République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE CHADLI BEN DJEDID EL TARF

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

Master en Mathématiques

Option : **Analyse foctionnelle et calcul stochastique**

Par

Hacini Said

Théme

Méthode Des équations Intégrales Au Bord Pour Le Laplacien Δ

Devant le jury :

Dr.	Zidani	Nesrine	M.C.B	Univ Chadli Bendjedid	El Tarf	Présidente
Dr.	Bousselsal	Naila	M.C.B	Univ Chadli Bendjedid	El Tarf	Rapporteur
Dr.	Bouhadjera	Hakima	M.C.A	Univ Badji Mokhtar	Annaba	Examinatrice

Année Universitaire 2021-2022

بسم الله الرحمان الرحيم " قَالُوا۟ سُبْحَٰنَكَ لَا عِلْمَ لَنَآ إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَآ ۖ إِنَّكَ أَنتَ ٱلْعَلِيمُ ٱلْحَكِيمُ" سورة البقرة الآية {32}

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

À l'âme immaculée de ma mère et mon père qui par leur dévouement et leur affection ont été pour moi un soutiens tout au long de mes études et ma vie.

A mes frères, mes soeurs, mes chères copines, mes collègues, mes amis

A tout la famille Hacini

Je dédie ce travail à toute personne de proche ou de loin n'a pas cessé de me guider et de m'encourager durant la réalisation de ce travail.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier, en premier lieu, Mon Dieu qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Un grand merci à mon encadreur : **Dr. Bouselsal Naila** pour son encadrement sa patience, sa disponibilité et ses précieuses remarques.

Mes vifts remerciements vont aussi à tous les membres du département de Mathématiques de l'université Chadli Ben Djedid El-tarf, les enseignant ainsi que tous mes camarades et amis.

Je remercie les membres de jury " **Dr. Zidani Nesrine** et **Dr. Bouhadjera Hakima** ", pour l'honneur qu'ils me font en participant au jugement de ce travail.

Enfin, je remercie profondément mes parents pour leurs encouragements et leur grand soutien.

Résumé (Arabe)

في هذا الموضوع، نستخدم طريقة المعادلات التكاملية على الحدود، لدراسة معادلة لابلاس (من نوع ديركلي ونيومان) بشروط خطية على الحدود. بفضل وجود الحل الأولي. نحصل على معادلة خطية تكاملية على الحدود. حيث سنقوم بتمثيلها باعتبارها عامل شبه تفاضلي، ومن خلال الحساب الرمزي لهؤلاء العوامل، نستطيع تقديم خصائص هؤلاء العوامل التي تسمح لنا بإظهار وجود الحل وتفرده.

بالإضافة إلى دراسة معادلة لابلاس بشروط غير خطية على الحدود. بناء على صيغة قرين. نحصل على معادلة تكاملية غير خطية على الحدود. من خلال نظرية براودر ومينتي حول العوامل الرتيبة تم تأسيس وجود الحل وتفرده.

Résumé

Dans cette thème, en utilisant la méthode des équations intégrales au bord, pour étudier l'équation de Laplace (de type Dirichlet et Neumann) avec des conditions linéaires sur le bord. Grâce à l'existence de la solution élémentaire. On obtient une équation intégrale linéaire sur le bord. Nous allons l'interpréter en tant qu'opérateurs pseudo-différentiels, et via le calcul symbolique de ces opérateurs, nous pouvons donner les propriétés de ces opérateurs qui nous permettent d'exhiber l'existence et l'unicité de la solution.

En plus d'étudier l'équation de Laplace avec des conditions non linéaires sur le bord. Basé sur la Formule de Green, On obtient une équation intégrale non linéaire sur le bord. Par le "Théorème de Browder et Minty" sur les opérateurs monotones, l'existence et l'unicité de la solution est établie.

Mots clés :

L'équation de Laplace, formules de Green, solution élémentaire, équations intégrales, les théorèmes de Fredholm, les opérateurs pseudo-différentiels, l'inégalité de Gårding, méthode de Potentiel.

Abstract

In this theme, using the method of boundary integral equations to study the Laplace equation (of Dirichlet and Neumann type) with linear conditions on the boundary Thanks to the existence of the elementary solution. We obtain a linear integral equation on the boundary. We will interpret it as pseudo-differential operators and via the symbolic calculation of these operators, we can give the properties of these operators which allow us to exhibit the existence and uniqueness of the solution.

In addition to studying Laplace equation with nonlinear conditions on the boundary. Based on Green Formula, We obtain a nonlinear integral equation on the boundary. By "Browder and Minty theorem" on monotonic operators, the existence and uniqueness of the solution is established.

Key words :

The equation of Laplace, formulas of Green, elementary solution, integral equations, theorems of Fredholm, pseudo-differentiels operators, the inequality of Gårding, method of Potential.

Table des matières

Table des figures

Préliminaires

Avant de procéder à l'étude, nous allons introduire quelques notions qui seront utilisées dans toute la suite de travail.

$\mathbb{R}^N$	:	domaine euclidien de dimension N.
Ω	:	un ouvert non vide dans le plan $\mathbb{R}^2$.
$\Omega' = \mathbb{R}^2 \backslash \Omega$	:	le complementaire de Ω.
$\partial\Omega = \Gamma, \Gamma = \overline{\Omega} \backslash \Omega$	:	la frontiére de Ω.
$\overline{\Omega}$	:	l'adhérence de Ω.
$dx = dx_1 + dx_2..dx_N$	:	mesure de lebegue sur Ω.
$B(x_0, r)$	:	la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.
$B_r = B(0, r)$	:	la boule de rayon r centrée à l'origine.
Γ_B	:	la forntiére de la boule.
χ_Ω	:	la fonction caractérsitique de Ω.
δ	:	la mesure de Dirac.
$\mu\delta_\Gamma$	:	la simple couche étalée sur la surface Γ.
$(-\partial_n(v\delta_\Gamma))$	:	la double couche étalée sur la surface Γ.
$F[\varphi] = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-ix.\tau} \varphi(x) dx$	:	la transformée de Fourier de φ.
$F^{-1}[\widehat{\varphi}] = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ix.\tau} \widehat{\varphi} dx$	:	la transformée de Fourier inverse.

$(f * g) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x-y)g(y)dy$	:	la convolution de f et g.
$\overrightarrow{\eta}$	:	le vecteur normale à surface exérieur dans Ω.
$\lvert\alpha\rvert = \alpha_1 + \alpha_2$; $\alpha \in \mathbb{N}^2$	:	un multi entier.
$\partial_n = \frac{\partial}{\partial_n}$	:	la dérivée normale extérieure sur la frontiére Γ.
$\partial_\tau = \frac{\partial}{\partial_\tau}$	:	la dérivée tangentielle extérieure sur la frontiére Γ.
$\Delta = \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2}$	:	l'opérateur de Laplacien.
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial_{x_1}}, \frac{\partial u}{\partial_{x_2}})$	:	l'opérateur gradient de u.
$A = \sum\limits_{\lvert\alpha\rvert, \lvert\beta\rvert \leq m} (-1)^{\lvert\alpha\rvert} D^\alpha (a_{\alpha,\beta} D^\beta)$	:	un opérateur différentiel d'ordre $2m$.
$\lvert.\rvert$	:	la norme euclidienne de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$.
$\langle .,. \rangle_H$ (rep. $\lVert.\rVert_H$)	:	un produit scalaire de H (resp.la norme de H).
$\mathcal{D}(\Omega)$	:	espace des fcts difféntiables et à support compact.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	:	espace des distrubitions sur Ω.
$C^\infty(\Omega)$	:	espace des fcts indéfiniment dérivables sur Ω.
$L^p(\Omega)$	:	espace des fcts de puissance $p^{-éme}$ intégrable sur Ω.
$\mathcal{S}(\Omega)$	:	espace des fcts à décroissance rapide sur Ω.

Introduction générale

La résolution des problèmes aux limites pour les opérateurs aux dérivées partielles à l'aide la méthode des équations intégrales à débuté avec les travaux de Fredholm (principal fondateur de la théorie des équations intégrales de deuxièmes espèces). Pour rappel cette résolution porte son nom.

Cependant l'analyse mathématique numérique de ces méthodes n'est pas suffisament dévelopée.

L'évolution rapide du calcule électronique a accuru subitement l'intérêt des chercheurs en plus des méthodes numériques universelles destinées à la résolution des problémes de la physique mathématique.

En outre les méthodes numériques les plus répandues dans les calculs d'ingénieurs, telles les diffèrences finies et les élément finies, celles qui offrent le plus de perspectives et qui fait dèja ses preuves est la méthode des élément frontières, ou des intégrale au bord dans certaines littèratures, qui réduit les problémes aux limites considérés à des équation intégrales correspondantes.

Cette réduction se fait de différentes manières. suivant la façon par laquelle, les équation intégrales au bord sont formées et la siginification des inconnues, les élément au bord peuvent-être classès en deux groupes :

1. La méthode directe indique que les fonctions inconnues apparant dans les équations intégrales sont les variables physiques du problème considéré [10],[14].

2. La méthode du potentiel ou indirecte qui signifie que les inconnues qu'on appelle usuellement des fonctions de densité n'ont pas une signification directe dans le problème aux EDP initial [6],[17],[27].

La méthode des équations intégrales sur le bord possède des avantages très importants par rapport la résolution "directe" des EDP. Un aspect essentiel est que lorsque la fonction inconnue qui intervient dans l'EDP est recherchée sur un domaine de la reformulation du problème en équation intégrale fait apparaître une fonction inconnue qui est recherchée sur le bord $\partial\Omega$ du domaine.

On réduit aussi la dimension de l'espace de un, c'est-à-dire, l'équation à résoudre est sur la frontiére. De plus, lorsque est le complémentaire d'un domaine $\mathcal{O}$ on transforme un problème posé dans un domaine non borné en un problème posé sur un domaine borné (qui est $\partial\Omega$).

Un point fort de ces méthodes est la possibilité de traiter des domaines infinis ou semi-infinis (problèmes extérieurs) sans avoir tronquer artificiellement le domaine d'étude.

D'autre part, ces méthodes utilisent une solution élémentaire. Elles sont donc seulement applicables des problèmes décrits par les opérateurs aux dérivées partielles linéaires et coefficients constants.

Ceci peut apparaître un inconvénient, mais heureusement que, les systèmes physiques, décrits par des opérateurs de ce type, sont tres fréquemment rencontrés dans la pratique.

Il est aussi possible d'étendre le domaine d'application en couplant les éléments frontières avec des éléments classiques.

Un autre inconvénient dans la plupart des cas, est que la classe des opérateurs intégraux obtenus est plus large que celle des équations de Fredholm de deuxiéme espèce à noyau faiblement singulier.

Un inconvénient qu'on peut rencontrer aussi, si le problème aux limites possède des conditions au bord plus générales que celle de Neumann qui nous conduisent à un problème de formulation sur le bord.

Une autre direction de recherche est née avec les travaux de Wendland qui consiste interpréter n'importe quel opérateur intégral en tant qu'opérateur pseudo-différentiel, via le calcul symbolique associé ce dernier, pour obtenir des résultats d'unicité et d'existence de la solution.

Donc on peut appliquer la théorie des opérateurs pseudo-différentiels [9],[42],[43] qui permet de formuler des propriétés commun, telles la forte ellipticité et la coercivité dans la forme de l'inégalité de Gårding, pour une large classe d'espaces de Sobolev.

Un autre inconvénient qu'on peut rencontrer aussi si le problème aux limites possède des conditions au bord non linéaire. Cela nous conduit à la résolution des équations intégrales non linéaires sur le bord.

Notre étude est organisée de la manière suivante :

Dans le chapitre 1 :

on présente certaines notions principales (fondamentales) tout en insistant sur celle des opèrateurs pseudo-différentiels, du symbole complet du symbole principal, de l'inégalité de Gårding, de l'alternative de fredholm, et de la théorie du potentiel.

Dans le chapitre 2 :

on présente la méthode indirecte (théorie de potentiel) des équations intégrales pour le Laplacien dans un domaine borné simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, appliquées aux problèmes de Dirichlet et de Neumann en utilisant les potentiels de simple et de double couche, on commence par prouver la validité des formules de representation de la solution faible, et on construire les equations intégrales. on montre aussi les propriétés des application des opérateurs pseudo-différentiels obtenus dans les espaces de sobolev. on inclue aussi l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la forte ellipticité.

Les équations intégrales, obtenues dans ce chapitre, sont de différents types. On a :

1. Des équations intégrales de Fredholm de premiere espèce avec un noyau faiblement singulier.
2. Des équations intégrales de Fredholm de deuxiéme espéce non intégrable, qui sont interprétées au sens d'une valeur principale.

Dans le chapitre 3 :

Ce chapitre, est consacré à l'étude du problème de laplace avec des conditions non linéaire dans un domaine Simplement connexe comme dans [33],[31]. L'approche se résume à résoudre une équation intégrale non linéaire avec des donnés inconnues au bord, moyennant des hypothèses appropries sur la partie non linéaire.

Puisque l'opérateur qui intervient dans l'équation intégrale non linéaire obtenu est monotone, on établie leur résultat d'existence et d'unicité de la solution par le "Théorème de Browder et Minty"[32],[36].

Nous terminons ce travail avec une conclusion générale.

Chapitre 1

Notions fondamentales

1.1 Introduction

Nous rappelons les notions essentielles et nécessaires pour la suite, en particulier quelques espaces fonctionnels, opérateurs intégraux, opérateurs pseudo-différentiels, l'inégalite de Gårding, l'alternative de fredholm, théorie du potentiel.

1.2 Quelques espaces fonctionnels, propriétés

Soit H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et la norme associée$\|.\|_H$.

L'espace de Hilbert $H^{'}$désigne le dual de H, et $\langle .,. \rangle_{H' \times H}$ est le produit de dualité avec $\|.\|_{H'}$ est la norme associée.

Théorème 1.2.1 (projection)

Soit $M \subset H$ un sous espace fermé d'un espace de Hilbert H et soit

$$M^{\perp} := \left\{ \ v \in H \setminus \ (u,v) = 0 \quad , \quad \textit{pour tout} \quad u \in M \ \right\}$$

Alors tout $u \in H$ peut être uniquement décomposé en somme directe :

$$u = u_0 + u_0^{\perp} \quad avec \quad u_0 \in M \quad et \quad u_0^{\perp} \in M^{\perp} \tag{1.1}$$

L'opérateur défini par $\pi_M : u \to u_0 =: \pi_M u$ est une projection orthogonale linéaire continue.

Dans ce cas, on écrit

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Définition 1.2.1

Soit une forme bilinéaire $a(u,v)$ de $H \times H \to R$.

Alors $a(u,v)$ est :

i) *continue s'il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_H \|v\|_H \quad pour \quad tout \quad u,v \quad dans \quad H \tag{1.2}$$

ii) *coercive ou elliptique s'il existe un $\propto > 0$ tel que :*

$$a(u,u) \geq \propto \|u\|_H^2 \quad , \quad \forall u \in H \tag{1.3}$$

Ennonçons maintenant le résultat suivant :

Théorème 1.2.2 (Lax-Miligram)

Soit H un espace hilbertien réel et $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H : Alors, pour toute fonctionnelle linéaire, continue $L : H \to R$ sur H, il existe un u et un seul dans H tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad , \quad v \in H \tag{1.4}$$

1.2.1 Théorie des Distributions

Définition d'une Distrubition

Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^N$, on note comme fonctions test dans Ω les éléments de l'espace. Le support d'une fonction est la ferméture de l'ensemble des points où la fonction ne s'annule pas. L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est aussi noté par $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \backslash \varphi \in C_0^\infty(\Omega), supp\varphi \Subset \Omega\} = C_0^\infty(\Omega) \tag{1.5}$$

Un exemple classique d'un fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est donné par

$$\varphi(x) = \begin{cases} exp(\frac{1}{(|x|^2-1)}) & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{1.6}$$

La densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2 \in (\Omega)$ assure que la classe des fonctions test est suffisament large.

On considère d'autre fonctions test, les fonctions décroissance rapide, plus précisement, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$q_h(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}|\alpha|\leq h} (1+|x|^2)^h \, |D^\alpha \varphi(x)| \tag{1.7}$$

Alors on note par $\mathcal{S}(\Omega)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide qui est donné par

$$\mathcal{S}(\Omega) = \left\{ \varphi \backslash \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \quad , \quad \forall h = 1, 2, ...q_h(\varphi) < \infty \right\} \tag{1.8}$$

L'espace dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des distributions tempérées qui est noté par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

Nous disons que la suite $\{\varphi_n\}$ des fonctions test est converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe

un ensemble compact $\Bbbk \subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi_n \varphi) \subset \Bbbk$ pour tout n, et si pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha \varphi_n(x) = D^\alpha \varphi(x), CV \quad \text{uniformement} \quad \text{sur} \quad \Bbbk \tag{1.9}$$

Nous définisons une fonctionnelle linéaire et continue T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ comme une application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans le corps $\Bbbk$($\mathbb{C}$ où $\mathbb{R}$) noté par $\langle T, \varphi \rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, qui vérifièe

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \Bbbk \quad \forall \varphi_{1,}\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.10}$$

et telle que

$$\varphi_n \to 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \to 0 \quad \text{dans} \quad \Bbbk \tag{1.11}$$

Cette fonctionnelle linéaire et continue s'appelle une distribution ou une fonction généralisée.

L'espace des distributions **(de Schwartz)** est noté par $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ et correspond l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$. Ainsi, la forme bilinéaire $\langle ., . \rangle : \mathcal{D}^{'}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \to \Bbbk$ représente le produit de dualité entre les deux espaces. Proprement dit, quand le corps $\Bbbk$ est pris comme $\mathbb{C}$, alors le produit de dualité doit être considéré comme une forme séquilinéaire et les distributions en tant que fonctionnelle antilinéaire. Néanmoins, pour la simplicité ceci n'est pas habituellement fait, puisque les résultats dans $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ sont identiques sauf une conjugaison complexe sur les fonctions test dans $\mathcal{D}(\Omega)$ Nous notons que l'espace $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ a la topologie faible de l'espace dual. L'espace vectoriel et les opérations de convergence dans $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$, soient $T, S, T_n \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ et $\alpha, \beta \in \Bbbk$ peuvent étre caractérisés comme suit :

$$\langle \alpha T + \beta S, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle + \beta \langle S, \varphi \rangle \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.12}$$

et

$$T_n \to T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^{'}(\Omega) \Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \text{dans} \quad \mathbb{k} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.13}$$

Les distributions peuvent être aussi multipliées par des fonctions indéfiniment différentiables pour former de nouveaux distributions. Si $T \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ et $\eta \in C^{\infty}(\Omega)$, alors le produit est défini par

$$\langle \eta T, \varphi \rangle = \langle T, \eta \varphi \rangle \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.14}$$

On remarque, cependant, que le produit de deux distributions n'est pas bien défini en général.

Chaque fonction localement intégrable $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ définit une distribution

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.15}$$

La distribution f serait produite par la la fonction f. Une distribution qui est produite par une fonction localement intégrable s'appelle une distribution régulière. Toutes autres distributions s'appellent singulières. On note de maniére analogue la distribution

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} T(x)\varphi(x)dx \tag{1.16}$$

La fonction de Dirac

La fonction de Dirac δ, qui n'est pas à proprement dit une fonction, était présenté par le physicien théorique britannique **Paul Adrien Maurice Dirac** (1902 **à** 1984) comme une technique dispositif dans la formulation mathématique de la mécanique quantique. La fonction de Dirac s'annule partout sauf l'origine, où sa valeur est infinie, et de sorte que son intégrale est l'unité. Elle est donc définie par

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

et a la propriété

$$\int_{\Omega} \delta(x)dx = 1 \quad \text{si} \quad 0 \in \Omega \tag{1.18}$$

Il n'existe aucune fonction avec ces propriétés. Cependant, la fonction de Dirac est bien définie comme distribution. Dans ce cas elle associe chaque fonction test φ sa valeur à l'origine.

Supposant que $0 \in \Omega$, la fonction de Dirac est définie comme distribution qui satisfait

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad , \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \tag{1.19}$$

1.2.2 Les espaces de Sobolev

Soit u une fonction réelle, ou plus généralemet, une fonction à valeur complexe définie sur le domaine Ω et soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}_N^0$, nous écrivons

$$D^{\alpha} u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha 2} .... \left(\frac{\partial}{\partial x_N} \right)^{\alpha_N} u \tag{1.20}$$

pour noter une dérivée partielle mixte de u d'ordre

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N \tag{1.21}$$

les espaces de Lebesgue

Les L^p ou les espaces de Lebesgue correspondent aux classes des fonctions mesurables de Lebesgue définis sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ils sont définis, pour $1 \leq p \leq \infty$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ \ u : \Omega \to \mathbb{C} \quad ; \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty \ \right\} \tag{1.22}$$

Où la norme de est donnée par

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & ; \quad 1 \leq p < \infty \\ \text{supp } ess_{x \in \Omega} \, |u(x)| & ; \qquad p = \infty \end{cases} \tag{1.23}$$

En particulier $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_{\Omega} u\,(x)\, \overline{v\,(x)} dx \quad ; \quad \forall u, v \in L^2(\Omega) \tag{1.24}$$

Les espaces de Sobolev d'ordre entier

Nous définissons maintenant les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ pour $1 \leq p < \infty$ et $m \in \mathbb{N}_0$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \ u : \Omega \to \mathbb{C} \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N \quad |\alpha| \leq m \ \right\} \tag{1.25}$$

Où alternativement, par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \; u : \Omega \to \mathbb{C} \quad ; \quad \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty \; \right\} \tag{1.26}$$

muni d'une norme donnée par

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \le m} \|D^{\alpha} u\,(x)\|^{p}_{L^{p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & ; \quad 1 \le p < \infty \\ \max_{|\alpha| \le m} \|D^{\alpha} u\,(x)\|^{p}_{L^{p}(\Omega)} & ; \qquad p = \infty \end{cases} \tag{1.27}$$

Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ sont des espaces de Banach, à condition que les dérivées soient données dans le sens des distributions (section (1.3)). si $m = 0$ alors on a

$$W^{0,p} = L^{p}(\Omega) \quad , \quad 1 \le p \le \infty \tag{1.28}$$

En particulier l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ noté $H^{m}(\Omega)$ est un espace de Hilbert

L'espace $H^{m}(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^{m}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u\,(x)\, \overline{D^{\alpha} v\,(x)} dx \quad ; \quad \forall u, v \in H^{m}(\Omega) \tag{1.29}$$

dont la norme est d'expression :

$$\|u\|_{H^{m}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u\,(x)|^{2}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \forall u \in H^{m}(\Omega) \tag{1.30}$$

L'espace $H^{m}(\Omega)$ est espace de Sobolev d'ordre m

$$H^{m}(\Omega) = \left\{ \; u \in L^{2}(\Omega) \quad ; \quad D^{\alpha} u \in L^{2}(\Omega) \quad ; \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{N} \quad ; \quad |\alpha| \le m \; \right\} \tag{1.31}$$

Proposition 1.2.1 (Inégalité de Poincaré)

$\forall p \in [1, \infty[\,, \exists c \succ 0, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\|u\|_p \leq c \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la norme $\left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$ est équivalente à celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Les espaces de Sobolev d'ordre partiel

soit $s \in \mathbb{R}$ est réel, alors les espaces de Sobolev d'ordre partiel sont définis aussi à l'aide de la transformée de Fourier (1.36) par

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\tau|^2)^{\frac{s}{2}}.\mathcal{F}\{u\} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

La norme dans cet espace est donnée par

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\tau|^2)^s . |\mathcal{F}\{u\}|^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.32}$$

Théorème 1.2.3 (Théorème de trace)

Supposons Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe C^1 par morceaux. Considérons l'application $\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to L^2(\Gamma)$, alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, et l'application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ encore notée γ_0.

$H_0^1(\Omega)$ est le noyau de l'application trace γ_0, c-à-d

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ \quad v \in H^1(\Omega) \quad , \quad v = 0 \quad sur \quad \Gamma \quad \right\}$$

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *est l'image de* γ_0,

$$\left(\operatorname{Im}\gamma_0 = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad , \quad H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad est \quad dense \quad dans \quad L^2(\Gamma) \right)$$

Théorème 1.2.4 (Formules de Green)

Soit Ω *un ouvert borné de frontière* Γ *de classe* C^1 *par morceaux, on a les formules suivantes.*

– 1^{er} *formule de green*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\Gamma} u.v.\eta_i d\sigma \quad 1 \leq i \leq n \quad u, v \in H^1(\Omega) \tag{1.33}$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\eta_i \quad sur \quad \Gamma \quad avec \quad \eta \quad est\ le\ vecteur\ normal\ unitaire\ sur \quad \Gamma$$

– $2^{éme}$ *formule de green*

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u.v dx = -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}.v d\sigma \quad u \in H^2(\Omega) \quad v \in H^1(\Omega) \tag{1.34}$$

– $3^{éme}$ *formule de green*

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta u.v - \Delta v.u) dx = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}.v - \frac{\partial v}{\partial \eta}.u d\sigma \qquad u, v \in H^2(\Omega) \tag{1.35}$$

Dans les deux dernières formules, on suppose Ω *ouvert borné de frontière* Γ *de classe* C^2.

1.2.3 Transformation de Fourier

Définition 1.2.2 *Nous définissons la transformée de Fourier directe* $\widehat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ *d'une fonction intégrable* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *comme*

$$\widehat{f}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \exp^{-ix\tau} dx \qquad \tau \in \mathbb{R}^N \tag{1.36}$$

et son transformée de Fourier inverse $f = \mathcal{F}^{-1}\left\{\widehat{f}\right\}$ *par*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\tau) \exp^{ix\tau} d\tau \qquad x \in \mathbb{R}^N \tag{1.37}$$

Les transformées de Fourier (1.36) et (1.37) peuvent être utilisées aussi pour une classe plus générale des fonctions f*, comme des fonctions dans* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *ou méme pour des distributions tempérées dans l'espace* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*, le dual de l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \left\{ \; f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)/ \quad x^\beta D^\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N \; \right\} \tag{1.38}$$

$$\text{ou} \quad x^\beta = \left(x_1^{\beta_1}, x_2^{\beta_2}, ..., x_N^{\beta_N} \right) \quad \text{pour un multi-indice} \quad \beta \in \mathbb{N}_0^N$$

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *à la propriété importante d'être invariable sous la transformée de Fourier, c-à-d,*

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

Nous avons en particulier l'inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$*, et ainsi,*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset D'(\mathbb{R}^N)$$

La convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *est la même que pour des distributions (section (1.3)),* *mais en ce qui concerne des fonctions test dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

En effet, si $T_n, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, *alors*

$$T_n \to T \quad dans \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad dans \quad \mathbb{k} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \tag{1.39}$$

1.3 Fonctions de Green et solutions élémentaires

1.3.1 La solution élementaire

une solution élémentaire pour un opérateur différentiel $\mathcal{L}$, linéaire, avec des coéff-cients constants, et défini sur l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, est une distribution E qui satisfait

$$\mathcal{L}\ E = \delta \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \tag{1.40}$$

Où δ est la fonction de Dirac, centrée l'origine. L'intérêt principal d'une telle solution élémentaire se situe dans le fait que si la convolution a un sens, alors la solution de

$$\mathcal{L}\ u = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \tag{1.41}$$

pour une fonction donné f, est donnée par

$$u = E * f \tag{1.42}$$

En fait, en raison de, la linéarité de $\mathcal{L}$ puisque E est une solution élémentaire, et puisque δ est L'élément neutre de la convolution, nous avons

$$\mathcal{L}\ u = \mathcal{L}\{E * f\} = \mathcal{L}\ E * f = \delta * f = f. \tag{1.43}$$

Nous remarquons aussi qu'a partir de la solution élémentaire E, d'autres solutions peuvent être construites, dans le sens des distributions, quand les dérivées de la fonction de Dirac δ apparaissent sur le coté droit. Par exemple, la solution de

$$\mathcal{L}\ F = \tfrac{\partial \delta}{\partial x_i} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N) \tag{1.44}$$

est donné par

$$F = E * \frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \frac{\partial E}{\partial x_i} * \delta = \frac{\partial E}{\partial x_i} \tag{1.45}$$

1.3.2 La fonction de Green

une fonction de Green d'un opérateur différentiel partiel $\mathcal{L}_y$ avec des conditions de frontières homogènes, linéaires, avec des coéffecients constants, par rapport y, et défini sur l'espace des distributions $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N)$, est une distribution G tel que

$$\mathcal{L}_y\{G(x,y) = \delta_x(y) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N) \tag{1.46}$$

où δ_x est la fonction de Dirac avec la masse de Dirac a centrée au point de source x, c-à-d,

$$\delta_x(y) = \delta(y - x)$$

Ainsi elle vérifie

$$G(x,y) = \mathcal{L}_y^{-1}\left\{\delta_x(y)\right\}$$

La solution du problème aux limites non homogène

$$\mathcal{L}_x\left\{u(x)\right\} = f(x) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^n) \tag{1.47}$$

est donné par,

$$u(x) = G(x,y) * f(y) \quad \text{si la convolution a un sens}$$

Où G est symétrique, c-à-d,

$$G(x,y) = G(y,x) \tag{1.48}$$

Comme dans la solution élémentaire, nous prenons

$$\mathcal{L}_x \{u(x)\} = \mathcal{L}_x \{G(x,y) * f(y)\} = \delta_x(y) * f(y) = f(x) \tag{1.49}$$

Nous observons que la fonction de Green de l'espace libre ou de tout l'espace, c-à-d, sans conditions de frontière, est liée à la solution élémentaire par la relation

$$G(x,y) = E(x-y) = E(y-x) \tag{1.50}$$

1.4 Equation aux dérivées partielles

Définition 1.4.1 (E.D.P)

Une équation aux dérivées partielles (E.D.P) du 1^{er} ordre est une relation entre une variable indépendante $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, la fonction inconnue $u = u(x)$ et leurs dérivées partielles, c'est à dire de la forme

$$F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{1.51}$$

Définition 1.4.2 (E.D.P Linéaire)

Une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre m dans $\mathbb{R}^N$ est une équation de *la forme*

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u = f \tag{1.52}$$

où les fonctions a_α sont des coéfficients ne dépend que de x.

Définition 1.4.3 (Opérateur aux dérivées partielles linéaire)

On appelle opérateur aux dérivées partielles linéaire tout opérateur A de la forme,

$$A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha \tag{1.53}$$

L'équation caractéristique, quand à elle, est donnée par

$$A_m(x,\tau) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, \tau^\alpha \neq 0 \tag{1.54}$$

Maintenant, $A(x,D)$ est elliptique dans Ω, si pour tout $x_0 \in \Omega$, on a

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, \tau^\alpha \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad \tau \neq 0 \tag{1.55}$$

Il est fortement elliptique, s'il existe une constante C telle que

$$\left|\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, \tau^\alpha\right| \geq C\,|\tau|^{2k} \quad \text{pour tout} \quad x_0 \in \Omega \quad k > 0 \tag{1.56}$$

1.5 Opérateurs intégraux

1.5.1 Définitions

Définition 1.5.1 (opérateur) *On appelle opérateur sur Ω toute application linéaire continu de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

*D'aprés le théorème des **noyaux de schwartz** [12], étant donné T un opérateur* *"agissant" sur* Ω *il existe une unique distribution* $K \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ *telle que*

$$\langle Tu, v \rangle = \langle K, v \times u \rangle \qquad \forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On dit que K *est le noyau distributionnel de* T *ou bien* T *est l'opérateur de noyau* K.

Définition 1.5.2 (opérateur intégrale)

Un opérateur T *sur* Ω *est dit intégral si son noyau* K *est la distribution associée à une fonction* $K \in L^1_{loc}(\Omega, \Omega)$. *On dit que* K *est le noyau de l'opérateur intégral* T.

La théorie des opérateurs intégraux s'identifie à celle de l'integral. Etant donné $K \in L^1_{loc}(\Omega, \Omega)$. *on peut définir par application du théorème de* ***Fubini*** *[44] la fonction* $Tu \in L^1_{loc}(\Omega \times \Omega)$ *par*

$$Tu(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy \tag{1.57}$$

Définition 1.5.3 (opérateur de Fredholm)

i) *soient* E *et* F *deux espaces de Banach Un opérateur linéaire, continu de* E *dans* F, *est appelé opérateur de* ***Fredholm****, si la dimension de son noyau et la co-dimension de son image sont finies.*

ii) *Le nombre* $ind\ T = dim\ ker\ T - dim\ coker\ T$ *est appelé l'indice de* T.

Théorème 1.5.1 *Soit* T *un opérateur linéaire continu de* E *dans* F, *Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) T *est un opérateur de Fredholm d'indice zéro* $ind\ T = 0$.

ii) *Il y a un opérateur* K, *linéaire, continue de* E *dans* F, *compact tel que* $T + K$ *est inversible.*

Preuve. voir [7]. ■

Définition 1.5.4 (Opérateur de Nemytskii)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, est une fonction de Carathédory si l'application $(x, u(x)) \to f(x, u(x))$ est continue en u pour tout $x \in \Omega$ et mesurable en x pour tout $u \in \mathbb{R}^m$.

L'opérateur $N_f u : \Omega \to \mathbb{R}$ défini par

$$(N_f u)(x) = f(x, u(x))$$

est appelé opérateur de Nemytskii.

1.5.2 Noyaux intégraux

Comme on l'a mentionné auparavant, plusieurs problèmes de la physique mathématique peuvent-être decrits par dans en équation intégrales. Génralement, les équations intégrales obtenues sont de différents types. Le caractère d'une équation intégrale est déterminé essentiellement par les propriétés de son noyau. En effet, si :

Le noyau $K(x, t)$ est continue dans Ω ou, au moins, si les discontinuités du noyau sont telles que :

$$\int_\Omega \int_\Omega \left|K^2(x,t)\right| dxdt < \infty$$

alors les équations données par :

$$Tu(x) := \int_\Omega K(x,t)u(y)dy = f(x) \tag{1.58}$$

où u est l'inconnue et $f(x)$, $K(x, y)$ des fonctions données, sont dites équations de type de Fredholm. Plus précisément, (1.58) est une équation de Fredholm de première espèce, contrairement l'équation de Fredholm de deuxième espèce définie par :

$$u(x) - \int_{\Omega} K(x,t)u(y)dy = f(x) \tag{1.59}$$

- Si le noyau

$$K(x,t) = \frac{H(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}$$

où $H(x,y)$ est borné et α une constante telle que $0 < \alpha < 1$, alors ((1.58),(1.59)) sont des équations intégrales avec une singularité faible

- Si le noyau

$$K(x,t) = \frac{A(x,y)}{|x-y|}$$

où $A(x,y)$ est une équation différentiable en x et y, alors

$$\int_{\Omega} K(x,t)u(y)dy \qquad \text{diverge}$$

1.6 Les opérateurs pseudo-différentiels

1.6.1 Opérateur différentiel

Un opérateur différentiel linéaire d'ordre m s'écrit comme

$$\mathcal{D} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} \tag{1.60}$$

où les a $a_{\alpha}(x)$ appelées coéfficients de l'opérateur $\mathcal{D}$, sont des fonctions $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

1.6.2 Opérateur pseudo-différentiel

Les opérateurs pseudo-différentiels peuvent-étre considérés comme une généralisation des opérateurs différentiels. En effet, soit l'opérateur différentiel (1.60), exprimons le, en fonction de la transformée de Fourier et de son inverse $\mathcal{F}^{-1}$ (resp (1.36),(1.37)), comme

$$\begin{aligned} A(x,D)u(x) &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = \mathcal{F}^{-1} \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\tau^\alpha \mathcal{F}[u]. \qquad (1.61) \\ &= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\tau} a(x,\tau) \mathcal{F}[u](\tau) d\tau \end{aligned}$$

avec $a(x,\tau) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\tau^\alpha, \tau \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, un élément de la classe des symboles $S^m(\Omega \times \mathbb{R}^N)$.

Classe des symboles d'ordre m

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $a(x,\tau)$ une fonction de $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$. soit $K \subset \Omega$ un compact et m un nombre réel quelconque. La classe $S^m(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ des symboles d'ordre m est définie par

$$S^m(\Omega \times \mathbb{R}^N) = \left\{ a(x,\tau) / \ \left| \partial_\tau^\alpha \partial_x^\beta a(x,\tau) \right| \leq C_{\alpha,\beta,K} (1+|\tau|)^{m-|\alpha|} \right\} \qquad (1.62)$$

pour tout $x \in K$, $\tau \in \mathbb{R}^N$ et pour tout multi-indice α, β. les $C_{\alpha,\beta,K}$ sont des constantes, qui peuvent dépendre de α, β et K.

L'espace $S^m(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ est un espace de Fréchet muni des semi-normes

$$P^{(m)}_{\alpha,\beta,K}(a) = \sup_{\substack{x\in K \\ \tau\in\mathbb{R}^n}} (1+|\tau|)^{|\alpha|-m} \left| \partial_\tau^\alpha \partial_x^\beta a(x,\tau) \right| \qquad (1.63)$$

ces éléments sont appelés les fonctions apmlitudes d'ordre m .

on pose

$$S^{\infty}=\cup_{m\in\mathbb{R}}S^{m}\qquad S^{-\infty}=\cap_{m\in\mathbb{R}}S^{m}$$

Le résultat suivant, concerne le développement asymptotique des éléments de $S^{m}(\Omega)$, Ceci revient donner un sens une série formelle d'éléments a_j, d'ordre m_j, tendant vers $-\infty$

1.6.3 Symbole principale

Chaque élément de l'espace $S^{m}\left(\Omega\right)/S^{m-1}\left(\Omega\right)$ est appelé le symbole principale, qui représente la partie d'ordre le plus èlvée dans le dévelopement asymptotique du symbole complet.

Théorème 1.6.1 *Soit P un opérateur propre de $L^{m}\left(\Omega\right)$. Alors, il existe $P\in S^{m}\left(\Omega\right)$ unique tel*

$$Pu\left(x\right)=\int e^{ix\tau}p\left(x,\tau\right)\mathcal{F}\left\{u\right\}\left(\tau\right)d\tau \tag{1.64}$$

de plus si $a\left(x,y,\tau\right)$ une amplitude pour P, on a alors

$$p\left(x,\tau\right)\approx\left.\sum_{\alpha}\frac{1}{a!}D_{\tau}^{\alpha}D_{y}^{\alpha}a\left(x,y,\tau\right)\right|_{y=x} \tag{1.65}$$

Preuve. voir [30]. ■

Théorème 1.6.2 *Soit P un opérateur linéaire, continu de $\mathcal{D}\left(\Omega\right)$ dans $C^{\infty}\left(\Omega\right)$. Alors $P\in L^{m}\left(\Omega\right)$ si et seulement si pour tout $f\in\mathcal{D}\left(\Omega\right)$, on a*

$$e^{-ix\tau}p\left(f.e^{ix\tau}\right)\in S^{m}\left(\Omega\right) \tag{1.66}$$

Preuve. Soit (ρ_j) une partition de l'unité sur Ω avec des fonctions $\rho_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ et soit β_j des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, avec $\beta_j = 1$ sur supp ρ_j. On a donc

$$(\rho_j u)(x) = \int e^{ix\tau} \mathcal{F}\{\rho_j u\}(\tau)\, d\tau = \int \beta_j(x)\, e^{ix\tau} \mathcal{F}\{\rho_j u\}(\tau)\, d\tau \tag{1.67}$$

et comme P est continu alors

$$\begin{aligned} P(\rho_j u)(x) &= \int e^{ix\tau} p_j(x,\tau)\, \mathcal{F}\{\rho_j u\}(\tau)\, d\tau \\ &= \int\int e^{i(x-y)\tau} p_j(x,\tau)\, \rho_j(y)\, u(y)\, dy d\tau \end{aligned} \tag{1.68}$$

où

$$\rho_j(x,\tau) = e^{-ix\tau} p\left(\beta_j(x) . e^{ix\tau}\right) \in S^m(\Omega) \tag{1.69}$$

et puisque $u = \sum_j \rho_j u$, on obtien que

$$Pu(x) = \int\int e^{i(x-y)\tau} p(x,y,\tau)\, u(y)\, dy d\tau \tag{1.70}$$

où l'amplitude $p(x,y,\tau) \in S^m(\Omega \times \Omega)$ car

$$p(x,y,\tau) = \sum_j p_j(x,\tau)\, \rho_j(y) \tag{1.71}$$

est localement finie en y. ■

Le résultat suivant conduit à la caractérisation du symbole principale :

Théorème 1.6.3 *Soit $P \in L^m_{loc}(\Omega)$. Alors pour (x_0, τ_0) appartenant à $T^*\Omega \setminus 0$, ona*

$$\sigma_p(x_0,\tau_0) = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-m} e^{-i\lambda\phi(x)} P\left(f(x)\, e^{i\lambda\phi(x)}\right)_{x=x_0} \tag{1.72}$$

où $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ *et égale à* 1 *au voisinage de* x_0,$\phi \in C^{\infty}(\Omega)$,$d\phi(x) = \tau_0 \neq 0$ *sur supp* f *et* $T^{*}\Omega \setminus 0$ *est le complément de la section nulle dans le filtré cotangent* $T^{*}\Omega$.

Preuve. voir [12]. ■

Un résultat fondamental, qui est un outil adéquat utilisé dans la démonstration de l'ellipticité forte pour les problèmes aux limites, à savoir **l'inégalité de Gårding**.

Théorème 1.6.4 (Inégalité de Gårding) *[40][15]*

Soit $P \in L^{m}(\Omega)$. *Supposons que* $\Re e\, p(x, \tau)$ *pour* τ *large et* $c \succ 0$. *Alors pour chaque* s *réel, et pour chaque compact fixé* K *et pour tout* $u \in \mathcal{D}(K)$ *on a*

$$\Re e \langle Pu, u \rangle \geq c_1 \|u\|^2_{H^{m/2}} - c_2 \|u\|^2_{H^s}$$

avec c_1, c_2 *indépendants de* u.

1.7 Théorie du potentiel

La méthode des équations intégrales consiste à remplacer un problème aux limites par une équation intégrale posée sur le bord Γ.

Définition 1.7.1 *Soit* $\varphi \in C(\Gamma)$ *une fonction donnée,* $E(x, y)$ *noyau de Green, les fonctions*

$$S(x) = \int\limits_{\Omega} \varphi(y).E(x, y) d\Gamma_y \qquad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma \tag{1.73}$$

et

$$V(x) = \int\limits_{\Omega} \varphi(y).\tfrac{\partial E(x,y)}{\partial_n(y)} d\Gamma_y \qquad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma \tag{1.74}$$

sont appelées, respectivement, potentiel simple-couche et double-couche avec la densité φ.

Remarque 1.7.1 *On pose*

$$f(x,y) = \varphi(y).E(x,y)$$

ou

$$f(x,y) = \varphi(y).\frac{\partial E(x,y)}{\partial_n(y)} \qquad x \notin \Gamma \quad y \in \Gamma$$

f *est continue sur* Γ *donc elle est intégrable.*

Lemme 1.7.1 *Si* $f : D \times \Gamma \to C$ *est continue si* $x \neq y$ *et satisfait*

$$|f(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^{\lambda}} \qquad 0 < \lambda < 1$$

alors la fonction $g(x) = \int\limits_{\Gamma} f(x,y) d\Gamma_y$ *est continue sur* D.

Preuve. *voir [10].* ■

Théorème 1.7.1 *Soit* Γ *de classe* C^2 *et* $\varphi \in C(\Gamma)$ *:*

Alors le potentiel simple-couche S *avec la densité* φ *est continue. Sur la frontière nous avons*

$$S(x) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(y).E(x,y) d\Gamma_y \qquad x \in \Gamma$$

où l'intégrale existe.

Théorème 1.7.2

a) *Le potentiel simple couche* $S(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *i.e prolongeable par continuité de* $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ *à* $\mathbb{R}^2$.

b) *Si*

$$\int_{\Gamma} \varphi(y) d\Gamma_y = 0$$

alors

$$\lim_{|x| \to +\infty} S(x) = 0$$

Preuve.

a) On a

$$S(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y).E(x,y) d\Gamma_y \qquad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$$

on prend

$$f(x,y) = \varphi(y).E(x,y)$$

avec

$$E(x,y) = \frac{1}{2\pi} \log |x-y|$$

donc

$$|f(x,y)| \leq c.\frac{\|\varphi\|_{\infty}}{|x-y|}$$

D'aprés le lemme (1.7.1)

$$\lim_{x \to z \in \Gamma} S(x)$$

existe et ne dépend pas de la direction.

alors S est continue sur $\mathbb{R}^2$

b) Supposons que

$$\int_{\Gamma} \varphi(y) d\Gamma_y = 0$$

on a

$$S(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y).E(x,y) d\Gamma_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(y). \log |x-y| \, d\Gamma_y$$

d'où

$$|S(x)| \leq \frac{c}{|x|} mess(\Gamma).\, \|\varphi\|_\infty = \circ(\frac{1}{|x|})$$

donc

$$\lim_{|x| \to +\infty} S(x) = 0$$

■

Eximinons maintenant la trace du potentiel de double couche

$$V(x) = \int\limits_\Omega \varphi(y).\tfrac{\partial E(x,y)}{\partial_n(y)} d\Gamma_y \quad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma \quad \varphi \in C(\Gamma)$$

Lemme 1.7.2 *Soit Γ de classe C^2, Alors il existe une constante positive L tel que*

1. $|\langle x-y, n(x)\rangle| \leq L\,|x-y|^2\,; x, y \in \Gamma.$
2. $|n(x) - n(y)| \leq L\,|x-y|\,; x, y \in \Gamma.$

Preuve. voir [10]. ■

Lemme 1.7.3

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial E(x,y)}{\partial_n(y)} d\Gamma_y = \begin{cases} -1 & si \quad x \in D \\ -\frac{1}{2} & si \quad x \in T \\ 0 & si \quad x \notin D \end{cases} \tag{1.75}$$

Pour la preuve de ce lemme on a besoin de la proposition suivante.

Proposition 1.7.1 *Soit $v \in C^2(\overline{D})$, harmonique ($\triangle v = 0$) dans D,*

Alors

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma_y = 0 \tag{1.76}$$

Preuve. *On utilise la 1^{ere} formule de Green (1.33)*

$$\int\limits_D u \triangle v + \nabla u \nabla v = \int\limits_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial n} \Gamma_y$$

on prend $u = 1$ *et comme* $v = 0$ *alors*

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma_y = 0$$

■

Maintenant la preuve de lemme (1.7.3)

Preuve.

1. $x \in D$ $(x \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{D})$

   d'aprés (1.76), on prend

$$v = E \ (\triangle E = 0) \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\partial E}{\partial n} d\Gamma_y = 0$$

2. $x \in D$ on utilise la réprésentation

$$u(x) = \int_{\Gamma} (\frac{\partial u}{\partial n}(y).E(x,y) - u(y)\frac{\partial E}{\partial n})d\Gamma_y$$

   on prenant $u = 1$

$$1 = \int_{\Gamma} -\frac{\partial E(x,y)}{\partial n} d\Gamma_y$$

   alors

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial E(x,y)}{\partial n} d\Gamma_y = -1$$

3. $x \in \Gamma, \Omega(x,\varepsilon)$ est un sphère de centre x et de rayon ε.

   soint $H(x,\varepsilon) = \Omega(x,\varepsilon) \cap D$

   On applique la formule (1.76) $(v = E, \int_{\Gamma} \frac{\partial E}{\partial n} = 0)$.

$$\int_{\{y\in\Gamma:|x-y|\geq\varepsilon\}} \frac{\partial E}{\partial n} d\Gamma_y + \int_{H(x,\varepsilon)} \frac{\partial E}{\partial n} d\Gamma_y = 0$$

on a $$\int\limits_{\{y\in\Gamma:|x-y|\geq\varepsilon\}} \tfrac{\partial E(x,y)}{\partial n} d\Gamma_y = 0 \qquad (x \notin D)$$

$$\int\limits_{H(x,\varepsilon)} \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{H(x,\varepsilon)} \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} d\Gamma_y = -\frac{1}{2}$$

■

Théorème 1.7.3

Soit $\Gamma \in C^2$, le potentiel double couche $V(x)$ avec la densité $\varphi \in C(\Gamma)$ est prolongeable par la continuité de D à $\overline{D}$ et de $\mathbb{R}^2/\overline{D}$ à $\mathbb{R}^2/D$ avec les limites

$$V \pm (x) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(y).\tfrac{\partial E(x,y)}{\partial n(y)} d\Gamma_y \pm \tfrac{1}{2}\varphi(x) \qquad x \in \Gamma \tag{1.77}$$

où

$$V\pm = \lim_{h\to 0} V(x \pm h.n(x))$$

où l'intégrale existe.

Preuve. voir [10]. ■

Théorème 1.7.4 *Soit $\Gamma \in C^2$. Alors pour le potentiel simple couche $S(x)$ avec la densité $\varphi \in C(\Gamma)$*

satisfait

$$\tfrac{\partial S\pm}{\partial n}(x) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(y).\tfrac{\partial E(x,y)}{\partial n(y)} d\Gamma_y \pm \tfrac{1}{2}\varphi(x) \qquad x \in \Gamma \tag{1.78}$$

où

$$\frac{\partial S\pm}{\partial n}(x) := \lim_{h\to 0} n(x).\nabla S(x \pm hn(x))$$

où l'intégrale existe

Preuve. voir [10]. ■

1.8 Alternative de Fredholm

Théorème 1.8.1

où bien l'equation linéaire non homogéne de second éspéce (1.59) admet une solution unique quelle soit $f(x)$ (appartenant à une classe suffisamment vaste), ou bien l'équation homogéne corrrespondante

$$u(x) - \int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy = 0 \tag{1.79}$$

à au moins une solution non triviale, ie.non identiquement nulle.

Théorème 1.8.2

Le premièr cas de l'alternative á également lieu pour l'équation adjoint de (1.59)

$$v(x) - \int_{\Omega} K(x,y)v(y)dy = g(x) \tag{1.80}$$

et le nombre de solutions linéairement indépendantes de l'équation intégrale homogéne (1.79) et de l'équation adjointe

$$v(x) - \int_{\Omega} K(x,y)v(y)dy = 0 \tag{1.81}$$

est fini et le même pour les deux équations.

Remarque 1.8.1 *si les fonctions $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ sont solution de l'équation homogéne (1.79), il en est egalement de leur combinaison linéaire*

$$u(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + ... + c_nu_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_ku_k(x)$$

où $c_k(k = 1, 2, ..., n)$ sont des constantes arbitraires.

Théorème 1.8.3

Dans le second cas de l'alternative, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation non homogéne (1.59) admette une solution $u(x)$ et solution $v(x)$ de l'équation homogéne (1.81) adjointe de (1.79)

$$\int_{\Omega} f(x)v(x)dx = 0 \tag{1.82}$$

Remarque 1.8.2 *Dans la condition (1.82).l'équation (1.59) posséde une infinité de solutions puisqu'elle vérifie toute fonction de la forme $u(x) + \widetilde{u}(x)$ avec $u(x)$ une solution de (1.59) et $\widetilde{u}(x)$ toute solution de l'équation homogéne correspondante (1.79).*

De plus, si l'equation (1.59) satisfaite par les fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$, l'equation etant linéaire, la différence $u_1(x) - u_2(x)$ est solution de l'equation (1.79).

Dans la pratique, l'alternative de Fredhom est le plus important de ces théorémes. Au lieu de démontrer que l'équation intégrale donné (1.59) a une solution,on démontre parfois plus facilement que l'équation homogéne correspondante (1.79) ou son adjointe (1.81) n'ont pas d'autres solutions que les solutions triviales.il en résulte, en vertu de l'alternative, que l'equation (1.59) admet bien une solution.

Remarque 1.8.3 *si le noyau $K(x, y)$ de l'equation intégrale (1.59) est symétrique, ie $K(x, y) = K(y, x)$, l'équation adjointe (1.81) coïncide avec l'équation homogéne (1.79) associé à (1.59).*

cette classification est incompléte. La théorie de Fredhom est valable uniquement pour les équations du type de Fredhom. Elle ne s'applique pas pour les équations singuliéres et pour d'autres intégrales à noyau non intégrable.

1.9 Méthode des opérateurs monotones

Soient X un espace normé séparable réel X^* le dual de X, $A : X \to X^*$ un opérateur non linéaire, $D(A) = X, R(A) \subset X^*$.

On dit que l'opérateur A est monotone si

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq 0 \qquad \forall x, y \in X$$

Si cette inégalité devient stricte pour $x \neq y$, on dit que A est strictement monotone. S'il existe une fonction $c(t)$ continue et positive pour $t \geq 0$ telle que $c(0) = 0, c(t) > 0$ pour $t > 0$, $c(t) \succ 1$ pour $t \to \infty$ et telle que

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq C\|x - y\|\|x - y\|$$

on dit que A est fortement monotone. L'opérateur A est dit coercif s'il existe une fonction $\gamma(t)$ définie pour $t \geq 0$, qui tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$ et qui pour tout $x \in X$ vérifie l'inégalité

$$\langle A(x), x \rangle \geq \gamma\|x\|\|x\|$$

On dit que A est demi continu en $x_0 \in X$ si la convergence de x_n vers x_0 pour la norme de X implique $A(x_n) \to A(x_0)(n \to \infty)$ faiblement, c'est- à- dire

$$\langle A(x_n), x \rangle \to \langle A(x_0), x \rangle (n \to \infty) \qquad \forall x \in X$$

Théorème 1.9.1 (Théorème de Browder et Minty)

Soit un opérateur A qui applique un espace de Banach séparable réel X dans l'espace X^*. Supposons que A soit fortement monotone et demi continue. Alors l'équation $A(x) = y$ a une solution x et une seule pour tout $y \in X^*$.

Chapitre 2

Méthode des équations intégrales pour quelques problèmes linéaires

Dans ce chapitre, on présente l'analyse mathématique de la méthode du potentiel (la méthode indirecte des èlèment frontières), concernant les problémes de Dirichlet et de Neumann pour le laplacien dans le plan.

2.1 Introduction

La méthode du potentiel permette de ramener le probléme aux limites à un probléme équivalent posé uniquement sur le bord du domaine. Dans le présent travail, nous appliquons cette technique au Laplacien avec les conditions de Dirichlet et Neumann. Utilisant cette méthode des équation intégrales aux bord, nous avons l'habilité à résoudre ces équation intégrales. Nous allons l'interpréter en tant qu'opérateurs pseudo-différentiels, et via le calcul symbolique de ces opérateurs, nous pouvons donner les propriétés de ces opérateurs qui nous permettent d'exhiber l'existence et l'unicité de la solution.

2.2 Méthode du potentiel pour le Laplacien dans un domaine régulier pour Dirichlet

2.2.1 Formulation du probléme

Présentons ici le problème de Dirichlet intérieur pour l'opérateur de Laplace.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine ouvert, borné, simplement connexe, dont la frontière Γ est réguliére $\Gamma \in C^\infty$

On cherche à déterminer une fonction u dans $H^1(\Omega)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ u = f \quad , \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{p1}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace, et f est une fonction continue donnée sur la frontière Γ telleque $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

Le probléme (p1) constitue le problème de Dirichlet (non homogéne) pour le Laplacien. Il modélise, entre autres les phénomenes stationnaires.

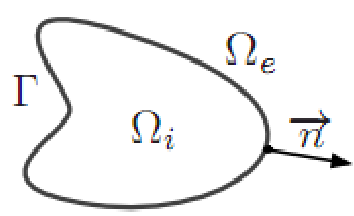

FIG. 2.1 – Domaines intérieur et extérieur

Interprétation physique :

L'équation de Laplace $\Delta u = 0$ intervient très fréquemment dans des problèmes de la physique. u représente typiquement la densité d'une quantité en équilibre.

L'application du problème de Laplace peut être trouvée pour l'éléctrostatiques [20], la conductivité dans l'imagerie biomédicale [5], et pour le potentiel dans un plan incompressible [37].

2.2.2 Etude variationnelle

Pour énoncer une formulation variationnelle du problème traité, nous devons définir correctement les espaces des fonctions dans lequel on cherche la solution. Pour le problème (p1) nous considérons l'espace classique de Sobolev

$$H^1(\Omega, \triangle) := \{ \ u \in H^1(\Omega) \quad , \quad \triangle u = 0 \ \} \tag{2.1}$$

qui est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

L'espace $H^1(\Omega, \Delta)$ est important dans la formulation variationnelle, car il nous permet d'étendre la seconde formule de Green pour des fonctions "non régulières" de $H^1(\Omega)$.

En effet, on a le

Lemme 2.2.1 *Soit $u \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et soit $v \in H^1(\Omega)$ de support borné, alors $\partial_n u\,|_\Gamma$*

est definie par :

$$\langle \triangle u, v \rangle + \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle \partial_n u\,|_\Gamma \,, v\,|_\Gamma \rangle_\Gamma \tag{2.2}$$

ici $\langle , \rangle_\Gamma$est la dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ donnée par :

$$\langle h, k \rangle_\Gamma = \int_\Gamma h(y).k(y) d\Gamma \tag{2.3}$$

pour des fonctions h et k régulières.

Preuve. L'équation (2.2) est obtenue en intégrant par parties la trace $v\,|_{\Gamma}$ appartient pour tout $v \in H^1(\Omega)$ de support borné d'aprés le théorème des traces (1.2.3). La partie

gauche de (2.2) est bornée d'après les hypotheses faites sur u, v ■

On introduit ensuite le sous-espace de Hilbert V un sous espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui satisfont dans le sens des traces la condition essentielle d'homogénéité.

$$V = \left\{ \; v \in H^1(\Omega) \quad , \quad v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \; \right\} := H_0^1(\Omega) \tag{2.4}$$

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |v\,(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit maintenant $v \in H_0^1(\Omega)$, En multipliant la première équation de (p1) par v et en intégrant sur Ω, la 2^{eme} formule de Green (1.34) nous permet d'écrire

$$-\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega + \int\limits_{\Gamma} \partial_n u v d\Gamma = 0 \tag{2.5}$$

posons alors

$$a_1(u, v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega \tag{2.6}$$

et

$$L_1(v) = 0 \quad \text{car} \quad v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.7}$$

Tout d'abord, on a la

Définition 2.2.1 *Soit $f(s)$ la trace de $w \in H^1(\Omega)$ telle que $w|_\Gamma = f$ la fonction $u \in H^1(\Omega)$ est appelée solution faible du problème (p1) si :*

i) $u - w \in V$.

ii) *Pour tout $v \in V$, la condition (2.5) est vérifiée.*

Maintenant, le problème (p1) devient équivalent au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver} \quad u \in H^1(\Omega) \qquad \text{tellque} \\ a_1(u,v) = L_1(v) \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.8}$$

Théorème 2.2.1 **i)** *$H_0^1(\Omega)$ est un espace fermé dans $H^1(\Omega)$.*

ii) *$L_1(.)$ est une forme linéaire continue.*

iii) *$a_1(.,.)$ est une forme bilinéaire continue.*

iv) *$a_1(.,.)$ est $H_0^1(\Omega)$-coercive.*

Preuve.

i) Soit (v_k) une suite de fonctions dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ qui converge vers un élément $v \in H^1(\Omega)$

D'après le théorème des traces (1.2.3), on a

$$\|v_k - v\|_{L^2(\Gamma)} \leq c(\Omega) \|v_k - v\|_{H^1(\Omega)}$$

c'est-à-dire que la suite $(Tr\ v_k)$ converge vers $Tr\ v$ dans l'espace $L^2(\Gamma)$:

Alors, il existe une sous suite qui converge presque partout vers $Tr\ v$ mais puisque $Tr\ v = 0$ sur Γ, ceci implique que : $v \in H_0^1(\Omega)$

ii) Evident.

iii) La bilinéairité de $a_1(.,.)$ est evidente pour la continuité de a_1, on va montrer, pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$|a_1(u,v)| \leq c \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

En efft on a

$$\begin{aligned} |a_1(u,v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v d\Omega \right| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{grace à couchy-shwartz} \\ &\leq c \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \text{avec } c = 1 \end{aligned}$$

d'ou la continuité de $a_1(.,.)$

iv) Il suffit de trouver $\alpha > 0$ tel que

$$a_1(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2$$

On a alors,

$$a_1(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u\|_{H_0^1}^2 = \|u\|_V^2 \qquad \text{avec } \alpha = 1$$

D'où le coercivité de $a_1(.,.)$

■

Ce théorème nous permet d'établir le résultat suivant

Théorème 2.2.2 *Le problème (2.8) possède exactement une seule et unique solution faible* $u \in H^1(\Omega, \Delta)$.

Preuve. Evident d'après le théorème (2.2.1) et le théorème de Lax-Milgram (1.2.2).

■

Pour interpréter maintenant le probléme (2.8), considérons la solution faible du problème (p1) et l'équation

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = 0 \qquad \forall v \in V \tag{2.9}$$

Par application inverse de la formule de Green à son terme de gauche, on obtient :

$$-\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} \Delta u v dx - \int_{\Gamma} \partial_n u v d\Gamma \qquad v \in V \tag{2.10}$$

Prenons en compte que $v = 0$ sur Γ et substituons (2.10) dans (2.9), on aura

$$\langle \Delta u, v \rangle = 0 \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \Delta u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{est nul}$$

mais comme $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors on a $\Delta u = 0$ p.p dans Ω, qui est la première équation de (p1).

En fin, d'après la définition (2.2.1), on a

$$(u - f) \in H_0^1(\Omega)$$

ce qui fait que

$$u - f = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

d'où la deuxième équation de (p1)

Ainsi, le problème aux limites équivalent au problème variationnel (2.8), est le problème (p1).

2.2.3 Réduction en équations intégrales

D'une manière générale, tout problème du Laplacien peut être réduit en équation intégrale, grâce à l'existence de la solution élémentaire associée, en particulier le problème de Dirichlet pour le Laplacien est réduit en une équation intégrale, en supposant que la solution s'écrit sous la forme d'un potentiel de double couche.

L'intérêt de cette procédure est que les équations intégrales obtenues sont des équations de Fredholm de deuxième espèce. Ainsi les théorèmes de Fredholm peuvent être appliqués [26],[22].

La démarche, qui consiste à représenter, la solution du problème de Dirichlet par un potentiel de simple couche, conduit quand elle, à d'autre types d'équations intégrales où la théorie de Fredholm n'est pas applicable [39].

Formules de représentations

Les outils fondamentaux pour construire les équations intégrales au bord sont la solution élémentaire de l'équation de Laplace donnée par

$$E(x) := \frac{1}{2\pi} \log |x| \tag{2.11}$$

et la propriété de simple et de double couche [41].

Définition 2.2.2 *Pour $\mu, v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, On définit S et D par les potentiels logarithmiques de simple couche (P.S.C) et de double couche (P.D.C), respectivement par*

$$S_{\Omega}\mu(x) := E(x) * \mu\delta_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mu(y)E(x-y)d\Gamma_y, \tag{2.12}$$

$$D_\Omega v(x) := E(x) * (-\partial_n(v\delta_\Gamma)) = \int\limits_\Gamma v(y)\frac{\partial E}{\partial n_y}(x-y)d\Gamma_y, \tag{2.13}$$

où δ est la masse de Dirac sur Γ.

Lemme 2.2.2 *Soit $\Gamma \in C^\infty$ et $\mu, v \in C(\Gamma)$. Alors on a les relations suivantes du saut pour (P,S,C) et (P,D,C), quand un point x de l'intérieur tend vers un point sur la frontière.*

$$(\partial_n S_\Omega(x))\,|_\Gamma = +\tfrac{1}{2}\mu(x) + \int\limits_\Gamma \mu(y).\partial_{n_y}E(x-y)d\Gamma_y \qquad x, y \in \Gamma \tag{2.14}$$

$$(D_\Omega v(x))\,|_\Gamma = -\tfrac{1}{2}v(x) + \int\limits_\Gamma v(y)\partial_{n_y}(x-y)d\Gamma_y \qquad x, y \in \Gamma \tag{2.15}$$

Preuve. On remarque que pour toutes fonctions $\mu, v : \Gamma \to \mathbb{C}$ assez régulières, les potentiels de simple et de double couche satisfont l'équation de Laplace, à savoir

$$\Delta S_\Omega \mu = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

$$\Delta D_\Omega v = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

Calculons donc, en un point $x \in \Gamma$, l'expression du gradient de S_Ω,

on a d'abord

$$\nabla_x E(x) = \frac{x-y}{2\pi\,|x-y|^2}$$

alors on a

$$\nabla_x S_\Omega \mu(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \mu(y)\frac{x-y}{|x-y|^2}d\Gamma_y$$

Cette expression n'a pas de limite quand x tend vers la courbe Γ car la fonction $\frac{1}{|x-y|}$ n'est pas intégrable pour x sur Γ. On peut donc exprimer la valeur de $\partial_n S_\Omega$ pour un sens faible par une fonction test Φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Et d'après la formule de Green

(1.34) on a

$$\begin{aligned}\langle \partial_n S_\Omega, \Phi \rangle &= \int_\Gamma \partial_n S_\Omega(x)\Phi(x)d\Gamma_x = -\int_\Omega \nabla S_\Omega(z).\nabla\Phi(z)d\Omega \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_\Omega\int_\Gamma \mu(y)\frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{|y-z|^2}d\Gamma_y d\Omega\end{aligned}$$

Cette expression est intégrable sur le produit $\Gamma \times \Omega$. Nous pouvons donc permuter les deux intégrations, d'après le **Théorème de Fubini**. D'où

$$\int_\Gamma \partial_n S_\Omega(x)\Phi(x)d\Gamma_x = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y)\left(\int_\Omega \frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{|y-z|^2}d\Omega\right)d\Gamma_y. \tag{2.16}$$

Maintenant pour $r > 0$, notons par $\Omega_r = \Omega \cap B_r$, la partie de Ω contenue à l'intérieur de la boule B_r du rayon r et de centre y.

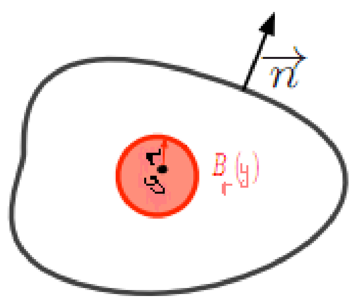

FIG. 2.2 – Domaine privé de la boule

alors

$$\int_\Omega \frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{|y-z|^2}d\Omega = \lim_{r\to 0}\int_{\Omega-\Omega_r}\frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{|y-z|^2}d\Omega$$

Par application de la formule de Green à nouveau on obtient

$$\int_{\Omega-\Omega_r}\frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{|y-z|^2}d\Omega = -\int_{\Gamma-\Gamma_r}\frac{(y-x).n_x}{|x-y|^2}\Phi(x)d\Gamma_x + \int_{\Omega_r}\frac{\Phi(x)}{|x-y|}d\Gamma_x$$

Quand $r \to 0$, nous obtenons donc :

$$\int_{\Omega} \frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{|y-z|^2} d\Omega = -\pi\Phi(y) + \int_{\Gamma} \frac{(y-x).n_x}{|x-y|^2} \Phi(x) d\Gamma_x.$$

D'où, en reportant cette expression dans (2.16), on aboutit à

$$\int_{\Gamma} \partial_n S_{\Omega}(x)\Phi(x)d\Gamma_x = +\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \mu(x)\Phi(x)d\Gamma_x + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma} \frac{(y-x).n_x}{|x-y|^2}\mu(y)\Phi(x)d\Gamma_y d\Gamma_x$$

alors

$$\partial_n S_{\Omega}(x) = +\frac{1}{2}\mu(x) + \int_{\Gamma} \frac{(y-x).n_x}{|x-y|^2}\mu(y)d\Gamma_y$$

au sens faible, donc on en déduit (2.14). De la méme manière on obtient (2.15). ■

Théorème 2.2.3 *Pour toute fonction $\mu, v : \Gamma \to \mathbb{C}$ assez réguliere, les équations intégrales liées aux problème (p1) sont données par :*

$$S\mu = -2f \qquad (I+D)v = -2f \tag{2.17}$$

où les opérateurs intégraux aux bord S, D sont donnés par

$$S\mu(x) := \frac{-1}{\pi}\int_{\Gamma} \mu(y). \log|x-y|\, d\Gamma_y$$
$$Dv(x) := \frac{-1}{\pi}\int_{\Gamma} v(y).\partial_{n_y} \log|x-y|\, d\Gamma_y$$

avec $x, y \in \Gamma$.

Preuve. On cherchera la solution de problème (p1) sous la forme d'un potentiel de simple couche.

Concernant le problème de Dirichlet (p1), la première étape consiste à exprimer $u(x)$

sous la forme d'un potentiel de simple couche, à savoir

$$u(x) = E(x) * \mu\delta_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y).\log|x-y|\,d\Gamma_y \qquad x \in \Omega \quad y \in \Gamma \tag{2.18}$$

En passant à la limite dans (2.18), la continuité de la simple couche nous permet d'avoir pour (p1) une équation intégrale de première espèce

$$u(x)\,|_\Gamma = f = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y).\log|x-y|\,d\Gamma_y \qquad x, y \in \Gamma \tag{2.19}$$

Si on écrit $u(x)$ sous la forme d'un potentiel de double couche, à savoir

$$u(x) = E(x) * (-\partial_n(v\delta_\Gamma)) \tag{2.20}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma v(y).\partial_{n_y}\log|x-y|\,d\Gamma_y \qquad x \in \Omega \quad y \in \Gamma \tag{2.21}$$

la propriété de saut de double couche, nous donne pour (p1) une équation intégrale de deuxième espèce

$$u(x)\,|_\Gamma = f = -\frac{1}{2}v(x) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma v(y).\partial_{n_y}\log|x-y|\,d\Gamma_y \qquad x, y \in \Gamma$$

■

Propriétés des opérateurs intgraux au bord

Ainsi, à un seul problème aux limites, on peut construire différentes équations intégrales lesquels, en général, ont différentes propriétés impliquant certains avantages ou inconvénients sur les schémas de la résolution numérique.

La résolution de la deuxième équation intégrale dans (2.17) est classique. Tandis que pour l'analogue d'équation intégrale (2.17), c'est seulement en 1973, et en 1978, qu'un cadre variationnel approprié a été présenté pour discuter l'éxistence et l'unicité de leur solution grâce aux travaux de Nedelec Planchard [27],[28].

Dans ce travail, notre approche est totalement différente. En effet, les opérateurs intégraux définis dans (2.17) sont interprétés comme des opérateurs pseudo-différentiels. Ceci nous a permis d'obtenir la coercivité moyennant le calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels.

Pour mettre en évidence, l'élégance de cette technique, commençons par présenter brievement les travaux de Nedelec et Planchard.

Pour la première équation intégrale donnée par

$$S\mu = -2f,$$

le but est de définir un opérateur qui associe f à μ pour cela, les auteurs introduisent le problème de Dirichlet extèrieur et construisent leur opérateur par composition selon le schéma suivant :

$$\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to u \in H^1(\Omega) \times W^1(\Omega_e) \to f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{2.22}$$

avec

$$W^1(\Omega_e) := \left\{ \; v \in \mathcal{D}'(W^1(\Omega_e)) \quad v, r\log r \in L^2(\Omega_e) \quad Dv \in L^2(\Omega_e) \; \right\}$$

Maintenant, le deuxième opérateur dans (2.22) est défini et continu.

En vertu de l'unicité du problème (p1) dans Ω et Ω_e, ils obtiennent l'isomorphisme J_0 de K sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, où

$$K := \left\{ \; v \in W^1(\mathbb{R}^2) \qquad supp(\Delta v) \subset \Gamma \; \right\} \tag{2.23}$$

Concernant le premier opérateur dans (2.22), l'opérateur $u \to \mu$ est défini, continue de K sur $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Par analogie, ils montrent que l'opérateur

$$K \xrightarrow{j_1} H^{-\frac{1}{2}}$$

qui à u fait correspondre μ est lui aussi un isomorphisme. Ainsi (2.22) est récrite de la manière suivante :

$$\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{j_1^{-1}} u \in H^1(\Omega) \times W^1(\Omega_e) \xrightarrow{j_0} u\,|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

Ce qui fait que l'isomorphisme $J = J_0 \circ J_1^{-1}$ est représente par la première équation de (2.17).

En fin, ils établissent le résultat suivant :

Théorème 2.2.4 *[27][28]*

i) *le problème variationnel lié à (2.17) est donné par*

$$b(\mu, \mu') = \langle f, \mu' \rangle \qquad \forall \mu' \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

avec

$$b(\mu, \mu') = \int_\Gamma \int_\Gamma \log(|x-y|)\mu'(x)\mu(y)d\Gamma_x d\Gamma_y$$

ii) *La forme bilinéaire symétrique $b(\mu, \mu')$ est coercive sur $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ c'est à dire, il existe une constante $c > 0$, tel que :*

$$b(\mu, \mu') \geq c \left\|\mu\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \qquad \forall \mu \in H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

A présent, comme on l'a mentionné auparavant, dans cette étude on présente une approche différente, qui consiste à interpréter les opérateurs $S, (I + D)$ comme des opérateurs pseudo-différentiels pour obtenir des propriétés communes.

Maintenant, à chaque opérateur intégral, on associe par la transformée de fourier, ce qu'on appelle le symbole complet. Après, on exige que celui-ci, admet une expansion asymptotique pour τ très grand avec pour premier terme d'ordre supérieur en τ, le symbole principal (section (1.8)). Si on désigne l'ordre du symbole principal par 2α alors l'opérateur intégral est appelé opérateur pseudo-différentiel d'ordre 2α. Ainsi, on est en mesure de formuler le

Théorème 2.2.5

i) *Les opérateurs $S, (I+D)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels de symbole principal $|\tau|^{-1}, 1$ et d'ordre $-1, 0$ respectivement.*

ii) *Ils sont fortement elliptiques : c'est-à-dire, il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$\Re e \ \sigma(x, \tau) \geq c > 0 \tag{*}$$

pour tout $|\tau| = 1$ et $x \in \Gamma$ avec c indépendant de x et τ et σ est le symbole principal.

Preuve.

i1) La partie principale dans $(I + D)$ est donnée par l'opérateur I

$$I\mu(x) = \mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int \overset{ix\tau}{\exp} \mathcal{F}\left[\mu\right] d\tau$$

Ceci implique que

$$\sigma_I(x, \tau) = 1 = |\tau|^0$$

i2) Pour l'opérateur S, on considère, la représentation paramétrique de Γ suivante :

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = x(t'), \end{cases}$$

D'après la formule de Taylor on peut écrire :

$$x(t) - x(t^{'}) = (t - t^{'})x^{'}(t) + R(t, t^{'})$$

D'où

$$\left| x(t) - x(t^{'}) \right| = (\bar{t}^{2}(\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)) + R(t, \bar{t}))^{\frac{1}{2}} = (\bar{t}^{2}(1 + R_1(t, \bar{t})))^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) = 1 \quad \bar{t} = t - t^{'} \quad \text{et} \quad R_1 = R\bar{t}^{-2}$$

où

$$|R_1| = \left| R\bar{t}^{-2} \right| \leq c \left| \bar{t} \right| \leq 1$$

Ainsi

$$|x - y| = \left[\bar{t}^{2}(1 + R_1(t, \bar{t})) \right]^{\frac{1}{2}} = \left| \bar{t} \right| (1 + R_1(t, \bar{t}))^{\frac{1}{2}} = \left| \bar{t} \right| \left[1 + R_1/2 - R_1^2/8 + ... \right]$$

Ce qui fait que

$$\begin{aligned} \log |x - y| &= \log \left| \ x(t) - x(t^{'}) \right| = \log(\left| \bar{t} \right| (1 + R_1)^{\frac{1}{2}}) = \log \left| \bar{t} \right| + \frac{1}{2} \log |1 + R_1| \\ &= \log \left| \bar{t} \right| + \frac{1}{2} \left[R_1 - R_1^2/2 + ... \right] \end{aligned}$$

on a $\frac{1}{2} \left[R_1 - R_1^2/2 + ... \right]$ indéfiniment différentiable car $|R_1| < 1$

Soit maintenant une fonction de troncature χ telle que $\chi(\left| \bar{t} \right|) = 1$.

Alors,

$$S\mu(t) = A_1\mu(t) + A_2\mu(t)$$

avec

$$A_1\mu(t) = -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \chi(\left|\bar{t}\right|).\log\left|\bar{t}\right|.\mu(t^{'})dt^{'} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it\bar{t}).\mathcal{F}\left\{\mu(\bar{t})\right\}.p_s(t,\bar{t})d\bar{t}$$

A_2 est un opérateur régularisant, c'est-à-dire, de noyau C^∞ et $p_s(t,\bar{t})$ donné par

$$p_s(t,\bar{t}) = -\frac{1}{\pi}\int \exp(it\bar{t}).\chi(\left|\bar{t}\right|).\log\left|\bar{t}\right| d\bar{t}$$

qui représente le symbole complet de S.

Sachant que

$$\chi(\left|\bar{t}\right|) = \chi(0) + \bar{t}.\chi^{'}(0) + ...,$$

alors le symbole principal sera donné par

$$\sigma_s(t,\tau) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left\{\chi(0)\log\left|\bar{t}\right|\right\} = \left|\tau\right|^{-1},$$

$\mathcal{F}\{.\}$ étand désigne la transformation de Fourier. Ce qui fait que l'ordre de l'opérateur S est égal à -1.

ii) évident d'après la définition vérifie la condition (*).

■

Le symbole principal de chaque opérateur pseudo-différentiel, nous est nécessaire, afin de montrer certaines propriétés concernant ces opérateurs et en particulier, la propriété de forte ellipticité, qui à son tour, nous permet d'avoir une inégalité de type énergétique

Lemme 2.2.3 *Les opérateurs*

$$S : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$
$$D : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

sont continus

Preuve.

i) On a : d'aprés la norme (1.32)

$$\|S\mu\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Gamma (1+|\tau|^2)^{\frac{1}{2}}. |\mathcal{F}\{S\mu(\tau)\}|^2 \, d\tau$$

et

$$\mathcal{F}\{S\mu(\tau)\} = \sigma_S \mathcal{F}\{\mu(\tau)\} \quad \text{avec} \quad \sigma_S(x,\tau) \leq c_1(1+|\tau|^2)^{-1}$$

Ce qui fait que

$$\begin{aligned}|\sigma_S \mathcal{F}\{\mu(\tau)\}|^2 &\leq \left|c_1(1+|\tau|^2)^{-1}\mathcal{F}\{\mu(\tau)\}\right|^2 \\ &\leq c_1^2(1+|\tau|^2)^{-2}|\mathcal{F}\{\mu(\tau)\}|^2\end{aligned}$$

Ceci implique alors que

$$\begin{aligned}\|S\mu\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq c_1^2 \int_\Gamma (1+|\tau|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|\tau|^2)^{-2}|\mathcal{F}\{\mu\}|^2 \, d\tau \\ &\leq c_2 \int_\Gamma (1+|\tau|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|\tau|^2)^{-1}|\mathcal{F}\{\mu\}|^2 \, d\tau \\ &\leq c_2 \int_\Gamma (1+|\tau|^2)^{-\frac{1}{2}}|\mathcal{F}\{\mu\}|^2 \, d\tau \\ &\leq c_2 \|\mu\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\end{aligned}$$

d'ou la continuité de S

ii) La démonstration pour l'opérateur D se fait d'une manière analogue.

■

2.2.4 Existence et Unicité

La coercivité pour les opérateurs est satisfaite dans la forme de l'inégalité de Gårding (voir théorème (1.6.4)).

En effet, on a le théorème suivant :

Théorème 2.2.6 *Il existe une constante $c_1 \succ 0$ telle que pour tout $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ on a :*

$$\langle S\mu, \mu \rangle \geq c_1 \left\| \mu \right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \langle S_1\mu, \mu \rangle \tag{2.24}$$

où

$$S_1 : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \textit{est} \quad \textit{compact}$$

Preuve. pour montrer (2.24), Soit $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. En utilisant la transformation de Fourier. On réduit la situation au cas $\Gamma = \mathbb{R}$. D'après l'équation de Parseval, on a

$$\langle S\mu, \mu \rangle = \int_{\mathbb{R}} S\mu.\mu dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\left\{S\mu\right\}.\mathcal{F}\left\{\mu\right\} dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\tau\right|^{-1}.\left|\mathcal{F}\left\{\mu\right\}\right|^2 d\tau$$

Soit maintenant un opérateur pseudo-différentiel S_0 de symbole principal

$$\sigma_{S_0} = (1 + |\tau|^{\frac{1}{2}})^{-2}$$

On a alors :

$$S = S_0 - S_0 + S = S_0 - S_1$$

avec S_1 un opérateur d'ordre -2, d'où compact de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans est défini positif, c'est-à-dire, il existe une constante c positive telle que :

$$\langle S_0\mu, \mu\rangle \geq c \left\|\mu\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \tag{2.25}$$

En effet,

$$c(1+|\tau|^2)^{-\frac{1}{2}} \leq (1+|\tau|^{\frac{1}{2}})^{-2} \qquad \forall\tau \in \mathbb{R}$$

Ce qui fait que

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (1+|\tau|^{\frac{1}{2}})^{-2} \left|\mathcal{F}\left\{\mu\right\}\right|^2 d\tau \geq c \int\limits_{\mathbb{R}} (1+|\tau|^2)^{-\frac{1}{2}} \left|\mathcal{F}\left\{\mu\right\}\right|^2 d\tau.$$

D'où (2.25).

D'où

$$\langle S\mu, \mu\rangle \geq c_1 \left\|\mu\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \langle S_1\mu, \mu\rangle$$

■

Maintenant, pour la suite de notre étude, on a besoin de la propriété suivante de Ω voir page bibliographie dans [38], à savoir

$$diamètre(\Omega) < 1 \tag{2.26}$$

Cette condition revient dire que la capacité analytique ou bien le rayon conforme de Γ est infèrieur de l'unité.

Dans ce cas, on a le

Théorème 2.2.7 *Soit $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ donné. Alors*

i) $S\mu(x) = 0$ *implique que* $\mu = 0$.

ii) *l'opérateur*

$$S : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est bijectif.

Preuve.

i) L'unicité est assurée d'après l'unicité du problème (p1). En effet, si $S(x) = 0$, alors le problème de Dirichlet (p1) devient un problème avec une condition homogène et celui-ci possède une seule solution triviale $\mu(x) = 0$. D'où le résultat.

ii) D'après **i)** l'opérateur S est injectif. Maintenant, d'aprés l'inégalité de Gårding (voir théorème (1.6.4)), chaque opérateur différent de l'opérateur défini-positif par une perturbation compacte.

Ainsi, cet opérateur est un opérateur d'indice zéro. D'où la surjection de S.

■

2.3 Méthode du potentiel pour le Laplacien dans un domaine régulier pour Neumann

2.3.1 Formulation du probléme

Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ simplement connexe, de frontière $\Gamma \in C^\infty$. On aura besoin des espaces de Sobolev.

Considérons maintenant le problème suivant pour une fonction $u \in H^1(\Omega)$.

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_n u &= g \quad , \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{p2}$$

où Δ est l'opérateur de laplace, et g est une fonction donnée sur la frontière Γ telleque $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$,$(\frac{\partial}{\partial n})$ représente la dérivée suivant la normale qui est dirigée vers l'extérieur du domaine Ω.

Le problème (p2) constitue le problème de Neumann intérieur pour le Laplacien. Ce problème modélise, par exemple, le mouvement d'un corps solide dans un fluide incompressible parfait en hydrodynamique.

2.3.2 Etude variationnelle

Comme pour le problème de Dirichlet, l'étude est faite dans le cas où Ω est un domaine intérieur. L'espace dans lequel on cherche la solution de problème (p2) est $H^1(\Omega, \triangle)$ et l'espace de Hilbert V est donné cette fois-ci par

$$V = H^1(\Omega)$$

car la condition au bord est une condition naturelle.

Soit maintenant $v \in H^1(\Omega)$ Par analogie avec le problème (p1), la formule de Green (1.34) nous permet d'avoir

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega = \int_{\Gamma} g v d\Gamma \tag{2.27}$$

Si on pose

$$a_2(u, v) = a_1(u, v)$$

et

$$L_2(v) = \int_{\Gamma} g v d\Gamma \qquad v \in H^1(\Omega) \tag{2.28}$$

le problème (p2) se réduit alors au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver} \quad u \in H^1(\Omega) \quad \text{tellque :} \\ a_2(u,v) = L_2(v) \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad v \in H^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.29}$$

Théorème 2.3.1 **i)** $L_2(.)$ *est une forme linéaire continue.*

ii) $a_2(.,.)$ *est une forme bilinéaire continue.*

iii) $a_2(.,.)$ *n'est pas* H^1*-elliptique, mais elle est* $H^1 \backslash P_0$ *-elliptique, c'est-à-dire qu'il existe un* $\alpha > 0$ *tel que*

$$a_2(u,u) \geq \|u\|^2_{H^1 \backslash P_0} \tag{2.30}$$

avec P_0 *l'espace des polynomes d'ordre zéro muni.*

Preuve.

i) évident.

ii) La bilinéairité de $a_2(.,.)$ est evidente pour la continuité de a_2, on va montrer, pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$

$$|a_2(u,v)| \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

En efft on a

$$\begin{aligned} |a_2(u,v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v d\Omega \right| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{avec } c = 1 \end{aligned}$$

d'ou la continuité de $a_2(.,.)$

iii) On va montre d'abord par un contre exemple que (2.6) n'est pas H^1-elliptique. Pour cela, supposons le contraire et soit la fonction caractéristique $u = \chi_\Omega$ alors, $\chi_\Omega \in H^1(\Omega)$ et $\|\chi_\Omega\|_{H^1} = mess(\Omega) \neq 0$.

Or

$$a_2(\chi_\Omega, \chi_\Omega) = a_2(1,1) = 0 \geq \alpha \|\chi_\Omega\|_{H^1}^2$$

Ce qui imlpique que $\alpha \geq 0$ et ceci est une contradiction.

Pour montrer maintenant (2.30), considérons l'espace P_0 des polynomes d'ordre zéro :

$$P_0 = \left\{ \; p_0 \in H^1(\Omega) \quad , \quad p_0 = C^{te} \quad \text{dans} \quad \Omega \; \right\}$$

et soit Q un sous espace de $H^1(\Omega)$ défini comme suit :

$$Q := \left\{ \; v \in H^1(\Omega) \quad (v, p_0) = 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \; \right\}$$

Notons que (v, p_0) est égal à $(v, 1) = 0$.

où Q est le complément orthogonal de P_0 dans $H^1(\Omega)$, C'est-à-dire, d'après le théorème de projection (1.1) voir [29], pour tout élément $u \in H^1(\Omega)$ on a .

$$u = v + p_0 \quad v \in Q \quad \text{et} \quad p_0 \in P_0$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (2.29) est donnée par $v + p_0$ où v est solution unique dans Q. En effet, pour tout $v \in Q$ on a

$$a_2(v, v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx. \tag{2.31}$$

La norme dans l'espace $H^1 \backslash P_0$ est définie par

$$\|\dot{u}\|_{H^1 \backslash P_0} = \inf_{u \in \dot{u}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \simeq \inf_c \|u + c\|_{H^1(\Omega)}$$

Or d'après l'inégalité de Poincaré (1.2.1), on a

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \beta \left\{ \int\limits_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + (\int\limits_\Omega v dx)^2 \right\}$$

Ce qui fait que

$$\int\limits_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \geq \frac{1}{\beta} \|v\|^2_{H^1} = \frac{1}{\beta} \|v\|^2_Q \, ,$$

car $(v, 1) = 0$ et Q est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ Ainsi, (2.31) devient

$$a_2(v, v) = \int\limits_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \geq \frac{1}{\beta} \|v\|^2_Q \, ,$$

c'est-à-dire la $Q-$coercivité de $a_2(.,.)$ avec $\alpha = \frac{1}{\beta}$

■

Théorème 2.3.2 *Le problème (2.29) possède une seul et unique solution faible dans $H^1(\Omega) \backslash P_0$ avec la condition de solvabilité suivante :*

$$\int\limits_\Gamma g d\Gamma = 0 \tag{2.32}$$

Preuve. voir [16]. ■

Pour interpréter le problème (2.29), nous considérons l'équation

$$\int\limits_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int\limits_\Gamma g v d\Gamma \tag{2.33}$$

par application inverse de la formule de Green à son terme de gauche et par analogie avec le problème (p1), on trouve la première équation du problème (p2) à savoir,

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

Ceci à son tour implique que

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = 0 \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad v \in V$$

En appliquant la formule de Green à cette équation, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Gamma} \partial_n u v d\Gamma \qquad \forall v \in V \tag{2.34}$$

Si on retranche maintenant (2.34) de (2.33), on obtient :

$$\int_{\Gamma} (\partial_n u - g).v d\Gamma = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Ceci implique son tour

$$\partial_n u = g \text{ sur } \Gamma$$

d'après la densité des traces de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

Ainsi, le problème équivalent au problème variationnel (2.29) est le problème (p2).

2.3.3 Réduction en équations intégrales

Formules de représentations

Théorème 2.3.3 *Les équations intégrales liées au problème (p2) sont données par*

$$(I - D')\mu = 2g \qquad Tv = -2g \tag{2.35}$$

où D', T *sont données par*

$$D'\mu(x) := \frac{-1}{\pi}\int_{\Gamma} \mu(y).\partial_{n_y} \log|x-y|\, d\Gamma_y$$
$$Tv(x) := \frac{-1}{\pi}\int_{\Gamma} v(y).\partial_{n_x}\partial_{n_y} \log|x-y|\, d\Gamma_y$$

avec $x, y \in \Gamma$ *et l'opérateur* D' *désigne l'adjoint de* D.

Preuve. On cherchera la solution de problème (p2) sous la forme d'un potentiel de double couche.

En considérant la dérivée normale de (2.18) et après passage à la limite, on obtient une équation intégrale de deuxième éspèce pour (p2), à savoir :

$$\partial_n u(x)\,|_{\Gamma} = g = +\tfrac{1}{2}\mu(x) + \tfrac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \mu(y).\partial_{n_y} \log|x-y|\, d\Gamma_y \qquad x, y \in \Gamma \tag{2.36}$$

Si par contre, on prend la dérivée normale de (2.20), on obtient après passage à la limite une équation définie comme une valeur principale, à savoir :

$$\partial_n u(x)\,|_{\Gamma} = g = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} v(y).\partial_{n_x}\partial_{n_y} \log|x-y|\, d\Gamma_y \qquad x, y \in \Gamma \tag{2.37}$$

■

On remarque que le noyau associé à l'opérateur T dans (2.35), est

$$\partial_{n_x}\partial_{n_y} \log|x-y| = o(\frac{1}{|x-y|^2}),$$

Ce noyau est donc non intégrable, alors cette expression doit être éxprimée à l'aide de distributions qui sont des parties finies.

Propriétés des opérateurs intégraux au bord

Concernant la deuxième équation intégrale donnée par

$$Tv = -2g,$$

les auteurs introduisent comme pour l'équation de première espèce, l'espace

$$K^{'} = \left\{ v \in (H^1(\Omega, \Delta)/P_0) \times W^1(\Omega^{'}, \Delta)/supp(\Delta v) \subset \Gamma, [\partial_n v] = 0 \right\}$$

Soit à présent, l'application J qui associe $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/P_0$ à $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et qui vérifie la condition d'existence

$$\langle g, 1 \rangle_\Gamma = 0$$

Alors l'application liant $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ à $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/P_0$ est un isomorphisme.

Pour l'étude variationnel du problème au bord, ils établissent le résultat suivant :

Théorème 2.3.4 *[23]*

i) *le problème variationnel lié à (2.35) est donné par*

$$b(v, v^{'}) = \int g(y) v^{'}(y) d\Gamma_y \qquad \forall v^{'} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/P_0$$

où

$$b(\mu, \mu^{'}) = -\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma (v(x) - v(y)) \left(v^{'}(x) - v^{'}(y) \right) \partial_{n_x} \partial_{n_y} \log |x - y| \, d\Gamma_x d\Gamma_y$$

pour tout $v, v^{'} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/P_0$.

Théorème 2.3.5 **i)** *Les opérateurs* $(I - D^{'}), T$ *sont des opérateurs pseudo-différentiels de symbole principal* $1, |\tau|$, *et d'ordre* $0, 1$ *respectivement.*

ii) *Ils sont fortement elliptiques : c'est-à-dire, il existe une constante $c \succ 0$ telle que :*

$$\Re e\ \sigma(x,\tau) \geq c > 0 \tag{**}$$

pour tout $|\tau| = 1$ et $x \in \Gamma$avec c indépendant de x, τ, σ étant le symbole principal.

Preuve.

i1) La partie principale dans $(I + D^{'})$ est donnée par l'opérateur I

$$I\mu(x) = \mu(x) = \frac{1}{2\pi}\int \exp^{ix\tau} \mathcal{F}\left\{\mu(\tau)\right\} d\tau$$

Ceci implique que

$$\sigma_I(x,\tau) = 1 = |\tau|^0$$

i2) Pour l'opérateur T on sait que

$$\partial_{n_x}\partial_{n_y} \log|x-y| = o(\frac{1}{|x-y|^2}) = o(\left|\overline{t}\right|^{-2}). \tag{2.38}$$

Considérons maintenant une fonction de troncature $\overline{\chi}(|t|) = 1$ dans un voisinage fixe de zéro.

Alors l'opérateur T sécrit

$$\begin{aligned} Tv(x) = &-\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} \chi(|t|)\partial_{n_x}\partial_{n_y} \log|x-y|\, v(t^{'})dt^{'} \\ &-\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} (1-\chi(|t|))\partial_{n_x}\partial_{n_y} \log|x-y|\, v(t^{'})dt^{'} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Remplacons (2.38) dans (2.39), on obtient

$$Tv(x) = B_1 v(t) + B_2 v(t), \tag{2.40}$$

Avec

$$B_1v(t) = -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \chi(\left|\overline{t}\right|)(-\left|\overline{t}^{-2}\right| v(t^{'})dt^{'} \tag{2.41}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it\overline{t})\mathcal{F}\left\{v(\overline{\tau})\right\} P_T(t,\overline{t})d\overline{t}$$

et B_2 un opérateur régularisant, c'est-à-dire, de noyau C^∞ et $P_T(t,\overline{t})$ donné par

$$P_T(t,\overline{t}) = -\frac{1}{\pi}\int \exp(it\overline{t})\chi(\left|\overline{t}\right|)\overline{t}^{-2}d\overline{t} \tag{2.42}$$

représente le symbole complet de T. Sachant que

$$\chi(\left|\overline{t}\right|) = \chi(0) + \overline{t}.\chi^{'}(0) + ..., \tag{2.43}$$

alors le symbole principal sera donné par

$$\sigma_T(t,\tau) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left\{\chi(0)\overline{t}^{-2}\right\} = |\tau|\,,$$

et on déduit l'ordre de T qui est égale à 1.

ii) évident d'aprés la définition vérifier la condition (**).

■

Lemme 2.3.1 *Les opérateurs*

$$D^{'} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$
$$T : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

sont continus.

Preuve. Pour l'opérateur T, on a d'aprés la norme (1.32) :

$$\|Tv\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Gamma (1+|\tau|^2)^{-\frac{1}{2}}.\left|\mathcal{F}\{Tv(\tau)\}\right|^2 d\tau$$

$$\mathcal{F}\{Tv(\tau)\} = \sigma_T \mathcal{F}\{v(\tau)\} \quad \text{avec} \quad \sigma_T(x,\tau) = |\tau|$$

Alors

$$\left|\sigma_T \mathcal{F}\{v(\tau)\}\right|^2 = |\tau|^2 \left|\mathcal{F}\{v(\tau)\}\right|^2 \leq c\left(1+|\tau|^2\right)\left|\mathcal{F}\{v(\tau)\}\right|^2$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\|Tv\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq c\int_\Gamma \left(1+|\tau|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+|\tau|^2\right)\left|\mathcal{F}\{v\}\right|^2 d\tau \\
&\leq c\int_\Gamma \left(1+|\tau|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\mathcal{F}\{v\}\right|^2 d\tau \\
&\leq C^{te}\,\|v\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

d'ou la continuité de T.

ii) La démonstration pour l'opérateur D' se fait d'une manière analogue.

■

2.3.4 Existence et Unicité

L'inégalité de coercivité pour les opérateurs est satisfaite dans la forme de **l'inégalité de Gårding**.(voir théorème (1.6.4)). En effet, on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.6 *Il existe une constante $c_1 \succ 0$ telle que pour tout $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ on a :*

$$\langle Tv, v\rangle \geq c_1\,\|v\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \langle T_1 v, v\rangle \tag{2.44}$$

où $\qquad T_1 : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *est compact.*

Preuve. Pour montrer (2.44), considérons alors $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et procédons de la même manière que pour l'opérateur S.

$$\langle Tv, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} Tv.vdx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\{Tv\}.\mathcal{F}\{v\}\, d\tau = \int_{\mathbb{R}} |\tau| \,.\left|\mathcal{F}\{v\}\right|^2 d\tau$$

Soit maintenant un opérateur pseudo-différentiel T_0 de symbole principal

$$\sigma_{T_0} = (1 + |\tau|^{\frac{1}{2}})^2$$

On a alors :

$$T = T_0 - T_0 + T = T_0 - T_1$$

avec T_1 un opérateur pseudo-différentiel d'ordre zéro ; d'où compact de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

T_0 est défini positif, c'est-à-dire, il existe une constante c telle que :

$$\langle T_0 v, v\rangle \geq c \left\|v\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

D'où

$$\langle Tv, v\rangle \geq c_1 \left\|v\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \langle T_1 v, v\rangle$$

Remarquons que pour les opérateurs $(I+D)$ et $(I+D^{'})$, D et $D^{'}$ ce sont les opérateurs qui constituent les perturbations compactes. ∎

Pour la suite de notre étude, on a besoin de la condition (2.26).

Dans ce cas, on a le

Théorème 2.3.7 *Soit* $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *donné. Alors*

i) $Tv(x) = 0$ *implique que* $v = cte$.

ii) *l'opérateur*

$$T : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)/P_0$$

est bijectif.

Preuve.

i) d'après (2.35) si $Tv(x) = 0$, le problème de Neumann devient un problème avec une condition homogène et ceci possède une solution une constante près.

ii) L'opérateur T est injectif. Maintenant, d'après **l'inégalité de Gårding**, chaque opérateur diffèrent de l'opérateur défini positif par une perturbation compacte. Ainsi, cet opérateur est un opérateur d'indice zéro. D'où la surjection de T.

■

Chapitre 3

Méthode des équations intégrales pour un probléme non linéaire

3.1 Introduction

Ce chapitre, est consacré à l'étude du problème de laplace avec des conditions non linéaires dans un domaine Simplement connexe comme dans [33],[31]. L'approche se résume à résoudre une équation intégrale non linéaire avec des donnés inconnues au bord, moyennant des hypothèses appropries sur la partie non linéaire.

Puisque l'opérateur qui intervient dans l'équation intégrale non linéaire obtenu est monotone, on établie leur résultat d'existence et d'unicité de la solution par le "Théorème de Browder et Minty" [32],[36].

Les problèmes impliquant des non linéarités forment une base des modèles mathématiques de divers phénomènes et processus équilibrés en mécanique et en physique. En particulier, le transfert de la chaleur équilibré. En outre quelques problèmes électromagnétiques contiennent des non-linéarités dans les conditions de frontière, par exemple les problèmes, où la conductivité électrique de la frontière est variable [8]. D'autres applications surgissent dans le rayonnement thermique et le transfert de la chaleur [11],[8].

3.2 Problème du Laplacien avec des conditions intégrales non linéaires au bord

3.2.1 Formulation du problème

Ici, on cherche la solution de l'équation de Laplace avec des conditions non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -g(x, u(x)) + f(x) & x \in \Gamma \end{cases} \tag{p3}$$

On note que l'opérateur intégrale non linéaire de frontière définie par

$$G(u) = g(x, u(x)) = \int_{\Gamma} \mathcal{K}(x, y, u(y))\, d\delta_y \quad , \quad x \in \Gamma$$

est l'opérateur intégral non linéaire de type Urysohn.

$$G : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

Dans le problème (p3), on suppose que Ω est une region ouverte bornée dans $\mathbb{R}^2$ avec une frontière lisse $\partial\Omega = \Gamma$, et

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \mathcal{K} : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

sont des fonctions à valeurs réels.

donc le problème (p3) devient :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n} = G(u) - f(x) & x \in \Gamma \end{cases}$$

3.2.2 Représentation de la solution du problème aux limites non linéaires

Nous cherchons une représentation de u, défini dans Ω et satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n} = G(u) - f(x) & x \in \Gamma \end{cases}$$

La formule de green (3^{eme} formule (1.35)) pour l'opérateur Δ appliquée à la solution élémentaire nous donne :

$$\int_{\Omega} (\Delta u.E - \Delta E.u)\, dx = \int_{\Gamma} (\partial_n u.E - \partial_n E.u)\, d\delta$$

avec

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Delta E = \delta \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \delta.u dx = u(x)$$

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n_y} \log|x-y|\, d\delta_y + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y} \log|x-y|\, d\delta_y \qquad x \in \Omega \tag{3.1}$$

Par passage à la limite, $x \to \Gamma$:

$$u(x) - \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y} \log|x-y|\, d\delta_y = -\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n_y} \log|x-y|\, d\delta_y \qquad x \in \Gamma \tag{3.2}$$

Introduisons les notations suivantes :

$$Ku\,(x) := \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} u(y)\tfrac{\partial}{\partial n_y}\log|x-y|\,d\delta_y \qquad x\in\Gamma$$
$$S\Psi\,(x) := -\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \Psi\,(y)\log|x-y|\,d\delta_y \qquad x\in\Gamma$$

En peut écrire l'équation (3.2) :

$$(I-K)\,u = S\left(\tfrac{\partial u}{\partial n}\right) \qquad x\in\Gamma \tag{3.3}$$

Il est clair que si $u\in H^1(\Omega)$ est la solution de le problème (p3), Alors les donnés de Cauchy

$$\left(\begin{array}{ccc} u_{|\Gamma} & , & \frac{\partial u}{\partial n_{|\Gamma}} \end{array}\right)$$

satisfont l'équation (3.3) Alors, on a la condition au bord :

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = G\,(u) - f$$

En remplace dans (3.3) :

$$(I-K)\,u + SG\,(u) = S\ f \tag{3.4}$$

Pour étudier la solvabilité de l'équation intégrale non linéaire (3.4), on a besoin des hypothèses suivantes :

- $(\mathcal{H}_1)$ Nous supposons que $diam\,(\Omega) < 1$. (L'opérateur S peut avoir des fonctions propres [18], alors $(\mathcal{H}_1)$ assure que l'opérateur $S : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un isomorphisme pour tout $s\in\mathbb{R}$).
- $(\mathcal{H}_2)$ La fonction g est une fonction carathéodory c'est-à-dire : $g\,(.,u) : \Gamma\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est mesurable $\forall u\in\mathbb{R}$ et $g\,(.,u)$ est continue $\forall x\in\Gamma$

- $(\mathcal{H}_3)$ Nous supposons que $\frac{\partial}{\partial u} g(x,u)$ est Borel mesurable et satisfait :

$$0 < l \leq \tfrac{\partial}{\partial u} g(x,u) \leq L < \infty \qquad u \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

La condition (3.5) équivalent dire que l'opérateur de Nemytskii $G : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$, défini par $G(u)(x) = g(x, u(x))$ est Lipschitziene continu et fortement monotone :

$$\langle G(u) - G(v), u - v \rangle \geq c \|u - v\|_0^2 \qquad \forall u, v \in L^2(\Gamma) \tag{3.6}$$

Les propriétés des opérateurs intégraux obtenus dans (3.4) sont données par le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 $\forall s \in [0,1]$, *l'opérateur*

$$u \to Ku + SG(u)$$

est Lipschitziene continu de $H^s(\Gamma)$ *dans* $H^{s+1}(\Gamma)$.

3.2.3 Existence et Unicité

Théorème 3.2.2 $\forall f \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, *il existe une unique solution* $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *tq :*

$$(I - K)u + SG(u) = S\ f$$

Preuve. D'abord l'opérateur $S : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un isomorphisme. Alors l'étude de l'existence et l'unicité de (3.4) revient l'étude de l'équation intégrale non linéaire

suivante :

$$D(u) = S^{-1}(I - K)u + G(u) = f \quad , \quad x \in \Gamma \tag{3.7}$$

Il faut montrer que l'opérateur

$$D : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{3.8}$$

est continu et fortement monotone.

La continuité est claire pour S, K, G d'aprés le thèorème (3.2.1), il reste montrer que D est fortement monotone.

Soit la fonction $\Psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ définie par :

$$\Psi = S^{-1}(I-K)\,u \qquad \forall u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est la dérivé normale de la fonction harmonique

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2\pi}\int_\Gamma u(y)\tfrac{\partial}{\partial n_y}\log|x-y|\,ds_y - \tfrac{1}{2\pi}\int_\Gamma \Psi(y)\log|x-y|\,ds_y \quad , \quad x\in\Omega \tag{3.9}$$

ceci signifie que Φ satisfait le probléme

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 & x\in\Omega \\ \Phi(x) = u(x) & x\in\Gamma \end{cases}$$

D'après la formule de Green ($2^{\acute{e}me}$ formule de green (1.34)) :

$$\left\langle S^{-1}(I-K)\,u, u\right\rangle = \int_\Gamma \Psi\ u\ ds = \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial n_y}u(y)ds_y = \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial n_y}\Phi(y)\,ds_y = \int_\Omega (\nabla\Phi)^2\,dx$$

donc pour $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\left\langle S^{-1}(I-K)(u-v), u-v\right\rangle = \int_\Omega (\nabla F)^2\,dx = |F|^2_{H^1(\Omega)} \tag{3.10}$$

Ici, $F = \Phi_1 - \Phi_2$ est la fonction harmonique de couchy $u - v$ et $S^{-1}(I-K)(u-v)$.

Autrement dit on a, en tenant compte de (3.6) :

$$\langle G(u) - G(v), u - v\rangle \geq l \|u - v\|_0^2 \tag{3.11}$$

Il reste à preuver que :

$$\|u - v\|_0 \geq c \|F\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.12}$$

Par conséquent, compte tenu de (3.10), on obtient :

$$\langle D(u) - D(v), u - v\rangle \geq c \|F\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq c^{'} \|u - v\|_{\frac{1}{2}}^2$$

car :

d'aprés (3.7) et (3.10) on a

$$\begin{aligned}\langle D(u) - D(v), u - v\rangle &= \left\langle S^{-1}(I-D)(u-v), u-v\right\rangle + \langle G(u) - G(v), u - v\rangle \\ &= |\Phi_1 - \Phi_2|_{H^1(\Omega)}^2 + \langle G(u) - G(v), u - v\rangle\end{aligned}$$

et avec (3.6) on obtient l'inégalité

$$\langle D(u) - D(v), u - v\rangle \geq |\Phi_1 - \Phi_2|_{H^1(\Omega)}^2 + a\ mess(\Gamma) \|u - v\|_0^2$$

et d'après (3.12) on a

$$\begin{aligned}\langle D(u) - D(v), u - v\rangle &\geq |\Phi_1 - \Phi_2|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{a\ mess(\Gamma)}{c_3^2} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \min\left\{1, \frac{a\ mess(\Gamma)}{c_3^2}\right\} \left(|\Phi_1 - \Phi_2|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\end{aligned}$$

$$\geq \min \left\{ 1, \frac{a \; mess\,(\Gamma)}{c_3^2} \right\} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{H^1(\Omega)}^2$$
$$\geq c_4 \|u - v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \geq c' \|u - v\|_{\frac{1}{2}}^2$$

d'après le thèorème de trace [4],[26].

Pour montrer (3.12), observons qu'il existe $\chi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ Tq :

$$S\chi = u - v \quad \text{dans} \quad \Gamma \qquad , \qquad \text{voir} \quad [26].$$

$$\forall x \in \Omega \quad \text{on a} \quad -\tfrac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \chi\,(y) \log |x - y| \, ds_y = F\,(x) \tag{3.13}$$

Le potentiel de simple couche

$$\chi \to -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \chi\,(y) \log |x - y| \, ds_y$$

est continue de $H^s\,(\Gamma)$ dans $H^{s+\frac{3}{2}}\,(\Omega)\,, \forall s \in \mathbb{R}$. Pour $s = -\frac{3}{2}$ voir [13],[18]. on obtient :

$$\|F\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \|\chi\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \leq c_2 \|u - v\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_3 \|u - v\|_0$$

avec c_1, c_2 et c_3 des constantes positives.

par conséquence

$$\|u - v\|_0 \geq \frac{1}{c_3} \|F\|_{L^2(\Omega)} \geq c \|F\|_{L^2(\Omega)}$$

Donc l'inégalité (3.12). ■

Exemple

Ici on va donner un exemple pour illustrer les résultats théoriques. On considère le problème harmonique

$$\begin{cases} \Delta u\left(x\right)=0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}\left(x\right)+\int\limits_{\Gamma}\left(2u\left(y\right)+\sin u\left(y\right)\right)d\delta_{y}=f\left(x\right) & \text{sur} \quad \Gamma \end{cases} \tag{3.14}$$

où l'équation intégrale non linéaire de type Urysohn est définie par

$$\mathcal{A}u\left(x\right)=\int\limits_{\Gamma}\left(2u\left(y\right)+\sin u\left(y\right)\right)d\delta_{y} \quad , \quad x\in\Gamma$$

et le domaine est

$$\Omega=\left\{ \ x=\left(x_{1},x_{2}\right) \quad ; \quad x_{1}^{2}+x_{2}^{2}<r^{2}<1/4 \ \right\}$$

Clairement, la non linéarité satisfait les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$,$(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$ tel que

$$diam\left(\Omega\right)=2r<1$$

Le noyau $\left(2u\left(y\right)+\sin u\left(y\right)\right)$ de l'équation intégrale non linéaire d'Urysohn est une fonction Carathéodory. Et

$$\frac{\partial\mathcal{K}\left(x,y,u\right)}{\partial u}=2+\cos u\left(y\right)$$

est measurable satisfaisant

$$1\leq\frac{\partial\left(2u\left(y\right)+\sin u\left(y\right)\right)}{\partial u}\leq 3<\infty$$

qui implique que l'opérateur de Nemytskii

$$\mathcal{A} \ : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$$

est Lipschitz continu et fortement monotone tel que

$$2\pi r \|u - v\|_0^2 \leq \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v \rangle \leq 6\pi r \|u - v\|_0^2$$

por tout $u, v \in L^2(\Gamma)$

Conclusion générale

Les équations intégrales linéaires et non linéaires de différents types jouent un rôle important dans plusieurs branches de l'analyse fonctionnelle et leurs applications dans la théorie d'élasticité, physique mathématique et les problèmes de contact (voir [1], [2], [3], [19], [44] et [21]).

En utilisant les potentiels de simple et de double couche et les opérateurs intégraux au bord, il est facile de transformer un problème aux limites pour le Laplacien en équations intégrales sur la frontière. Par exemple, le problème de Dirichlet et Neumann ramène immédiatement à des équations intégrales d'après les représentations intégrales [19]. Cependant, l'analyse de ces méthodes pour d'autre type des conditions au bord semble d'être plus compliquée.

Ici nous intéressons à la méthode des équations intégrales pour une fonction harmonique avec des conditions non linéaires au bord. comme dans [33],[31]. L'approche se résume à résoudre une équation intégrale non linéaire avec des donnés inconnues au bord, moyennant des hypothèses appropries sur la partie non linéaire, pour résoudre le problème au limite du Laplacien avec une condition intégrale non linéaire sur le bord.

Bien que nous avons seulement considérer le problème modèle du Laplacien avec une condition intégrale non linéaire sur le bord d'un domaine de $\mathbb{R}^2$, l'application à d'autres opérateurs elliptiques (par exemple Helmhotz, p-Laplacien, ...) et avec des conditions aux limites plus générales, peut être réalisée.

Bibliographie

[1] ABDOU, M.A., On the solution of linear and nonlinear integral equation, Applied Mathematics and computation, 146 (2003), 857-871.

[2] ABDOU, M.A. and EL-SAYED, W.G. and DEEBS, E.I., A solution of a nonlinear integral equation, Applied Mathematics and computation, 160 (2005), 1-14.

[3] ABDOU, M.A. and BADR, A.A., On a method for solving an integral equation in the displacement contact problem, J. Appl. Math. Comp 127 (2002), 65Ű78.

[4] ADAMS, R.A : Sobolev Spaces. New York : Academic Press 1975.

[5] AMMARI, H., An Introduction to Mathematics of Emerging Biomedical Imaging, Springer, Berlin, (2008).

[6] ATKINSON, K., The Numerical Solution of Integral Equations of the second kind, Published by Combridge University Press, 1997.

[7] AZIZ, A.K. and BABUSKA, I., Mathematical Foundation of the finite element method with applications to partial differential equation, Academic press, New York 1972.

[8] BIALECKI, R. and NOWAK, A.G., Boundary value problems in heat conduction with nonlinear boundary conditions.Applied Mathematical Modelling, vol. 5, pp. 417-421, (1981).

[9] BOUTEFNOUCHET, M., L'analyse des éléments aux bords pour le problème aux limites mixte biharmonique. Demonstration Mathematica, XXV, 1992.

[10] BREBBIA, C.A and TELLES, J. C.F. and WROBEL, L.C., Boundary Element Techniques. Springer. Verlag, Berlin (1984).

[11] BREBBIA, C. A and TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C., Nonlinear elliptic boundary value problems I. Bull. Am. Math. Soc. 69, 862-875 (1963).

[12] CHAZARIN, J. and PIRIOU, A. : Introduction la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. Gauthier-Villars, Paris 1981.

[13] COSTABEL, M. : Boundary integral operators on lipschitz domains : Elementary results.Siam J.Math.Anal, Vol 19,N°3, 1988.

[14] COSTABEL, M. and STEPHAN, P. : A direct boundary integral equation method for tranmission problems. J.M.A.A. 106, 1985.

[15] COSTABEL, M. and WENDLEND, W.L. : Strong ellipticity of boundary integral operators, J. Reine Angew. Math. 372, 39-63, (1986).

[16] DETTMAN, J.W. : Applied Complex Variables, Dover, New York (1984).

[17] GIROIRE, J. and NEDELEC, J.C : Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potefntel. Math. Comp. 32, 1978.

[18] HSIAO, G.C. and WENDLAND, W.L : A finite element method for some integral equations of the first Kind. J. Math. Anal. Appl. 58, 449-481(1977).

[19] HSIAO, G. and WENDLEND, W.L., Boundary integral equations. App. Math. Sciences, Springer 164 (2008).

[20] JACKSON, J.D., Classical Electrodynamics, 3^{rd} edn., JohnWiley Sons, New York, (1999).

[21] JASWON, M.A. and SYMM, G.T., Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics. Academic Press, London-New York, (1977).

[22] KELLOG, O.D. : foundation of Potential theory. Springer-Verlag, Berlin, (1967).

[23] KOZLOV, V.A. and Maz'ya, V.G. and ROSSMANN, J., Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 52. AMS : Providence, RI, 1997.ath. J. 29(1962), 341-346.

[24] MINTY, G., Method Operators in Hilbert Spaces. Duke MJ.J.Khon, L.Nirenberg : On the algebra of pseudo-différential opérators. Comm. Pure Appl. Math. 18, 1965.

[25] MINTY, G. : On a monotonicity method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces. Proc. Natl. Acad. Sci.50,1041-1083(1964).

[26] MIRANDA, C. : Partial differential equations of elliptic type. Springer-Verlag, New York (1970).

[27] NEDELEC, J.C. : Approximation des équations intégrales en mécanique et physique, Palaiseau, 1977.

[28] NEDELEC, J.C. and Planchard, J. : Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème de potentiel exterieur dans $\mathbb{R}^3$. France, 1973.

[29] REKTORYS, K. : Variational methods in mathematic, science and engineering. D. Reidel Publishing Company, 1980.

[30] REMPEL, S et SCHULZE, B.W., Index theory of elliptic boundary problems, II Abteilung Mathematische Monographien, Band 55, Akademia-Verlag, Berlin (1982).

[31] RUOTSALAINEN, K. and WENDLAND, W., On the boundary element method for some nonlinear boundary value problems, Numerische. Mathematik, **53** (1988), 299-314.

[32] RUOTSALAINEN, K and WENDLAND, W., the boundary element method for some nonlinear boundary value problems, Numerische. Mathematik, vol. 53, pp.$299-314$, (1988).

[33] SAKER, H., On the Harmonic problem with boundary integral conditions, International Journal of Analy-sis (2014), ID 976520.

[34] SAKER, H. and BOUSELSAL, N. : « On the Bi-Laplacian Problem with nonlinear Boundary Conditions. Indian J. Pure Appl. Math., 47(3) : 425-435, September 2016.

[35] SAKER, H. and BOUSELSAL, N. : The boundary integral method for the Laplace equation with nonlinear boundary conditions. ASCM , Vol.24, NO. 4 , October (2014).

[36] SMART, D.R., Fixed point theorems, Cambridge University Press, Cambridge, (1980).

[37] SPURK, J.H., Fluid Mechanics, Springer, Berlin, (1997).

[38] STEINBACH, O. : Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value problems. ISBN 978-0-387-31312-2-Springer Science .2008.

[39] STEPHAN, P. : Boundary integral equations for mixed boundary value problems, screen and transmission problems in $\mathbb{R}^3$, Habilitationschrift, Darmstadt, 1983.

[40] TREVE, J. : Introduction to pseudodifferential and fourier integral operators. Plenom press. New York. London (1964).

[41] VLADIMIROV, V.S., Equation of mathematical physics. Mir publishers, (1982).

[42] WENDLEND, W.L. : On some mathematical aspects of boundary element methods for elliptic problems, Fachber. Math. Th Darmstadt, Preprint N° 857, 1984.

[43] WENDLEND, W.L. : On the numerical analysis of boundary element methods. Numerical methods and applications, Sofia, 1985.

[44] ZABREYKO, P.P. et al : Integral equation- a reference text. Noordhoff international Publishing, 1975.