Analyse mathématique et numérique de l'équation des ondes

CHAOUI Romaissa

Département de Mathématiques, Université de Chadli Bendjedid El-Tarf

Juin 2023

Encadré par : Dr. MEHRI Allaoua

Table des matières

REMERCIEMENT

Avant tous, nous tenons à remercier de tout cœur notre Dieu "ALLAH" le tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

En tout premier lieu, mes profonds remerciments, ma gratitude sont destinées à mon encadreur, Dr. **Mehri Allaoua.** Je le remercie sincèrement ses encouragments, ses conseils précieux et pour le temps qu'il ma accordé.

Nous remercions les membres de jury Dr. **Sakri Amine** et Dr.**Djeridi Bochra** d'avoir accepté d'évaluer notre travail.

Finalement, je tiens à exprimer tous mes remerciements et ma profonde gratitude à toute mes enseignants du département de Mathématiques et tous ceux qui m'ont aidè de près ou loin pour achever ce travail.

Dédicace

C'est avec de profonds sentiments, de respect et d'amour, que je dédie ce modeste travail :

À ma chère mère **"Mounira"** qui m'encouragé et aider durant tout le cycle d'études en lui souhaitant longue vie et que dieu la protège.

À mon père **"Farid"** qui n'a jamais cessé de m'encourager dans la poursuite de mes études en m'apportant tout son soutien, que dieu le garde.

À mes sœurs **" Raounek"** et **"Rihem"** qui me sont trés chères.

À mon cher frère **"Abed Elhak"**.

À toute les personnes de ma grande famille et à tous ceux qui me sont chère.

.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons abordé l'étude de certains problèmes physiques liés aux équations de la vibration des ondes qui décrit l'évolution au cours du temps de la température d'un milieu continu homogène soumis à une source des ondes. Une formulation variationnelle, l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que des propriétés qualitatives telles que le comportement asymptotique et la régularité de la solution ont été étudiées. Puis nous avons adapté une méthode de discrétisation par différences finies explicites, dont la stabilité et la convergence de la solution approchée ont été démontrées.

Mots clés : Équation des ondes - Régularité - Schéma explicite - Stabilité.
Mathematical sciences classification 2020 : 35K05 - 35K15 - 35K57 - 35K08.

Abstract

In this thesis, we approached the study of certain physical problems related to the equations of the vibration of the waves which describe the evolution during the time the temperature of a homogeneous continuous medium subjected to a source of the waves. A variational formulation, existence and uniqueness of the solution, and qualitative properties like, asymptotic behavior, and regularity of the solution were studied. Then, we adapted a method of discretization by explicit finite differences, whose stability and convergence of the approximate solution have been demonstrated.

Key Words : Wave equation - Regularity - Explicit scheme - Stability.
Mathematical sciences classification 2020 : 35K05 - 35K15 - 35K57 - 35K08.

Notations

EDP : les équations aux dérivées partielles.

Δ : Laplacien.

∇ : le gradient.

λ : valeur propre.

Δx : le pas en espace.

Δt : le pas en temps.

$L^q(\Omega)$: Espace de Lebesgue, espace des fonctions q intégrable.

$\mathbb{C}(\Omega)$: Espace des fonctions continues.

$W^{1,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev d'ordre 1, espaces des fonctions et leurs 1ères dérivées p intégrables.

$H^1(\Omega)$: Espace de Sobolev pour $p = 2$.

$\mathbb{C}_c^1(\Omega)$: Espace des fonctions continûment dérivables à support compact.

Introduction

L'équation de d'Alembert ou équation des ondes est une équation aux dérivées partielles qui régit la propagation d'une onde. C'est une équation vérifiée par de nombreux phénomènes ondulatoires de la vie courante comme le son ou la lumière.

La formulation a vue le jour au cours du $17^{ème}$ siècle lors de la naissance de la mécanique (Newton, Leibnez,....), et s'est élargi à d'autres sciences, en particulier en physique. Les phénomènes de propagation d'ondes se rencontrent dans de nombreuses applications. On rencontre essentiellement trois types d'ondes [1, 2] : les ondes acoustiques, c'est à dire les ondes qui se propagent dans un fluide (eau ou air par exemple) en dimension trois. Elles interviennent par exemple en acoustique musicale, en acoustique de salle, en acoustique sous-marine, ou pour étudier les phénomène de houle. Les ondes élastiques, c'est à dire les ondes qui se propagent dans un solide. Elles se rencontrent notamment lorsqu'on étudie des problèmes de sismique ou de géophysique, contrôle non destructif. Les ondes électromagnétiques, par exemple la lumière. Ces ondes électromagnétiques sont beaucoup utilisées pour la détection d'objets volants (furtivité radar). Elles interviennent bien sûr aussi dans tout ce qui concerne les télécommunications, en particulier dans l'étude des antennes ou en optique (fibres optiques, optique intégrée). Nous étudierons principalement l'équation des ondes acoustiques qui est le modèle le plus simple (modèle scalaire) [6, 9].

La plupart des équations différentielles et équations aux dérivées partielles de la physique et des sciences pour l'ingénieur sont telles qu'il n'est pas possible d'en déterminer des solutions par voie analytique. Le calcul scientifique est précisément la discipline qui propose des méthodes et des techniques afin de trouver des solutions approchées, en mettant en oeuvre à l'aide d'ordinateurs des algorithmes numériques [4, 7, 8]. Une partie de ce travail est la résolution d'un problème hyperbolique par la méthode de différences finies, on prend l'équation des ondes comme un modèle [5, 10].

On s'intérresse, dans ce mémoire, à la résolution mathématique et numérique de l'équation des ondes. Plus précisément ce travail est structuré en trois chapitres.

Le premier chapître est didiée à l'étude analytique de l'équation des ondes, on a rappelé brièvement quelques notions qui nous seront utiles dans les chapîtres ultérieures, nous avons présenté la formulation variationnelle du problème, un théorème d'existence et d'unicité a été démontré.

Le deuxième chapître, est consacré à l'étude des propriétés qualitatives de la solution comme par exemple la réversibilité en temps, la régularité de la solution et le comportement asymptotique.

Le troisième chapître est consacré à la résolution numérique de l'équation des ondes. On a choisi une discrétisation par la méthode des différences finies explicite centrée. Une analyse de stabilité conditionnelle et la convergence de l'erreur ont été démontrées.

Chapitre 1

Problèmes d'Evolution

L'objectif de ce chapître est de réaliser une étude analytique des problèmes de propagation d'ondes, en présentant une formulation variationnelle du problème, et en prouvant l'existence et l'unicité de la solution.

1.1 Rappel et Généralités

Dans cette partie nous rappelons quelques définitions et théorèmes que nous aurons besoin dans les parties suivantes, pour plus de détails voir [1, 3].

Définition 1.1. *(injection compacte) Soit V et W deux espaces de Hilbert et A une application linéaire continue de V dans W. On dit que A est compacte si l'image par A de la boule unité (ou d'un ensemble borné) de V est relativement compact dans W.*

Théorème 1.1. *(de Rellich) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe $\mathbb{C}^1$, on a les injections compactes suivantes,*
1) Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[\quad$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.
2) Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, \infty[$.
3) Si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}(\Omega)$.

En particulier l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. L'injection de $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ n'est jamais compacte même si Ω est borné et régulier.

Théorème 1.2. *(de valeurs propres) Soient V et H deux espaces de Hilbert réels de dimensions infinies. On suppose,*

$$\begin{aligned} V \subset H & \quad \text{avec injection compacte} \\ \text{et } V & \quad \text{est dense dans } H. \end{aligned}$$

Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur V. Alors il existe une suite croissante de valeurs propres $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ réelles strictement positives qui tend vers l'infini, et une base hilbertienne de H, notée $(u_k)_{k\geq 0}$ de vecteurs propres associés qui forment une solution du problème suivant,

$$a(u_k, v) = \lambda_k \langle u_k, v\rangle_H , \quad \forall v \in V,\ u_k \in V.$$

De plus $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} u_k\right)_{k\geq 0}$ est une base hilbertienne de V pour le produit scalaire $a(.,.)$.

Théorème 1.3. *(de trace) Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathbb{C}^1$, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. On définit l'application trace γ_0, de la façon suivante,*

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\Omega) & \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap \mathbb{C}(\partial\Omega) \\ v & \longrightarrow \gamma_0(v) = v_{|\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0. En particulier, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)} .$$

Théorème 1.4. *(de Krein-Rutman) On reprend les notations et les hypothèses du Théorème 1.2. On suppose que l'ouvert Ω est connexe. Alors la* *première valeur propre λ_1 est simple (i.e. le sous-espae propre correspondant est de dimension 1) et le premier vecteur propre peut être choisi positif presque partout dans Ω.*

Définition 1.2. ***(Formule de Green)*** *Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ de classe $\mathbb{C}^1$ par morceaux, on a les formules de Green suivantes,*

$$1) \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_\Gamma u.v.\eta_i d\sigma, \quad 1 \leq i \leq n, \quad u, v \in H^1(\Omega).$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i$ *sur Γ, avec η est le vecteur normal unitaire sur Γ.*

$$2) \int_\Omega \Delta u.v dx = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}.v d\sigma, \quad u \in H^2(\Omega), \quad v \in H^1(\Omega).$$

$$3) \int_\Omega (\Delta u.v - \Delta v.u) dx = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}.v - \frac{\partial v}{\partial \eta}.u\right) d\sigma, \quad u, v \in H^2(\Omega).$$

1.2 Modélisation et Exemple

Nous présentons ici une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique modélisant l'équation des ondes, voir [1, 2, 9]. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontiére Γ de classe $\mathbb{C}^1$ par morceaux. Pour des conditions aux limites de Dirichlet ce modèle s'écrit,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le Laplacien par rapport au variables d'espace $x = (x_1, ..., x_n)$, et t est la variable temps. L'équation aux dérivéés partielles (1.1) est appellée équation des ondes. L'opérateur $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$; c'est le D'Alembertient. L'équation des ondes est un exemple modéle de l'équation hyperbolique. Lorsque $n = 1, \Omega =]0, 1[$, l'équation des ondes modélise les petites vibrations d'une corde soumise à une force extérieure. Si $n = 2$, l'équation des ondes modélise les petites vibrations d'une membrane élastique. De manière générale, l'équation des ondes modélise la propagation d'une onde (acoustique, électromagnétique,...) dans un milieu élastique homogéne $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. u_0 et u_1 sont les conditions de Cauchy : u_0 décrit l'état (déplacement initial), et u_1 la vitesse initiale de l'onde.

1.3 Existence et Unicité

Dans cette section nous suivrons trois volets. Premièremment (sous section 1.3.1), on établit une formulation variationnelle, deuxièmment (sous section 1.3.2), on démontre l'existence et l'unicité de la solution de cette formulation variationnelle en introduisant une base hilbertienne composée de fonctions propres, troisièmment (sous section 1.3.3), on montre que cette solution variationnelle vérifie bien le problème posé, pour plus de détails voir [1, 9].

1.3.1 Formulation Variationnelle

L'idée est d'écrire une formulaion variationnelle qui ressemble à une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre, nous multiplions donc l'équation des ondes (1.1) par une fonction test $v(x)$ qui ne dépond pas du temps t. A cause de la condition aux limites nous demandons à ce que v s'annule sur le bord de l'ouvert Ω. Un calcul formel conduit à,

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u(x,t)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx, \qquad (1.2)$$

Exploitant le fait que les variable x et t jouent des rôles trés différents, nous séparons ces variables en considérant la solution $u(t,x)$ comme une fonction du temps t à valeurs dans un espace de fonctions définies sur Ω (même chose pour $f(x,t)$). Plus précisément, si l'on se donne un temps final $T>0$ (éventuellement égal à $+\infty$), on considère que u est définie par,

$$\begin{aligned} u \quad : \quad &]0,T[\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ & t \longrightarrow u(t) \end{aligned}$$

et nous continuerons à noter $u(x,t)$ la valeur $u(t)(x)$. Le choix de l'espace $H_0^1(\Omega)$ et évidemment dicté par nature du problème et peut varier d'un modèle à un autre. En général il s'agit de l'espace qui convient pour la formulation variationnelle du problème stationnaire associé. De même, le terme source f est désormais considéré comme une fonction de t à valeurs dans $L^2(\Omega)$. On introduit alors le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et la forme bilinéaires $a(w,v)$ définis par,

$$\langle w,v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega w(x)v(x), \quad et \quad a(w,v) = \int_\Omega \nabla w(x)\nabla v(x)dx.$$

Définition 1.3. *Soit X un espace de Hilbert, ou plus généralement, un espace de Banach défini sur Ω (typiquement, $X = L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, ou $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$). Soit un temps final $0 < T \leq +\infty$. Pour un entier $k \geq 0$, on note $\mathbb{C}^k([0,T];X)$ l'espace des fonction k fois continument dérivables de $[0,T]$ dans X. Si on note $\|v\|_X$ la norme dans X, il est classique que $\mathbb{C}^k([0,T];X)$ est un espace de Banach pour la norme,*

$$\|v\|_{\mathbb{C}^k([0,T]);X)} = \sum_{m=0}^{k} \left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\| \frac{d^m v}{dt^m}(t) \right\|_X \right)$$

On note $L^2(]0,T[;X)$ l'espace des fonctions de $]0,T[$ dans X telles que la fonction $t \to \|v(t)\|_X$ soit mesurable et de carré intégrable, c'est-à-dire que,

$$\|v\|_{L^2(]0,T[;X)} = \sqrt{\int_0^T \|v(t)\|_X^2 \, dt} < +\infty.$$

Munit de cette norme $L^2(]0,T[;X)$ est aussi un espace de Banach. De plus, si X est un espace de Hilbert, alors $L^2(]0,T[;X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire,

$$\langle u,v\rangle_{L^2(]0,T[;X)} = \int_0^T \langle u(t),v(t)\rangle_X \, dt.$$

Soit un temps final $T>0$, on se donne le terme source $f \in L^2(]0,T[;L^2(\Omega))$, on se donne aussi des conditions $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$. La formulation variationnelle déduite de (1.2) est donc :
trouver une solution u dans $\mathbb{C}([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap \mathbb{C}^1([0,T],L^2(\Omega))$ telle que,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt}\langle u(t),v\rangle_{L^2(\Omega)} + a(u(t),v) = \langle f(t),v\rangle_{L^2(\Omega)}, & \forall v \in H_0^1(\Omega), 0<t<T \\ u(t=0)=u_0, \quad \dfrac{du}{dt}(t=0)=u_1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Les données initiales ont bien un sens dans (1.3) grace au choix de l'espace d'énergie $\mathbb{C}([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap \mathbb{C}^1([0,T];L^2(\Omega))$ pour la solution u. Finalement, la dérivée en temps dans la formulation variationnelle (1.3) doit être prise au sens faible puisqu'à priori la fonction $t \to \langle u(t),v\rangle_{L^2(\Omega)}$ n'est qu'une fois dérivable en temps.

1.3.2 Un Résultat Général

Soit V et H deux espace de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection dense et compacte (typiquement $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$).

Théorème 1.5. *Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection compacte et V est dense dans H. Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans V. Soit un temps final $T>0$, une donnée initale $(u_0,u_1) \in V \times H$, et un terme source $f \in L^2(]0,T[;H)$. Alors* *le problème,*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt}\langle u(t), v\rangle_H + a(u(t), v) = \langle f(t), v\rangle_H \quad \forall v \in V, 0 < t < T \\ u(t=0) = u_0, \quad \dfrac{du}{dt}(t=0) = u_1 \end{cases} \tag{1.4}$$

(où l'équation de (1.4) a lieu au sens faible dans $]0, T[$*) a une unique solution* $u \in \mathbb{C}([0, T]; V) \cap \mathbb{C}^1([0, T], H)$*. De plus, il existe une constante* $C > 0$ *(qui ne dépend que de* Ω *et de* T*) telle que,*

$$\|u\|_{\mathbb{C}([0,T];V)} + \|u\|_{\mathbb{C}^1([0,T];H)} \leq C(\|u_0\|_V + \|u_1\|_H + \|f\|_{L^2(]0,T[;H)}) \tag{1.5}$$

Remarque 1.1. *L'estimation d'énergie (1.5) prouve que la solution de (1.4) dépend continûment des données, et donc que le problème hyperbolique (1.4) est bien posé.*

Démonstration. La démontration est divisée en deux étapes. Dans une première étape, on montre que toute solution u est une série de fonctions propres. Dans une deuxième étape, nous démontrons la convergence de cette série dans les espaces $\mathbb{C}([0, T]; V)$ et $\mathbb{C}^1([0, T], H)$.

Étape1. Supposons que $u \in \mathbb{C}([0, T]; V) \cap \mathbb{C}^1([0, T]; H)$ est solution de (1.4). Introduisons la base hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$ de H composée des fonctions propres de la formulation variationnelle qui vérifient,

$$u_k \in V \quad et \quad a(u_k, v) = \lambda_k \langle u_k, v\rangle_H \ \forall v \in V.$$

On écrit

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t) u_k \qquad \text{avec} \qquad \alpha_k(t) = \langle u(t), u_k\rangle_H .$$

En choisissant $v = u_k$ dans (1.4) et en notant $\beta_k(t) = \langle f(t), u_k\rangle_H, \alpha_k^0 = \langle u_0, u_k\rangle_H$ et $\alpha_k^1 = \langle u_1, u_k\rangle_H$, on obtient,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\alpha_k}{dt^2} + \lambda_k \alpha_k = \beta_k \text{ dans }]0, T[\\ \alpha_k(t=0) = \alpha_k^0, \quad \dfrac{d\alpha_k}{dt}(t=0) = \alpha_k^1 \end{cases} \tag{1.6}$$

(Attention à une confusion possible dans les notations : la donnée initiale u_1 n'a rien à avoir la fonction propre u_k pour $k = 1$). Posant $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$, l'unique solution de (1.6) est,

$$\alpha_k(t) = \alpha_k^0 \cos(\mu_k t) + \frac{\alpha_k^1}{\mu_k}\sin(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k}\int_0^t \beta_k(s)\sin(\mu_k(t-s))ds. \quad (1.7)$$

Ce qui donne une formule explicite pour la solution u (qui est donc unique).

Étape2. Pour démontrer que la série,

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\alpha_j^0\cos(\mu_j t) + \frac{\alpha_j^1}{\mu_j}\sin(\mu_j t) + \frac{1}{\mu_j}\int_0^t \beta_j(s)\sin(\mu_j(t-s))ds\right)u_j \quad (1.8)$$

converge dans $\mathbb{C}([0,T];V)\cap\mathbb{C}^1([0,T);H)$, on va montrer que la suite $w^k = \sum_{j=1}^k \alpha_j(t)u_j$ des sommes partielles de cette série est de Cauchy. Dans V nous considérons le produit scalaire $a(u,v)$ pour lequel la famille (u_j) est orthogonale. Par orthogonalité dans H et dans V de (u_j), on obtient, pour $l > k$, et pour tout temps t,

$$a(w^t - w^k, w^t - w^k) + \left\|\frac{d}{dt}(w^t - w^k)\right\|_H^2 = \sum_{j=k+1}^{l}\left(\lambda_j\left|\alpha_j(t)\right|^2 + \left|\frac{d\alpha_j}{dt}(t)\right|^2\right).$$

Or, en multipliant (1.6) par $\frac{d\alpha_k}{dt}$ et en intégrant en temps, on obtient,

$$\left|\frac{d\alpha_j}{dt}(t)\right|^2 + \lambda_j\left|\alpha_j(t)\right|^2 = \left|\alpha_j^1\right|^2 + \lambda\left|\alpha_j^0\right|^2 + 2\int_0^t \beta_j(s)\frac{d\alpha_j}{dt}(s)ds.$$

De la formule(1.7) on infère que,

$$\left|\frac{d\alpha}{dt}(t)\right| \leq w_j\left|\alpha_j^0\right| + \left|\alpha_j^1\right| + \int_0^t \beta_j(s)ds.$$

En combinant ces deux résultats on en déduit

$$\left|\frac{d\alpha_j}{dt}(t)\right|^2 + \lambda_j\left|\alpha_j(t)\right|^2 \leq 2\left|\alpha_j^1\right|^2 + \lambda_j\left|\alpha_j^0\right|^2 + 2t\int_0^t \left|\beta_j(s)\right|^2(s)ds. \quad (1.9)$$

Comme $u_0 \in V, u_1 \in H$ et $f \in L^2(]0,T[;H)$, on a,

$$\begin{aligned}\|u_0\|_V^2 &= a(u_0,u_0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \left|\alpha_j^0\right|^2 < +\infty \\ \|u_1\|_H^2 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left|\alpha_j^1\right|^2 < +\infty, \\ \| \quad f \|_{L^2(]0,T[;H)}^2 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^t \left|\beta_j(s)\right|^2 (s)ds < +\infty,\end{aligned}$$

ce qui implique que la série, dont le terme général est le membre de gauche de (1.9), est convergente, c'est à dire que la suite w^k vérifie,

$$\lim_{k,l\to+\infty} \max_{0\le t\le T} \left(\|w^l(t) - w^k(t)\|_V^2 + \|\frac{d}{dt}(w^l(t) - w^k(t))\|_H^2 \right) = 0,$$

autrement dit, elle est de Cauchy dans $\mathbb{C}^1([0,T];H)$ et dans $\mathbb{C}([0,T];H)$. Comme ces espaces sont complets, la suite de Cauchy w^k converge et on peut définir sa limite u. En particulier, comme $\left(w^k(0), \frac{dw^k}{dt}(0)\right)$ converge vers (u_0,u_1) dans $V \times H$, on obtient les conditions initiales voulues. D'autre part, il est clair que $u(t)$, en tant que somme de la série (1.8) vérifie la formulation variationnelle (1.4) pour chaque fonction test $v = u_k$. Comme $\left(u_k/\sqrt{\lambda_k}\right)$ est une base hilbertienne de V, $u(t)$ vérifie donc la formulation variationnelle (1.4) pour tout $u \in V$, c'est à dire que $u(t)$ est bien la solution recherchée de (1.4). Par ailleurs, on a en fait montré que,

$$a(w^l-w^k, w^l-w^k)+\left\|\frac{d}{dt}(w^l - w^k)\right\|_H^2 \le C\left(\| u_0 \|_V^2 + \| u_1 \|_H^2 + T \| f \|_{L^2(]0,T[;H)}^2\right),$$

et l'estimation d'énergie (1.5) s'obtient alors facilement en prenant $k = 0$ et en faisant tendre l vers l'infini. □

1.3.3 Applications

Nous appliquons maintenant le résultat abstrait du Théorème 1.4 à l'équation des ondes, et nous prouvons que cette approche variationnelle a bien permis de résoudre l'équation aux dérivées partielles d'origine.

Théorème 1.6. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, et un temps final $T > 0$. On considère une donnée initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et un terme source $f \in L^2(]0,T[; L^2(\Omega))$. Alors l'équation des ondes,*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0,T[\\ u(t=0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

admet une unique solution $u \in \mathbb{C}([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathbb{C}^1([0,T]; L^2(\Omega))$. De plus, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de Ω et de T) telle que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\int_\Omega \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \right) dx \leq C \left(\int_\Omega |u_1(x)|^2 + |\nabla u_0(x)|^2 \, dx \right) + \int_0^t \int_\Omega |f(x,s)|^2 \, dxds. \tag{1.11}$$

Démonstration. Nous appliquons le Théorème 1.4 à la formulation variationnelle (1.3) de l'équation des ondes obtenue à la sous section 1.3.2 (ses hypothèses sont facilement vérifiées avec $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$). Il reste à montrer que l'unique solution $u \in \mathbb{C}([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathbb{C}^1([0,T]; L^2(\Omega))$ de cette formulation variationnelle est bien une solution de (1.10). Tout d'abord, la condition aux limites de Dirichlet se retrouve par application du Théorème de trace 1.3 à $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$, et la condition initiale est justifiée par la continuité de $u(t)$ en $t = 0$ comme fonction à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$ et de $\dfrac{du}{dt}(t)$ comme fonction à valeurs dans $L^2(\Omega)$. Si la solution u est suffisamment réguliére, par intégration par parties la formulation variationnelle (1.3) est équivalente à,

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - f \right) v dx = 0,$$

pour tout $v(x) \in \mathbb{C}_c^1(\Omega)$ et presque tout $t \in]0,T[$. On en déduit donc l'équation de (1.10). Si la solution u n'est pas plus régulière que ce qui est donné par le Théorème 1.5, on obtient tout de même cette égalité mais la justification en est légèrement plus délicate. On note $\sigma = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, -\nabla u\right)$ la fonction à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et on peut montrer qu'elle admet une divergence faible en "espace-temps" qui est justement $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u$ qui appartient donc à $L^2(]0,T[;L^2(\Omega))$. □

En l'absence de forces $f = 0$, on peut améloirer l'estimation d'énergie (1.11) et obtenir une propriété de **conservation de l'énergie totale** qui est trés importante du point de vue des applications. L'énergie totale est ici la somme de deux termes : d'une part **L'énergie cinétique** $\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2$ et d'autre part **l'énergie mécanique** $|\nabla u|^2$.

Proposition 1.1. *On se place sous les hypothèses du Théorème 1.6 avec $f = 0$. La solution de l'équation des ondes (1.10) vérifie, pour tout $t \in [0,T]$, l'égalité de conservation de l'énergie,*

$$\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right) dx = \int_\Omega \left(|u_1(x)|^2 + |\nabla u_0(x)|^2 \, dx\right) \tag{1.12}$$

Démonstration. En reprenant la démonstration du Théoreme 1.5 avec $f = 0$, c'est à dire $\beta_k = 0$, on déduit directement de (1.6) que l'énergie de l'oscillateur harmonique est conservée, c'est-à-dire que,

$$\left|\frac{d\alpha_j}{dt}(t)\right|^2 + \lambda_j |\alpha_j(t)|^2 = \left|\alpha_j^1\right|^2 + \lambda \left|\alpha_j^0\right|^2,$$

ce qui donne l'égalité,

$$a(w^l - w^k, w^l - w^k) + \left\|\frac{d}{dt}(w^l - w^k)\right\|_H^2 = \sum_{j=k+1}^{l} \left|\left(\alpha_j^1\right|^2 + \lambda \left|\alpha_j^0\right|^2\right),$$

et (1.12) s'obtient en prenant $k = 0$ et en faisant tendre l vers l'infini. Si la solution u est régulière, on peut démontrer plus directement (1.12) en multipliant l'équation des ondes (1.10) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et en intégrant par parties. □

Chapitre 2

Etude Qualitative de l'Équation des Ondes

Nous examinons maintenant les principales propriétés qualitatives de la solution de l'équation des ondes, notamment les propriétés de réversibilité et de régularité, comportement asymptotique pour les grandes valeurs de t et la vitesse de propagation finie, pour plus de détails consuler [1, 6, 8].

2.1 Réversibilité en Temps

Proposition 2.1. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et un temps final $T > 0$. Soit $(v_0, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, et un terme source $f \in L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$. Alors l'équation des ondes* ***rétrogarde en temps*** *(intégrée en remontant le temps à partir de T)*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0, T[\\ v(x, T) = v_0(x) & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x, T) = v_1(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

admet une uniqe solution $v \in \mathbb{C}([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathbb{C}^1([0,T]; L^2(\Omega))$. *De plus, si* $u(t,x)$ *est la solution de l'équation des ondes (1.1) et si* $v_0(x) = u(x,T)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *et* $v_1(x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,T)$ *dans* $L^2(\Omega)$, *alors on a* $v(x,t) = u(x,t)$.

Démonstration. On fait le changement d'inconnue $w(x,t) = v(x, T-t)$ et (2.1) devient une équation des ondes "**progressive**" avec donnée initiale en $t = 0$ comme l'équation "usuelle" (1.1) (comme la dérivée en temps est d'ordre 2, il n'y a pas de changement de signe dans l'équation aprés ce changement d'inconnue). Par application du Théorème 1.6, (2.1) admet donc bien une unique solution. Si $v_0(x) = u(x,t)$ et $v_1(x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$, la solution $u(x,t)$ de (1.1) est aussi de (2.1). Par unicité on déduit $v(x,t) = u(x,t)$. $\square$

2.2 Régularité

Le caractère réversible en temps de l'équation des ondes a de nombreuses conséquences. La plus importante est qu'il n'y a aucun **effet régularisant** pour l'équation des ondes au contraire de ce qui se passe pour l'équation de la chaleur. Nous admettons la proposition suivante qui montre que la régularité de la solution u dépend constamment de la régularité des données u_0, u_1 et f.

Proposition 2.2. *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^n$ *et un temps final* $T > 0$, *une donneé initiale* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *et* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, *un terme source* $f \in L^2(]0,T[; L^2(\Omega))$, *et* $u \in \mathbb{C}([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathbb{C}^1([0,T]; L^2(\Omega))$ *la solution unique de l'équation des ondes (1.10). Alors, u appartient à*
$\mathbb{C}\left([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \cap \mathbb{C}^1\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right) \cap \mathbb{C}^2\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$.

2.3 Comportement Asymptotique et Estimation de l'Energie

Il n'y a pas de principe du maximum pour l'équation des ondes. En l'absence de terme source ($f = 0$), même si la vitesse est nulle ($u_1 = 0$) et si la donneé initiale est positives ($u_0 \geq 0$), la solution u peut changer de signe au cours du temps. Cette absence de principe du maximum est conforme à l'intuition physique. Imaginons une corde ou une membrane élastique : si on la déforme initialement dans une position au dessus de son plan de repos, elle va vibrer et passer alternativement en dessus et au dessous de ce plan (autrement dit u change de signe). Mathématiquement, ce contre-exemple peut s'écrire simplement sous la forme suivante. Soit $w(x)$ la premiére fonction propre du Laplacien dans un domaine borné connexe Ω avec condition aux limites de Dirichlet. D'après le Théorème de Krein-Rutman 1.4, on peut normaliser w de telle manière que $w(x) \geq 0$ dans Ω. En notant $\lambda = w^2$ la première valeur propre associée à w, il est facile de vérifier que $u(x,t) = \cos(wt)w(x)$ change de signe au cours du temps tout en étant la solution unique dans $\mathbb{C}([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathbb{C}^1([0,T]; L^2(\Omega))$ de l'équation des ondes (1.10) sans terme source et avec les données initiales,

$$u(x,0) = w(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \text{ dans } \Omega$$

Il n'y a donc pas non plus de comportement asymptotique en temps long pour l'équation des ondes en domaine borné. Autrement dit, même si le terme source f ne dépend pas du temps, la solution u ne converge pas vers une limite stationnaire lorsque le temps t tend vers l'infini. En particulier, si $f = 0$, l'influence des conditions initiales est la même à tout temps puisque l'énergie est conservée et ne décroit pas. Le même contre-exemple

$u(x,t) = \quad \cos(wt)w(x)$ permet de voir qu'il n'y a pas de limite stationnaire mais des oscillations qui perdurent sans amortissement.

2.4 Vitesse de Propagation Finie

Une dernière propriété importante de l'équation des ondes est celle, dite de propagation à vitesse finie. On sait qu'en dimension 1 lorsque $\Omega = \mathbb{R}$, il existe un cône de lumière (ou demaine de dépendance) qui englobe toute l'information sur la solution de l'équation des ondes. Plus précisément, , soit $f = 0$, grâce à la formule explicite de D'Alembert,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds \qquad (2.2)$$

on voit immédiatement que la valeur de u en (x,t) ne dépend que des valeurs des données initiales u_0 et u_1 sur le segment $[x-ct, x+ct]$. On en déduit que si les données initiales sont à support compact $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$, alors la solution au temps t est à support compact dans $[a-ct, b+ct]$. En termes physiques cela veut dire que des perturbations initiales se propagent à vitesse finie bornée par 1. Cette situation est encore une fois bien différente de ce qui se passe pour l'équation de la chaleur.

Chapitre 3

Etude Numérique de l'Equation des Ondes

Le recours au calcul numérique sur ordinateur est parfois nécessaire pour estimer qualitativement et quantitativement, les solutions de différents modèles. Il existe de nombreuses méthodes de résolution numérique de l'équation des ondes, qui consistent à obtenir des valeurs numériques discrètes (c'est-à-dire en un nombre fini de points) qui approchent la solution exacte. Dans ce chapitre, nous présentons une des plus anciennes et des plus simples, appelée méthode des différences finies, voir [5, 10].

3.1 Méthode des Différences Finies pour l'Equation des Ondes

Dans cette section on considère un problème modèle de dimension un. Soit l'intervalle $\Omega =]-1,+1[$ avec des conditions aux limites de périodiques,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ u(-1,t) = u(+1,t), & \forall t \in]0,T[\\ u'(-1,t) = u'(+1,t), & \forall t \in]0,T[\\ u(t=0) = u_0(x), & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

où $u_0(x)$, $u_1(x)$ étant les données initials du problème et f un terme source donné. Pour discrétiser le domaine Ω, on introduit un pas d'espace $h = \Delta x = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$. Avec le pas de temps $\Delta t = \frac{T}{M}$, $M \in \mathbb{N}^*$, on définit ainsi les noeuds d'un maillage régulier,

$$\begin{aligned} q_i &= x_i = i\Delta x \ \text{ pour } -N \leq i \leq N \\ t_n &= n\Delta t,\ 0 \leq n \leq M. \end{aligned}$$

On note u_i^n à l'instant t_n la valeur d'une solution discrète approchée au point (x_i), et $u(x_i, t_n)$ la solution exacte de (3.1). Les conditions aux limites périodiques se traduisent, pour $n > 0$; en,

$$u_{-N}^n = u_N^n.$$

La donnée initiale est discrétisée par,

$$u_i^0 = u_0(x_i),\ \forall i = -N, ..., N$$

Mais comme il s'agit d'un problème du second ordre en temps, il est nécessaire de se donner u_i^1, en écrivant

$$u_1(x_i) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, \Delta t) - u(x_i, 0)}{\Delta t} + \delta(\Delta t).$$

3.1.1 Un Schéma Explicite

Nous utilisons un schéma progressif d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) &\simeq \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) &\simeq \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \end{aligned}$$

alors on obtient un schéma à cinq points suivant,

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right] = f(x_i, t_n), \quad -N \leq i \leq N, 1 \leq n \leq M \tag{3.2}$$

L'onde à l'itération $n+1$ est donnée par,

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} - \Delta t^2 c^2 \left[\frac{-u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n}{h^2} \right] + \Delta t^2 f(x_i, t_n) \tag{3.3}$$

Soit sous forme vectorielle,

$$U^{n+1} = 2U^n - U^{n-1} - \Delta t^2 A_h U^n + \Delta t^2 F^n \quad , \forall n = 1, ..., M \tag{3.4}$$

avec,

$$U^n = \left(u_{-N+1}^n, ..., u_0, ..., u_N^n\right)^T, \quad \text{et} \quad F^n = \left(f(x_{-N+1}, t_n), ..., f(x_0, t_n), ..., f(x_N, t_n)\right)^T.$$

La matrice A_h est de dimension $2N$ définie par,

$$A_h = \frac{c^2}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Consistance

Proposition 3.1. *Supposons que la solution u du problème (3.1) est $\mathbb{C}^2$ par rapport à la variable t et $\mathbb{C}^2$ par rapport aux variable x. Alors le schéma explicite (3.3) est consistant d'ordre 4 en temps et en espace.*

Démonstration. Soit l'erreur de consistance,

$$\varepsilon_h\left(u\right)_i^n = \frac{\overline{u}_i^{n+1} - 2\overline{u}_i^n + \overline{u}_i^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2\left[\frac{\overline{u}_{i+1}^n - 2\overline{u}_i^n + \overline{u}_{i-1}^n}{h^2}\right] - f_i^n \tag{3.5}$$

où $\overline{u}_i^n$ est la valeur exacte de la solution u au point x_i à l'instant t_n. Par Taylor on obtient,

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{u}_i^{n+1} - 2\overline{u}_i^n + \overline{u}_i^{n-1}}{\Delta t^2} &= \frac{\partial^2 \overline{u}_i^n}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial t^4}\left(x_i, \xi_1\right) \quad , \xi_1 \in \left]t_n, t_{n+1}\right[\\
\frac{\overline{u}_{i+1}^n - 2\overline{u}_i^n + \overline{u}_{i-1}^n}{h^2} &= \frac{\partial^2 \overline{u}_i^n}{\partial x^2} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial x^4}\left(\xi_2, t_n\right) \quad , \xi_2 \in \left]x_i, x_{i+1}\right[
\end{aligned}$$

En substituant les deux formules de Taylor dans l'expression (3.5), il vient,

$$\varepsilon_h\left(u\right)_i^n = \left[\frac{\partial^2 \overline{u}_i^n}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial t^4}\left(x_i, \xi_1\right)\right] - c^2\left[\frac{\partial^2 \overline{u}_i^n}{\partial x^2} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial x^4}\left(\xi_2, t_n\right)\right] - f_i^n$$

Puisque l'expression des ondes est nulle, c'est à dire,

$$\left[\frac{\partial^2 \overline{u}_i^n}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 \overline{u}_i^n}{\partial x^2} - f_i^n\right] = 0.$$

Alors,

$$\varepsilon_h\left(u\right)_i^n = \left[\frac{\Delta t^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial t^4}\left(x_i, \xi_1\right)\right] - c^2\left[\frac{h^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial x^4}\left(\xi_2, t_n\right)\right]$$

On en déduit que,

$$\left|\varepsilon_h\left(u\right)_i^n\right| \leq c_1\Delta t^2 + c_2.h^2 \leq c\left(\Delta t^2 + h^2\right)$$

donc,

$$\max_{1\leq i\leq N}\left|\varepsilon_h\left(u\right)_i^n\right| \leq O\left(\Delta t^2 + h^2\right)$$

Finalement on a,

$$\|\varepsilon_h (u)_i^n\|_\infty = \max_{1\leq i\leq N} |\varepsilon_h (u)_i^n| \longrightarrow 0 \text{ quand } \Delta t \longrightarrow 0 \text{ et } h \longrightarrow 0.$$

□

3.1.3 Analyse de la Stabilité et la Convergence

Dans cette section nous démontrons que le schéma explicite est conditionnellement stable. La démonstration est basé sur la méthode classique de perturbation de Neumann.

Théorème 3.1. *Le schéma explicite (3.2) et conditionnellement stable en norme $\|.\|_\infty$ si la condition suivante de Courant-Friedrichs-Lewy est satisfaite,*

$$c\frac{\Delta t}{h} < 1. \tag{3.6}$$

Démonstration. Soit $\tilde{u}_i^n$ une autre approximation de u définie par le schéma suivant,

$$\frac{u^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + f_i^n \tag{3.7}$$

$$\frac{\tilde{u}^{n+1} - 2\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2\frac{\tilde{u}_{i+1}^n - 2\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i-1}^n}{\Delta x^2} + f_i^n \tag{3.8}$$

en retranchant (3.7) de (3.8) et en posant $\varphi_i^n = \tilde{u}_i^n + u_i^n$, on obtient,

$$\frac{\varphi_i^{n+1} - 2\varphi_i^n + \varphi_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2\frac{\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

alors,

$$\varphi_i^{n+1} - 2\varphi_i^n + \varphi_i^{n-1} = c^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n\right)$$

on définit la perturbation en mode de Fourier par,

$$\varphi_i^n = \psi^n e^{Iwi\Delta x}, \quad \text{avec } I = \sqrt{-1}$$

$$\psi^{n+1}e^{Iwi\Delta x} - 2\psi^n e^{Iwi\Delta x} + \psi^{n-1}e^{Iwi\Delta x} = c^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(\psi^n e^{Iw(i+1)\Delta x} - 2\psi^n e^{Iwi\Delta x} + \psi^n e^{Iw(i-1)\Delta x}\right).$$

On simplifie par $e^{Iwi\Delta x}$, il vient,

$$\begin{aligned}
\varphi^{n+1} - 2\varphi^{n} + \varphi^{n-1} &= c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \psi^n \left(e^{Iw\Delta x} - 2 + e^{-Iw\Delta x} \right) \\
&= c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \psi^n \left(-2 + 2\cos w\Delta x \right) \\
&= -2c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \psi^n \left(1 - \cos w\Delta x \right) \\
&= -4c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \psi^n \left(\sin^2 \frac{w\Delta x}{2} \right).
\end{aligned}$$

On notant $G = \dfrac{\psi^{n+1}}{\psi^n}$ le facteur d'amplification du schéma, et $\theta = \dfrac{w\Delta x}{2}$. La relation de récurrence à 2 niveaux précédente conduit à une équation algébrique du second degré,

$$\frac{\psi^{n+1}}{\psi^n} - 2 + \frac{\psi^{n-1}}{\psi^n} = -4c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \theta$$

alors,

$$G - 2 + \frac{1}{G} = -4c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \theta,$$

$$G^2 - 2G + 1 = -4c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} G.\sin^2 \theta$$

$$G^2 - 2\left[1 - 2c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \theta \right] G + 1 = 0$$

en posant $C_{FL} = c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$, il vient,

$$G^2 - 2\left[1 - 2C_{FL}^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \theta \right] G + 1 = 0. \tag{3.9}$$

Soient G_1 et G_2 les racines de l'équation (3.9) alors,
Si $G = G_1$, on aura $\psi^{n+1} = G_1 \psi^n = (G_1)^{n+1} \psi^0$
Si $G = G_2$, on aura $\psi^{n+1} = G_2 \psi^n = (G_2)^{n+1} \psi^0$
on peut dire alors que,

$$\psi^{n+1} = \alpha_1 (G_1)^{n+1} + \alpha_2 (G_2)^{n+1}.$$

Le mode de Fourier φ_i^n est donc une combinaison linéaire des racines G_1 et G_2 de cette équation (3.9),

$$\varphi_i^n = \psi^n e^{Iwi\Delta x} = \left(\alpha_1 (G_1)^n + \alpha_2 (G_2)^n\right) e^{Iwi\Delta x} \tag{3.10}$$

Pour que cette perturbation ne croît pas au cours du temps, autrement dit pour que le schéma soit stable, il suffit d'avoir,

$$|G_1| \leq 1 \quad \text{et} \quad |G_2| \leq 1$$

Discussion :

1- D'aprés l'équation (3.9), le produit des racines $G_1.G_2$ est égal à 1. Donc si les racines sont réelles, on aura,

$$\text{Si } \ |G_1| < 1 \Rightarrow |G_2| = \frac{1}{|G_1|} > 1$$

et

$$\text{Si } \ |G_1| > 1 \Rightarrow |G_2| = \frac{1}{|G_1|} < 1$$

c'est-à-dire que l'une des racines est module supérieure à 1 et le schéma et instable.

2- Si les racines sont complexes conjuguées,

$$G_1 = \overline{G}_2 \Rightarrow G_1.G_2 = \overline{G}_2.G_2 = |G_2|^2 = 1.$$

Donc $|G_1| = |G_2| = 1$, et le schéma est stable.

Pour que l'équation (3.9) ait des racines complexes, il faut que son discriminant soit négatif, veut dire que,

$$\left(1 - 2C_{FL}^2 \sin^2\theta\right)^2 < 1, \quad \forall w$$

$$2C_{FL}^2 \sin^2\theta < 2, \quad \forall w$$

ce qui conduit à la condition classique de Courant-Friedrichs-Lewy,

$$C_{FL} < 1.$$

En conclusion le schéma explicite est donc conditionnellement stable avec une condition de stabilité donnée par la condition du Courant-Friedrichs-Lewy,

$$c\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1.$$

$\square$

La convergence de la solution approchée vers la solution exacte se déduit directement du théorème de Lax.

Théorème 3.2. *Le schéma explicite (3.2) est convergent si et seulement si il est stable et consistant.*

Conclusion

Dans ce mémoire, on a établit l'équation des ondes. En premier lieu, on a présenté une formulation variationnelle, et on a prouvé quelques propriétés quantitatives et qualitatives de la solution. En second lieu, on a discrétisé le problème par la méthode des différences finies explicites. Une extension éventuelle est la discrétisation du problème par la méthode des éléments finies, avec une simulation numérique bien adaptée.

Bibliographie

[1] G. Allaire, Analyse Numérique et Optimisation, Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, Ed. de l'Ecole Polytechnique de Paris, 2005.

[2] E. Becache, Schémas numériques pour la résolution de l'équation des ondes, Cours de Niveau Master, ENSTA Paris, Janvier 2009.

[3] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Ed. Masson, Paris, 1987.

[4] B. LUCQUIN, Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ed. Ellipses, Paris, 2004.

[5] A.Mehri, Méthode des différences finies pour les équations aux dérivées partielles, Polycopié du Cours, Université 08 Mai 1945 Guelma, 2018.

[6] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri, Numerical Mathematics, Ed. Springer-Verlag, 2000.

[7] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri, Méthodes Numériques, Algorithmes, analyse et applications, Ed. Springer-Verlag Italia, Milano 2004.

[8] A. Quarteroni, A. Valli, Numerical Approximation of Partial Differential, Ed. Springer, 2008.

[9] P.A.Raviart, J.M.Thomas, Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles, Ed. Masson, Paris, 1988.

[10] *https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/Cours/CoursDF_html/node1.html*