tilde{\psi} dx \right|, \\ &\leq \|h_1\|_{L^2} \|\tilde{\varphi}\|_{L^2} + \|h_2\|_{L^2} \|\tilde{\psi}\|_{L^2}, \\ &\leq \max(\|h_1\|_{L^2} + \|h_2\|_{L^2}) \|\tilde{X}\|_{H_0^1} \\ &\leq C \|\tilde{X}\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Donc L est continue.

$a(.,.)$ est bilinéaire, continue et coercive sur $H_0^1(0,1)$, et $L(.)$ est linéaire et continue sur $H_0^1(0,1)$.

D'après le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique

$X = (\varphi, \psi)^T \in [H_0^1(0,1)]^2$, tel que :

$$a\left((\varphi, \psi)^T, (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})^T\right) = L\left((\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})^T\right), \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_0^1, \forall \tilde{\psi} \in H_0^1,$$

ce qui signifie que :

$$u = \varphi - g_1 \in H_0^1,$$

et de $\psi - v = g_3$, on aura :

$$v = \psi - g_3 \in H_0^1,$$

il reste à montrer que $\varphi \in H^2(0,1)$. En prenant $\tilde{\psi} = 0$, on a :

$$\int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx = \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \tilde{\varphi}_x dx + \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx,$$

en utilisant l'intégration par partie, on trouve :

$$\int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx = - \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x \tilde{\varphi} dx + \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx,$$

alors :

$$\int_0^1 (\varphi - \varphi_{xx} - \psi_x - h_1) \tilde{\varphi} dx = 0, \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_0^1,$$

il en résulte que :

$$\varphi_{xx} = -\varphi - \psi_x + h_1 \quad p.p$$

en utilisant (1) de (3.6) on déduit alors :

$$\varphi_{xx} = -u - \psi_x + h_2 \in L^2(0, 1),$$

alors

$$\varphi \in H^2(0, 1),$$

il résulte que $\varphi \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$, de même, si $\tilde{\varphi} = 0$, on a :

$$\int_0^1 h_2 \tilde{\psi} dx = \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \tilde{\psi} dx + \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx + \int_0^1 \alpha(t) \psi \tilde{\psi} dx,$$

On intègre par parties, on obtient :

$$\int_0^1 h_2 \tilde{\psi} dx = \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \tilde{\psi} dx - \int_0^1 \psi_{xx} \tilde{\psi} dx + \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx + \int_0^1 \alpha(t) \psi \tilde{\psi} dx,$$

alors :

$$\int_0^1 ((\varphi_x + \psi) - \psi_{xx} + (1 + \alpha(t)) \psi - h_2) \tilde{\psi} dx = 0, \quad \forall \tilde{\psi} \in H_0^1(0, 1),$$

ce qui implique que :

$$\varphi_x + \psi + (1 + \alpha(t))\psi - \psi_{xx} = h_2,$$

en utilisant (3) de (3.6) on déduit alors :

$$\psi_{xx} = (1 + \alpha(t))\psi + \varphi_x - g_2 \in L^2(0, 1),$$

alors

$$\psi \in H^2(0, 1),$$

il résulte que $\psi \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$,

Le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution de (3.1), ceci termine la démonstration.

3.3 Stabilisation d'un système de type Timoshenko :

Dans cette section , nous énoncer et prouver notre résultat principal. A cette fin nous s'établissons plusieurs lemmes.

3.3.1 Calcul de l'énergie

Lemme 3.3.1 *soit (φ, ψ) la solution de système (3.1), on définit l'énergie $E(t)$ associé au système (3.1) pour tout $t \geq 0$ on a :*

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \varphi_t^2 + \psi_t^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \psi_x^2 \right], \quad (3.8)$$

avec :

$$E'(t) = - \int_0^1 \alpha(t) \psi_t^2 \leq 0. \quad (3.9)$$

Démonstration. En multipliant les deux équations de (3.1) par φ_t et ψ_t respectivement, et on intègre sur $(0, 1)$, on obtient :

$$\int_0^1 \varphi_{tt} \varphi_t dx - \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx = 0, \quad (3.10)$$

et

$$\int_0^1 \psi_{tt} \psi_t dx - \int_0^1 \psi_{xx} \psi_t dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \int_0^1 \alpha(t) \psi_t^2 dx = 0, \quad (3.11)$$

et par une intégration par partie sur les deux équations (3.10) et (3.11), on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - [(\varphi_x + \psi) \varphi_t]_0^1 + \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx = 0, \quad (3.12)$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \psi_t^2 dx - [\psi_t \psi_x]_0^1 + \int_0^1 \psi_x \psi_{xt} dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \int_0^1 \alpha(t) \psi_t^2 dx = 0, \quad (3.13)$$

grâce aux conditions aux limites, on trouve :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx = 0, \quad (3.14)$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \int_0^1 \alpha(t) \psi_t^2 dx = 0, \quad (3.15)$$

l'addition des deux équations (3.14) et (3.15) donne :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^1 \varphi_t^2 + \psi_t^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \psi_x^2 dx \right] = - \int_0^1 \alpha(t) \psi_t^2,$$

d'où :

$$E'(t) = - \int_0^1 \alpha(t) \psi_t^2 \leq 0,$$

et

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \varphi_t^2 + \psi_t^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \psi_x^2 \right].$$

D'où le résultat.

3.3.2 Résultats principaux

Proposition 3.3.1 *soit (φ, ψ) une solution du problème (3.1). Alors le problème (3.1) est exponentiellement stable, et on a l'estimation suivante :*

$$E(t) \leq C e^{-wt}. \quad (3.16)$$

Avec C et w sont deux constantes positives.

Démonstration. La preuve de la proposition(3.3.1), sera donné à travers plusieurs lemmes.

Lemme 3.3.2 *soit (φ, ψ) une solution du système (3.1), on définit la fonction $F_1(t)$ par :*

$$F_1(t) = - \int_0^1 (\psi \psi_t + \varphi \varphi_t) dx, \quad (3.17)$$

alors on a :

$$\frac{d}{dt} F_1(t) \leq - \int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx + \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx. \quad (3.18)$$

Démonstration. On a :

$$\frac{d}{dt} F_1(t) = - \int_0^1 \psi_t^2 + \psi \psi_{tt} + \varphi_t^2 + \varphi \varphi_{tt} dx,$$

on utilise les deux équations de (3.1) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_1(t) &= -\int_0^1 [\psi_t^2 + \psi(\psi_{xx} - (\varphi_x + \psi) - \alpha(t)\psi_t) + \varphi_t^2 + \varphi(\varphi_x + \psi)_x] dx, \\ &= -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx - \int_0^1 \psi\psi_{xx} dx + \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi\psi_t dx - \\ &\int_0^1 \varphi(\varphi_x + \psi)_x dx, \end{aligned}$$

on intègre par parties et on utilise les conditions au bord on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_1(t) &= -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi\psi_t dx, \\ &+ \int_0^1 \varphi_x(\varphi_x + \psi) dx, \\ &= -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi\psi_t dx, \end{aligned}$$

on applique l'inégalité de Young, on trouve :

$$\int_0^1 \alpha(t)\psi\psi_t dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\alpha(t)|^2 \psi^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

d'où

$$\frac{d}{dt}F_1(t) \leq -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |\alpha(t)|^2 \psi^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

on applique l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_1(t) &\leq -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{2} |\alpha(t)|^2 \psi^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{2} \psi_t^2 dx, \\ &\leq -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned}$$

avec $c > 0$.

Lemme 3.3.3 soit (φ, ψ) une solution du système (3.1), on définit la fonction $F_2(t)$

par :

$$F_2(t) = \int_2^1 \psi_t(\psi + \varphi_x) dx + \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx, \quad (3.19)$$

alors on a :

$$\frac{d}{dt}F_2(t) \leq |\psi_x + \varphi_x|_{x=0}^{x=1} - (1 - \varepsilon) \int_0^1 (\varphi_x \cdot \psi)^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx. \quad (3.20)$$

pour tout $c \succ 0$ et $\varepsilon \prec 1$.

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dt}F_2(t) = \int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x + \psi) + \psi_t(\varphi_{xt} + \psi_t) dx + \int_0^1 \varphi_{tt}\psi_x + \psi_{xt}\varphi_t dx,$$

on utilise les deux équations de (3.1) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_2(t) &= \int_0^1 (\varphi_x + \psi) [\psi_{xx} - (\varphi_x + \psi) - \alpha(t)\psi_t] dx + \int_0^1 (\varphi_{xt} + \psi_t) \psi_t dx, \\ &\quad + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x \psi_x + \psi_{xt}\varphi_t dx, \\ &= \int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x + \psi) dx - \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - \int_0^1 \alpha(t)\psi_t(\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 (\varphi_{xt} + \psi_t) \psi_t dx, \\ &\quad + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x \psi_x + \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx, \end{aligned}$$

on intègre par parties on obtient :

$$\frac{d}{dt}F_2(t) = [\psi_x(\varphi_x + \psi)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - \int_0^1 \alpha(t)\psi_t(\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

on utilise les conditions au bord on obtient :

$$\frac{d}{dt}F_2(t) = [\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - \int_0^1 \alpha(t)\psi_t(\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

on applique l'inégalité de Young, on trouve :

$$\int_0^1 \alpha(t)\psi_t(\varphi_x + \psi) dx \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 |\alpha(t)|^2 \psi_t^2 dx + \varepsilon \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_2(t) &\leq [\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 |\alpha(t)|^2 \psi_t^2 dx + \varepsilon \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx, \\ &\leq [\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=1} - (1 - \varepsilon) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned}$$

Lemme 3.3.4 soit (φ, ψ) une solution du système (3.1), et soit $z \in C^1([0, 1])$ une

fonction vérifie $z(0) = -z(1) = 2$, on définit la fonction $F_3(t)$ par :

$$F_3(t) = \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \psi_t \psi_x dx + \varepsilon \int_0^1 z(x) \varphi_t \varphi_x dx, \quad (3.21)$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_3(t) &\leq \frac{1}{4\varepsilon} ((\psi_x^2(1,t)) + (\psi_x^2(0,t))) - \varepsilon ((\varphi_x^2(1,t)) + (\varphi_x^2(0,t))) + \varepsilon c \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon c\right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon^2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

pour tout $c \succ 0$ et $\varepsilon \prec 1$.

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dt} F_3(t) = \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \psi_{tt} \psi_x dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \psi_t \psi_{xt} dx + \varepsilon \int_0^1 z(x) \varphi_{tt} \varphi_x dx + \varepsilon \int_0^1 z(x) \varphi_t \varphi_{tx} dx$$

On utilise les deux équations de (3.1) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_3(t) &= \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) [\psi_{xx} - (\psi + \varphi_x) - \alpha(t) \psi_t] \psi_x dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \psi_t \psi_{xt} dx + \varepsilon \int_0^1 z(x) \varphi_t \varphi_{tx} dx \\ &\quad + \varepsilon \int_0^1 z(x) (\psi + \varphi_x)_x \varphi_x dx, \\ &= \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \psi_x^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \psi_x (\psi + \varphi_x) - \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \alpha(t) \psi_t \psi_x dx \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \psi_x^2 dx + \varepsilon \int_0^1 z(x) \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \varphi_t^2 dx + \varepsilon \int_0^1 z(x) (\psi + \varphi_x)_x (\psi + \varphi_x) dx \\ &\quad - \varepsilon \int_0^1 z(x) (\psi + \varphi_x)_x \psi dx, \end{aligned}$$

On intègre par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_3(t) &= \frac{1}{4\varepsilon} \left[\frac{1}{2} z(x) \psi_x^2 \right]_0^1 - \frac{1}{8\varepsilon} \int_0^1 z'(x) \psi_x^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \psi_x (\psi + \varphi_x) dx \\ &\quad - \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \alpha(t) \psi_t \psi_x dx + \frac{1}{4\varepsilon} \left[\frac{1}{2} z(x) \psi_t^2 \right]_0^1 - \frac{1}{8\varepsilon} \int_0^1 z'(x) \psi_t^2 dx + \varepsilon \left[\frac{1}{2} z(x) \varphi_t^2 \right]_0^1 \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 z'(x) \varphi_t^2 dx + \varepsilon \left[\frac{1}{2} z(x) (\varphi_x + \psi)^2 \right]_0^1 - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 z'(x) (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ &\quad - \varepsilon \left[z(x) \psi (\varphi_x + \psi) \right]_0^1 + \varepsilon \int_0^1 (z(x) \psi)_x (\psi + \varphi_x) dx, \end{aligned}$$

On utilise les condition au bord on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_3(t) &= -\frac{1}{4\varepsilon} [\psi_x^2(1, t) + \psi_x^2(0, t)] - \frac{1}{8\varepsilon} \int_0^1 z'(x) \psi_x^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \psi_x (\psi + \varphi_x) dx \\ &\quad - \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 z(x) \alpha(t) \psi_t \psi_x dx - \frac{1}{8\varepsilon} \int_0^1 z'(x) \psi_t^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 z'(x) \varphi_t^2 dx - \varepsilon [\varphi_x^2(1, t) + \varphi_x^2(0, t)] \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 z'(x) (\psi + \varphi_x)^2 dx + \varepsilon \int_0^1 z'(x) \psi (\psi + \varphi_x) dx + \varepsilon \int_0^1 z(x) \psi_x (\psi + \varphi_x) dx, \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Young, et de Poincaré, et en utilisent le fait que :

$\varphi_x^2 \leq 2(\psi + \varphi_x)^2 + 2\psi^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_3(t) &\leq -\frac{1}{4\varepsilon} [\psi_x^2(1, t) + \psi_x^2(0, t)] + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon^2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon^2} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx + c\varepsilon \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \varepsilon [\varphi_x^2(1, t) + \varphi_x^2(0, t)] \\ &\quad + c\varepsilon \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \psi_x^2 dx + c\varepsilon \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad + c\varepsilon \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx, \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_3(t) &\leq -\frac{1}{4\varepsilon} ((\psi_x(1, t))^2 + (\psi_x(0, t))^2) - \varepsilon ((\varphi_x(1, t))^2 + (\varphi_x(0, t))^2) + \varepsilon c \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon c\right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon^2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned}$$

Lemme 3.3.5 *soit (φ, ψ) une solution du système (3.1). Pour ε fixé et assez petit et pour $c \succ 0$, on définit*

la fonction $F(t)$ par :

$$F(t) = 2c\varepsilon F_1(t) + F_2(t) + F_3(t), \quad (3.23)$$

Alors on a :

$$\frac{d}{dt} F(t) = 2c\varepsilon \frac{d}{dt} F_1(t) + \frac{d}{dt} F_2(t) + \frac{d}{dt} F_3(t), \quad (3.24)$$

Et on a l'estimation suivant :

$$\frac{d}{dt} F(t) \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx + \gamma \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx, \quad (3.25)$$

avec $\gamma = c\varepsilon$.

Démonstration. On utilise les résultats des trois lemmes (3.3.2), (3.3.3) et (3.3.4)

on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t) &\leq 2c\varepsilon \left[-\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx + \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx \right] \\ &\quad + [\psi_x + \varphi_x]_{x=0}^{x=1} - (1 - \varepsilon) \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{4\varepsilon} ((\psi_x(1, t))^2 + (\psi_x(0, t))^2) - \varepsilon ((\varphi_x(1, t))^2 + (\varphi_x(0, t))^2) + \varepsilon c \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon c\right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon^2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx, \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Young, on obtient :

$$\psi_x \varphi_x \leq \varepsilon \varphi_x^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \psi_x^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t) &\leq -2c\varepsilon \int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx + 2c\varepsilon \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx + 2c^2\varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 dx + 2c^2\varepsilon \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad + \left[(\varepsilon \varphi_x^2(1, t) + \frac{1}{4\varepsilon} \psi_x^2(1, t)) - (\varepsilon \varphi_x^2(0, t) + \frac{1}{4\varepsilon} \psi_x^2(0, t)) \right] - (1 - \varepsilon) \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx \\ &\quad + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon} ((\psi_x(1, t))^2 + (\psi_x(0, t))^2) - \varepsilon ((\varphi_x(1, t))^2 + (\varphi_x(0, t))^2) \\ &\quad + \varepsilon c \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon c\right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon^2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx, \\ &\leq [2c\varepsilon - (1 - \varepsilon) + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon c\right)] \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + [-2c\varepsilon + 2c^2\varepsilon + \frac{2c}{\varepsilon} + c] \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad + c\varepsilon \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx + [2c^2\varepsilon + \frac{c}{\varepsilon^2}] \int_0^1 \psi_x^2 dx, \end{aligned}$$

On choisit ε assez petit tel que :

$$2c\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon c \leq \frac{1}{4}$$

alors :

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx - \gamma \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx,$$

où $\gamma = c\varepsilon$, $c_1 = -2c\varepsilon + 2c^2\varepsilon + \frac{2c}{\varepsilon} + c$ et $c_2 = 2c^2\varepsilon + \frac{c}{\varepsilon^2}$.

Lemme 3.3.6 *soit (φ, ψ) une solution du système (3.1). on définit la fonction $\theta(t)$ la solution de :*

$$-\theta_{xx} = \psi_x, \quad \theta(0) = \theta(1) = 0. \quad (3.26)$$

Alors on a l'estimation suivant :

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx \text{ et } \int_0^1 \theta_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx. \quad (3.27)$$

Démonstration. On a

$$-\theta_{xx} = \psi_x,$$

On multiplie l'équation (3.26) par θ et on intègre sur $[0, 1]$ on obtient :

$$-\int_0^1 \theta_{xx}\theta dx = \int_0^1 \psi_x\theta dx,$$

On intègre par parties on obtient :

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx - [\theta_x\theta]_0^1 = \int_0^1 \psi\theta_x dx + [\theta\psi]_0^1,$$

On utilise les conditions au bord on obtient :

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx = -\int_0^1 \psi\theta_x dx$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx \leq \sqrt{\int_0^1 \theta_x^2 dx} \sqrt{\int_0^1 \psi^2 dx}$$

Après une simplification, on trouve

$$\sqrt{\int_0^1 \theta_x^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^1 \psi^2 dx}$$

D'où

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx$$

En dérivant par rapport à t , on obtient :

$$\int_0^1 \theta_{xt}^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

L'inégalité de Poincaré implique :

$$\int_0^1 \theta_t^2 dx \leq \int_0^1 \theta_{xt}^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

Lemme 3.3.7 *soit (φ, ψ) une solution du système (3.1), on définit la fonction $K(t)$ telle que :*

$$K(t) = \int_0^1 (\psi\psi_t + \theta\varphi_t) dx, \quad (3.28)$$

alors on a :

$$K'(t) \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + c\delta \int_0^1 \varphi_t^2 dx, \quad (3.29)$$

pour tout $0 < \delta < 1$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} K'(t) &= \int_0^1 (\psi_t^2 + \psi\psi_{tt} + \theta_t\varphi_t + \theta\varphi_{tt}) dx \\ &= \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \psi [\psi_{xx} - (\varphi_x + \psi) - \alpha(t)\psi_t] dx + \int_0^1 \theta_t\varphi_t dx + \int_0^1 \theta (\varphi_x + \psi)_x dx, \end{aligned}$$

une intégration par parties, donne :

$$\begin{aligned}
 K'(t) &= \int_0^1 \psi_t^2 dx + [\psi\psi_x]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \psi_x^2 dx - \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx - \int_0^1 \alpha(t) \psi\psi_t dx + \int_0^1 \theta_t \varphi_t dx \\
 &\quad + [\theta(\varphi_x + \psi)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi) dx,
 \end{aligned}$$

on peut écrire aussi :

$$\begin{aligned}
 K'(t) &= \int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 \psi_x^2 dx - \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi) dx - \int_0^1 \alpha(t) \psi\psi_t dx + \int_0^1 \theta_t \varphi_t dx \\
 &\quad - \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi) dx,
 \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}
 K'(t) &= \int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \psi^2 dx + \delta \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx + \frac{c}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 &\quad + \delta \int_0^1 \theta_t^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \delta \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx,
 \end{aligned}$$

or d'après le lemme (3.3.6) on arrive à :

$$\begin{aligned}
 K'(t) &= \int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \psi^2 dx + \delta \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx + \frac{c}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 &\quad + \delta \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \psi^2 dx + \delta \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx,
 \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Poincaré, on a :

$$K'(t) \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + c\delta \int_0^1 \varphi_t^2 dx.$$

Lemme 3.3.8 *soit (φ, ψ) une solution du système (3.1), on définit la fonction de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ par :*

$$\mathcal{L}(t) = N_1 E(t) + N_2 K(t) + F(t),$$

avec $N_1, N_2 \succ 0$, et les fonctions E et $\mathcal{L}(t)$ sont équivalents, alors :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -k_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx - k_2 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx - k_3 \int_0^1 \psi_t^2 dx. \quad (3.30)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) &\leq -N_1 \int_0^1 \alpha(t) \psi_t^2 dx + N_2 \left[-\frac{1}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + c\delta \int_0^1 \varphi_t^2 dx \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx - \tau \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx, \\
 &\leq \left(-N_1 c + c \frac{N_2}{\delta} + c\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(-\frac{N_2}{2} + c\right) \int_0^1 \psi_x^2 dx + (c\delta N_2 - \tau) \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx,
 \end{aligned}$$

maintenant, on fixe N_2 tel que

$$k_1 := \left(\frac{N_2}{2} - c\right) \succ 0,$$

et on choisit δ assez petit pour que

$$k_2 := (\tau - c\delta N_2) \succ 0$$

Finalement, on choisit N_1 assez grand tel que

$$k_3 := N_1 c - c \frac{N_2}{\delta} - c \succ 0,$$

d'où

$$\mathcal{L}'(t) \leq -k_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx - k_2 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 dx - k_3 \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

on a : pour $w_1 \succ 0$

$$\mathcal{L}'(t) \leq -w_1 E(t),$$

et comme $\mathcal{L}(t) \sim E(t)$, on a pour $w \succ 0$:

$$\mathcal{L}'(t) \leq -w \mathcal{L}(t),$$

une intégration simple mené à :

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-wt} \quad \forall t \geq 0,$$

l'équivalence de l et E implique, pour un certain $R > 0$

$$E(t) \leq C e^{-wt} \quad \forall t \geq 0.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition (3.3.1).

Conclusion

Dans ce travail, on a considéré un système de type Timoshenko dans un espace monodimensionnel.

On a utilisé le théorème de Lax-Milgram et Hille-Yosida pour montrer l'existence et l'unicité de la solution, et par la méthode de multiplicateur, on a montré la stabilité exponentielle de l'énergie de ce système dans $\Omega = (0, 1)$.

Bibliographie

- [1] Haim Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et application. Dunod, 1999.
- [2] Ahmed Keddi, Comportement asymptotique de quelque systèmes thermoélastique, Thèse de Doctorat, université Djilali Liabes Sidi-Bel Abees, 2018.
- [3] F.Ammar Khodja & A.Benabdallah, J.E.Munoz Rivera, R.Racke, Energy decay for Timoshenko systems of memory type, Journal of Differential Equations, 2003 ; 194(1) : 82-115.
- [4] J.U.Kim & Y.Renardy, Boundary control of the Timoshenko beam, SIAM Journal on control and optimization, 1987 ; 25(6) : 1417-1429.
- [5] A.Guesmia & S.A.Messaoudi, General anergie decay estimates of Timoshenko system with frictional versus viscoelastic damping, Math. Meth. Appl. Sci, 32(2009), 2101-2122.
- [6] F.Ammar-Khodja, et S.Kerbal, A.E. Soufyane, stabilization of the nonuniform Timoshenko beam, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007 ; 327(1) : 525-538.
- [7] Said-Houari and Aslan Kasimov decay property of Timoshenko system in thermoelasticity, Meth. Appl. Sci. 2012, 35 314333.
- [8] Waël Youssef, contrôle et stabilisation de système élastique couplés, Thèse de doctorat, l'université Paul Verlaine de Metz, juillet 2009.