الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد الطارف-

Université Chadli Bendjedid-El Tarf

كلية العلوم و التكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات

Département de mathématiques

Mémoire de Fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Specialté : Analyse Fonctionnelle et Calcul Stochastique

Thème :

Existence et non existence de valeur propre principale du problème aux limites elliptique

Présenté par :

Chergui Nour El Yakine

Devant le jury

Dr. Bousselsal Naila	**MCB**	Univ Chadli Bendjedid-El Tarf	**P**résidente
Dr. Youbi Zahra	**MCB**	Univ Chadli Bendjedid-El Tarf	**R**apporteur
Mr. Bouarara Abdelfettah	**MAA**	Univ Chadli Bendjedid-El Tarf	**E**xaminateur

Année Universitaire 2021-2022

Remerciement

Je tiens à remercier, en tout premier lieu, mon **Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce mémoire.

Un grand merci à mon encadreur **Dr. Youbi Zahra** pour son encadrement, sa patience, ses précieuses remarques, ses conseils, ses critiques mais aussi son soutient moral et sa disponibilité permanente qui ont été indispensables à l'accomplissement de ce travail.

Je remercie les membres de jury **Dr. Bousselsal Naila** et **Mr. Bourara Abdelfettah** pour l'honneur qu'ils me font en participant au jugement de ce travail.

Mes vifs remerciements vont aussi à tous mes enseignants avec mes profonds respects.

Merci !

Dédicace

Je dédie ce travail :

★ A Mes Parents ★

Pour tous leurs sacrifices, leurs soutiens, leurs encouragements et leurs amours qui ont été la raison de ma réussite. Que Dieu leur présente une bonne santé et une longue vie

★ Mes sœurs et Mes frères ★

Pour les moments de bonheur que nous avons partagé ensemble, pour leur disponibilité à entendre mes préoccupations. Avec mes souhaits de bonheur et de réussite dans leur vie.

★ A tous mes amis ★

qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

A tous ceux que j'aime et qu'ils m'aiment, qu'ils trouvent dans ce travail l'expression de mes sentiments les plus affectueux.

Merci !

★★★

Chergui Nour El Yakine ✍

RÉSUMÉ

Nous considérons le problème elliptique suivant :

$$Au = \lambda Bu, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n,\ n \geq 3$$

Nous commençons par examiner le cas de l'opérateur de Schrödinger $A := -\Delta + q$; et B est l'opérateur de multiplication par une fonction g qui décroit "assez vite" à l'infini.

Une première étape consiste à choisir le potentiel q dans des espaces appropriés. A cette fin, nous appliquons le Théorème de Weinberger pour montrer l'existence d'un spectre discret ; les valeurs propres sont caractérisées par le principe du Min-Max.

Avec le choix judicieux du potentiel q, parfois le problème admet deux valeurs propres principales une positive et l'autre négative, et parfois le problème n'admet pas de valeur propre principale.

Mot clés : Valeur propre principale - Principe de Min-Max - Espace de Sobolev à poids - Théorème de Weinberger - Opérateur de Schroödinger - Problème aux valeurs propres.

ABSTRACT

We consider the following elliptic problem :

$$\boldsymbol{Au = \lambda Bu}, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{n \geq 3}$$

First, we examine the case of Schrödinger operation $\boldsymbol{A := \Delta + q}$, and $\boldsymbol{B}$ is the operator of multiplication by a function $\boldsymbol{g}$ which decreases rapidly at infinity.

In the first stage, we choose the potential $\boldsymbol{q}$ in appropriate spaces. To this end, we apply the Weinberger's Theorem to show the existence of a discrete spectrum, the eigenvalues are characterized by formula Min-Max's principal.

By the judicious choice of the potential $\boldsymbol{q}$, sometines the problem admits two principal eigenvalues one positive and the other is negative, and sometines the problem does not admet a principal eigenvalue.

Keywords : Principal eigenvalue - Min-Max's principal - Weighted Sobolev spaces - Weinberger Theorem - Schrödinger's operator - Eigenvalue problem.

ملخص

نعتبر المعادلة الإهليجية التالية :

$$Au = \lambda Bu \quad \text{في} \quad \mathbb{R}^n \quad n \geq 3$$

نبدأ بفحص حالة أين $A = -\Delta + q$ هو مؤثر شرودينقر و B مؤثر ضربي بدالة g متناقصة بسرعة بجوار المالانهاية.

تتكون المرحلة الأولى من إختيار الكمون q في فضاءات خاصة، لهذه الغاية، نطبق نظرية Weinberger لنبين وجود طيف متقطع، القيم الذاتية تتميز بمبدأ Min-Max.

وفقا للإختيار الحكيم والدقيق للكمون q، في بعض الأحيان المسألة تقبل قيمتين رئيسيتين، احداهما موجبة والأخرى سالبة، وفي بعض الأحيان المسألة لا تقبل قيمة ذاتية رئيسية.

الكلمات المفتاحية: قيمة ذاتية رئيسية - مبدأ Min-Max - فضاءات صوبولاف ترجيحية - نظرية فاينبارغار Weinberger - مؤثر شرودينقر - مسألة القيم الذاتية.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Une EDP est une équation dont l'inconnu est une fonction et fait intervenir les dérivées partielles de cette fonction. L'ordre de l'EDP est l'ordre maximal de dérivation de la fonction. En première approche, on peut classifier les EDP en trois familles :
Les EDP paraboliques, les EDP hyperboliques et les EDP elliptiques.
L'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires ou non linéaires et ses problèmes de variation a eu une considérable attention dans les deux derniers siècles provenant du développement des études dans la physique, la mécanique, la propagation des ondes, la dynamique des fluides, l'optique non linéaire, la mécanique des solides, la physique des plasma et la théorie des quanta.

Nous nous intéressons à l'existence des valeurs propres principales du problème aux limites elliptique de la forme :

$$\boldsymbol{Au = \lambda Bu}, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{n \geq 3} \tag{$*$}$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ est un paramètre réel, $\boldsymbol{A}$ est un opérateur linéaire uniformément elliptique, formellement autoadjoint du second ordre à coefficients variables, et $\boldsymbol{B}$ est l'opérateur de multiplication par une fonction poids $\boldsymbol{g}$ de signe non constant. Les opérateurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont définis dans un espace de Hilbert réel (ou complexe) $\boldsymbol{H}$.

La détermination des valeurs propres et des fonctions propres est en général impossible sauf pour quelques problèmes simples. il est toute fois possible, par com-

paraison à des problèmes modèles d'obtenir une estimation :
la première concerne l'estimation des "premières valeurs propres"- valeurs propres "principales"- qui, dans le cas des problème aux limites de Dirichlet ou plus généralement d'un opérateur elliptique du second ordre sont associées à des fonctions propres positives : la deuxième estimation concerne les "grandes valeurs propres", et dans ce cas ils ont étudié le comportement asymptotique des valeurs propres quand λ tend vers l'infini, ce comportement est représenté par la fonction de comptage $N^+(\lambda, A, g, \mathbb{R}^n)$ $(resp. N^-(\lambda, A, g, \mathbb{R}^n))$ qui détermine le nombre de valeurs propres inférieures ou égale à $1.$ En ce qui nous concerne, notre intérêt est porté sur la première catégorie.

Les problèmes rélatifs à l'existence des valeurs propres princiales sont étudiés dans [10, 16, 19, 21] et [23] quand le potentiel q est positif ou nul et Ω borné ; les autres résultats dans [14] et [17] concernant les situations où $q = 0$ et Ω non borné.

Le cas $n = 1$ avec q non nécessairement positif est étudié par [26]. Ces problèmes là peuvent admettre des valeurs propres non réelles. En [19], les auteurs ont montré l'existence d'une suite de valeurs lorsque $n > 1$ et Ω est borné.

Allegretto & Mingarelli [2] ont donné une estimation de la première valeur propre d'un problème traité dans [19].

Dans [18] et [28] les auteurs ont considéré des potentiels $q \to \infty$ quand $x \to \infty$, tandis que [12], [13], [15], [21] et [23] ont utilisé des potentiels décroissant vers zéro à l'infini.

Nous observons une vaste littérature relative aux problèmes posés dans des domaines bornés, notamment les résultats élaborés dans [20], [21] et [23].

Si le problème (*) est concidéré dans un domaine borné, les expaces de Sobolev ordinaires conviennent parfaitement pour caractériser les solutions. Cependant dans un domaine non borné, il est nécessaire d'introduire les espaces de Sobolev à poids déjà rencontrés dans [3], [4], [7] et [22].

Le présent travail es organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous donnons certaines notations de base utilisées dans les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre nous rappellons tout d'abord la méthode de Weinberger [27], [29] qui permet d'établir l'existence de valeurs propres. Ces valeurs propres sont caractérisées par le principe du Min-Max.

Le dernier chapitre est consacré en premier lieu à l'étude des problèmes associés à des opérateurs de type Schrödinger $A := -\Delta + q$. Des considérations sur le potentiel q et le poids g s'avèrent nécessaires pourque le problème associé admette une double suite infinie dénombrable de valeurs propres l'une positive et l'autre négative tendant vers l'infini.

Nous montrons en particulier que la plus petite valeur propre est principale et simple. Ensuite, nous étudions le cas où le potentiel q change le signe. Dans le dernier paragraphe, nous étudions le cas où le potentiel q engendre la non-existence de valeur propre principale.

NOTATIONS

$\mathbb{N}$ (respectivement $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) **:** Ensembles des nombres naturels (respectivement rationnels, réels, complexes).

$\mathbb{K}$	: Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\boldsymbol{\Omega}$	: Ouvert de $\mathbb{R}^n$
$\boldsymbol{\mathcal{P}(\Omega)}$	: L'ensemble des parties de $\boldsymbol{\Omega}$
$\boldsymbol{p.p.}$	: Presque partout.
$\boldsymbol{\mu}$	: Mesure.
$\boldsymbol{dx}$	: Mesure de Lebesgue.
$\boldsymbol{\chi_A}$	: Fonction indicatrice de l'ensemble $\boldsymbol{A}$.
$\boldsymbol{E'}$	: Dual topologique d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$.
$\boldsymbol{*}$	: Produit de convolution.
$\boldsymbol{L^p(\Omega)}$	: Espace de Lebesgue classique sur $\boldsymbol{\Omega}$.
$\boldsymbol{L^p_{loc}(\Omega)}$	: Espace de fonctions p-localement intégrables sur $\boldsymbol{\Omega}$.
$\boldsymbol{\|\|.\|\|_{L^p}}$	: Norme classique de Lebesgue.
$\boldsymbol{C_c(\Omega)}$	: Espace des fonctions continues sur $\boldsymbol{\Omega}$ à support compact.
$\boldsymbol{C^k(\Omega)}$	: Ensemble des fonctions de classe $\boldsymbol{k}$ dans $\boldsymbol{\Omega.}$
$\boldsymbol{C^k_c(\Omega)}$	: Ensemble des fonctions $\boldsymbol{C^k(\Omega)}$ à support compact.
$\boldsymbol{C^\infty(\Omega)}$	: Ensemble des fonctions indéfiniment différentiables dans $\boldsymbol{\Omega}$.

$C_c^\infty(\Omega)$	: Ensemble des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact.
$L^{p'}(\Omega)$	: Espace dual de $L^p(\Omega)$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$.
$W^{k,p}(\Omega)$	: Espace de Sobolev avec dérivées d'ordre k dans $L^p(\Omega)$.
$W_0^{k,p}(\Omega)$	: Espace de Sobolev avec trace nulle.
$W_0^{-k,p'}(\Omega)$	: Espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$.
$L(E,F)$	: Ensemble des opérateurs linéaires continues de E dans F.
$D(A)$	: Domaine de l'opérateur A.
$K(E,F)$	: Ensemble des opérateurs compacts de E dans F.
$X \hookrightarrow Y$	: L'injection continue de X dans Y.
$X \underset{c}{\hookrightarrow} Y$	: L'injection compacte de X dans Y.

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right) = grad\ u$, le gradient de u.

$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, Laplacien de u.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS DE BASE

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω pour plus de détail voir [8] [[25] p.2-34].

Définition 1.1. Une famille $\mathbf{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est appelée tribu si :

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall j \geq 1, Aj \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{j \geq 1} Aj \in \mathcal{A}$

Notation 1: Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace mesurable.

Définition 1.2. On appelle ensemble mesurable les éléments de $\mathcal{A}$.

Définition 1.3. On appelle tribu borélienne sur Ω, la tribu engendrée par les ouverts de Ω, on le note $\mathcal{B}$.

Définition 1.4. Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(X, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables.
une application $f : \Omega \to X$ est dite mesurable si l'image réciproque par f de tout élement B *de* $\mathcal{B}$ est un élement de $\mathcal{A}$, c'est à dire

$$\forall B \in \mathcal{B} \qquad f^{-1}(B) \subset \mathcal{B}$$

On rappelle qu'une famille d'ensemble $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est disjointe deux à deux, si :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \phi$$

Un ensemble Ω est dit dénombrable s'il existe une bijection de Ω sur un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, c'est à dire il existe une application $f : \Omega \to X \subset \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall y \in X, \exists!\ x \in \Omega, y = f(x)$$

Définition 1.5. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle mesure positive toute application $\mu : \Omega \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :

(i) $\mu(\phi) = O$

(ii) $\forall (A_j)_j$ une suite finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ disjointe deux à deux, on a

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j)$$

Notation 2 : Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

Remarque 1.1. il existe une unique mesure d sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\Omega))$ telle que :

$$d(\prod_{j\in\mathbb{N}} [a_j.b_j]) = \prod_{j\in\mathbb{N}} (b_j - a_j) \text{ pour } b_j > a_j$$

Cette mesure est appelée mesure de Lebesgue et est notée dx ou $d\mu$

Définition 1.6. On dit qu'une partie $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ est négligable si $\mu(\mathcal{A}) = 0$.

Définition 1.7. On dit qu'une propriété P est vraie presque partout (**en abrégé p.p**) sur Ω, si

$$\mu(\{x \in \Omega \ \ P \ \text{ est fausse}\}) = 0.$$

1.1 Espace de Lebesgue $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$

Dans cette notion on notera l'espace de Lebesgue classique par $L^p(\Omega)$ au lieu de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout p où $1 \leq p \leq \infty$ [8],[25]

Espaces $\mathscr{L}^1$ et L^1

Définition 1.8. L'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté et défini par :

$$\mathscr{L}^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K}, \text{mesurable et} \int_\Omega |f| d\mu < +\infty \right\}$$

Définition 1.9. L'espace des fonctions intégrables est noté et défini par l'éspace vectoriel quotient.

$$L^1(\Omega) = \mathscr{L}^1(\Omega)/\mathcal{R}$$

Ou $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence donnée par :

$$f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow f = g \ p.p. \text{ sur } \Omega,$$

avec $f, g \in L^1(\Omega)$
pour toute fonction f de $L^1(\Omega)$, on pose $||f||_{L^1} = \int_\Omega |f| d\mu(x)$

Définition 1.10. La fonction indicatrice d'un ensemble $A \in \mathcal{A}$, est notée et définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \ x \in A \\ 0 & si \ x \notin A \end{cases}$$

Définition 1.11. La fonction étagée est définie par :

$$e : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{Aj}(x),$$

avec $(a_j)_{1 \leq j \leq m} \subset \mathbb{R}$ et $(A_j)_{1 \leq j \leq m} \subset \mathcal{A}$
L'intégrale d'une fonction étagée et donnée par :

$$\int_\Omega e \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j.\mu(A_j)$$

Définition 1.12. L'intégrale d'une fonction mesurable positive $f : \Omega \to \mathbb{K}$

par rapport à la mesure μ est donnée par :

$$\int_\Omega f\ d\mu = \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_\Omega e_j\ d\mu$$

où $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des fonctions étagées positives.

Lemme 1.1. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ et supposons que :

$$\begin{array}{c} f_j(x) \to f(x)\ p.p.\ \textbf{sur}\ \Omega \\ j \to +\infty \end{array}$$

Alors
$$\begin{array}{ccc} ||f_j||_{L^1} \to ||f||_{L^1} & \Longleftrightarrow & ||f_j - f||_{L^1} \to 0 \\ j \to +\infty & & j \to +\infty \end{array}$$

Lemme 1.2. Soit e une fonction étagée positive et $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles mesurables convergeant vers X, On a :

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{X_j} e\ d\mu = \int_X e\ d\mu$$
$$e = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j\ \chi_{A_j}$$

Théorème 1.1. (Beppo levi) Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que :

(i) $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante $p.p.$ sur Ω

(ii) $\sup\limits_j \int_\Omega f_j < +\infty$

Alors :

(i) $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ converge $p.p.$ sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$

(ii) $f \in L^1(\Omega)$ et $||f_j - f||_{L^1} \to 0$

$$j \to +\infty$$

une des conséquences du Théorème de Beppo-Levi est le lemme de Fatou suivant.

Lemme 1.3. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que :

(i) $\forall j \in \mathbb{N}, f_j(x) \geq 0$ **p.p. sur** Ω

(ii) $\underset{j\in\mathbb{N}}{sup} \int_\Omega f_j < +\infty$

$\forall x \in \Omega,$ **on pose** $f(x) = \lim_{j\to+\infty} inf\ f_j(x)$, alors :

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega f \leq \lim_{j\to+\infty} inf \int_\Omega f_j$$

Le résultat suivant donne le Théorème fondamentale de Lebesgue :

Théorème 1.2. (convergence dominée) Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que :

(i) $f_j(x) \longrightarrow f(x)$ **p.p. sur** Ω

(ii) $\exists g \in L^1(\Omega), \forall j \in \mathbb{N}, |f_j(x)| \leq g(x)$ **p.p. sur** Ω.

Alors : $f \in L^1(\Omega)$ et $||f_j - f||_{L^1} \longrightarrow 0$

La réciproque du Théorème de la convergence dominée de Lebesgue est donnée par le Théorème suivant :

Théorème 1.3. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^1(\Omega)$ et $f \in L^1(\Omega)$ on suppose que :

$$\int_\Omega |f - f_j| d\mu \longrightarrow 0$$

$$j \longrightarrow +\infty$$

Alors, il existe une sous-suite $(f_{jk})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que :

(i) $(f_{jk})_{k\in\mathbb{K}}$ converge **p.p.** vers sa limite f

(ii) $\exists h \in L^p(\Omega) \Longrightarrow |f_{jk}| \leq h \quad$ **p.p.** $\quad$ **sur** Ω

Espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p, $1 < p < \infty$

Nous proposons maintenant l'espace de Lebesgue pour $1 < p < \infty$

Définition 1.13. L'ensemble de quotient des fonctions mesurables $p^{\text{ième}}$-intégrables sur Ω est noté et défini par :

$$\mathscr{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K}, \text{mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu < +\infty\}$$

Définition 1.14. La classe des fonctions mesurables $p^{\text{ième}}$-intégrables de Lebesgue est notée et définie par :

$$L^p(\Omega) = \mathscr{L}^p(\Omega)/\mathcal{R}$$

ou $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence donné par :

$$f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow f = g \; p.p. \text{ sur } \Omega$$

Avec $f, g \in L^p(\Omega)$

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}, \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est défini comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathscr{L}^p(\Omega)$ associé à relation d'équivalence $\mathcal{R}$.
pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose $||f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

Espace de Lebesgue $\mathscr{L}^\infty$ et L^∞

La classe des fonctions essentiellement bornées sur Ω, notée $L^\infty(\Omega)$ et définie comme suit.

Définition 1.15. L'espace des fonctions essentiellement bornées est noté et défini par : $\mathscr{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}, \text{ est mesurable et } \exists \, c > 0$ telle que :

$$|f| \leq c \; p.p. \text{ sur } \Omega\}$$

Définition 1.16. L'ensemble de quotient de fonctions essentiellement bornées de Lebesgue est noté et défini par :

$$L^\infty(\Omega) = \mathscr{L}^\infty(\Omega)/\mathcal{R}$$

Ou $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence donnée par :

$$f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow f = g \ p.p.\text{sur } \Omega$$

avec $f, g \ \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)$,
pour toute fonction $f \in L^\infty(\Omega)$, on pose :

$$||f||_{L^\infty} = \underset{x\in\Omega}{sup} \ ess|f(x)| = inf\{c > 0, \ |f| \leq c, \ p.p. \text{ sur } \Omega\}$$

1.2 Propriétés élémentaires de l'espace L^p

propriétés algébriques

Proposition 1.1. L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel pour $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.17. Soit $1 \leq p \leq \infty$, on appelle exposant conjugué de p, le nombre réel q vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

Maintenant quelques inégalités importantes :

Lemme 1.4. (Inégalité de Young) Soit $a, b > 0$ et $1 \leq p, q \leq \infty$. Alors :

$$a \ . \ b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

Théorème 1.4. (Hölder) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et $||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^p} \ ||g||_{L^q}$

Corollaire 1.1. lorsque $p = q = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \ \|g\|_{L^2}$$

le cas où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

si $f, g \in C([0,1], \mathbb{R})$,alors

$$\int_0^1 |fg| \leq \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Application 1.1. (Intégralité de Hardy) [5]

Soit $p \in]1, +\infty[$ un réel, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on pose :

$$T_f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \int_0^x \ f(t)\ dt. \end{cases}$$

Alors pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, T_f est un élément de $L^p(\mathbb{R}_+)$, et on a la majoration :

$$\|T_f\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p}$$

Théorème 1.5. (Minkowski) Soient $f, g \in L^p(\Omega),\ 1 \leq p \leq \infty$.
Alors $f + g \in L^p(\Omega)$ et $||f + g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$

Théorème 1.6. soit $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, ou $1 \leq p \leq \infty$

Alors :

$$\left(\int_\Omega |\sum_{j=1}^{\infty} f_j|^p \ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} (|f_j|^p \ d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Théorème 1.7. L'espace $(L^p(\Omega), ||.||_{L^p})$ est un espace vectoriel normé pour tout $1 \leq p \leq \infty$

Définition 1.18. Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, dont l'une est à support compact. La convolution de f avec g notée $f * g$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ g(x-y) dy$$

Théorème 1.8. soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $||f * g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1} + ||g||_{L^p}$

Convergence dans L^p

Définition 1.19. Une suite de fonctions $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^p(\Omega)$ est dite **Cauchy**, si :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon > 0,\ i,j \geq n_\epsilon,\ ||f_i - f_j||_{L^p} < \epsilon$$

Définition 1.20. Une suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables est dite convergente $p.p.$ vers f s'il existe une partie $A \subset \Omega$, négligable, telle que, $\forall x \in \mathcal{A}^c$, on a :

$$\begin{array}{c} f_j(x) \longrightarrow f(x) \\ j \longrightarrow +\infty \end{array}$$

Proposition 1.2. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ converge $p.p.$ vers une fonction f. Alors :

(i) $f \in L^p(\Omega)$ et $||f||_{L^p} \leq \lim_{j\to\infty} inf ||f_j||_{L^p}$

(ii) si $||f_j||_{L^p} \longrightarrow ||f||_{L^p}$, alors $||f_j - f||_{L^p} \longrightarrow 0$

Théorème 1.9. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite croissante en fonctions de $L^p(\Omega)$ et $\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_j < \infty$. Alors $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ converge $p.p.$ sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$.
De plus, on a :

$$\begin{array}{r} f \in L^p(\Omega) \text{ et } ||f_j - f||_{L^p} \longrightarrow 0 \\ j \longrightarrow +\infty \end{array}$$

Théorème 1.10. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, telle que :

(i)

$$\begin{array}{c} f_j(x) \longrightarrow f(x)\ p.p. \text{ sur } \Omega \\ j \longrightarrow +\infty \end{array}$$

(ii)

$$\exists g \in L^p(\Omega),\ \forall j \in \mathbb{N}, |f_j(x)| \leq g(x)\ p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Alors

$$f \in L^p(\Omega) \text{ et } ||f_j - f||_{L^p} \longrightarrow 0$$

Théorème 1.11. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que :

$$f \in L^p(\Omega) \text{ et } ||f_j - f||_{L^p} \longrightarrow 0$$
$$j \longrightarrow +\infty$$

Alors il existe une sous-suite extraite $(f_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

(i) $f_j(x) \longrightarrow f(x)$ $p.p.$ sur Ω

(ii) $\exists h \in L^p(\Omega), ||f_{jk}(x)|| \leq h(x), \forall k \in \mathbb{N},$ $p.p.$ sur Ω

Théorème 1.12. (Riesz-Fisher) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurée et, $1 \leq p \leq \infty$. L'espace vectoriel normé $(L^p(\Omega), ||.||_{L^p})$ est de **Banach**.

Propriétés géométriques et topologique de L^p [25]

Densité dans L^p :

Définition 1.21. Soit Ω un espace vectoriel normé de A une partie de Ω , On dit que A est dense dans Ω si : $\bar{A} = \Omega$, autrement dit

$$\forall x \in \Omega, \exists (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset A \text{ telle que } x_j \longrightarrow x$$
$$j \longrightarrow +\infty$$

Définition 1.22. L'espace des fonctions localement intégrables sur Ω, est noté et défini par :

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega : f \in L^p(\mathbb{K}), \text{ pour tout compact } \mathbb{K} \text{ de } \Omega\}$$

Définition 1.23. L'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω à support compact est défini par l'ensemble :

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \text{ continue et } suppf \text{ est un compact de } \Omega\}$$

On a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.5. Soit $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ tel que $\int_\Omega fu \; d\mu = 0$, $\forall u \in C_c(\Omega)$. Alors $f = 0$ $p.p.$ sur Ω.

Théorème 1.13. L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.

Séparabilité de L^p :

Définition 1.24. On dit q'un espace de **Banach** Ω est séparable s'il contient une partie dénombrable et dense, ou encore

$$\exists A \subset \Omega \text{ tel que } \bar{A} = \Omega \text{ et } A \text{ est au plus dénombrable}$$

Théorème 1.14. $L^p(\Omega)$ est séparable pour tout $-1 \leq p < +\infty$

Lemme 1.6. Soit Ω un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de Ω telle que :

(i) pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de Ω

(ii) $O_i \cap O_j = \phi$ si $i \neq j$

(iii) I n'est pas dénombrable

Alors Ω n'est pas séparable.

Remarque 1.2. L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

Dualité de L^p :

Théorème 1.15. (représentation de Riesz) Soit $1 \leq p \leq \infty$ et l'application de $(L^p(\Omega))'$. Alors, il existe un unique $u \in L^q(\Omega)$ tel que :

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf \; d\mu, \; \forall f \in L^p(\Omega)$$

De plus on a : $||u||_{L^q} = ||q||_{(L^p)'}$

Remarque 1.3. (Dual de L^∞) Notons que le Théorème précédent est en général faux pour $p = +\infty$. L'application $\varphi : f \longmapsto \varphi(f)$, est une isométrie linéaire (ou antilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de $L^1(\Omega)$ dans $(L^\infty(\Omega))'$ mais l'image de φ est, aux cas très particuliers, différente de $(L^\infty(\Omega))'$. L'application φ ne permet donc pas d'identifier le dual de $L^\infty(\Omega)$ à $L^1(\Omega)$.

Réflexivité de L^p :

Définition 1.25. un espace de Banach Ω est dit réflexif si l'injection canonique $J : X \longrightarrow X''$ est surjective.

Définition 1.26. on dit qu'un espace de Banach Ω est uniformément convexe si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$(x, y \in X, ||x||_{L^p} < 1, ||y||_{L^q} \leq 1 \text{ et } ||x-y||_{L^p} > \delta) \Longrightarrow (||\frac{x+y}{2}||_{L^p} < 1-\epsilon)$$

La convexité uniforme comme une propriété géométrique est un outil très pratique pour démontrer qu'un tel espace **est réflexif**.

Théorème 1.16. (Milman-Pettis) Tout espace de Banach uniformément convexe est **réflexif**.

Remarque 1.4. La réciproque du Théorème précédent **est fausse**.

Rappelons la notion suivante.

Définition 1.27. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si :

$$\forall x, y \in I \; , \forall \alpha \in [0,1], f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)\; f(x) + \alpha f(y)$$

Nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 1.7. (Intégralité de Clarkson) Soit $p \in [2, +\infty[$, pour toute f et g dans $L^p(\Omega)$, on a :

$$||\frac{f+g}{2}||^p_{L^p} + ||\frac{f-g}{2}||^p_{L^p} \leq \frac{1}{2}(||f||^p_{L^p} + ||f||^p_{L^p})$$

Le cas $1 < p < 2$, qui est un peu plus compliqué est basé sur l'inégalité de Jensen suivante.

Proposition 1.3. **(Jensen)** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ et φ une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour toute fonction convexe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, on a $\int_\Omega f \, d\mu \in I,\ \int_\Omega \varphi(f) \, d\mu$ existe dans $]-\infty, +\infty[$ et $\varphi\left(\int_\Omega f \, d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi(f) \, d\mu$

Lemme 1.8. **(Inégalité de Hänner)** Soit $p \in [1, 2]$, pour f et g dans $L^p(\Omega)$, on a :

$$(||f||_{L^p} + ||g||_{L^p})^p + |\ \ ||p||_{L^p} - ||g||_{L^p}\ \ |^p \leq ||f+g||^p_{L^p} + ||f-g||^p_{L^p}$$

Lemme 1.9. $L^p(\Omega)$ est un espace uniformément convexe, pour tout $p \in]1, \infty[$

Corollaire 1.2. $L^p(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout p, $1 < p < \infty$.

Remarque 1.5. $L^1(\Omega)$ et $L^p(\Omega)$ ne sont pas **uniformément convexes**.

Théorème 1.17. Soit Ω un espace de Banach. Alors Ω est **réflexif** si et seulement si Ω' est **réflexif**.

Théorème 1.18. $L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs. [8]
Le tableau suivant récapitule les principales propriétés des espaces L^p rencontrées aux Théorèmes précédents.

L'exposant p	Réflexif	Séparable	Espace dual
$L^p,\ 1 < p < \infty$	Oui	Oui	$(L^p)' = L^q$
L^1	Non	Oui	L^∞
L^∞	Non	Non	contient strictement L^1

Inclusions entre les espaces L^p [8] [25]

Proposition 1.4. Si $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p < q$ et si $\mu(\Omega)$ est finie, alors :

$$L^{\infty}(\Omega) \subset L^{q}(\Omega) \subset L^{p}(\Omega) \subset L^{1}(\Omega).$$

1.3 Espace de Sobolev

Définitions et propriétés élémentaires des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.28. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p;\ \exists\ g_1 g_2, \cdots, g_N \in L^p(\Omega);$$
$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall\ \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)\ \forall\ i = 1, 2, \cdots N\}$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Pour $u \in W^{1,2}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) = \text{grad } u.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2}$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p}^2\right)^{1/2}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Proposition 1.5. .

* $*$ L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$
* $*$ L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$
* $*$ L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$
* $*$ $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Proposition 1.6. (Dérivation d'un produit)
Soient $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.
Alors $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soient $m \geq 2$ un entier et p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$. On définit par récurrence

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, N \right\}$$

Il revient au même d'introduire

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega), \forall\ \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m,\ \ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ telle que} \\ \displaystyle\int_\Omega u D^\alpha\ \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

On note $D^\alpha u = g_\alpha$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\lambda| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.

On note $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2}$$

est un espace de Hilbert.

Les injections dans l'espace de Sobolev [8], [6]

1. **Injection continue**

   Théorème 1.19. Soit $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$, Il existe une constante C (dépend seulement de I) ; telle que :

   $$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \leq p < +\infty$$

   Autrement dit $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ avec injection continue.

2. **Injection compacte**

   Définition 1.29. L'injection compacte de X dans Y ; signifie que la boule unité de X est relativement compacte dans Y ; c'est-à-dire $\overline{B_X(0,1)}$ est compacte dans Y.

   Théorème 1.20. (Injection compacte) Supposons que I est un intervalle ouvert borné, on a :

   * L'injection $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ est compacte pour $p > 1$
   * L'injection $W^{1,p}(I) \subset L^q(I)$ est compacte pour $1 \leq q < +\infty$

Inégalités de Sobolev

On a vu que Ω est de dimension 1, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ avec injection continue. En dimension $N \geq 2$ cette inclusion reste vraie seulement pour $p > N$; lorsque $p \leq N$ on peut construire des exemples de fonctions de $W^{1,p}$ qui n'appartiennent pas à $L^\infty(\Omega)$. Néanmoins un résultat important dû essentiellement à Sobolev, affirme que si $1 \leq p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ avec injection continue pour certain $p^* \in]p, +\infty[$.

Commençons par envisager le :

(i) **Cas ou $\Omega = \mathbb{R}^N$**

Théorème 1.21. (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) .
Soit $1 \leq p < N$, alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*} \quad (\mathbb{R}^N) \text{ ou } p^* \text{ est donné par } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

et il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Remarque 1.6. La valeur de p^* peut s'obtenir par un argument d'homogénéité très simple.

Corollaire 1.3. Soit $1 \leq p < N$. Alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \qquad \forall\, q \in [p, p^*]$$

avec injection continue.

Corollaire 1.4. (Le cas limite $p = N$) On a :

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \qquad \forall\, q \in [N, +\infty[$$

avec injection continue.

Théorème 1.22. (Morrey) Soit $p > N$, alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue.
De plus, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ On a :

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p} \quad p.p. \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

avec $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$ et C est une constante (qui dépend seulement de p et N).

Corollaire 1.5. Soient $m \geq 1$ un entier et $1 \leq p < +\infty$. On a

L'exposant p	l'injection	l'exposant q
$\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$	$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$	$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$
$\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$	$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$	$q \in [p, +\infty[$
$\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$	$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$	$q = +\infty$

avec injection continue.

De plus, si $m - \dfrac{N}{P} > 0$ n'est pas entier, on pose

$$K = \left[m - \frac{N}{P}\right] \text{ et } \theta = m - \frac{N}{P} - K \quad (0 < \theta < 1)$$

On a, pour tout $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{m,p}} \quad \forall\, \alpha \quad \text{avec} \quad |\alpha| \leq K$$

et

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{W^{m,p}}|x-y|^\theta p.p. \\ x, y \in \mathbb{R}^N, \quad \forall\, \alpha, \quad |\alpha| = K$$

En particulier :

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^K(\mathbb{R}^N).$$

(ii) **Cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$**

On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1 avec $\partial\Omega$ borné, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

Corollaire 1.6. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On a :

L'exposant p	l'injection	l'exposant q
$1 \leq p \leq N$	$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$	$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$
$p = N$	$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$	$q \in [p, +\infty[$
$p > N$	$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$	$q = +\infty$

De plus, si $p > N$ on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}|x - y|^{\alpha} \qquad p.p. \quad x, y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ et C dépend seulement de Ω, p et N. En particulier

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$$

Théorème 1.23. (Rellich-Kondrachov) : On suppose que Ω est borné de classe C^1.
On a :

L'exposant p	l'injection	l'exposant q
$p < N$	$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^{q}(\Omega)$	$q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$
$p = N$	$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^{q}(\Omega)$	$q \in [1, +\infty[$
$p > N$	$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c C(\bar{\Omega})$	$q = +\infty$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.30. Soit $1 \leq p < +\infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

$*$ L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}$ est un espace de Banach.

$*$ L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable.

$*$ L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est réflexif si $1 < p < +\infty$

$*$ H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de H^1.

Lemme 1.10. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, avec $supp\, u$ est compact inclus dans Ω, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lemme 1.11. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $u^+, u^-, |u|$ sont dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ où :

$$u^+ = \max \{u(x), 0\}$$
$$u^- = \max \{-u(x), 0\}$$

et on a :

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases}$$
$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u \geq 0 \\ -\nabla u & \text{si } u < 0 \end{cases}$$
$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \\ -\nabla u & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

Théorème 1.24. On suppose Ω de classe C^1. Soit

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

avec $1 \leq p < +\infty$
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Corollaire 1.7. (Intégralité de Poincaré) : On suppose que Ω est un ouvert borné.

Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad (1 \leq p < +\infty)$$

En particulier : l'expression $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$; sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui introduit la norme $\|\nabla u\|_{L^2}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1}$

L'espace dual de $W_0^{1,p}$

Notion : On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}$, $1 \leq p < +\infty$ et par $H^{-1}(\Omega)$. On identifie $L^2(\Omega)$ et son dual, mais on n'identifie pas $H_0^1(\Omega)$ et son dual. On a le schéma :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues et denses.

Remarque 1.7. $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection dense :

$$\overline{H_0^1(\Omega)} \subset L^2(\Omega)$$

1. Si Ω est borné on a :

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \qquad \text{si } \frac{2N}{N+2} \leq p < +\infty$$

   Avec injections continues et denses.

2. Si Ω n'est pas borné on a :

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \qquad \text{si } \frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2$$

On peut caractériser les éléments de $W^{-1,p'}$ par la proposition suivante :

Proposition 1.7. Soit $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$, alors il existe $f_0, f_1, \cdots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$ telles que :

$$\langle F, v\rangle = \int f_0 v + \sum_{i=1}^{N} \int f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \forall v \in W_0^{1,p}$$

et

$$\max_{0\leq i\leq N} \|f_i\|_{L^{p'}} = \|F\|$$

Si Ω est borné, on peut prendre $f_0 = 0$

1.4 Espace de Sobolev à poids [1], [2], [3], [4], [10] et [24]

n sera un entier naturel non nul. Pour tout point $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et tout multi-indice $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$
On note :

$$|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n, \qquad \sigma^\lambda = \frac{|\lambda|}{\lambda_{x_1}^{\lambda_1} \cdots \lambda_{x_n}^{\lambda_n}}.$$

$$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}, \qquad \langle x\rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}.$$

$L^p(\mathbb{R}^n)$ désignera l'espace usuel des fonctions mesurables telles que :

$$\int_\Omega |u|^p \, dx \ < \ \infty.$$

et doté de sa norme habituelle.

Définition 1.31. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev à poids défini par :

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega)/\langle x\rangle^{\alpha-m+\lambda}\partial^\lambda u \in L^p(\Omega); |\lambda| \leq m\}$$

est doté de la norme

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{\lambda\leq m} \|\langle x\rangle^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^\lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{1/p}$$

Cette définition n'a pas d'intêret par rapport à celle des espaces de Sobolev usuels que si l'ouvert Ω est non borné. Sinon l'espace $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ coïncide algébriquement et topologiquement avec $W^{m,p}(\Omega)$, l'espace de Sobolev habituel. En conséquence, on observe que quand Ω est non borné, toutes les propriétés des fonctions appartenant à $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ coïncident localement avec les propriétés des fonctions appartenant à $W^{m,p}(\Omega)$

On donne maintenant quelques propriétés des espaces $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$

1. $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.
2. $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme ci-dessus.
3. $W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-2}^{m-2,p}(\Omega) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega)$
   ($\hookrightarrow$ signifie inclusion avec injection continue).
4. Pour $\varphi \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})($ φ restriction à Ω d'une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n))$ l'application. $u \to \varphi u$ est linéaire et continue de $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$
5. Dans le cas $p = 2, W_\alpha^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire.

$$(u,v)_{W_\alpha^m(\Omega)} = \sum_{\lambda \leq m} \int_\Omega \langle x \rangle^{2(\alpha-m+\lambda)}\ \partial^\lambda\ u\ \overline{\partial^\lambda v}\ dx$$

   On note simplement $W_\alpha^m(\Omega)$ l'espace $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$ (p, égale 2 ici, est enlevé).

6. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}$ l'application

$$\begin{aligned} W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) &\to W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\mathbb{R}^n) \\ u &\to \langle x \rangle^\beta u \end{aligned}$$

   est isomorphisme.

7. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}$ l'application

$$\begin{aligned} W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \ &\to W^{m-|\lambda|,p}_{\alpha-\beta}(\mathbb{R}^n) \\ u &\to \langle x\rangle^{\beta}\ \partial^{\lambda}\ u \end{aligned}$$

   est linéaire continue.

8. En nottant $\mathscr{P}_k$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k (avec la convention $\mathscr{P}_k = \{0\}$ pour $k < 0$), on montrer que si $\dfrac{n}{p} + \alpha \ \notin \ \{i \ \in \mathbb{Z}; i \leq m\}$ alors $\mathscr{P}_{[m-n/p-\alpha]}$ est l'espace de tous les polynômes inclus dans $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

On a le résultat de densité suivant :

Théorème 1.25. $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$

Le dual de l'espace $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ sera noté par $W^{-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi,

$$W^{-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n) \ = (W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n))', \text{ ou } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Dans la suite, pour $m \in \mathbb{N},\ 1 < p < \infty$ et $\alpha,\ p \in \mathbb{R}$; on considérera la semi-norme définie sur $W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$ par

$$|u|_{W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)} \ = \ (\sum_{|\lambda|=m} \|\langle x\rangle^{\alpha}\ D^{\lambda}\ u\|^{p})^{1/p}$$

On considérera aussi la norme de l'espace $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[m-n/p-\alpha]}$ donnée par

$$[u]_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)} \ = \ \inf_{Q\in\mathscr{P}_{[m-n/p-\alpha]}} \|u + Q\|_{W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)}$$

Le Théorème suivant joue un rôle fondamental dans l'étude de problèmes associés au Laplacien. Il s'agit d'une extension des inégalités de Poincaré quand $\alpha = 0$.

Théorème 1.26. Soit un entier $m \geq 1$ et un réel $p \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{n}{p} \notin \{1, \cdots, m\}$. Alors, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de m, n et p telle que

$$\forall\ u \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n), [u]_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Corollaire 1.8. Soit un entier $m \geq 1$ et un réel $p \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{n}{p} \notin \{1, \cdots, m\}$.
Les deux normes $[u]_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$ et $|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$ sont équivalentes dans $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Maintenant on va rappeller quelques résultats concernant les opérateurs différentiels ∇, div et Δ dans les espaces non bornés. [31]

(i) Soit $n \geq 3$, l'opérateur

$$A = \sum_{|\lambda| \leq 2} \langle x \rangle^{|\lambda|}\ a_\lambda\ \partial^\lambda,$$

tel que

$$a_\lambda \in C^{\infty(\mathbb{R}^n)} \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\exists\ \delta \text{ tel que },\forall\ \xi \in C^m,\ \forall x \in \mathbb{R}^n : Re\left(\sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}\xi_i\xi_j\right) \geq \delta|\xi|^2$$

et

$$\forall\ \mu \in \mathbb{N}, \exists\ C > 0\ ; |\partial^u\ a_\lambda| \leq C\langle x \rangle^{-|\mu|}$$

Alors A est un isomorphisme de $W_k^k(\mathbb{R}^n)$ sur $W_{k-2}^{k-2}(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ k \geq 1$

(ii) Si $\dfrac{n}{p} \neq 1$, les opérateurs

$$\nabla : W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[1-n/p]} \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)\perp H_{p'}$$
$$u \mapsto \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

et

$$div : L^{p'}(\mathbb{R}^n)/H_{p'} \longrightarrow W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)\perp\mathscr{P}_{[1-n/p]}$$
$$u \longrightarrow div\ u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

sont isomorphismes ; ou $H_p = \{v \in L^p;\ \text{div } v = 0\}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

(iii) Soit $m \in \mathbb{Z}$ et p un nombre réel appartenant à $[1, \infty[$

(a) Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{n}{p} \notin \{1, \cdots, l+1\}$, les opérateurs

$$\Delta : W_{-l+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[l+1-n/p]}^{\Delta} \longrightarrow W_{-l+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^n),$$
$$u \longrightarrow \Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = div\ (grad\ u)$$

$$\Delta : W_{-l+m}^{1+m,p'}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_{-l+m}^{1+m,p'}(\mathbb{R}^n)\perp\mathscr{P}_{[l+1-n/p]}^{\Delta}$$
$$u \longrightarrow \Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = div\ (grad\ u)$$

sont des isomorphismes.

(b) Si $\dfrac{n}{p} \neq 1$ et $\dfrac{n}{p'} \neq 1$, alors l'opérateur

$$\Delta : W_m^{1+m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[1-n/p]} \longrightarrow W_m^{1+m,p}\perp\mathscr{P}_{[1-n/p']}$$

est un isomorphisme.

Soit $l \geq 0$ un entier tel que $\dfrac{n}{p'} \notin \{1, \cdots, l\}$, les opérateurs de Laplace

$$\begin{aligned}
\Delta : W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[2-l-n/p]} &\longrightarrow W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathscr{P}^{\Delta}_{[l-n/p']},\\
\Delta : W_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{[1-l-n/p]} &\longrightarrow W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathscr{P}^{\Delta}_{[1+l-n/p']},\\
\Delta : W_{-l}^{2,p'}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}^{\Delta}_{[2-l-n/p']} &\longrightarrow W_{-l}^{0,p'}(\mathbb{R}^n)\perp\mathscr{P}^{\Delta}_{[1-n/p']},
\end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

Dans ces résultats concernant le Laplacien, les cas où les conditions du type $\dfrac{n}{p} \notin \{1, \cdots, l+1\}$ ne sont pas réalisés (c'est-à-dire quand par exemple $\dfrac{n}{p} \in \{1, \cdots, l+1\}$), sont considérés comme des cas critiques. Les résultats ci-dessus peuvent être étendus a ces cas, pourvu que les espaces soient légèrment modifiés en y injectant des poids logarithmiques. Sans trop détailler, cela peut se faire de la manière qui suit

Soit La fonction poids $w(t) = lg(|x|) = \ln(2 + |x|^2)$ c'est à dire une fonction continue, positive $w(x) :]a, b[\longrightarrow]0, +\infty[$ avec la propriété suivante : l'intégrale $\int_a^b |x|^n \, w(x) \, dx$ est convergente pour tout entier n.

Et soient α et β et p des nombres réels avec $p \in \,]1, +\infty[$. On définit l'espace de Sobolev à poids $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) \; = \{&u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n);\\
&\forall\, 0 \leq |\lambda| \leq k, \langle x\rangle^{\alpha-m+|\lambda|}\, (lg|x|)^{\beta-1}\, \partial^{\lambda}\, u \in L^p(\mathbb{R}^n)\\
&\forall\, k+1 \leq |\lambda| \leq k,\; \langle x\rangle^{\alpha-m+|\lambda|}\, (lg|x|)^{\beta}\, \partial^{\lambda}\, u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}
\end{aligned}$$

tel que

$$k = k(m,n,p,\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } \dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{1,\cdots,m\} \\ m - \dfrac{n}{p} - \alpha & \text{si } \dfrac{n}{p} + \alpha \in \{1,\cdots,m\} \end{cases}$$

On note sa norme par

$$\|u\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{0\le|\lambda|\le k} \|\langle x\rangle^{\alpha-m+|\lambda|}(lg|x|)^{\beta-1}\, \partial^\lambda\, u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ \sum_{k+1\le|\lambda|\le m} \|\langle x\rangle^{\alpha-m+|\lambda|}(lg|x|)^{\beta}\, \partial^\lambda\, u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p}$$

Cet espace est un espace de Banach réflexif. Toutes les propriétés de l'espace $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ coïncident localement avec les propriétés de l'espace $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.8. Si $\dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{1,2,\cdots,m\}$ et $\beta = 0$ l'espace $W^{m,p}_{\alpha,0}(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec l'espace $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$; autrement dit la définition de l'espace $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ est une génération de la définition de $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Donnons dans la suite quelques propriétés de cet espace [24]

(i) Si $\dfrac{n}{p} + \alpha \;\notin \{1,2,\cdots,m\}$ on a

$$W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{m-1,p}_{\alpha-1,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{m-2,p}_{\alpha-2,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow W^{0,p}_{\alpha-m,\beta}(\mathbb{R}^n)$$

(ii) Si $\dfrac{n}{p} + \alpha = i \in \{1,2,\cdots,m\}$ on a

$$W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow W^{m-i+1,p}_{\alpha-i+1,\beta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{m-i,p}_{\alpha-i,\beta-1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \cdots \\ \hookrightarrow W^{0,p}_{\alpha-m,\beta-1}(\mathbb{R}^n)$$

(iii) $\forall\; u \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{N}^n$ avec $|\lambda| \ge 0$, $D^\lambda\, u \in W^{m-|\lambda|,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$

(iv) L'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans :

$$W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) \text{ pour toute } m \in \mathbb{N} \text{ et } \forall\; \alpha,\; \beta \in \mathbb{R}.$$

(v) Pour α, β et δ dans $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$ l'application

$$\begin{aligned} W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) &\to W^{m,p}_{\alpha,\beta-\delta}(\mathbb{R}^n) \\ u &\to (lg|x|)^{\delta}\, u \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

(vi) Si $\dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{1, \cdots, m\}$, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{n}{p} + \alpha - \gamma \notin \{1, \cdots, m\}$ l'application :

$$\begin{aligned} W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) &\to W^{m,p}_{\alpha-\gamma,\delta}(\mathbb{R}^n) \\ u &\to \langle x\rangle^{\gamma}\, u \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

(vii) L'espace dual de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de distributions noté par :

$$W^{-m,p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^n) = (W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n))', \text{ ou } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Soit maintenant q un nombre défini comme suit

$$q = \begin{cases} m - \left(\dfrac{n}{p} - 1\right), \text{ si } \begin{cases} \dfrac{n}{p} + \alpha \in \{1, \cdots, m\} \text{ et } (\beta - 1)p \geq -1 \\ \text{ou} \\ \dfrac{n}{p} + \alpha \in \{i \in \mathbb{Z}, i \leq 0\} \text{ et } \beta p \geq -1 \end{cases} \\ \left[m - \left(\dfrac{n}{p} + \alpha\right)\right], \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathscr{P}_q$ est l'ensemble de touts les polynômes appartenant à $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$

(viii) On définit la semi-norme de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$

$$|u|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{|\lambda|=m} \|\langle x\rangle^{\alpha}(lg|x|)^{\beta}\, D^{\lambda}\, u\|^{p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p}$$

Théorème 1.27. Soit α et β deux nombres réels et $m \geq 1$ un entier ne satisfaisant pas simultanément

$$\frac{n}{p} + \alpha \in \{1, \cdots, m\} \text{ et } (\beta - 1)p = -1.$$

Soit $q' = \inf(q, m-1)$. Alors; il existe une constante C telle que :

$$\forall\ u \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}'_{q'}[u]_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}'_{q'}} \leq C|u|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}.$$

1.5 Théorèmes fondamentaux sur les opérateurs [33]

Opérateurs linéaire; continus, positifs

Les opérateurs linéaires sont les fonctions entre espaces de Hilbert qui respectent la structure vectorielle.

Définition 1.32. Un opérateur linéaire d'un espace de Hilbert H vers un espace de Hilbert H' est une application $T : H \longrightarrow H'$ telle que :

(i) pour tout $x, y \in H$, $T(x+y) = T(x) + T(y)$;

(ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ pour tout $x \in H$, $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Nous notons T_x l'image $T(x)$ d'un élément $x \in H$. L'image de T est le sous-espace vectoriel de H'

$$Im\ T = \{Tx\ :\ x \in H\},$$

et le noyau de T est le sous-espace de H

$$Ker\ T = \{x \in H\ :\ Tx = 0\}.$$

S'il existe une constante $c \geq 0$ telle que :

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in H,$$

Nous disons que T est borné. L'ensemble $L(H, H')$ des opérateurs linéaires bornés de H vers H' est un espace de Banach pour les opérations : $(B+C)x = Bx + Cx$ pour tout $B, C \in L(H, H')$ et pour tout $x \in H$, $(\lambda B)x = \lambda\, Bx$ pour tout $B \in L(H, H')$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et pour tout $x \in H$,

et la norme :

$$\|B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\| \qquad \text{pour tout } B \in L(H, H').$$

Le graphe d'un opérateur linéaire $T : H \longrightarrow H'$ est défini comme le sous-espace vectoriel de $H \times H'$.

$$G_T = \{(x, Tx);\ x \in H\}.$$

Un opérateur linéaire T borné si et seulement si son graphe est un sous-ensemble fermé de $H \times H'$.
L'ensemble des opérateurs linéaire est noté par $L(H, H')$, on dit q'un opérateur $T \in L(H, H')$ est :

1. **Opérateurs symétriques :**
   Les opérateus symétriques sont des opérateurs bornés qui ont un comportement particulier par rapport au produit scalaire.

   Définition 1.33. Soit T un opérateur borné sur un espace de Hilbert $H.$ L'adjoint de T est l'opérateur noté T^* défini par la relation

   $$\langle Tx/y\rangle = \langle x/T^*x\rangle$$

   Pour tous x et y dans H, si $T = T^*$, nous disons que T est symétrique. Dans cette section, un opérateur symétrique signifie un opérateur borné et symétrique sur un espace de Hilbert $H.$ Observons que, si T est un opérateur symétrique alors $\langle Tx/x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H.$ En effet ;

$$\langle Tx/x\rangle = \overline{\langle Tx/x\rangle} = \overline{\langle T^*x/x\rangle} = \langle Tx/x\rangle$$

2. **Positif :**
   s'il vérifie $\langle Tx/x\rangle \geq 0$, pour tout $x \in H.$ On écrit $A \geq B$ si $A - B$ est positif.

Formes hermitiennes et opérateurs auto-adjoint [33]

Soit E un espace de Hilbert et $D(a)$ un sous-espace de E dense dans E. Soit alors a une forme linéaire définit sur $D(a)$. Alors on a :

Définition 1.34. On appelle opérateur A associé à la forme a l'opérateur de E défini par :

$$[\forall u \in D(a),\ Au = w] \Longleftrightarrow [u \in D(a) \text{ et } \exists w \in E \text{ tel que } a(u, v) = \langle w/v\rangle_E,\ \forall v \in D(a)].$$

Spectre d'un opérateur : Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur fermé de domaine dense. On a les définitions suivantes :

Définition 1.35. On pose :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ A - \lambda I \text{ est inversible (d'inverse borné)}\}.$$
$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A).$$

On dit que $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant et $\sigma(A)$ le spectre de A. Pour $\lambda \in \rho(A)$, on pose $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ la famille des opérateurs $R(\lambda)$ est appelée la **résolvant de A**.

Définition 1.36. (Opérateurs adjoint, autoadjoint, unitaire, inversible) : Si H est un espace de Hilbert, on rappelle que si $T \in L(H)$ alors $\exists! V \in L(H)$ tel que :

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, V(y)\rangle.$$

On note alors $V = T^*$, c'est l'adjoint de T.
On dit qu'un opérateur $T \in L(H, H')$ est :

1. **autoadjoint :** Un opérateur $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ de domaine dense est dit autoadjoint si $A^* = A$

   Remarque 1.9. L'égalité $A^* = A$ signifie que l'on à la fois $D(A) = D(A^*)$ tel que :

   $$D(A^*) = \{v \in E \text{ tel que } \exists w \in E : \ \langle v/Au\rangle_F = \langle w/u\rangle_E ; \ \forall u \in D(A)\}.$$
   $$A^*v = w$$

   et $A^*u = Au$ pour tout $u \in D(A).$ D'après l'identité.
   autrement dit, un opérateur symétrique n'est pas nécessairement autoadjoint et l'on peut avoir :

   $$D(A) \subset D(A^*) \qquad \text{avec} \qquad D(A) \neq D(A^*).$$

   Cependant, dans les cas particulier des opérateurs bornés, "symétrique" équivalent à "autoadjoint".

2. **Normal :** S'il commute son adjoint, ou encore $TT^* = T^*T$

3. **Unitaire :** Si $T^*T = Id$ et $TT^* = Id$.

4. **Inversible :** S'il existe $B \in L(H, H')$ tel que $A \circ B = I_{H'}$ et $B \circ A = I_H$. L'opérateur B est appelé inverse de A et on le note $B = A^{-1}$

Opérateur Compact :

Nous avons vu que les opérateurs bornés de E dans F sont caractérisés par le fait que l'image de la boule unité fermé de E noté $B_E(0,1)$ est borné. Si cette image est de plus d'adhérence compacte, on dit que l'opérateur est compact.

Définition 1.37. Un opérateur A linéaire borné de E dans F est dit compact si et seulement si l'une des ces propositions suivantes est satisfaite :

1. L'image par A de $B_E(0,1)$ est d'adhérence compact.

2. De tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées dans E, on peut extraire une sous-suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(Au'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F.

Désignons par $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F. On démontre aisément que $K(E,F)$ est un sous-espace fermé, donc de Banach de $L_b(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires bornées de E dans F.

Théorème 1.28. (Diagonalisation des opérateurs autoadjoints compacts)[33], [6]
Soit H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ et $T \in K(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors il existe une base hilbertienne de H formée des vecteurs propres de T.

Théorème 1.29. (Théorème spectral)[33], [6] :
Soient H est un espace de Hilbert séparable et $T \in L(H)$ un opérateur compact autoadjoint. Alors il existe une base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H et une suite de réelles $(\lambda_n)_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Te_n = \lambda_n e_n$ et pour tout $x \in H$

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n.$$

si $dim\ H = +\infty$ on a de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$

Proposition 1.8. Soient H est un espace de Hilbert séparable et $T, S \in L(H)$ deux opérateurs compacts autoadjoints tels que $TS = ST$. Alors il existe une base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H formée de vecteurs propres de T et S.

Corollaire 1.9. (Théorème spectral pour les opérateurs compacts normaux) : Soient H est un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur compact autoadjoint c'est-à-dire, $TT^* = T^*T$. Alors il existe une base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H et une suite de nombres complexes $(\lambda_n)_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Te_n = \lambda_n e_n$ et pour tout $x \in H$

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Si $dim\ H = +\infty$ on a de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

Principe du Min-Max [30]

Définition 1.38. Si L est une partie de H, son défaut est défini par $Def(L) := L^{\perp}$.

Théorème 1.30. (Principe de Min-Max) :
Soit A un opérateur compact autoadjoint. Alors :

$$\lambda_{n+1}^{\pm}(A) = \underset{\substack{L \\ dim\ (Def(L))\leq n}}{\text{Min}} \quad \underset{\substack{f\in L \\ \|f\|=1}}{\text{Max}} \pm (A_f, f).$$

Preuve 1.1. (On démontre dans le cas +) :
On écrit :

$$A = \sum \lambda_n^+ (\ .\ , \phi_n^+)\phi_n^+ - \sum \lambda_n^- (\ .\ , \phi_n^-)\phi_n^-.$$

Notons $L_n := Vect(\phi_1^+, \ldots, \phi_n^+)$. Pour $f \in L_n$, On a :

$$\begin{aligned}(Af, f) &= \sum_{m=1}^{n} \lambda_n^+ \ |(f, \phi_m^+)|^2 \geq \lambda_n^+ \sum_{m=1}^{n} |(f, \phi_m^+)|^2 \\ &= \lambda_n^+ \|f\|^2\end{aligned}$$

Donc le max est plus grand (on prend $L := L_n^{\perp}$, et donc on a $Def\ (L) = L_n$ et $dim(L) \leq n$).
De plus, si $f \in L_n^{\perp}$ on a :

$$(Af, f) \leq \sum_{m\leq n+1} \lambda_{m+1}^+ \ |(f, \phi_m^+)|^2 \leq \lambda_{n+1}^+ |(f, \phi_m^+)|^2 \leq \lambda_{m+1}^+ \|f\|^2.$$

Finalement, on a bien λ_{n+1}^+ qui est supérieur ou égale au Min-Max.
Supposons que l'inégalité est stricte.
Il existe donc L avec $dim\ Def(L) \leq n$ tel que $\lambda_{n+1}^+ > \underset{\substack{f\in L, \\ \|f\|=1}}{\text{Max}} (Af, f)$. En prenant $f \in L_{n+1} \cap L$ (on a $dim\ L_{n+1} = n+1$ et $dim\ L^{\perp} \leq n$) on a donc $(Af, f) \leq \lambda_{n+1}$ par la première inégalité de cette démonstration. C'est une

contradiction avec $\boldsymbol{\lambda^+_{n+1}} > \underset{\substack{f\in L,\\ \|f\|=1}}{\text{Max}}\,(\boldsymbol{Af, f})$.

Soit maintenant $\boldsymbol{T}$ compact (par forcément autoadjoint) et $\boldsymbol{A := T^*T}$. On obtient donc :

$$\boldsymbol{s_n^2(T) = \lambda_{n+1}(T^*T) =} \underset{\substack{L\\ def(L)\leq n}}{\text{Min}} \quad \underset{\substack{f\in L,\\ \|f\|=1}}{\text{Max}} \boldsymbol{\|Tf\|^2}$$

■

Donc on déduit :

$$\boldsymbol{s_n(T) =} \underset{\substack{L\\ def(L)\leq n}}{\text{Min}} \quad \underset{\substack{f\in L,\\ \|f\|=1}}{\text{Max}} \boldsymbol{\|Tf\|}$$

Il en découle quelque propriétés :

Propriété 1.1. Avec $\boldsymbol{B \in \mathcal{B},}$ on a :

$$\boldsymbol{s_n(BT) \leq \|B\| s_n(T) \geq s_n(TB).}$$

Preuve 1.2. La première inégalité est triviale, et on obtient l'autre en passant à l'adjoint. ■

Théorème 1.31.

$$\boldsymbol{s_{n+1}(T) =} \ \text{Min}_{\boldsymbol{rgK\leq n}} \ \boldsymbol{\|T - K\|}$$

Corollaire 1.10. Soient $\boldsymbol{T_1}$ et $\boldsymbol{T_2}$ deux opérateurs compacts.
On a :

$$\boldsymbol{s_{n+m+1}(T_1 + T_2) \leq s_n(T_1) + s_m(T_2).}$$

Preuve 1.3. Tout d'abord, remarquons que si $\boldsymbol{rgK_1 \leq n - 1}$ et $\boldsymbol{rgK_2 \leq m - 1}$ alors $\boldsymbol{rg(K + K_2) \leq n + m - 2}$.
Ainsi : $\boldsymbol{s_{n+m-1}(T_1 + T_2) \leq \|T_1 + T_2 - K_1 - K_2| \leq \|T_1K_1\| + \|T_2 - K_2\|}$
On peut choisir $\boldsymbol{K_j}$, tel que $\boldsymbol{\|T_1 - K_1\| = s_n(T_1)}$ et $\boldsymbol{\|T_2 - K_2\| = s_m(T_2)}$: on déduit alors le corollaire de l'inégalité précédente. ■

Corollaire 1.11. Si $\boldsymbol{T, T'}$ sont compacts alors $\boldsymbol{|s_n(T) - s_n(T')/ \leq \|T - T'\|}$.

Théorème de la représentation de Riesz

Une fonctionnelle linéaire continue sur un espace de Hilbert H est un élément de l'espace dual de H, à savoir $H^* = L(H, \mathbb{C})$. Les fonctionnelles linéaires sur un espace de Hilbert sont caractérisées par le Théorème de représentation de Riesz.

Théorème 1.32. Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $x_0 \in H$, la formule :

$$f(x) = \langle x/x_0 \rangle \qquad \text{pour tout } x \in H \qquad (1)$$

définit une fonctionnelle linéaire sur H, avec $\|f\| = \|x_0\|$. Réciproquement, pour toute fonctionnelle linéaire f sur H, il existe un unique élément x_0 satisfaisant (1).

Théorème de Lax-Milgram

Dans cette section, on considère un problème général pouvant se mettre sous la forme variationnelle (V) trouver $u \in E$ tel que $a(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in E$.
Le Théorème de Lax-Milgran apporte une réponse à l'existence, l'unicité de la stabilité de la solution dans un cadre précis.

Définition 1.39. On dit qu'une forme bilinéaire $a(u,v) : H^2 \to \mathbb{R}$ est :

(i) **Continue :** s'il existe une constante $c > 0$ telle que :
$|a(u,v)| \leq c|u|\ |v| \qquad \forall u, v \in H$

(ii) **Coercive :** s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :
$a(v,v) \geq \alpha |v|^2 \qquad \forall v \in H$

(iii) **Symétrique :** on dit que la forme bilinéaire $a(u,v)$ est symétrique si pour tout $u, v \in E$, on a :

$$a(u,v) = a(v,u)$$

(iv) **Hermitienne :** On appelle forme hermitienne sur E une application φ de $E \times E$ danc $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- φ est linéaire à gauche et semi-linéaire à droite pour $x, x', y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$\varphi(\lambda x + x', y) = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$$

et

$$\varphi(x, \lambda y + y') = \overline{\lambda} \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$$

- φ vérifie la propriété de symétrie hermitienne : pour tous $x, y \in E$ on a

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}.$$

Remarque 1.10. Pour $x \in E$ on a $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)}$ et donc

$$\varphi(x, x) \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.33. (Lax-Milgram) : Soit E un espace de Hilbert, a est une forme bilinéaire, continue, coercive et L une forme linéaire continue sur E. Alors le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in E \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) \qquad \forall v \in E \end{cases}$$

admet une solution unique.

Identité de Picône [32]

L'identité de Picône classique, pour des fonctions différentiables $v > 0$ et $u \geq 0$, est introduite par :

$$|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{v^2}|\nabla v|^2 - 2\frac{u}{v}\, \nabla u\, \nabla v = |\nabla u|^2 - \nabla\left(\frac{u^2}{v}\right) \nabla v \geq 0 \quad (1.2)$$

posons la question sur l'identité de Picône qui peut traîter des problèmes du type :

$$\begin{cases} -\nabla u = a(x)\; f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un sous ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$.

On a prouvé que pour des fonctions différentiables $v > 0$ et $u \geq 0$ nous avons :

$$|\nabla u|^2 + \frac{|\nabla u|^2}{f'(v)} + \left(\frac{u\sqrt{f'(v)}\nabla v}{f(v)} - \frac{\nabla u}{\sqrt{f'(v)}}\right)^2$$
$$= |\nabla u|^2 - \nabla\left(\frac{u^2}{f(v)}\right) . \nabla v \geq 0 \qquad (1.3)$$

où $f(y) \neq 0$ et $f'(y) \geq 1$ pour tout $y \neq 0$; $f(0) = 0$. Dans cette partie, nous supposons les hypothèses suivantes :

- Ω désigne un domaine dans $\mathbb{R}^n$.
- $1 < p < \infty$.
- $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ de classe C^1.

Théorème 1.34. (Identité de Picône pour le p-Laplacien) :[32]
Soient $v > 0$ et $u \geq 0$ deux fonctions différentiables non constantes dans Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.
Supposons également que $f'(y) \geq (p-1)\left[f(y)^{\frac{p-2}{p-1}}\right]$ pour tous y. Définissons :

$$L(u,v) = |\nabla u|^p - \frac{pu^{p-1}\ \nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v}{f(v)} + \frac{u^p f'(v)|\nabla v|^p}{|f(v)|^p}$$
$$R(u,v) = |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^p}{f(v)}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v.$$

Alors $L(u,v) = R(u,v) \geq 0$.
De plus, $L(u,v) = 0$ si et seulement si $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ sur Ω.

Remarque 1.11. Lorsque $p = 2$ et $f(y) = y$ nous obtenons l'identité de Picône classique (1.2) pour le Laplacien et quand $p = 2$ on trouve sa version non linéaire (1.3).

Preuve 1.4. Expansion $R(u,v)$ pour calcul direct on obtient $L(u,v)$. Montrer

$L(u,v) \geq 0$ on procède comme suite :

$$\begin{aligned}
L(u,v) &= |\nabla u|^p - \frac{pu^{p-1}\ \nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v}{f(v)} + \frac{u^p\ f'(v)|\nabla v|^p}{[f(v)]^2}.\\
&= |\nabla u|^p + \frac{u^p f'(v)|\nabla v|^p}{[f(v)]^2} - \frac{pu^{p-1}|\nabla u|\ |\nabla v|^{p-1}}{f(v)}\\
&+ \frac{pu^{p-1}|\nabla v|^{p-2}}{f(v)}(|\nabla u|\ |\nabla v| - \nabla u\ \nabla v).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p\left(\frac{|\nabla u|^p}{p} + \frac{(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{q[f(v)]^q}\right) - \frac{p}{q}\ \frac{(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{[f(v)]^q}\\
&- \frac{p\ u^{(p-1)}|\nabla u|\ |\nabla v|^{p-1}}{f(v)} + \frac{u^p\ f'(v)|\nabla v|^p}{[f(v)]^2}\\
&+ \frac{p\ u^{p-1}|\nabla v|^{p-2}}{f(v)}\ (|\nabla u|\ |\nabla v| - \nabla u\ .\ \nabla v).
\end{aligned}$$

Rappel de l'inégalité de Young, pour $a, b > 0$ et $1 \leq p$, $q \leq \infty$. Alors :

$$a\ .\ b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (1.4)$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'inégalité vaut si $a^p = b^q$.

Donc, en utilisant l'inégalité de Young, nous avons :

$$p\left(\frac{|\nabla u|^p}{p} + \frac{(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{q[f(v)]^q}\right) \geq \frac{p\ u^{(p-1)}|\nabla u|\ |\nabla v|^{p-1}}{f(v)} \qquad (1.5)$$

ce qui est possible puisque les deux fonctions u et f sont non négatives. L'égalité tient quand :

$$|\nabla u| = \frac{u}{[f(v)]^{\frac{q}{p}}}|\nabla v|. \qquad (1.6)$$

encore une fois utilisant le fait que, $f'(y) \geq (p-1)\left[f(y)^{\frac{p-2}{p-1}}\right]$ on a :

$$\frac{u^p f'(v)|\nabla v|^p}{[f(v)]^2} \geq \frac{p}{q}\,\frac{(u|\nabla v|)^{(p-1)q}}{[f(v)]^q} \qquad (1.7)$$

L'égalité tient quand :

$$f'(y) = (p-1)\left[[f(v)]^{\frac{p-2}{p-1}}\right] \qquad (1.8)$$

En combinant (1.5) et (1.7) on obtient $L(u,v) \geq 0$.
L'égalité est vraie lorsque (1.6) et (1.8) avec $|\nabla u|\ |\nabla v| = \nabla u\ .\ \nabla v$ tient simultanément.
En résolvant pour (1.8) on obtient $f(v) = v^{p-1}$.

Donc quand, $L(u,v)(x_0) = 0$ et $u(x_0) \neq 0$, alors (1.7) avec $f(v) = v^{p-1}$ et $|\nabla u|\ |\nabla v| = \nabla u\ \nabla v$ on obtient :

$$\nabla\left(\frac{u}{v}\right)(x_0) = 0.$$

si $u(x_0) = 0$, alors

$$\nabla u = 0\ (u(x) = 0) \text{ et } \nabla\left(\frac{u}{v}\right)(x_0) = 0.$$

■

CHAPITRE 2

THÉORIE DE WEINBERGER

Dans cette première section, nous rappellons tout d'abord la méthode de Weinberger voir [29], qui permet d'établir l'existence de valeurs propres. Ces valeurs propres sont caractérisées par le principe du **Min-Max**.

2.1 Introduction

Nous étudions les problèmes aux valeurs propres la forme

$$\boldsymbol{Au = \lambda Bu} \tag{2.1}$$

où $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des opérateurs autoadjoints définis dans un espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$, avec $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{H}$, l'injection étant continue et d'image dense, de plus nous supposons que l'opérateur $\boldsymbol{A}$ est positif de domaine dense, L'opérateur $\boldsymbol{B}$ est supposé $\boldsymbol{A}$-borné :

$$|\boldsymbol{Bu}|_{H} \leq \boldsymbol{c}|\boldsymbol{Au}|_{H}$$

Pratiquement dans les problèmes aux limites étudiés avec $\boldsymbol{A = -\Delta + q}$ est un opérateur elliptique positif. $\boldsymbol{B}$ est l'opérateur de multiplication par la fonction poids $\boldsymbol{g}$ de signe non-constant. Formellement **(2.1)** s'écrit $\boldsymbol{u = \lambda A^{-1}Bu}$.

2.2 Formulation variationnelle du problème

Nous supposons que :

H et V sont des espaces de Hilbert réels (ou complexes), séparables, $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ et $\langle\langle\ .\ ,\ .\ \rangle\rangle$ désignent leurs produits scalaires respectifs, et $|\ .\ |_V$ et $||\ .\ ||_H$ les normes associées.

$a(\ .\ ,\ .\ )$ et $b(\ .\ ,\ .\ )$ sont deux formes hermitiennes sur V telles que :

(i) $a(\ .\ ,\ .\ )$ est continue est cœrcive sur V c'est à dire $\exists M > 0$ et $\exists c > 0$ tels que

$$\begin{aligned} &|a(u,v)| \leq M\|u\|_V\ \|v\|_V \text{ et} \\ &a(u,u) \geq C\|u\|_V^2\ ,\ \forall (u,v) \in V \times V. \end{aligned} \tag{2.2}$$

(ii) $b(\ .\ ,\ .\ )$ est continue sur V c'est à dire $\exists M' > 0$, tel que :

$$|b(u,v)| \leq M'\|u\|_V\ \|v\|_V, \forall u,v \in V.$$

La résolution du problème aux valeurs propres **(2.1)** revient à la résolution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\lambda, u) \in \mathbb{C} \times V, u \neq 0 \text{ vérifiant :} \\ a(u,v) = \lambda b(u,v),\ \forall v \in V \end{cases} \tag{2.3}$$

Définition 2.1. On dit que λ est une valeur propre de **(2.3)** s'il existe un vecteur $u \in V$ non nul qui vérifie **(2.3)**

Il résulte de (**(2.2)**, **i**) que la forme quadratique $a(u,u)$ définit sur V un produit scalaire équivalent à $(\langle\ .\ ,\ .\ \rangle)$ est donc, comme la forme $b(u,v)$ est continue sur V, nous pouvons appliquer le Théorème de la représentation de Riesz, on en déduit qu'il existe un opérateur T définie sur V par :

$$b(u,v) = a(Tu,v),\ \forall u \in V,\ \forall v \in V \tag{2.4}$$

2.3 Construction de l'opérateur T associé au problème

Proposition 2.1. L'opérateur $\boldsymbol{T}$ ainsi défini est linéaire, continu et autoadjoint sur $\boldsymbol{V}$.

Preuve :

La linéarité est évidente ; il résulte de (**(2.2), ii**) que :

$$\boldsymbol{c\|Tu\|_V^2 \leq a(Tu, Tu) = b(u, Tu) \leq M'\|u\|_V \ \|Tu\|_V}$$

est donc on déduit la continuité

$$\boldsymbol{\|Tu\|_V \leq \frac{M'}{c}\|u\|_V}$$

Enfin $\boldsymbol{T}$ est autoadjoint puisque les formes sont hermitiennes :

$$\boldsymbol{a(Tu, v) = b(u, v) = \overline{b(u, v)} = \overline{a(Tv, u)} = a(u, Tv)} \tag{2.5}$$

Remarque 2.1. Il est classique d'associer au triplet variationnel $\boldsymbol{(V, H, a(\ .\ ,\ .\ ))}$ sa réalisation : l'opérateur $\boldsymbol{A}$ autoadjoint, positif et non borné dans $\boldsymbol{H}$ de domaine $\boldsymbol{D(A)}$ défini par :

$$\boldsymbol{D(A) = \{u \in V,\ Au \in H\}}$$
$$\boldsymbol{\langle Au, v\rangle_H = a(u, v);\ \forall u \in D(A)\ \forall v \in V}$$

D'une manière analogue à la forme $\boldsymbol{b(\ .\ ,\ .\ )}$ nous pouvons associer l'opérateur $\boldsymbol{B}$ autoadjoint définit sur $\boldsymbol{V}$ par :

$$\boldsymbol{\langle Bu, v\rangle_H = b(u, v),\ \forall u, v \in V}$$

ainsi formellement :

$$\boldsymbol{T = A^{-1}B.}$$

Remarque 2.2. Le problème **(2.3)** peut s'écrire, en utilisant l'opération $\boldsymbol{T}$,

$$\boldsymbol{\lambda a(Tu, v) = a(u, v),\ \forall u \in V.}$$

Soit :

$$a(\lambda Tu - u, v) = 0, \forall v \in V$$

Il résulte de **(2.2)** que :

$$Tu = \frac{1}{\lambda} u \tag{2.6}$$

Ainsi, si u est un vecteur propre de **(2.3)** corespondant à la vecteur propre λ non nulle, alors il est ainsi un vecteur propre de **(2.6)** correspondant à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$ et réciproquement.

2.4 Spectre de T

Si nous supposons de plus que l'injection de V dans H est compacte, alors T est compact, et nous pouvons appliquer les résultats du théorème spectrale classique des opérateurs autoadjoints compacts sur les espaces de Hilbert.

Proposition 2.2. .

(i) Les valeurs propres de T sont réelles et (sauf peut être 0) sont de multiplicités finies.

(ii) Si μ_i et μ_j sont deux valeurs propres distinctes de T avec φ_i et φ_j les fonctions propres associées alors :

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \text{ et } b(\varphi_i, \varphi_j) = 0$$

(iii) Le spectre T est constitué par (au plus) deux infinités dénombrables de valeurs propres, une positive et l'autre négative, tendant vers zéro :

$$\mu_1^- < \mu_2^- < \cdots \leq \mu_j^- \leq \mu_{j+1}^- \leq \cdots \leq 0 \leq \cdots \leq \mu_{j+1}^+ \leq \mu_j^+ \leq \cdots \leq \mu_2^+ \leq \mu_1^+ \tag{2.7}$$

On répète chaque valeur propre selon sa multiplicité (on rappelle que la multiplicité de la valeur propre est la dimension du sous-espace propre).

(iv) Les valeurs propres de T sont caractérisées par le principe du **"Min-Max"** :

$$\begin{aligned} \mu_{j+1}^{+} &= \min_{V_j \in U_j} \max_{u \perp V_j} \{b(u,u)/a(u,u) = 1\} \\ \mu_{j+1}^{-} &= \max_{V_j \in U_j} \min_{u \perp V_j} \{b(u,u)/a(u,u) = 1\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

U_j étant l'ensemble de tous les sous espaces de V de dimension j.

En particulier :

$$\mu_1 = \max_{0 \neq u \in V} \left\{ \frac{b(u,u)}{a(u,u)} \right\}$$

Remarque 2.3. Les valeurs propres de **(2.3)** notées $\lambda_j(a,b,V)$ sont égales à $\frac{1}{\mu_j}$ et sont réelles, de plus nous pouvons leur associer des fonctions propres réelles.

Il en résulte de **(2.8)** les lemmes suivants :

Lemme 2.1. Si $a_1(u,v)$ et $a_2(u,v)$ sont deux formes hermitiennes continues, coercives sur V telles que $a_1(u,v) \geq a_2(u,v),\ \forall u \in V$ et si $b(u,v)$ est une forme hermitienne continue sur V, alors :

$$\lambda_j^{+}(a_1,b,V) \geq \lambda_j^{+}(a_2,b,V)$$

Lemme 2.2. Si $b_1(u,v)$ et $b_2(u,v)$ sont deux formes hermitiennes continues sur V telles que $b_1(u,v) \leq b_2(u,v),\ \forall u \in V$ et si $a(u,v)$ est une forme hermitienne continue, coercive sur V, alors :

$$\lambda_j^{+}(a,b_1,V) \geq \lambda_j^{+}(a,b_2,V)$$

Lemme 2.3. Si (V_1,H,a) et (V_2,H,a) sont deux triplets variationnels tels que $V_1 \hookrightarrow V_2$ alors :

$$\lambda_j^{+}(a,b,V_1) \geq \lambda_j^{+}(a,b,V_2)$$

Nous introduisons l'inégalité de **Hardy** qui joue le même rôle que l'inégalité de **Poincaré** quand le domaine est borné.

Inégalité de Hardy :

Il existe une constante $C = C(n) > 0$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2\, dx \qquad (n \geq 3)$$

pour toute $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2.5 Identité de Picône

Pour des fonctions différentiables $u, v,\ v \neq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} v^2 |\nabla \left(\frac{u}{v}\right)|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{v^2} |\nabla u|^2\, dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u}{v} \nabla u \,.\, \nabla v\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \left(\frac{u^2}{v^2}\right) \,.\, \nabla v\, dx
\end{aligned}$$

En effet, pour la première équation nous avons :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} v^2 |\nabla \left(\frac{u}{v}\right)|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v^2 \left|\frac{1}{v}\, \nabla u - \frac{u}{v^2}\, \nabla v\right|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{v^2} |\nabla v|^2\, dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u}{v}\, \nabla u \,.\, \nabla v\, dx
\end{aligned}$$

Pour aboutir à la deuxième équation, il suffit de multiplier l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \left(u \,.\, \frac{u}{v}\right)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u}{v}\, \nabla u\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u \nabla \left(\frac{u}{v}\right)\, dx \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u}{v}\, \nabla u\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{v^2}\, \nabla v\, dx
\end{aligned}$$

Par $(-\nabla v)$

Nous étudions dans ce qui suit l'inégalité de **Harnack** à l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Pour rappel, nous rencontrons les développements concernant cette inégalité dans [27] quand le domaine est borné.

2.6 Inégalité de Harnack dans $\mathbb{R}^n$

Nous considérons l'opérateur elliptique :

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\, x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + d_j u\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\, \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu\right) \tag{2.9}$$

Nous supposons que l'opérateur L est uniformément elliptique c'est à dire qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x)\zeta_i\, \zeta_j \geq \gamma|\zeta|^2 (x \in \mathbb{R}^n, \zeta \in \mathbb{R}^n) \tag{2.10}$$

Nous supposons que :

$$\begin{cases} |a_{ij}| \leq M \\ b_i \in L^n(\mathbb{R}^n) \\ d_i \in L^r(\mathbb{R}^n), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ C \in L^{\frac{r}{2}}(\mathbb{R}^n), \text{ avec } r > n \end{cases} \tag{2.11}$$

nous disignons par $Q(x_0, \rho)$ le cube de contre x_0 et de côte p.

Théorème 2.1. Soit $u(x)$ une solution positive de l'équation $Lu = 0$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors pour chaque compact G tel que $G \subset \mathbb{R}^n$, il existe une constante positive K indépendante de $u(x)$, telle que :

$$\max_G u(x) \leq K \min_G u(x) \tag{2.12}$$

avec $K = K(\ \gamma,\ M,\ C,\ b_i,\ d_i,\ G\ )$

Preuve 2.1. Du lemme 8.4 et du lemme 8.3 (voir [27] p. 240-241) nous déduisons qu'il existe deux constantes positives K et α telles que :

$$\min_{Q(x_0,\rho)} u(x) \geq K\left(\frac{1}{\rho_1^n} \int_Q u(x)^\alpha\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{2.13}$$

D'autre part, d'après le lemme 8.4, nous avons :

$$\max_{Q(x_0,p)} u(x) \leq K \left(\frac{1}{\rho_2^n} \int_Q |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.14}$$

Pour achever la démonstration, il suffit de démontrer l'existence d'une constante K telle que, pour $\rho_2 > \rho_1$ nous avons :

$$\left(\frac{1}{\rho_2^n} \int_{Q(x_0,\rho_1)} u(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq K \left(\frac{1}{\rho_1^n} \int_{Q(x_0,\rho_2)} u(x)^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{2.15}$$

Si **(2.15)** est valable nous avons, avec une constante convenable K :

$$\max_{Q(x_0,\rho_1)} u(x) \leq K \min_{Q(x_0,\rho_2)} u(x) \leq K \min_{Q(x_0,\rho_1)} u(x); \tag{2.16}$$

Le passage de **(2.16)** à **(2.12)** se fait alors de façon standard par recouvrement fini.
Pour montrer **(2.15)**, nous posons $\chi = \dfrac{n}{n-2} = \dfrac{2^*}{2}$ et nous supposons que l'exposant α à droite de **(2.15)** sont tel que $\alpha \ \chi^s \neq 1$ pour s entier (il suffit éventuellement de prendre α un peu plus petit). Soit h un entier tel que $\alpha \ \chi^s \geq 2$. Nous posons $q_s = \alpha \ \chi^s$ et $r_s = \rho_2 - s\frac{\rho_2 - \rho_1}{h}$ et nous utilisons le lemme 8.1, (voir [27] p.239) avec $\alpha = 1$ sur $Q(x_0, r_{s+1})$ et $\alpha \equiv 0$ hors de $Q(x_0, r_s)$ et $|\alpha_x| \leq \dfrac{2}{r_{s+1} - r_s} = \dfrac{2h}{\rho_2 - \rho_1}$ Nous obtenons :

$$\left(\int_{Q(x_0,r_{s+1})} u(x)^{q_{s+1}} \, dx \right)^{\frac{1}{q_{s+1}}} \leq \frac{C}{(\rho_2 - \rho_1)^{\frac{2}{q_s}}} \left(\int_{Q(x_0,r_s)} u(x)^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Et en multipliant pour $s = 0, \ 1, \cdots, \ h - 1$, nous avons :

$$\left(\frac{1}{\rho_1^n} \int_{Q(x_0,\rho_1)} u(x)^{q_h} \, dx \right)^{\frac{1}{q_h}} \leq \frac{c' \rho_2^{\frac{n}{\alpha}} \rho_1^{-\frac{n}{q_h}}}{(\rho_2 - \rho_1)^{\frac{n}{\alpha} - (1 - \chi^{-n})}} \left(\frac{1}{\rho_2^n} \int_{Q(x_0,\rho_2)} u(x)^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

d'où **(2.15)**

$$\text{si } \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \geq r > 0$$

■

Théorème 2.2. Soit $u(x)$ une solution positive dans $\mathbb{R}^n$ de l'équation $Lu = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$ où $f_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $p > n$. Il existe une constante $K > 0$ telle que, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et ρ est suffisamment petit nous avons :

$$\max_{Q(x_0,\rho)} u(x) \leq K \left(\min_{Q(x_0,\rho)} u(x) + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rho^{1-\frac{n}{p}} \right) \tag{2.17}$$

Preuve :

Soit x_0 un point quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Soit R et suffisamment petit de façon que la forme $a(u, v)$ associé à L est cœrcive sur $H_0^1(Q(x_0, R))$ (voir Théorème 3.1 dans [27] p.200).

Si $2\rho < R$ nous posons $u(x) = v(x) + w(x)$ où $w(x)$ est la solution dans $H_0^1(Q(x_0, 2\rho))$ de l'équation homogène $Lv = 0$ avec $v(x)$, $u(x)$ sur $\partial Q(x_0, 2\rho)$. Grâce au principe de maximum (voir Théorème 3.6 dans [27] p.206). v est positive dans $\partial Q(x_0, 2\rho)$. Alors d'après le Théorème 2.1, nous avons :

$$\max_{Q(x_0,\rho)} v(x) \leq K \min_{Q(x_0,\rho)} v(x)$$

Mais nous avons :

$$min\ v(x) + \ min\ w(x) \leq min\ u(x) \leq max\ u(x) \leq min\ v(x)$$

donc :

$$\begin{aligned}
\underset{Q(x_0,\rho)}{max}\ u(x) &\leq max\ v(x) + \underset{Q(x_0,\rho)}{max}\ w(x) \leq K\ \underset{Q(x_0,\rho)}{max}\ v(x) + \underset{Q(x_0,\rho)}{max}\ w(x) \\
&\leq K(\underset{Q(x_0,\rho)}{min}\ u(x) - \underset{Q(x_0,\rho)}{min}\ w(x)) + \underset{Q(x_0,\rho)}{min}\ w(x) \\
&\leq K\ min\ u(x) + K \underset{Q(x_0,\rho)}{max} |w(x)|
\end{aligned}$$

Mais d'après le Théorème 4.2 (voir [27] p.215). Nous avons :

$$\max_{Q(x_0,\rho)} |w(x)| \leq K' \sum \|f_i\|^p_L(\mathbb{R}^n)\rho^{1-\frac{n}{p}}$$

■

Corollaire 2.1. Si l'opérateur L vérifie **(2.10)** et **(2.11)**, alors les solutions non négatives de $Lu = 0$ sont positives ou identiquement nulles

Preuve :

Soit Ω' un ouvert tel que $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$. En effet, si $\min\limits_{\Omega' \subset \mathbb{R}^n} u(x) = 0$, alors $v(x) = u(x) + \epsilon(\epsilon > 0)$ est une solution de l'équation

$$Lv = \epsilon \left[C - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_i}{\partial x_i} \right]$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
Lv &= -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial(u(x)+\epsilon)}{\partial x_i} + d_j(u(x)+\epsilon)\right)\\
&+ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial(u(x)+\epsilon)}{\partial x_i} + c(u(x)+\epsilon)\right)\\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + d_j\ u(x) + d_j\epsilon\right)\\
&+ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + cu(x) + c\epsilon\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + d_j\ u(x)\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\ d_j\epsilon\\
&+ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + cv(x)\right) + c\epsilon
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{Lv = \epsilon \left[c - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right]}$$

D'après le Théorème 2.2, nous avons :

$$\max_{\Omega' \subset \mathbb{R}^n} \boldsymbol{v(x) \leq K\epsilon(1 + \|c\|_{L^{\frac{r}{2}}(\mathbb{R}^n)} + \|d_i\|_{L^r(\mathbb{R}^n)})}$$

Donc :

$$\max_{\Omega' \subset \mathbb{R}^n} \boldsymbol{u(x) = 0}$$

∎

CHAPITRE 3

OPÉRATEUR DE TYPE SCHRÖDINGER

3.1 Introduction

Nous étudions ici l'existence des valeurs principales du problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} \boldsymbol{Lu = -\Delta u + q(x)u = \lambda\, g(x)u,} & \boldsymbol{x \in \lambda} \\ \boldsymbol{u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0, x \in \partial\Omega} & \end{cases} \tag{3.1}$$

Ici le $\boldsymbol{\Omega}$ est un domaine non borné de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ $\boldsymbol{(n \geq 3)}$, les potentiels $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{g}$ sont deux fonctions mesurables, qui décroissent vers zéro à l'infini, $\boldsymbol{q \geq 0}$ (non identiquement nulle), $\boldsymbol{g}$ est de signe non constant dans $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$
Une première étude fait par [11] consiste à applique la théorème spectrale classique pour montrer l'existence de valeur propre principale.
Une deuxième étude a été élaborée par [7], quand $\boldsymbol{q \equiv 0}$ et $\boldsymbol{g}$ à support compact.
Des résultats sur la non existence de valeurs propres principales positives figurent dans le travail [9] quand $\boldsymbol{q = 0}$ et $\int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{g\ dx > 0}$. Dans [22], l'auteur a considéré le cas $\int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{g\ dx \gtrless 0}$ et $\boldsymbol{q = 0}$.
Un cas est étudié par [14] où le potentiel $\boldsymbol{q}$ est strictement positif ou nul pour des ouverts non bornés de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$. Pratiquement dans les problèmes aux limites étudiés l'opérateur $\boldsymbol{A = -\Delta + q}$ est un opérateur elliptique positif.

3.2 Notations

Nous introduisons les notations suivantes :

Soit h une fonctions mesurable, on note $h^{\pm} = max\ (\pm h, 0)$ la partie positive et négative de h, c'est à dire : $h = h^{+} - h^{-}$.

Nous désignons par 2^* le conjugué de Sobolev de 2 c'est à dire : $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$.

Nous introduisons les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$:

$$\rho(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

et

$$p_\alpha = \rho^{2\alpha}(x),\ \alpha > 0 \tag{3.3}$$

Nous définissons l'espace :

$$V(\mathbb{R}^n) = \{u \in D'(\mathbb{R}^n);\ (p_1)^{\frac{1}{2}}\ u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \tag{3.4}$$

Que l'on munit de la norme usuelle :

$$\|u\|_{V(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + p_1 |u|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}},\ V(\mathbb{R}^n) \text{est un espace de Hilbert.}$$

et

$$V_{\pm} = \left\{u \in V :\ \int_{\mathbb{R}^n} g\ |u|^2\ dx \gtrless 0\right\} \tag{3.5}$$

Nous supposons que :

$$(H_1), q \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et } \exists\ \alpha > 0,\ \beta \geq 1, \alpha > \beta,\ \exists K > 0,\ \exists C > 0,$$

tel que

$$|g(x)| \leq \frac{K}{(1+|x|^2)^{\alpha}}, \quad \text{et} \quad |q(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|^2)^{\beta}}.\ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{3.6}$$

Il existe $K' > 0$ tel que

$$(H_2), \qquad L + K_{p_\alpha} > 0 \tag{3.7}$$

$$(H_3),\quad |\Omega| > 0.\ \Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid\ g(x) = 0\} \text{ est de mesure } 0, \\ c\text{'est à dire : } |\Omega_0| = 0. \tag{3.8}$$

$$(H_4),\quad Q = \left\{ q \mid \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + q|u|^2\, dx,\ \forall u \in V \right\} \tag{3.9}$$

Si $q \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ alors le problème (3.1) admet deux suites infinies de valeurs propres tendant vers plus ou moins l'infini.

3.3 Formulation variationnelle du problème

Multiplions les deux membres de (3.1) par une fonction test v et intégrons sur $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} -\Delta uv\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} quv\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} guv\, dx.$$

Nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} quv\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} guv\, dx.$$

On pose

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} quv\, dx \text{ et } b(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} guv\, dx,$$

La résolution du problème aux valeurs propres (3.1) revient à la résolution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad (u,\lambda) \in V \times \mathbb{R}, u \neq 0, \text{ tel que} \\ a(u,v) = \lambda b(u,v). \end{cases} \tag{3.10}$$

La forme $a(u,v)$ est continue sur V :

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |q(x)|^{\frac{n}{2}}\, dx\right)^{\frac{2}{n}} \\
&\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*}\, dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2^*}\, dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \\
&\leq ||\nabla u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ ||\nabla v||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||q||_{L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)} ||u||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}\ ||v||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq ||\nabla u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ ||\nabla v||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + c||u||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}\ ||v||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

et comme $v \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq ||u||_V ||v||_V + cc_1c_2||u||_V\ ||v||_V \\
|a(u,v)| &\leq M||u||_V\ ||v||_V
\end{aligned}
$$

d'où la continuité de la forme $a(u,v)$ sur V.

On déduit d'après l'inégalité de Hardy que $a(u,v)$ est coercive sur V :

$$
a(u,u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} q|u|^2\, dx.
$$

Comme $q \geq 0$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
a(u,u) &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx \\
&\geq c||u||_V^2
\end{aligned}
$$

d'où la coercivité de $a(u,v)$ sur V.

Par conséquent ; il existe d'après le Théorème de la représentation de Riesz un opérateur T linéaire et continue dans V tel que :

$$
b(u,v) = a(Tu,v)
$$

Les valeurs propres du problème (3.1) sont exactement les inverses des valeurs propres de T, associées aux mêmes fonctions propres $\lambda_k = \dfrac{1}{\mu_k}$.

3.4 L'opérateur T

Proposition 3.1. L'opérateur T est linéaire, continu et autoadjoint.

Preuve 3.1. La linéarité et la continuité de T est évidente, et comme les formes $a(u, v)$ et $b(u, v)$ sont hermitiennes alors l'opérateur T est autoadjoint. ■

Proposition 3.2. L'opérateur T est compact.

Preuve 3.2. Soit B_R la boule dans $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon R. Toute suite (u_n) bornée dans V reste bornée sur $H^1(B_R)$. Comme l'injection de $H^1(B_R)$ dans $L^2(B_R)$ est compacte, alors (u_n) admet une sous-suite notée encore $(u_n)_n$, de Cauchy dans $L^2(B_R)$. Pour tout m, n nous avons :

$$\begin{aligned} ||T(u_n - u_m)||^2 &\leq \gamma a(T(u_n - u_m), T(u_n - u_m)) \\ &\leq \gamma \int_{\mathbb{R}^n} p_\alpha |(u_n - u_m)| \, |T(u_n - u_m)| \, dx \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy on a :

$$\begin{aligned} ||T(u_n - u_m)||^2 &\leq \gamma^2 \int_{\mathbb{R}^n} P_{2\alpha-1} |(u_n - u_m)|^2 \, dx \\ &\leq \gamma_1 ||u_n - u_m||^2_{L^2(B_R)} + \gamma_2 \frac{1}{(1+R^2)^{2(\alpha-1)}} ||u_n - u_m||^2_V \end{aligned}$$

La première quantité du membre de droite tend vers 0. Par hypothèse, $||u_n - u_m||_V$ est borné et $\dfrac{1}{(1+R^2)^{2(\alpha-1)}}$ tend vers 0 quand R tend vers l'infini, par conséquent la suite (T_{u_n}) est de Cauchy dans V et donc convergente. ■

En applicant la Théorème de Weinberger, on obtient l'existence d'un spectre discret de valeurs propres réelles de multiplicités finies

$$\mu_1^- < \mu_2^- < \cdots < \mu_j^- \leq \mu_{j+1}^- \leq \cdots \leq 0 \leq \cdots \leq \mu_{j+1}^+ \leq \mu_j^+ \leq \cdots \leq \mu_2^+ \leq \mu_1^+$$

Les valeurs propres du problème (3.1) sont les inverses des valeurs propres de T, $\lambda_k = \dfrac{1}{\mu_k}$ associées aux mêmes fonctions propres donc le spectre de notre problème est

$$\cdots \leq \lambda_n^- \leq \cdots \leq \lambda_2^- \leq \lambda_1^- \leq 0 \leq \lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq \cdots \leq \lambda_n^+ \leq \cdots$$

3.5 Existence de valeurs propres principales

Définition 3.1. Soit λ est une valeur propre du problème (3.1), λ est dite valeur propre principale si la fonction propre associée ne change pas de signe.

Maintenant nous pouvons appliquer les résultats de la théorie spectrale classique de opérateurs autoadjoint compacts sur l'espace de Hilbert.

Proposition 3.3. Le problème (3.1) admet une double infinité de valeurs propres l'une positive tendant vers $+\infty$ et l'autre négative tendant vers $-\infty$.

$$\lambda_j^+ = \inf_{A \in V_j} \sup_{u \in A \cap V_+} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + q|u|^2)\ dx}{\int_{\mathbb{R}^n}\ g|u|^2\ dx} \right\},$$

$$\lambda_j^- = \sup_{A \in V_j} \inf_{u \in A \cap V_-} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + q|u|^2)\ dx}{\int_{\mathbb{R}^n}\ g|u|^2\ dx} \right\},$$

Théorème 3.1. Si le potentiel q est positif et si les hypothèses (3.6), (3.7) et (3.8) sont vérifiées, alors les deux premières valeurs propres λ_1^+ et λ_1^- sont les seules valeurs propres principales du problème (3.1)

Preuve 3.3. Remarquons tout d'abord que si λ est une valeur propre du problème (3.1) avec le poids g alors $(-\lambda)$ est une valeur propre du problème (3.1) avec le poids $(-g)$.
De ce fait, il suffit d'étudier seulement l'existence des valeurs propres principales positives.

Soit λ_1^+ la première valeur propre du problème (3.1) associée à la fonction propre ϕ dans V.

$$\lambda_1^- = \inf_{u \in V} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + qu^2)\ dx}{\int_{\mathbb{R}^n} gu^2\ dx} \right\}$$

Nous avons

$$\boldsymbol{a(\phi, u) = \lambda_1^+ b(\phi, u), \ \forall u \in V}$$

Supposons que la fonction $\boldsymbol{\phi}$ change de signe sur $\mathbb{R}^n$ c'est à dire : $\boldsymbol{\phi = \phi^+ - \phi^-}$, Donc :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b(\phi, \phi)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{g|\phi|^2 \, dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{g|\phi^+ - \phi^-|^2 \, dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{g|\phi^+|^2 \, dx} + \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{g|\phi^-|^2 \, dx} \\
&= \boldsymbol{\beta_1 + \beta_2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a(\phi, \phi)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{(|\nabla \phi|^2 + q|\phi|^2) \, dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{(|\nabla(\phi^+ - \phi^-)|^2 + q|\phi^+ - \phi^-|^2) \, dx} \\
&= \boldsymbol{a(\phi^+, \phi^+) + a(\phi^-, \phi^-)} \\
&= \boldsymbol{\alpha_1 + \alpha_2}
\end{aligned}$$

Il est clair qu'au moins l'une des fonctions $\boldsymbol{\phi^+}$, $\boldsymbol{\phi^-}$ appartient à $\boldsymbol{V_+}$. Nous pouvons alors distinguer deux cas :

$$\boldsymbol{\beta_1, \beta_2 > 0} \text{ ou } \boldsymbol{\beta_1, \beta_2 < 0.}$$

Le premier cas implique que $\boldsymbol{\phi^+}$ ainsi que $\boldsymbol{\phi^-}$ sont dans $\boldsymbol{V_+}$ et donc

$$\boldsymbol{\lambda_1^+} \leq \min \left\{ \frac{\boldsymbol{\alpha_1}}{\boldsymbol{\beta_1}}, \frac{\boldsymbol{\alpha_2}}{\boldsymbol{\beta_2}} \right\} \leq \frac{\boldsymbol{a(\phi, \phi)}}{\boldsymbol{b(\phi, \phi)}} = \boldsymbol{\lambda_1^+}$$

Ce qui implique

$$\boldsymbol{\lambda_1^+} = \frac{\boldsymbol{\alpha_1}}{\boldsymbol{\beta_1}} = \frac{\boldsymbol{\alpha_2}}{\boldsymbol{\beta_2}}$$

Cette dernière équation prouve que $\boldsymbol{\phi^+}$ et $\boldsymbol{\phi^-}$ sont toutes les deux des fonctions propres associées à λ_1^+.

$$\begin{aligned}
(-\Delta + q(x) - \lambda_1^+ g(x))\ \phi^+ &= 0,\\
(-\Delta + q(x) - \lambda_1^+ g(x))\ \phi^- &= 0.
\end{aligned}$$

Alors ϕ^+ et ϕ^- sont positives ou identiquement nuls sur $\mathbb{R}^n$ (voir [27]). Nous obtenons une contradiction avec ϕ qui change de signe sur $\mathbb{R}^n$.

Dans le deuxième cas nous obtenons :

$$\lambda_1^+ \leq \max\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\} \leq \frac{a(\phi,\phi)}{b(\phi,\phi)} = \lambda_1^+,$$

Donc

$$\lambda_1^+ = \max\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\}.$$

Ceci veut dire que l'une des fonctions ϕ^+ et ϕ^- est une fonction propre associée à λ_1^+. Sans restriction de la généralité, supposons que ϕ^+ est une fonction propre associée à λ_1^+. Appliquons l'identité de Picône ([1], [2]) à ϕ, ϕ^+ on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^2 \left|\nabla\left(\frac{\phi^+}{\phi}\right)\right|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\phi^+|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} (\phi^+)^2 \frac{\Delta\phi}{\phi}\, dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_1^+ g - q)(\phi^+)^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} (q - \lambda_1^+ g)(\phi^+)^2\, dx\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\phi = c\phi^+$

Montrons que λ_1^+ est la seule valeur principale positive du problème (3.1). Soit λ une valeur propre positive du problème (3.1) et soit φ la fonction propre associées à λ_1^+. Supposons que λ est principale c'est à dire φ est strictement positive, en appliquant encore une fois l'identité de Picône à φ et ϕ nous trouvons :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^2 \left|\nabla\left(\frac{\phi}{\varphi}\right)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\phi|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} (\phi)^2 \frac{\Delta\varphi}{\varphi} \, dx \qquad (*)$$
$$= (\lambda_1^+ - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} g\phi^2 \, dx.$$

Comme λ est une valeur propre positive du problème (3.1) nous avons nécessairement :

$$\lambda_1^+ \leq \lambda$$

d'après le principe du Min-Max. De l'égalité (*) nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^2 \left|\nabla\left(\frac{\phi}{\varphi}\right)\right|^2 dx = (\lambda_1^+ - \lambda) \int_{\mathbb{R}^2} g\phi^2 \, dx = 0,$$

Ce qui implique que

$$\varphi = c\phi \qquad \text{et} \qquad \lambda = \lambda_1^+$$

■

Théorème 3.2. La première valeur propre λ_1^+ du problème (3.1) est simple.

Preuve 3.4. Nous supposons qu'il existe deux fonctions propres ϕ_1 et ϕ_2 associées λ_1^+.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R},$ $\phi_1 + \alpha\phi_2$ est aussi une fonction propre associée à λ_1^+, donc $\phi_1 + \alpha\phi_2$ ne change pas de signe. Soient A et B tels que :

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R}, (\phi_1 + \alpha\phi_2) \geq 0\}; \quad B = \{\alpha \in \mathbb{R}, (\phi_1 + \alpha\phi_2 \leq 0)\}$$

A et B sont non vides, fermés et $A \cup B = \mathbb{R}$. Par conséquent, il existe $\widetilde{\alpha} \in A \cap B$ tel que : $\phi_1 + \widetilde{\alpha}\phi_2 = 0$. Ceci implique que les fonctions propres ϕ_1 et ϕ_2 sont linéairement dépendantes. ■

3.6 Cas où Le potentiel q change de signe

Nous considérons le problème (3.1) avec le potentiel q non nécessairement positif.

Proposition 3.4. Q est non vide.

Preuve 3.5. Il suffit de choisir q tel que : $\max(q^-(x)(1+|x|^2)^\beta) \leq c$, ($c$ est la constante dans l'inégalité de Hardy). On utilise l'inégalité de Hardy nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 &\geq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^2}\, dx \\
&\geq \max(q^-(x)(1+|x|^2)^\beta) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{1+|x|^2}\, dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} q^-(x)(1+|x|^2)^{\beta-1}|u|^2\, dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} q^-(x)(1+|x|^2)^{\beta-1}|u|^2\, dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} q^-(x)|u|^2\, dx \\
&\geq -\int_{\mathbb{R}^n} q(x)|u|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + q|u|^2 \geq 0, \qquad \forall u \in V.$$

Nous rappelons que si les hypothèses (3.6), (3.7) et (3.8) sont vérifiées, alors le problème (3.1) possède une infinité dénombrable de valeurs propres strictement positives associées à des fonctions propres dans V_+ (voir [12]) ■

Théorème 3.3. Si le potentiel $q \in Q$ et les hypothèses (3.6), (3.7) et (3.8) sont vérifiées alors, la première valeur propre λ_1^+ du problème (3.1) est principale dans V_+

Preuve 3.6. Nous considérons le problème

$$\begin{cases} (-\lambda + q - \lambda_1^+ g + K' p_\alpha)\, u = (\mu + K') p_\alpha u & \text{dans } \mathbb{R}^n, n \geq 3 \\ u \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

et le problème

$$\begin{cases} (-\lambda + q - \lambda_1^+ g)\, u = \mu\, p_\alpha u & \text{dans } \mathbb{R}^n, n \geq 3 \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Pratiquement, la première valeur propre γ_1 est une valeur propre principale du problème (3.11)

$$\gamma_1 = \mu_1 + K' = \inf_{u\in V_+} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + q|u|^2 - \lambda_1^+ g\, |u|^2 + K' p_\alpha |u|^2\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} p_\alpha |u|^2\, dx}$$

Par conséquent, le problème (3.12) admet une seule valeur propre principale μ_1

$$\mu_1 = \gamma_1 - K' = \inf_{u\in V_+} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + q|u|^2 - \lambda_1^+ g|u|^2\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} p_\alpha |u|^2\, dx}$$

Nous rappellons que si $\mu_1 = 0,$ alors λ_1^+ est une valeur propre du problème (3.1) [10].
Maintenant nous montrons que $\mu_1 = 0$, d'après la caractérisation variationnelle de λ_1^+ on a

$$\lambda_1^+ = \inf_{u\in V_+} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + q|u|^2)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n}\, g|u|^2\, dx},\ u \in V_+ \ \int g u^2 > 0 \right\}$$

Comme $Q \geq 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + q u^2 - \lambda_1^+\, g|u|^2)\, dx \geq 0,\ \forall u \in V_+$$

alors

$$\mu_1 \geq 0 \tag{3.13}$$

D'autre part, nous retrouvons une définition de λ_1^+ (voir [9, 10]), il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V_+$, telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g|(u_n)|^2\, dx = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_n|^2 + q|u_n|^2\, dx = \lambda_1^+$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_n|^2+q|u_n|^2dx-\lambda_1^+=0$$

ce qui donne :

$$\mu_1\leq 0 \tag{3.14}$$

D'après (3.13) et (3.14) on a :

$$\mu_1=0$$

Par conséquent ; λ_1^+ est une valeur propre principale de problème (3.1) dans V_+ associée à une fonction propre positive. ■

Corollaire 3.1. Pour toute fonction propre $\phi\in V_+$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\phi|^2+q|\phi|^2\,dx=0$$

Preuve 3.7. On a λ_1^+ la valeur propre principale associée à la fonction propre ϕ du problème (3.1), donc ϕ réalise le minimum c'est à dire :

$$\lambda_1^+=\frac{\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla\phi|^2+q|\phi|^2)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n}g|\phi|^2\,dx}$$

et comme $\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\phi|^2+q|\phi|^2\,dx=0$, on a :

$$\lambda_1^+=0$$

3.7 Non-existence de valeur propre principale

Nous commençons par étudier le problème dépendant d'un paramètre réel τ (voir [12] et [15])

$$(S_r)\begin{cases}(-\Delta+q-\tau l)u=\lambda mu & \text{dans } \mathbb{R}^n,\ n\geq 3\\ u\underset{|x|\to+\infty}{\to}0\end{cases}$$

avec $l=g_-+p_\alpha$ et $m=g_++p_\alpha$

Proposition 3.5. Le problème (S_τ) admet une suite infinie dénombrable de valeurs propres positives tendant vers l'infinie

$$0 < \lambda_1^+(\tau) \leq \lambda_2^+(\tau) \leq \cdots \leq \lambda_j^+(\tau) \leq \dots$$

Ces valeurs propres sont caractérisées par le principe de Min-Max.

$$\lambda_j^+(\tau) = \inf_{A \in V_j} \sup_{u \in A \cap V_+} \frac{a(u,v)}{b(u,v)}$$

Théorème 3.4. Si le potentiel q change de signe dans Ω et $q \notin Q$, et les hypothèses (3.6), (3.7) et (3.8) sont vérifiées alors, le problème (3.1) n'admet pas une valeur propre positive principale dans V_+

Preuve 3.8. Nous nous intéressons maintenant aux points fixes de $\lambda_1^+(\tau)$. Il est évident que si $\lambda_1^+(\tau)$ admet un point fixe τ_1, alors $\tau_1 = \lambda_1^+(\tau_1)$ est une valeur propre du problème (3.1). Au point fixe $\tau = \lambda(\tau)$ la fonction propre associée à $\phi_1(\tau)$ est dans V_+. En vertu de sa caractérisation, λ_1^+ est continue et croissant en τ. De plus, quand τ tend vers 0, $\lambda_1^+(\tau)$ tend vers la première valeur propre μ_1 du problème

$$\begin{cases} (-\Delta + q)u = \mu\, mu & \text{dans } \mathbb{R}^n, n \geq 3 \\ u \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

(voir[12]) qui est strictement positive pour $j \geq 1$.

Montrons que $\lambda_1^+(\tau)$ admet un point fixe c'est à dire $\lambda_1^+(\tau_1)$ coupe la première bissectrice. D'après le principe de Min-Max on a :

$$\lambda_1^+(\tau_1) = \inf_{u \in V} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + q|u|^2 + \tau_1 l |u|^2 \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} m|u|^2 \, dx}$$

On cherche dans V_+, j fonctions linéairement indépendantes et deux à deux orthogonales. On sait que le problème (S_τ) admet une double suite dénombrable de valeurs propres.

Pour $j \neq k,\ j > 1,\ k \leq j$

$$\begin{aligned}\lambda_1^+(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} m\phi_j\phi_k\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\phi_j\phi_k + \ q\phi_j\phi_k + \tau_1 l\phi_j\phi_k)\,dx\\ &= \lambda_k^+\int_{\mathbb{R}^n} m\phi_k\phi_j\,dx\end{aligned}$$

Par conséquent ;

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\phi_j\phi_k + q\phi_j\phi_k + \ \tau_1 l\phi_j\phi_k)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} m\phi_k\phi_j\,dx = 0$$

Comme $u \in V_+$

$$\begin{aligned}\lambda_1^+(\tau_1) &\leq \left\{\inf_{u\in V}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 + q|u|^2\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} m|u|^2\,dx}\right\} + \tau_1\left\{\inf_{u\in V}\frac{\int_{\mathbb{R}^n} l|u|^2\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} m|u|^2\,dx}\right\}\\ &= \mu_1^+(\tau_1) + \tau_1 a_1\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} m|u|^2\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} l|u|^2\,dx,\ \forall u \in V_+,$$

Ce qui implique $a_1 \leq 1$.

De plus, $\lambda_1^+(\tau_1)$ est borné par la droite $\lambda = \mu_1^+ + \tau a_1$ qui a une pente inférieure à $1.$

Par conséquent ; $\lambda_1^+(\tau_1)$ coupe obligatoirement la bissectrice

$$\begin{aligned}\lambda_1^+(\tau_1) = \ &\inf_{u\in V}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 + q|u|^2 + \tau_1 l|u|^2\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n}\ m|u|^2\,dx}\\ &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 + q|u|^2 + \tau_1 l|u|^2\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n}\ m|u|^2\,dx}\\ &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 + q|u|^2\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n}\ m|u|^2\,dx} + \tau_1.\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 + q|u|^2\,dx \geq 0,\ \forall u \in V_+$$

Ceci est en contradiction avec $q \notin Q.$

Ainsi les deux fonctions propres de $\lambda_1^+(\tau_1)$ sont orthogonales, $\phi_j(\tau)$ change de signe pour $j > 1$; à partir d'un certain rang $j > 1$, $\lambda_j^+(\tau)$ coupe la bissectrice $\lambda(\tau) = \tau,$ il en résulte qu'il existe au moins un point fixe τ_1 (voir [12]).

Si τ_1 est un point fixe alors $(\lambda_j^+)(\tau_1) < 1.$
Soient $\lambda_j^+(\tau)$, $\lambda_j^+(\tau_1)$ des valeurs propres associées aux fonctions propres $\phi_1(\tau)$, $\phi_1(\tau_1)$ respectivement, alors

$$(\lambda_j^+(\tau) - \lambda_j^+(\tau_1)) \int_{\mathbb{R}^n} m\phi_1(\tau)\ \phi_1(\tau_1)\ dx = (\tau - \tau_1) \int_{\mathbb{R}^n} l\phi_1(\tau)\phi_1(\tau_1)\ dx$$

Puisque les fonctions et les valeurs propres sont continues en τ, on obtient

$$(\lambda_j^+)(\tau_1) = \lim_{\tau \to \tau_1} \frac{\lambda_j^+(\tau) - \lambda_j^+(\tau_1)}{\tau - \tau_1} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} l\phi^2(\tau_1)\ dx}{\int_{\mathbb{R}^n} m\phi^2(\tau_1)\ dx}$$

Car $\phi_1(\tau_1)$ est supposée dans V_+. Par conséquent ; τ_1 est unique donc τ_1 est la première valeur propre de problème (3.1) associée à $\phi_1(\tau_1)$ qui change de signe dans V_+ donc τ_1 n'est pas une valeur propre principale du problème (3.1). ■

CONCLUSION

Ce travail est une extension des travaux déjà élaborés sur des domaines bornés. Le choix du potentiel s'est avéré d'une importance capitale pour l'établissement des résultats. Nous souhaitons entreprendre le champs d'investigation sur une classe de potentiel plus élargie. Alors, nous concluons précisément que $\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{L}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ alors le problème admet deux suites infinies dénombrables de valeurs propres tendant vers plus ou moins l'infini.

D'autre direction nous avons établi un résultat de non-existence des valeurs propres principales pour une classe de potentiel $\boldsymbol{q}$.

Le résultat établi pour l'opérateur de schrödinger peut être étendu à des opérateurs d'ordre $\boldsymbol{2m}$ sous la condition d'ellipticité. Il semble que la généralisation des résultats obtenus est possible en choisissant des coéfficients de l'opérateur dans des espaces appropriés.

Bibliographie

[1] **W.Allegretto**, Principal eignvalues for indefinite weight elliptic problems in $\mathbb{R}^n$ procceedings of the American Mathematical Society, vol. 116, N° 3, (1992).

[2] **W.Allegretto & A.B.Mingarelli**, On the non existance of positive solutions for a Schrödinger equation with an indefinite weight-function, C.C.Math.Rep.Acad.Sci.Canada.Vol. VIII, N°1(1986).

[3] **V.Benci** & **D.Fortunato**, Some compact embedding theorems for weighted Sobolev spaces, Bollettino UM.I(5) 13-B(1976) 832-843.

[4] **V.Benci** & **D.Fortunato**, Weighted Sobolev Spaces and the non linear Dirichlet problem in an bounded Domains, Ann.mat.Pura.Appl.,(1978), 320-336.

[5] **Julien Bernis** et **Laurent Bernis**, Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements,

[6] **M.S Birman**, **M.Z.Solonyak**, Quantitative analysis in Sobolev imbedding theorems and applications to spectral theory. Amet Maths.Soc.translations serie 2 volume, 1980.

[7] **A.S.Bonnet**, Analyse mathématique de la propagation des ondes guidés dans les fibres optiques, rapport de recherche N°229 (1988).

[8] **H. Brézis.** Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, (1983).

[9] **K.J.Brown, C.Cosner** & **J. Fleckinger**, Principal eigenvalue for problems with indefinite weight function, J. math. Amel. Appl. vol. 75 (1980) ; 147-155.

[10] **K.J.Brown,** & **S.S. Lin**, On the existence of positive eigenfunction an eigenvalue problem with indefinite weight function, J. Math. Anal. Appl vol. 75(1980), 112-120.

[11] **K.J.Brown** & **A. Tertikas**, The existence of principal eigenvalues for problems with indefinite weight function on $\mathbb{R}^n$; to appear in proc. Rev. Soc. Edin.

[12] **A.Djellit**, Valeurs propres des problèmes elliptiques "indéfinis" sur des ouverts non bornés de $\mathbb{R}^n$, Thèse de doctorat, Univ.P.S.Toulouse III (1992).

[13] **A. Djellit**, **N. Benouhiba**, Existence and uniqueness of positive solution of a semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$, Demonstratio mathematica vol XXXV, Num.1, (2002), 61-73.

[14] **A.Djellit, N. Benouhiba**, Existence de valeurs propres principales pour un problème elliptique en dimension 2, Univ Trieste Vol XXXV, (1999), 49-60

[15] **A. Djellit**, & **J. Fleckinger** Valeurs propres de problèmes elliptiques, B.U.M.I (7) et 7-B (1993), 857-874.

[16] **A. Djellit**, **A. Yechoui**, Existence and non existence of a principal eigenvalue for some Boundry value problems, Maghreb Math .Rev, vol. 6, 1(1997), 29-37.

[17] **D.G** de **Figras**, Positive solutions of semi linear elliptic problems, lecteurs note in maths N° 957, Springer-Verlag, Berlin, pp 34-87.

[18] **J. Fleckinger-Pellé**, Estimations des valeurs propres d'opérateurs de type Schrödinger, Univ. Bordeaux I. (1981). pp 1-18.

[19] **J. Fleckinger-Pellé** & **A.B. Mingarelle**, On the eigenvalue of non-definite elliptic operator, Math. Studies 92, North, (1984), 219-222.

[20] **D. Gilbarg** & **N.S Trudinger**, Elliptic partial differential equations of second order, 2^{nd} ed., Springer Verlag, Berlin. (1983). MR 86 C : 35035.

[21] **J.P. Grossez** & **E. Lani Dozo**, On the principal eigenvalue of a second ordre linear elliptic problem with indefinite weight function, Arch. Ratio-Mech. Anal.,vol.89, N° 2 (1985),(169-175).

[22] **B.Hanouzet**, Espace de Sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace, Rend. Sem. Math. Univ. Podova, 56(1971), 227-272.

[23] **P.Hess**, On the principal eigenvalue of a second order linear elliptic problem with an indefinite weight function, Math.Zeit Schrift. 179.(1982), 237-239.

[24] **Amel Kourta.** Mémoire doctorat, mathématiques *"sur l'étude de quelques propriétés fonctionnelles des espaces de Sobolev à poids et Application à des EDP de type elliptique"*.

[25] **Samiha Mouchir .** Mémoire Master, Mathématiques. 28/06/2021.

[26] **R.G.D Richardson**, Contibution of the oscillation properties of the solution of linear differential equations of secod order, Amer.J.Math., vol.40(1918), 283-316.

[27] **G. Stampacchia**, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques de second ordres à coefficients discontinus, Ann-Inst. Fourier 15 (1965), 189-258.

[28] **E.Titchmarsch**, Eignenfunctions expansions associated with second order differential equation, part II Oxford Univ. Press, London, (1958).

[29] **H.F Weinberger**, Variation methods for eigenvalue approximation, chap III, Regional conference serie in applied mathimatics, Vol. 15, Siam, Philadilphia, Penn, (1974).

[30] Cours de **Dimitri Yafaev**, tapé par **Salim Rostam**, *"Analyse microlocale et théorie spectrale"* "M2 Analyse et Applications", université Rennes 1, premier semester 2014-2015. PDF.

[31] https://www.methodemaths.fr, Divergence, gradient, rotationnel et laplacien *"Méthodes Maths"*.

[32] PDF. "Generalized Picon's Identity and it's Applications", Electronic Journal Differential Equations 2013(2013), N°.243, pp.16.

[33] ANAH 12 | PDF | 4.2 Théorème Spectrale pour les opérateurs autoadjoints.