الـجمهـورية الـجزائريــة الديمـقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعـلـيـم العالي والــبـحـث الـعلـمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامـعـة الـشادلي بن جديد- الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Sur L'existence des solutions d'un systéme différentiel fractionnaire non linéaire avec des conditions limites

Présentée par:

Boumansoura Roumaissa

Devant le Jury :

Dr. Mehri Allaoua	**MCA**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Président
Dr. Saifia Ouarda	**MCA**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Adjemi Salim	**MCB**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinateur

Année Universitaire 2024-2025

Dédicaces

Ce travail est dédié à :

A ma chère mère.
A mon cher père.
Qui n'on jamais cessé de prier pour moi, de me soutenir et de m'encourager afin que je puisse atteindre mes objectifs.
A mes sœurs Amira et Meriem .
Pour leur présence bienveillante à mes côtés, leur soutien moral et leurs conseils précieux à toutes les étapes de ma vie .
Mes chers grands-parents
A qui je souhaite une bonne santé et longue vie.
A toute ma famille .
Pour leur soutien et leur présence indéfectible .

Remerciements

On aimerait en premier lieu remercier **ALLAH** qui nous a donné la volonté
et le courage pour achever ce travail.
Nous exprimons notre profonde gratitude à **Dr. Saifia Ouarda**, dont
l'encadrement scientifique rigoureux et les orientations précieuses ont grandement
contribué à l'aboutissement de ce mémoire.
Elle nous a généreusement offert de son temps et de son expertise.
Son appui constant, sa passion, ainsi que ses qualités scientifiques et humaines
ont largement contribué à créer un environnement de travail très agréable.
Qu'elle reçoive ici l'expression de notre sincère et profonde reconnaissance.
Nous la remercions du fond du cœur.
On tient à remercier **Dr.Mehri Allaoua** pour l'honneur
de nous
accorder en présidant le jury.
On remercie vivement **Dr.Adjemi Salim** d'avoir
accepter d'examiner
notre travail.
Mes remerciements les plus sincères vont à **Monsieur Fadi Boudebza** pour
son soutien continu et ses efforts précieux,
qui ont joué un rôle déterminant dans la réalisation de ce travail.
Nos sincères remerciements à nos parents, et à nos familles .
Enfin, nous remercions tous les enseignants du département de
mathématiques.

حول وجود الحلول لنظام تفاضلي كسري غير خطي
بشروط حدودية

ملخص

تظهر المعادلات التفاضلية الكسرية بشكل تلقائي في مختلف الميادين العلمية مثل الفيزياء، الهندسة، الطب، الكيمياء، نظرية التحكم، وغيرها. إن فعالية هذه المعادلات في نمذجة العديد من الظواهر قد حفزت العديد من الباحثين لدراسة جوانبها الكمية والنوعية.

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة نتائج وجود الحلول لنضام تفاضلي كسري وذلك باستخدام تقنيات النقطة الصامدة. سنتطرق في البداية الى دراسة نتيجة وجود حلول النظام التفاضلي الكسري باستخدام نظرية النقطة الثابتة لشيفر، بعد ذلك سنعالج مسالة وجود الحل وتفرده باستخدام مبدأ الانكماش لبناخ .ثم ندرس استقرار الحل. نختم هذه المذكرة بتقديم مثال يوضح النتائج التي تم الحصول عليها.

Sur l'existence des solution d'un système différentiel fractionnaire non linéaire avec des conditions limites

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires ($EDFs$) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médecine, la chimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

L'objectif de ce mémoire est l'étude des résultats d'existence des solutions d'un système différentiel fractionnaire . Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les techniques du point fixe. Nous étudions d'abord le résultat d'existence pour le système différentiel fractionnaire en employant le théorème du point fixe de Schaefer . Ensuite, nous nous intéressons à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du système en moyennant le principe de contraction de Banach.De plus, nous étudions la stabilité de la soloution au sens au de Ulam-Hyres. Finalement, nous fournissons un exemple illustrant nos résultats.

Existence result for Nonlinear Fractional differential system with bondary conditions

Abstract

The fractional differential equations ($FDEs$) appear naturally in different scientific fields like physics, engineering, medicine, chemistry, theory of control, etc. The effectiveness of these equations in modeling several real-world phenomena has motivated many researchers to study their quantitative and qualitative aspects.

The objective of this dissertation is the study of the existence results of solutions of a fractional differential system . The obtained results in this work are based on fixed point techniques. First, we investigate the existence result for the fractional differential system by employing Schaefer fixed point theorem. Next, we establish the existence and the uniqueness of the solution by using Banach contraction mapping principle Moreover, we investigate the stability of the solution in the sense of Ulam-Hyres. Finally, we provide example to illustrate our results.

Table des matières

Introduction

La théorie du calcul fractionnaire est un sujet presque aussi vieux que le calcul différentiel et remonte à la fin du 17 ème siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont dévloppé les fondements du calcul différentiel et intégral.

L'histoire a débuté le 30 septembre 1695 quand Leibniz dans une lettre adressée à l'Hôpital voulut engager une réflexion sur une théorie possible de la dérivation non entière d'une fonction. l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? , Leibniz répond que cela même a un paradoxe dont on tirera un jour des conséquences utiles. Cette lettre de l'Hôpital est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire (Voir [5][13][20][25]).

De nombreux mathématiciens ont joué un rôle important dans le calcul fractionnaire, jusqu'au milieu du 20 ème siècle à savoir : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823 - 1826), J. Liouville (1832 - 1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865 - 1867), A.K. Grunwald (1867 - 1872), A.V.Letnikov (1868 - 1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J.Hadamard (1892), O. Heaviside (1892 - 1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E.Littlewood (1917 - 1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T.Davis (1924 - 1936), A. Zygmund (1935 - 1945) E.R. Love (1938 - 1996), A. Erdélyi (1939 - 1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Le calcul fractionnaire a un champ d'application très vaste (Voir[6][8][9][15][18]), qui apparait dans les divers domaines de recherche, par exemple : traitement du signal et d'image, théorie de contrôle des systèmes dynamiques, circulation des fluides, viscoélasticité, rhéologie, mécanique, chimie, physique, biologie ...etc.

Bien que certaines questions mathématiques demeurent encore irrésolues, de nombreux défis on été surmontés avec succès. La plupart des problèmes mathématiques clés documentés dans ce domaine ont été résolus à un point où de nombreux outils mathématiques sont les mêmes pour les deux calculs régulier et fractionnaire. On peut s'appuyer sur plusieurs travaux fondamentaux (Voir[4][6][8][15][23][26][21]), qui offrent une compréhension approfondie des équations et des systèmes d'ordres fractionnaires.

Les théorèmes du point fixe sont des outils très utiles dans la résolution des équations différentielles pour montrer l'existence et l'unicité de la solution aux divers types d'équations.

Ce mémoire qui est l'etude détaillée du l'article de Saifia et al [24] , consiste à étudier les résultats d'existence des solutions pour un système fractionnaire non linéaire . Notre approche est basée sur les théories du point fixe (théorème de Banach, et théorème de Schaefer).

Notre travail est divisé en trois chapitres :

Dans le premier Chapitre, On présente des définitions des espaces fonctionnels et des fonctions spéciales "fonction Gamma et Béta d'Euler ".

Dans le deuxième Chapitre, On présente quelques résultats de base du calcul fractionnaire utiles dans la suite du travail.

Le troisième Chapitre comprend trois parties :

Dans la première partie, on présente un résultat sur l'existence d'au moins d'une solution pour un système différentielle fractionnaire avec la dérivée de Caputo. La démonstration de ce résultat sera basée sur le théorème du point fixe de Schaefer.

La deuxième partie, est consacrée à l'existence et l'unicité de la solution du problème considéré. En utilisant dans notre approche la théorie du point fixe de Banach.

La troixiéme partie, on obordera la stabilité au sens de Ulam Hyres .

A la fin de notre étude , on va donner un exemple pour illustrer les résultats trouvés.

Notations

- $\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels.
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.
- $C([a;b];\mathbb{R})$: l'espace des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.
- $L^p([a,b])$: espace des fonctions p-intégrables sur $[a,b]$.
- $L^\infty([a,b])$: espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur $[a,b]$.
- $AC([a,b])$: espace des fonctions absolûment continues sur $[a,b]$.
- $AC^n([a,b])$: espace des fonctions $u : [a;b] \to \mathbb{R}$ telle que $u^{(n-1)} \in AC([a,b])$ et $u^{(k)} \in C([a,b])\,, k = 1, 2....., n-1$.
- $\Gamma(.)$: la fonction Gamma.
- $\beta(.,.)$: la fonction Bêta.
- I_a^α : intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
- D_a^α : dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
- ${}^cD_a^\alpha$: dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace normé

Définition 1.1.1. *(**Norme**)*
Soit E un espace vectoriel. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ habituellement notée $\| \, . \, \|$ vérifiant pour tous x,y dans E et tout α dans $\mathbb{K}$:

- $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\| \alpha \, x \| = |\alpha| \, \| x \|$ *(homogénéité).*
- $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *(inégalité triangulaire).*

Un espace vectoriel E muni d'une norme $\| \, . \, \|$, noté $(E, \| \, . \, \|)$ sera appelé un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2. *(**Suite de Cauchy**)*
Soient E un espace vectoriel normé muni de la norme $\| \, . \, \|$ et $(x_n)_{n \geq 0} \subset E$, une suite de E. On dit que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy si :
$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n, m \geq n_0 \Rightarrow \| x_n - x_m \| \leq \epsilon$.

Définition 1.1.3. *(**Espace Vectoriel Normé Complet**)*
On dit que l'espace vectoriel normé E est complet pour la norme $\| \, . \, \|$, si toute suite de Cauchy est convergente (pour cette norme).
Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.

Définition 1.1.4. ***(Application Lipschitzienne)***
Soit E un espace vectoriel normé, de norme $\| \, . \, \|$. Une application f de E dans E est dite Lipschitzienne de constante $K > 0$ si elle vérifie :

$$\forall u, v \in E, \| \, f(u) - f(v) \, \| \leq K \, \| \, u - v \, \| \, .$$

L'application Lipschitzienne f est dite contractante si $K \in \,]0; 1[$.

Définition 1.1.5. *(**Opérateur linéaire**)*
Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.
Un opérateur A défini de E dans F est dit linéaire, s'il satisfait à :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}; \forall x, y \in E : A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \, .$$

Exemple 1.1.1. *l'opérateur A défini comme suit :*

$$A : (C[a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto A(f) = \int_0^1 f(x) \, dx$$

est linéaire.

Définition 1.1.6. *(**Opérateur compact**)*
Soit $D \subset E$. Un opérateur $F : D \to E$ est dit compact si pour tout ensemble borné $S \subset D$, $F(S)$ est relativement compact. De plus, F est complètement continu s'il est continu et compact.

Théorème 1.1.1. *[14]* ***(Ascoli Arzela)*** *Soit $A \subset C(J, \mathbb{R}^n)$. L'ensemble A est relativement compact dans $C(J, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) L'ensemble A est borné, i.e., il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\|f(x)\| \leq K \quad \text{pour tout } x \in J \text{ et tout } f \in A,$$

ii) L'ensemble A est équicontinu, i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tous } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A,$$

1.1.2 Espace des fonctions continues

$(C([a;b];\mathbb{R}))$

Définition 1.1.7. *(Application continue)*
Soit E un espace vectoriel normé, de norme $\| \cdot \|$. Une application f de E dans E est dite continue au point a si elle vérifie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \rho > 0, \forall x \in E : \| x - a \| < \rho \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \epsilon.$$

Théorème 1.1.2. *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*
f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (x_n) qui converge vers a, alors $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

Théorème 1.1.3. *(Carathéodory)[11]*
Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X. On définit la famille :

$$\mathcal{M} = \{A \subset X \mid \forall E \subset X,\ \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)\}.$$

Alors :

- *$\mathcal{M}$ est une σ-algèbre sur X,*
- *La restriction de μ^* à $\mathcal{M}$ est une mesure complète sur $\mathcal{M}$.*

1.1.3 Espace des fonctions absolument continues (AC)

Soit $[a,b]\,(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.8. *On note par $AC([a,b]))$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables i.e :*

$$f \in AC([a,b])) \Leftrightarrow \exists \phi \in L^1([a,b]) \ \ tellque\ \ f = c + \int_a^b \phi(t)\,dt.$$

Ainsi, toute fonction f absolûment continue possède une dérivée sommable $f' = \phi$, presque partout sur $[a,b]$, et donc $c = f(a)$.

Définition 1.1.9. *On note par $AC^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$ l'espace des fonctions f définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui ont des dérivées continues sur $[a,b]$ jusqu'à l'ordre $n-1$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC([a,b]))$ i.e.*

$$f \in AC^n([a,b]) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \ f^{(k)} \in C([a,b]),\ \ k = 0....,n-1,\ \ f^{(n-1)} \in AC([a,b])\}$$

Remarque : *On a $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$*

.

Une caratérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1.1. *Une fonction* $f \in AC^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$ *, si et seulement si elle est représentée sous la forme*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Preuve :

Nous procédons par une double implication.

— **Implication directe :** $f \in AC^n([a,b]) \implies$ **la représentation est valable**

Par récurrence sur n.

Cas de base ($n = 1$) Si $f \in AC([a,b])$, alors par définition de l'absolue continuité :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt,$$

ce qui correspond bien à la formule pour $n = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{0!}\int_a^x (x-t)^0 f'(t)\,dt + \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Hérédité (supposons vrai pour n**, montrons pour** $n+1$**)** Soit $f \in AC^{n+1}([a,b])$. Alors :

— $f \in AC^n([a,b])$ (par inclusion des espaces),
— $f^{(n)} \in AC([a,b])$ (par définition de AC^{n+1}).

Par hypothèse de récurrence appliquée à $f \in AC^n$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Comme $f^{(n)} \in AC([a,b])$, on peut écrire :

$$f^{(n)}(t) = f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(s)\,ds.$$

En substituant dans l'intégrale :

$$\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt = f^{(n)}(a)\int_a^x (x-t)^{n-1}\,dt + \int_a^x (x-t)^{n-1}\left(\int_a^t f^{(n+1)}(s)\,ds\right)dt.$$

Calculons chaque terme :

$$\int_a^x (x-t)^{n-1}\,dt = \frac{(x-a)^n}{n},$$

$$\begin{aligned}\int_a^x (x-t)^{n-1}\left(\int_a^t f^{(n+1)}(s)\,ds\right)dt &= \int_a^x f^{(n+1)}(s)\left(\int_s^x (x-t)^{n-1}\,dt\right)ds\\ &= \frac{1}{n}\int_a^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s)\,ds.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s)\,ds + \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

ce qui prouve l'hérédité.

— **Implication réciproque : La représentation implique** $f \in AC^n([a,b])$

Supposons que f s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\phi(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{k!}(x-a)^k,$$

avec $\phi \in L^1([a,b])$.

En dérivant n fois f, on trouve :

$$f^{(n)}(x) = \phi(x),$$

et comme $\phi \in L^1([a,b])$, $f^{(n)}$ est absolument continue. Par conséquent, $f \in AC^n([a,b])$.

1.2 Fonctions Spéciales

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

On peut définir par l'intégration par partie la fonction factorielle comme suivant :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

La fonction Gamma l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire qui permet de prolonger la fonction factorielle aux valeurs non entières, la fonction gamma est appelée aussi fonction factorielle généralisée.

Définition 1.2.1. *[17][20] La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \qquad Re(z) > 0. \tag{1.2}$$

Propriétés de la fonction Gamma

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), Re(z) > 0.$
- $\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)....(z+n-1)\Gamma(z).$
- $\Gamma(n) = (n-1)!, n \geq 1.$

Preuve

1.
$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt \\ &= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} z.t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z).\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\Gamma(z+n) &= (z+n-1)\Gamma(z+n-1) \\ &= (z+n-1)(z+n-2)\Gamma(z+n-2) \\ &= (z+n-1)(z+n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots z\Gamma(z) \\ &= z(z+1)(z+2)\ldots\ldots\ldots\ldots(z+n-1)\Gamma(z).\end{aligned}$$

3. On a :
$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)....(z+n-1)\Gamma(z).$$
Posons : $z = 1$

alors :
$$\Gamma(1+n) = 1(2)(3)....(n)\Gamma(1) = n!.$$
Donc :
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$

- $\Gamma(1) = 1.$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$
- $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}.$

Preuve :

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$

   Posons :
   $$y = \sqrt{t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dt = 2\sqrt{t}.dy$$
   Donc :
   $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

3. On a :
   $$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\ldots.(z+n-1)\Gamma(z).$$
   Posons : $z = \frac{1}{2}$.

   Alors :
   $$\begin{aligned}
   \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\ldots.\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
   &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\ldots.\left(\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
   &= \frac{1\times 3\times 5\times \ldots\ldots(2n-1)\times 2\times 4\times 6\ldots..\times 2n}{2\times 2\times 2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times 2\times 2\times 4\times 6\ldots..\times 2n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
   &= \frac{2n!}{2^n\times 2^n\times n!}\sqrt{\pi} \\
   &= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}.
   \end{aligned}$$

1.2.2 Fonction Béta d'Euler

L'autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler.

Définition 1.2.2. *[17][20] La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante :*

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt, \qquad (z>0, w>0). \tag{1.3}$$

Remarque 1.2.1. *On a :*

1. *la relation entre la fonction Gamma et Bêta est donnée par :*

$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.4}$$

2. *la fonction Bêta est symétrique i.e :*

$$\beta(z,w) = \beta(w,z).$$

1.3 Quelques théorèmes du point fixe

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.
Dans cette section nous rappelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la définition d'un point fixe.

Définition 1.3.1. *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de f tout point $u \in E$ tel que $f(u) = u$.*

Le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes du point fixe. Ce théorème prouvé en 1922 par Stefan Banach est basé essentiellement sur les notions d'application Lipschitzienne et d'application contractante.

Théorème 1.3.1. *[10]* ***(Banach 1922)***
Soit E un espace métrique complet et soit $f : E \to E$ une application contractante, alors f possède un point fixe unique.

Le deuxième théorème du point fixe qu'on va énnoncer est celui de Schaefer.

Théorème 1.3.2. *[14][12]* ***(Schaefer)***
Soient X un espace de Banach et $A : X \to X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\varepsilon = \{u \in X : \lambda A u = u, \ \textit{pour un certain } \lambda \in]0,1[\}$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Chapitre 2

Quelques opérateurs fractionnaires et outils de base

Dans ce chapitre, nous présentons différentes approches de généralisation de la notion de différentiation et intégration.

2.1 Intégrale répétée n-fois

Définition 2.1.1. *[17]*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale répétée n-fois de f est définie comme suit :

$$\begin{aligned} I^n f(x) &= \int_a^x \int_a^{x_1} \int_a^{x_2} ...... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n dx_{n-1} .... dx_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)\, ds. \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Preuve :

Pour $n = 2$ on a :

$$I^2 f(x) = \int_a^x \int_a^t f(s)\, dsdt = \int_a^x 1 \int_a^t f(s)\, dsdt.$$

$$\begin{aligned}
I^2 f(x) &= \left[t \int_a^t f(s)\, ds \right]_a^x - \int_a^x t.f(t)\, dt \\
&= x \int_a^x f(s)\, ds - \int_a^x t.f(t)\, dt \\
&= x \int_a^x f(s)\, ds - \int_a^x s.f(s)\, ds \\
&= \int_a^x (x-s) f(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Pour $n = 3$ on a :

$$\begin{aligned}
I^3 f(x) &= \int_a^x \int_a^t \int_a^z f(s)\, dsdzdt \\
&= \int_a^x \left(\int_a^t \int_a^z f(s)\, dsdz \right) dt \\
&= \int_a^x \int_a^t (t-s) f(s)\, dsdt \\
&= \int_a^x t \int_a^t f(s)\, dsdt - \int_a^x \int_a^t s.f(s)\, dsdt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} \int_a^t f(s)\, ds \right]_a^x - \int_a^x \frac{t^2}{2}.f(t)\, dt - \int_a^x (x-s)\, s.f(s)\, ds \\
&= \frac{x^2}{2} \int_a^x f(s)\, ds - \int_a^x \frac{s^2}{2}.f(s)\, ds + \int_a^x \left(s^2 - x.s\right).f(s)\, ds \\
&= \frac{1}{2} \int_a^x \left(x^2 + s^2 - 2.x.s\right) f(s)\, ds \\
&= \frac{1}{2} \int_a^x (x-s)^2 f(s)\, ds.
\end{aligned}$$

En générale pour $n \in \mathbb{N}$

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)\, ds.$$

On peut montrer cette égalité par récurrence :

Pour $n = 1$

$$If(x) = \frac{1}{0!}\int_a^x (x-s)^0 f(s)\,ds = \int_a^x f(s)\,ds.$$

Posons :

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)\,ds,$$

et montrons que :

$$I^{n+1} f(x) = \frac{1}{(n)!}\int_a^x (x-s)^{n} f(s)\,ds.$$

$$\begin{aligned}
I^{n+1} f(x) &= I^n\left(If(x)\right)\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1} If(s)\,ds\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1}\int_a^s f(t)\,dtds\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\left[\frac{-(x-s)^n}{n}\int_a^s f(t)\,dt\right]_{s=a}^{s=x} + \int_a^x \frac{(x-s)^n}{n} f(s)\,ds\right)\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \frac{(x-s)^n}{n} f(s)\,ds\\
&= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-s)^n f(s)\,ds.
\end{aligned}$$

2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1. *[20][17]*

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction f continue d'ordre $\alpha > 0$, notée $I_a^\alpha f(t)$ est définie par

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds. \tag{2.1}$$

Théorème 2.2.1. *L'opérateur intégrale I_a^α est linéaire.*

Preuve : D'après la linéarité de l'intégrale.

Proposition 2.2.1. *Soit f une fonction continue, alors on a :*

- $\lim_{\alpha\to 0^+} \left(I_a^\alpha f\right)(x) = f(x)$.
- $I_a^\alpha \left(I_a^\beta\right) = I_a^{\alpha+\beta}; \alpha,\ \beta > 0.$
- $\frac{d}{dx} I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-1} f(x), \alpha > 0.$

Exemple 2.2.1. *1.* $f(x) = (x-a)^\gamma$.

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\gamma\, dt. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable :

$$t = a + (x-a)\tau,$$

— *si* $t = a \Rightarrow \tau = 0$
— *si* $t = x \Rightarrow \tau = 1$
— $dt = (x-a)\, d\tau.$
Alors on a :

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{\alpha-1} (x-a)^{\gamma} \tau^{\gamma} (x-a)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} (x-a)^{\gamma+1} \tau^{\gamma} d\tau \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\gamma} d\tau \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\gamma} \beta(\alpha, \gamma+1)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\gamma} \Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+\gamma+1)} \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\gamma} \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}.
\end{aligned}$$

2. $f(x) = c.$

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} c.dt \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(x-t)^{\alpha}}{\alpha} \right]_a^x \\
&= \frac{c(x-a)^{\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{c(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.3.1. *[17][20]*
Soit $n-1 < \alpha < n$, la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f est définie par la relation suivante :

$$\left(D_a^\alpha\right) f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\left(I^{n-\alpha} f\right)(x)\right]. \tag{2.2}$$

Propriétés :

- Linéarité : $D_a^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D_a^\alpha f(t) + \mu D_a^\alpha g(t)$.
- En général on a :
$$D_a^\alpha \left(D_a^\beta f(t)\right) \neq D_a^\beta \left(D_a^\alpha f(t)\right) \neq D_a^{\beta+\alpha} f(t).$$
- $D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = D_a^\alpha (D_a^{-\alpha} f(t)) = f(t)$.
- $I_a^\alpha (D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \left[D_a^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}$.

Exemple 2.3.1.

1. $f(x) = (x-a)^\beta$.

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-\alpha} f\right)(x) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{(x-a)^{n-\alpha+\beta}\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha},
\end{aligned}$$

car

$$\frac{d}{dx}x^m = m.x^{m-1}.$$
$$\frac{d^2}{dx^2}x^m = m\left(m-1\right).x^{m-2}.$$

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}.x^{m-n}.$$

Donc

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} x^{\beta} = \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}.x^{\beta-\alpha}.$$

2. $f\left(x\right) = c.$

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} f\left(x\right) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-\alpha} f\right)\left(x\right) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{c.\left(x-a\right)^{n-\alpha}}{\Gamma\left(n-\alpha+1\right)}\right) \\ &= \frac{c}{\Gamma\left(n-\alpha+1\right)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(x-a\right)^{n-\alpha} \\ &= \frac{c}{\Gamma\left(n-\alpha+1\right)} \frac{\Gamma\left(n-\alpha+1\right)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} \left(x-a\right)^{-\alpha} \\ &= \frac{c}{\Gamma\left(1-\alpha\right)} \left(x-a\right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.1. *La dérivée fractionnaire d'une constante au sens de Riemann n'est jamais nulle.*

Lemme 2.3.1. *[17]*
Soient $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$. *Si* $f \in AC^n$ *, alors la dérivée fractionnaire* $D_a^{\alpha} f$ *existe presque partout sur* $[a, b]$.

2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.4.1. *[17] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on appelle dérivée de f au sens de Caputo la fonction définie par :*

$$\left({}^cD_a^\alpha f\right)(x) = \left(I_a^{n-\alpha} f^{(n)}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt. \tag{2.3}$$

Proposition 2.4.1.

- ${}^cD_a^\alpha \left(I_a^\alpha f\right) = f$.
- $I_a^\alpha \left({}^cD_a^\alpha f\right)(x) = f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$.
- *Linéarité :* ${}^cD_{a^+}^\alpha \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) = \lambda {}^cD_{a^+}^\alpha f(x) + \mu {}^cD_{a^+}^\alpha g(x)$.

Exemple 2.4.1. *1.* $f(x) = (x-a)^\beta$.

$$\begin{aligned}
{}^cD_a^\alpha f(x) &= I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \\
&= I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^\beta\right] \\
&= I_a^{n-\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (x-a)^{\beta-n}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} I_a^{n-\alpha} (x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \frac{\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-n+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

2. $f(x) = c$.

$${}^cD_a^\alpha f(x) = I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = I_a^{n-\alpha}(0) = 0 .$$

Remarque 2.4.1. *La dérivée fractionnaire d'une constante au sens de Caputo est toujours nulle.*

Lemme 2.4.1. *[17]*
Soit $\alpha > 0$. *Si* $f \in AC^n$ *, alors la dérivée fractionnaire* ${}^cD_a^\alpha f$ *existe presque partout sur* $[a, b]$.

Chapitre 3

Sur L'existence des solutions d'un système différentiel fractionnaire non linéaire avec des conditions Limites

3.1 Position du problème

On considère le système différentiel fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_0^{\zeta_1}\ {}^cD_0^{\xi_1}x(t) & = & f\left(t, y(t), I_0^{\rho_1}y(t)\right), \quad t \in [0,T], \\ D_0^{\zeta_2}\ {}^cD_0^{\xi_2}y(t) & = & g\left(t, x(t), I_0^{\rho_2}x(t)\right), \quad t \in [0,T], \\ {}^cD_0^{\xi_1}x(0) = {}^c D_0^{\xi_1}x(T) & = & {}^cD_0^{\xi_2}y(0) = {}^c D_0^{\xi_2}y(T) = 0, \\ x(0) & = & a_1 \displaystyle\int_0^T x(s)ds + b_1, \\ y(0) & = & a_2 \displaystyle\int_0^T y(s)ds + b_2, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $0 < \xi_1, \xi_2 \leq 1; 1 < \zeta_1, \zeta_2 < 2,\ 0 < \rho_1, \rho_2 \leq 1,\ f, g : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données, ${}^cD_0^{\alpha}$ est la dérivée standard de Caputo d'ordre D, I^{γ} est l'integrale de Riemann- Liouville a_1, a_2, b_1, b_2 sont des constantes réelles.

Lemme 3.1.1. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$.*
$I_0^{\alpha c}D_0^{\alpha}x\left(t\right) = x\left(t\right) + c_0 + c_1 t + \text{..........} + c_{n-1}t^{n-1}$.

où $c_0, c_1....., c_{n-1} \in \mathbb{R}$,

Preuve : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n = \alpha + 1$. Par définition de l'opérateur intégral fractionnaire appliqué à la dérivée fractionnaire, on a :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha D_a^\alpha x(t) &= x(t) - \sum_{j=1}^{n} \left[D_a^{\alpha-j} x(t)\right]_{t=0} \cdot \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \\
I_0^\alpha D_0^\alpha x(t) &= x(t) - \sum_{j=1}^{n} c_j t^{\alpha-j} \\
&= x(t) + c_0 t^{\alpha-1} + c_1 t^{\alpha-2} + \cdots + c_n t^{\alpha-n} \\
&= x(t) + c_0 t^{\alpha-1} + c_1 t^{\alpha-2} + \cdots + c_{n-1} t^{\alpha-n}
\end{aligned}$$

Lemme 3.1.2. *Soit $h \in C([0,T], \mathbb{R})$ fonction donnée le problème Suivant :*

$$\begin{cases}
D_0^{\zeta_1}\, {}^cD_0^{\xi_1} x(t) &= h(t), \\
{}^cD_0^{\xi_1} x(0) &= {}^cD_0^{\xi_1} x(T) = 0, \\
x(0) &= a_1 \displaystyle\int_0^T x(s)ds + b_1, \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}.
\end{cases} \tag{3.2}$$

est équivalent à l'équation intégrale

$$x(t) = I_0^{\xi_1+\zeta_1} h(t) - \frac{\Gamma(\zeta_1) t^{\zeta_1+\xi_1-1}}{T^{\zeta_1-1}\Gamma(\zeta_1+\xi_1)} I_0^{\zeta_1} h(T) + a_1 \int_0^T x(s)\, ds + b_1 \tag{3.3}$$

Supposons que $f, g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Alors, une paire $(x, y) \in X \times X$ est solution du système (7) si, et seulement si, (x, y) est un point fixe de l'opérateur suivant :

Soit $T : X \times X \to X \times X$ défini par

$$T(x(t), y(t)) = \left(T_1(x(t), y(t)),\ T_2(x(t), y(t))\right),$$

où

$$\begin{aligned}
T_1(x(t), y(t)) = I^{\xi_1+\zeta_1} & f\left(t, y(t), I^{\rho_1} y(t)\right) \\
& - \frac{I^{\zeta_1} f\left(T, y(T), I^{\rho_1} y(T)\right)}{T^{\zeta_1-1}\Gamma(\xi_1+\zeta_1)} t^{\xi_1+\zeta_1-1} \\
& + a_1 \int_0^T x(s)\, ds + b_1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}T_2(x(t),y(t)) &= I^{\xi_2+\zeta_2} g\left(t,y(t),I^{\rho_2}y(t)\right)\\ &\quad - \frac{I^{\zeta_2} g\left(T,y(T),I^{\rho_2}y(T)\right)}{T^{\zeta_2-1}\Gamma(\xi_2+\zeta_2)} t^{\xi_2+\zeta_2-1}\\ &\quad + a_2\int_0^T y(s)\,ds + b_2.\end{aligned}$$

Preuve :
En appliquant l'oupérateur intégrale $I_0^{\zeta_1}$ à la première équation de 3.2, on obtient :

$$^cD_0^{\xi_1}x(t) = I_0^{\zeta_1}h(t) + a_1 t^{\zeta_1-1} + a_2 t^{\zeta_1-2} \tag{3.4}$$

D'après les conditions $^cD_0^{\xi_1}x(0) =^c D_0^{\xi_1}x(T) = 0$, il en résulte que :

$$a_1 = \frac{1}{T^{\zeta_1-1}} I_0^{\zeta_1}h(T), \qquad a_2 = 0$$

En remplaçant a_1 et a_2, on obtient :

$$^cD_0^{\xi_1}x(t) = I_0^{\zeta_1}h(t) - \frac{t^{\zeta_1-1}}{T^{\zeta_1-1}} I_0^{\zeta_1}h(T)$$

En appliquant l'opérateur intégral $I_0^{\xi_1}$, on obtient :

$$x(t) = I_0^{\xi_1+\zeta_1}h(t) - \frac{\Gamma(\zeta_1)t^{\zeta_1+\xi_1-1}}{T^{\zeta_1-1}\Gamma(\zeta_1+\xi_1)} I_0^{\zeta_1}h(T) + a_3$$

d'aprés les conditions aux limites on trouve :

$$a_3 = a_1\int_0^T x(s)\,ds + b_1$$

Donc :

$$x(t) = I_0^{\xi_1+\zeta_1}h(t) - \frac{\Gamma(\zeta_1)t^{\zeta_1+\xi_1-1}}{T^{\zeta_1-1}\Gamma(\zeta_1+\xi_1)} I_0^{\zeta_1}h(T) + a_1\int_0^T x(s)\,ds + b_1$$

Inversement : La réciproque se déduit par un calcul direct, ce qui achéve la démonstration .

3.2 Existence de solution via le théorème de Schaefer

Théorème 3.2.1. *On suppose que les fonctions* $\varphi, \psi \in C\left([0,1], \mathbb{R}^{+}\right)$ *telles que :*

$$|f(t, x(t), y(t))| \leq \varphi(t), \quad |g(t, x(t), y(t))| \leq \psi(t), \quad t \in [0, T],\ x, y \in \mathbb{R}.$$

IL existe une solution unique (3.1) en $[0, T]$ *à condition que :*

$$\max\left(|a_1|, |a_2|\right) < \frac{1}{T}.$$

Preuve :
Afin d'appliquer le théorème du point fixe de Schaefer, nous divisons la démonstration en quatre étapes.

Etape 1 La continuité de l'opérateur T provient de la continuité des fonctions. f, g.

Etape 2 L'opérateur T transforme les ensembles bornés en ensembles bornés dans $X \times X$. En effet, soit

$$\Omega = \{(x, y) \in X \times X, \|(x, y)\| \leq \eta\}$$

$$\varphi^{*} = \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t)|, \quad \psi^{*} = \sup_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)|.$$

Alors, pour tout $(x, y) \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}
|T_1(x,y)(t)| \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)} \int_0^t (t-s)^{\xi_1+\zeta_1-1)} \left| f\left(t, y(s), I^{\rho_1} y(s)\right) \right| ds \\
+\ & \frac{t^{\xi_1+\zeta_1-1}}{\Gamma(\zeta_1)\Gamma(\xi_1+\zeta_1)T^{\zeta_1-1}} \int_0^T (T-s)^{\zeta_1-1} \left| f\left(s, y(s), I^{\rho_1} y(s)\right) \right| ds \\
+\ & |a_1| \int_0^T |x(s)|\, ds + |b_1| \leq \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+1)} \varphi^* T^{\xi_1+\zeta_1} \\
+\ & \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)\Gamma(\zeta_1+1)} \varphi^* + |a_1|\eta + |b_1|.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|T_2(x,y)(t)| \ \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2+1)} \psi^* T^{\xi_2+\zeta_2} \\
+\ & \frac{1}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2)\Gamma(\zeta_2+1)} \psi^* + |a_2|\eta + |b_2|.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|T(x,y)\| \leq C,$$

où

$$\begin{aligned}
C =\ & \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+1)} \varphi^* T^{\xi_1+\zeta_1} + \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)\Gamma(\zeta_1+1)} \varphi^* \\
+\ & |a_1|\eta + |b_1| + \frac{1}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2+1)} \psi^* T^{\xi_2+\zeta_2} \\
+\ & \frac{1}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2)\Gamma(\zeta_2+1)} \psi^* + |a_2|\eta + |b_2|.
\end{aligned}$$

Etape 3 T transforme les ensembles bornés en famille des fonctions équicontinues ensembles de $X \times X$. Soit $t, \tau \in [0, T]$ avec $t < \tau$, $(x, y) \in \Omega$, nous en déduisons

$$|T_1(x,y)(\tau) - T_1(x,y)(t)|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)} \int_0^t \left[(\tau - s)^{\xi_1+\zeta_1-1} - (t-s)^{\xi_1+\zeta_1-1}\right]$$

$$|f(s, y(s), I^{\rho_1} y(s))| \, ds + \int_t^\tau (\tau - s)^{\xi_1+\zeta_1-1} |f(s, y(s), I_0^{\rho_1} y(s))| \, ds$$

$$+ \frac{\tau^{\xi_1+\zeta_1-1} - t^{\xi_1+\zeta_1-1}}{T^{\zeta_1-1}\Gamma(\zeta_1)\Gamma(\xi_1+\zeta_1)} \int_0^T (T-s)^{\zeta_1-1} |f(s, y(s), I_0^{\rho_1} y(s))| \, ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+1)} \varphi^* \left[\left((\tau - s)^{\xi_1+\zeta_1} - (t-s)^{\xi_1+\zeta_1}\right)\right.$$

$$\left. - (\tau - t)^{\xi_1+\zeta_1} + (\tau - t)^{\xi_1+\zeta_1}\right] + \frac{\tau^{\xi_1+\zeta_1-1} - t^{\xi_1+\zeta_1-1}}{\Gamma(\zeta_1+1)\Gamma(\xi_1+\zeta_1)} T\varphi^*.$$

Lorsque $t \to \tau$ Le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers zéro. De manière similaire, on peut obtenir que : $|T_2(x,y)(\tau) - T_2(x,y)(t)|$ tend vers zéro lorsque t tend vers τ.

Etape 4 Finalement, nous montrons que l'ensemble :

$$\varepsilon = \{(x,y) \in X \times X, (x,y) = \gamma T(x,y) \ \ 0 < \gamma < 1\}$$

est borné.
$(x,y) \in \varepsilon$, et $(x,y) = (\gamma T_1(x,y), \gamma T_2(x,y))$, Il en résulte que pour tout $t \in [0,T]$,

nous avons

$$|x(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)}\varphi^* \int_0^t (t-s)^{\xi_1+\zeta_1-1} ds + \frac{\varphi^* t^{\xi_1+\zeta_1-1}}{\Gamma(\zeta_1)\Gamma(\xi_1+\zeta_1)T^{\zeta_1-1}}$$

$$\int_0^T (T-s)^{\zeta_1} ds + |a_1| \int_0^T |x(s)| ds + |b_1| \quad .$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)}\varphi^* T^{\xi_1+\zeta_1} + \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)\Gamma(\zeta_1+1}\varphi^* T^{\xi_1+\zeta_1} + T|a_1|\|x\| + b_1.$$

de manière similaire,

$$\|y\| \leq \frac{1}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2)}\varphi^* T^{\xi_2+\zeta_2} + \frac{1}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2)\Gamma(\zeta_2+1)}\varphi^* T^{\xi_2+\zeta_2} + T|a_2|\|y\| + b_2.$$

Ce qui montre que

$$\|(x,y)\| \leq \frac{\Lambda}{1 - T\max\left(|a_1|, |a_2|\right)}.$$

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Schaefer sont satisfaites ; nous en déduisons que l'opérateur admet au moin un point fixe, qui est la solution de notre problème sur $[0, T]$.

3.3 Existence et unicité de solution via la contraction de Banach

Théorème 3.3.1. *Supposons qu'il existe des constantes $l_1 > 0, l_2 > 0$ telles que*

(H_1) $|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq l_1 \left[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right].$

(H_2) $|g(t, x_1, y_1) - g(t, x_2, y_2)| \leq l_2 \left[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right].$

Pour chaque $t \in [0, T]$, x_1, x_2, y_1, y_2 ; $\in \mathbb{R}$.
Alors, le probléme aux limites (3.1) admet une solution unique sur $[0, T]$ à condition que

$$\theta_1 + \theta_2 < 1,$$

Où les constantes θ_1, θ_2 seront fixeés ultérieurement.

Démostration Soient $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} |f(t, 0, 0)| = N_1 < \infty$, $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} |g(t, 0, 0)| = N_2 < \infty$.
Posons

$$B_r = \left\{(x, y) \in X \times X, \|(x, y)\| \leq r\right\},$$

où $r \geq \dfrac{a+b}{1-(L_1+L_2)}$ et a, b, L_1, L_2 sera fixé plus tard avec $L_1 + L_2 < 1$. Alors $TB_r \subset B_r$.

En effet, supposons que l'hypotheses $(H_1) - (H_2)$ sont vérifiées

$$
\begin{aligned}
\left|f\left(t, y(t), I^{\rho_1} y(t)\right)\right| &\leq \left|f\left(t, y(t), I^{\rho_1} y(t)\right) - f(t, 0, 0)\right| \\
&+ \quad |f(t,0,0)| \leq l_1 \left[|y(t)| + |I^{\rho_1} y(t)|\right] + N_1 \\
&\leq l_1 \|y\| + l_1 \frac{T^{\rho_1}}{\Gamma(\rho_1+1)} \|y\| + N_1 \\
&\leq l_1 \max\left(1, \frac{T^{\rho_1}}{\Gamma(\rho_1+1)}\right) r + N_1 \\
&= \sigma_1 r + N_1.
\end{aligned}
$$

De la même maniére,nous obtenons

$$
\left|g\left(t, y(t), I^{\rho_1} y(t)\right)\right| \leq l_2 \max\left(1, \frac{T^{\rho_2}}{\Gamma(\rho_2+1)}\right) r + N_2 = \sigma_2 r + N_2. \tag{3.5}
$$

.

D'ou nous déduisons

$$
\begin{aligned}
&|T_1(x(t), y(t))| \leq \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)} \int_0^t (t-s)^{\xi_1+\zeta_1-1} (\sigma_1 r + N_1) ds \\
&+ \frac{t^{\xi_1+\zeta_1-1}}{\Gamma(\zeta_1) T^{\zeta_1-1}} \int_0^T (T-s)^{\zeta_1-1} (\sigma_1 r + N_1) ds + |a_1| \int_0^T |x(s)|\, ds + |b_1| \\
&\leq \left[\frac{\sigma_1 T^{\xi_1+\zeta_1}}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+1))} + \frac{\sigma_1 T^{\xi_1+\zeta_1} \Gamma(\zeta_1+1)}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+1))} + |a_1|\, T\right] r \\
&+ \frac{N_1 T^{\xi_1+\zeta_1}}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+1)} + \frac{N_1 T^{\xi_1+\zeta_1}}{\Gamma(\zeta_1)} + |b_1| = L_1 r + a
\end{aligned}
$$

et

$$|T_2(x(t),y(t))| \leq \left[\frac{\sigma_2 T^{\xi_2+\zeta_2}}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2+1))} + \frac{\sigma_2 T^{\xi_2+\zeta_2}\Gamma(\zeta_2+1)}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2+1))} + |a_2|\,T\right] r$$

$$+\frac{N_2 T^{\xi_2+\zeta_2}}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2+1)} + \frac{N_2 T^{\xi_2+\zeta_2}}{\Gamma(\zeta_2)} + |b_2| = L_2 r + b.$$

Donc,

$$\|T(x,y)\| \leq (L_1+L_2)\,r + a + b \leq r.$$

Cela signifie exactement que l'operateur T transforme B_r à B_r.
Maintenant, pour chaque $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times X$, on a :

$$\begin{aligned}
&|T_1(x_1,y_1)(t)-T_1(x_2,y_2)(t)|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)}\int_0^t (t-s)^{\xi_1+\zeta_1-1)}\left|f\left(t,y_2(t),I^{\rho_1}y_2(t)\right)-f\left(t,y_2(t),I^{\rho_1}y_2(t)\right))\right|ds\\
&+\frac{t^{\xi_1+\zeta_1-1}}{\Gamma(\zeta_1)\Gamma(\xi_1+\zeta_1)T^{\zeta_1-1}}\int_0^T (T-s)^{\zeta_1-1}\left|f\left(t,y_2(t),I^{\rho_1}y_2(t)\right)\right.\\
&\left.-\,f\left(t,y_2(t),I^{\rho_1}y_2(t)\right)\right|ds+|a_1|\int_0^T |x_2(s)-x_1(s)|\,ds\\
&\leq \frac{l_1}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)}\left[\int_0^t (t-s)^{\xi_1+\zeta_1-1)}|y_2(s)-y_1(s)|+\left|I^{\rho_1}\left(y_2(s)-y_1(s)\right)\right|ds\right]\\
&+\frac{l_1 t^{\xi_1+\zeta_1-1}}{\Gamma(\zeta_1)\Gamma(\xi_1+\zeta_1)T^{\zeta_1-1}}\left[\int_0^T (T-s)^{\zeta_1-1}|y_2(s)-y_1(s)|\right.\\
&\left.+\left|I^{\rho_1}\left(y_2(s)-y_1(s)\right)\right|ds\right]+|a_1|\int_0^T |x_2(s)-x_1(s)|\,ds\\
&\leq \frac{l_1 T^{\xi_1+\zeta_1}}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+1)}\|y_2-y_1\|+\frac{l_1 T^{\xi_1+\zeta_1+\rho_1}}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+\rho_1+1)}\|y_2-y_1\|\\
&+\frac{l_1 T^{\xi_1+\zeta_1}}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)\Gamma(\zeta_1+1)}\|y_2-y_1\|+\frac{l_1 T^{\xi_1+\zeta_1+\rho_1}}{\Gamma(\zeta_1+\rho_1+1)}\|y_2-y_1\|\\
&+|a_1|T\,\|x_2-x_1\|\leq \theta_1\left[\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\right].
\end{aligned}$$

De meme, on obtient $|T_2(x_1,y_1)(t)-T_1(x_2,y_2)(t)|[\leq \theta_2\left[\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\right].$
Ainsi

$$\|T(x_1,y_1)-T(x_2,y_2)\|\leq(\theta_1+\theta_2)[\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|]$$

Le principe du point fixe de Banach implique l'existence et l'unicité d'une solution du problème (3.1) dans B_r en tant que point fixe de l'opérateur .

3.4 Stabilité au sens de Ulam Hyers

Dans la section suivante, nous présentons la stabilité du système (3.1). Pour cela, nous prenons en compte le système d'inégalités suivant.

$$\begin{cases} \left|D_0^{\zeta_1}\, {}^cD_0^{\xi_1}x(t) - f(t, y(t), I^{\rho_1}y(t))\right| & \leq \epsilon_1, \quad t \in [0,T], \\ \\ \left|D_0^{\zeta_1}\, {}^cD_0^{\xi_1}y(t) - g(t, x(t), I^{\rho_1}x(t))\right| & \leq \epsilon_2, \quad t \in [0,T], \end{cases} \tag{3.6}$$

pour certains $(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$.
Le système couplé est dit stable au sens de Ulam-Hyers si, pour toute solution $(x, y) \in X \times X$ du système d'inégalités, il existe une solution unique $(\mu, \sigma) \in X \times X$ de systéme (3.1) et une constante positive $C > 0$ telle que

$$|(x, y)(t) - (\mu, \sigma)(t)| \leq C\epsilon.$$

Remarque 3.4.1. *Si $(x, y) \in X \times X$ est solution de (3.6) est solution de $\alpha, \beta \in X$, telles que*

i) $|\alpha(t)| \leq \epsilon_1 \quad |\beta(t)| \leq \epsilon_2 \quad t \in [0,T]$.

ii)

$$\begin{cases} D_0^{\zeta_1}\, {}^cD_0^{\xi_1}x(t) & = & f(t, y(t), I^{\rho_1}y(t)) + \alpha(t), \quad t \in [0,T], \\ \\ D_0^{\zeta_1}\, {}^cD_0^{\xi_1}y(t) & = & g(t, x(t), I^{\rho_2}x(t)) + \beta(t), \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.7}$$

Lemme 3.4.1. *Pour chaque $(x, y) \in X \times X$ solution de (3.7), on à*

$$\left|x(t) - I^{\xi_1+\zeta_1}f(t, y(t), I^{\rho_1}y(t)) + \frac{I^{\zeta_1}f(T, y(T), I^{\rho_1}y(T))}{T^{\zeta_1-1}\Gamma(\xi_1+\zeta_1)}\right. \tag{3.8}$$

$$\left. -a_1\int_0^T x(s)ds - b_1\right| \leq \epsilon_1\phi_1 \tag{3.9}$$

et

$$\left|y(t) - I^{\xi_2+\zeta_2}f(t, y(t), I^{\rho_2}y(t)) + \frac{I^{\zeta_2}g(T, x(T), I^{\rho_1}x(T))}{T^{\zeta_2-1}\Gamma(\xi_2+\zeta_2)}\right. \tag{3.10}$$

$$\left. -a_2\int_0^T y(s)ds + b_2\right| \leq \epsilon_2\phi_2, \tag{3.11}$$

où
$$\phi_1 = \frac{T^{\xi_1+\zeta_1}}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+1)} + \frac{T}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1)}$$
et
$$\phi_2 = \frac{T^{\xi_2+\zeta_2}}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2+1)} + \frac{T}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2)}.$$

Théorème 3.4.1. *Supposons que l'hypothèse (H_1) est vérifiée , alors le système différentiel fractionnaire (3.1) est stable au sens de Ulam-Hyers, à condition que :*
$$\mathcal{L}_1 + |a_1|T + \mathcal{L}_2 + |a_2|T < 1,$$
où
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 =& l_1 \left[\frac{T^{\xi_1+\zeta_1}}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+1)} + \frac{T^{\xi_1+\zeta_1+\rho_1}}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+\rho_1)}\right.\\ &\left. + \frac{T}{\Gamma(\zeta_1)\Gamma(\xi_1+\zeta_1)} + \frac{T^{\rho_1+1}}{\Gamma(\zeta_1+\rho_1+1)\Gamma(\xi_1+\zeta_1)}\right]\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 =& l_2 \left[\frac{T^{\xi_2+\beta 2}}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2+1)} + \frac{T^{\xi_2+\zeta_2+\rho_2}}{\Gamma(\xi_2+\zeta_2+\rho_2)}\right.\\ &\left. + \frac{T}{\Gamma(\zeta_2)\Gamma(\xi_2+\zeta_2)} + \frac{T^{\rho_2+1}}{\Gamma(\zeta_2+\rho_2+1)\Gamma(\xi_2+\zeta_2)}\right].\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in X \times X$ une solution de l'équation (3.6) et $(\mu, \sigma) \in X \times X$ la solution unique du système (3.1). En vertu du Lemme (3.1.2) nous obtenons
$$\begin{aligned}\mu(t) \;=\; & I^{\xi_1+\zeta_1} f(t, \sigma(t), I^{\rho_1}\sigma(t)) - \frac{I^{\zeta_1} f(T, \sigma(T), I^{\rho_1}\sigma(T))}{T^{\zeta_1-1}\Gamma(\xi_1+\zeta_1)}\\ & t^{\xi_1+\zeta_1-1} + a_1 \int_0^T \mu(s)ds + b_1.\end{aligned}$$

et

$$\sigma(t) = I^{\xi_2+\zeta_2} g(t,\mu(t),I^{\rho_2}\mu(t)) - \frac{I^{\zeta_1} g(T,\mu(T),I^{\rho_2}\mu(T))}{T^{\zeta_2-1}\Gamma(\xi_2+\zeta_2)}$$
$$t^{\xi_2+\zeta_2-1} + a_2\int_0^T \sigma(s)ds + b_2.$$

Par conséquent, nous avons

$$\Big| x(t) - I^{\xi_1+\zeta_1} f(t,\sigma(t),I^{\rho_1}\sigma(t)) + \frac{I^{\zeta_1} f(T,\sigma(T),I^{\rho_1}\sigma(T))}{T^{\zeta_1-1}\Gamma(\xi_1+\zeta_1)}$$
$$-a_1\int_0^T \mu(s)ds - b_1\Big| \leq \big| x(t) - I^{\xi_1+\zeta_1} f(t,y(t),I^{\rho_1}y(t))$$
$$+ \frac{I^{\zeta_1} f(T,y(T),I^{\rho_1}y(T))}{T^{\zeta_1-1}\Gamma(\xi_1+\zeta_1} - a_1\int_0^T x(s)ds - b_1\Big| + \big| I^{\xi_1+\zeta_1} f(t,y(t),I^{\rho_1}y(t))$$
$$- I^{\xi_1+\zeta_1} f(t,\sigma(t),I^{\rho_1}\sigma(t)\big| + \frac{\big| I^{\zeta_1} f(T,y(T),I^{\rho_1}y(T)) - I^{\zeta_1} f(T,\sigma(T),I^{\rho_1}\sigma(T))\big|}{T^{\zeta_1-1}\Gamma(\xi_1+\zeta_1)}$$
$$|a_1|\int_0^T |x(s)-\sigma(s)|\, ds \leq \epsilon_1\phi_1 + l_1\Bigg[\frac{T^{\xi_1+\zeta_1}}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+1)} + \frac{T^{\xi_1+\zeta_1+\rho_1}}{\Gamma(\xi_1+\zeta_1+\rho_1)}$$
$$+\frac{T}{\Gamma(\zeta_1)\Gamma(\xi_1+\zeta_1)} + \frac{T^{\rho_1+1}}{\Gamma(\zeta_1+\rho_1+1)\Gamma(\xi_1+\zeta_1)}\Bigg] \|y-\sigma\| + |a_1|T\,\|x-\mu\|.$$

Donc,

$$\|x-\mu\| \leq \epsilon_1\phi_1 + \mathcal{L}_1\|y-\sigma\| + |a_1|T\,\|x-\mu\|. \tag{3.12}$$

De même,

$$\|y-\sigma\| \leq \epsilon_2\phi_2 + \mathcal{L}_2\|x-\mu\| + |a_2|T\,\|y-\sigma\|. \tag{3.13}$$

En combinant (3.12) et (3.13), nous obtenons

$$[1-(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2+|a_1|T+|a_2|T)]\,[\|x-\mu\|+\|y-\sigma\|] \leq \epsilon\phi,$$

Où

$$\epsilon = \epsilon_1+\epsilon_2 \text{ et } \phi = \max(\phi_1,\phi_2).$$

Ce qui donne

$$\|(x,y)-(\mu,\sigma)\| \leq \epsilon\phi.$$

Par conséquent, le système couplé (3.1) est stable au sens de Hyers-Ulam généralisé, ce qui achève la démonstration . □

3.5 Exemple illustratif

Nous prenons en considération le système couplé fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D_0^{\frac{4}{3}}\ {}^cD_0^{\frac{1}{2}}x(t) & = & \cos(t) + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+81}}\left[\dfrac{\arctan y(t)}{\arctan y(t)+1} + \dfrac{1}{15}I^{\frac{1}{3}}y(t)\right] \quad t \in [0,1] \\ D_0^{\frac{3}{2}}\ {}^cD_0^{\frac{3}{5}}y(t) & = & \dfrac{e^{t^2}}{e^t+15}\left[\sin x(t) + cos\left(I^{\frac{1}{3}}x(t)\right)\right] \quad t \in [0,1] \\ {}^cD_0^{\xi_1}x(0) = {}^c D_0^{\xi_1}x(T) & = & {}^cD_0^{\xi_2}y(0) = {}^c D_0^{\xi_2}y(T) = 0 \\ x(0) & = & \dfrac{1}{100}\displaystyle\int_0^T x(s)ds + 1 \\ y(0) & = & \dfrac{3}{200}\displaystyle\int_0^T y(s)ds + \dfrac{5}{3}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Ici,

$$f(t,x,y) = \cos(t) + \frac{t}{\sqrt{t^2+81}}\left[\frac{\arctan x}{\arctan x + 1} + \frac{1}{15}I^{\frac{1}{3}}y\right]$$

$$g(t,x,y) = \frac{e^{t^2}}{e^t+15}\left[\sin x + cos\left(I^{\frac{1}{3}}y\right)\right].$$

Donc, pour $x_i, y_i \in \mathbb{R}\ \ i = 1,2$, on obtient

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \leq \frac{t}{\sqrt{t^2+81}}\left[\left|\frac{\arctan x_1}{\arctan x_1+1} - \frac{\arctan x_2}{\arctan x_2+1}\right|\right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}|y_1 - y_2|\right] \leq \frac{1}{9}\left[|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|\right]$$

De la même manière : $|g(t,x_1,y_1) - g(t,x_2,y_2)| \leq \dfrac{1}{15}\left[|x_1 - x_2|\right]$

De plus,

$$\begin{aligned}\theta_1 &= l_1\left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1)}+\frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}+\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{4}{3})\Gamma(\frac{4}{3}+1)}\right.\\ &+ \left.\frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+1)}\right]+|a_1| = 0.35\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\theta_2 &= l_1\left[\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{5}+\frac{3}{2}+1)}+\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{5}+\frac{3}{2}+\frac{1}{4})}+\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{5}+\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2}+1)}\right.\\ &+ \left.\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+1)}\right]+|a_2| = 0.18.\end{aligned}$$

Puis, on obtient : $\theta_1+\theta_2<1$.
Tous les critères du théorème 3.3.1 sont satisfaits, nous en concluons que le système couplé fractionnaire (3.14) admet une solution unique sur $[0,1]$. Ce qui achève la démonstration .

Conclusion

L'apport de notre travail consiste principalement en un point qui est le suivant :

L'étude d'un système des équations différentielles fractionnaires non linéaire avec des conditions limites . Nous avons pu donner une représentation intégrale de notre problème qui nous a permis de transformer celui-ci en un problème du point fixe. Un autre point qui à éte abordé au cours de ce travial celui de la stabilité au sens de Ulam Hyres d'un systéme. Les théorèmes du point fixe de Schaefer et Banach furent la clé de l'analyse de notre problème.
L'exemple numérique confirment les résultats obtenus.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, (1975).

[2] D. Boucenna, A. Chidouh, and D.F.M. Torres, Existence results for a multipoint fractional boundary value problem in the fractional derivative Banach space, Axioms 11 (2022), no. 6, 295.

[3] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Universitext, Springer : NewYork, NY, USA (2011).

[4] L. Debnath, Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 54, (2003) 3413-3442.

[5] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis. Springer-Verlag, New York, (1985).

[6] K. Diethelm, and A.D. Freed, On the Solution of Nonlinear Fractional-Order Differential Equations Used in the Modelling of Viscoplasticity. In : F. Keil, W. Mackens , H. Voss, and J. Werther, Eds., Scientific Computing in Chemical Engineering II : Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties, Springer, Berlin, (1999) 217-224.

[7] G.J. Fix, J.P. Roop, Least squares finite-element solution of a fractional order two-point boundary value problem, Comput.Math. Appl. 48 (2004) 1017–1033.

[8] L. Gaul, L. Klein, P and S. Kempfle , Damping description involving fractional operators, Mech.Systems Signal Processing .5, (1991), 81-88.

[9] W.G. Glockle, T.F. and Nonnenmacher, A Fractional Calculus Approach to Self-Similar Protein Dynamics. Biophysical Journal, 68, (1995) 46-53.

[10] A. Granas, J.Dugundji, Fixed Point Theory. Springer, New York (2003).

[11] Gérald B. Folland, Real Analysis : Modern Techniques and Their Applications, 2nd ed., Wiley, 1999. (Chapitre 1)

[12] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[13] D. Guo and V. Lakshmikantham, Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, New York, (1988).

[14] J. Hale and S. Verduyn Lunel, Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[15] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific Publishing Company, Singapore, (2000) 87-130.

[16] F. Jiao and Y. Zhou, Existence of solutions for a class of fractional boundary value problems via critical point theory, Comput. Math. Appl. 62 , (2011) 1181–1199.

[17] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Vol 204. Elsevier Science B.V, Amsterdam , (2006).

[18] F. Mainardi, “Fractional Calculus : Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics,” In : A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds., Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer, New York, (1997) pp. 291-348.

[19] N. Nyamoradi and Rodriguez-López, Rozana, On boundary value problems for impulsive fractional differential equations, Appl. Math. Comput. 271 , (2015) 874–892.

[20] I. Podlubny, Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Vol. 198, Academic Press, Mathematics in Science and Engineering, 366 (1998).

[21] Y. Rossikhin, M.V.Shitikova, Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids, Appl. Mech. Rev.50 (1) (1997) 15–67.

[22] I.A. Rus , *Ulam stabilities of ordinary differential equations in a Banach space.*, Carpath. J. Math. **26** (2010), 103-10.

[23] J. Sabatier, O.P. Agrawal, and J.A.T. Machado, Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. Springer, Dordrecht, (2007).

[24] Saifia Ouarda, Amel Boulfoul et Adel Lachouri Existence result for Nonlinear Fractional differential system with Boundary conditions

[25] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev , Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon, (1993).

[26] C.C. Tseng, Design of fractional order digital FIR differentiators, IEEE Signal Processing Letters,vol 8, (2001) 77-79.