الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Calcul Stochastique

Thème

Processus de Poisson Lindley et ses principales propriétés.

Présenté par :

Boumenidjel Sara

Devant le Jury :

Dr. Benseghir Rym	**MCA**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. Grine Razika	**MCB**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteuse
Dr. Zidani Nesrine	**MCB**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2020-2021

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENT

Avant tout, je tiens à remercier dieu le tout puissant, de m'avoir donné le courage et la patience pour pouvoir mener a terme ce travail.

Je tiens à remercier **Dr. GRINE RAZIKA**, notre encadreur de mémoire, pour tout le soutien, l'aide ; l'orientation ; la guidance ; ainsi que pour ses précieux conseils

et ses encouragements lors de la réalisation de notre mémoire.

Je voudrais également remercier notre directeur **Dr BENESGHIR RYM** et **Dr. ZIDANI NESRINE.**

Ensuite un grand remerciement à mes parents pour le soutien financier ; moral, psychologique, et à touts ma famille.

Je remercier également toutes les personnes de prés ou de loin, ont participé à l'élaboration de ce mémoire.

Je remercier tout les amies et les collègues du département de mathématiques

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

A ma très chère mère : **Linda** qui m'a donné a la vie, qui sacrifié pour mon bonheur et ma réussite, je t'aime beaucoup ma source de bonheur je remercie pour son amour, son soutien, touts les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

A mon père **Karim**, l'homme qui a énormément souffert pour faire de moi ce que je suis, qui veillé à me donner l'aide, a m'encourager et me protéger.

A mes sœurs **Farida,Bouthaina, Aya** et **Ghofrane**

A ma grand mére **halima** et mon grand pére **ammar**

A mes amies : **Rawya, Rabia, Saida, Khadija, Rayene, Amel, Zayneb,**

A toutes mes camarades

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou du l'enseignement supérieur

Sara

ملخص

في هذه المذكرة تم دراسة نموذج جديد لعملية العد تسمى عملية بواصون ليندلي حيث تم التطرق الى بعض الخصائص الرياضية مثل احتمال عدد الحوادث و التوزيعات الشرطية لأزمنة الوصول، البنية الشرطية، العملية العشوائية عملية بواصون ليندلي، الخواص العشوائية و عملية بواصون ليندلي .

Résumé

Dans ce mémoire, on étudier un nouveau modèle de processus de comptage nommé processus poisson lindley ,des propriétés mathématiques on été étudier telle que la probabilité du nombre d'événements et la distribution conditionnelle des temps d'arrivé, la structure de dépendance.

Mots clés : processus stochastique, processus poisson lindley, propriétés stochastique, Processus de poisson lindley composé

Abstract

In this memory we study a new model of counting process named lindley poisson process, mathematical properties have been studied such as the probability of the number of events and the conditional distribution of the arrival times,the dependency structure.

Keywords : Stochastic processes , Poisson Lindley process, Stochastic properties, Positive dependence, Compound Poisson Lindley process.

1 Introduction

Dans diverses applications pratiques, les processus de comptage les plus fréquemment utilisés pour modéliser des événements aléatoires récurrents sont les processus de renouvellement et le processus de poisson non homogène (PPNH) qui incluent généralement le processus de poisson homogène (PPH), comme un cas particulier. Le PPNH diffère du PPH, dans le taux d'occurrence varie avec le temps au lieu d'être une constante et par conséquent, la propriété d'incréments stationnaires du (PNH) est abandonnée dans PPNH.

Comme le PPNH possède toujours la propriété d'incréments indépendants, il permet d'obtenir des résultats explicites dans de nombreuses applications (cha et finkelstein (2009) ce qui est l'un des avantags importants du PPNH. En raison de ses avantags, le PPNH à été très intensivement appliqué dans la pratique (voir,par exemple, pham(2003), sheu et chien (2004), chien et sheu (2006), cha (2011), zarezadeh et al (2014)).

Cependant,en même temps, le PPNH à également des limites critiques dans les applications. l'une des limites les plus critiqués est que la variance et la moyenne du nombre d'évènements dans $(0; t]$ sont égaux : $var\left[N\left(t\right)\right] = E\left[N\left(t\right)\right]$

En raison de cette limitation, le PPNH ne convient pas aux situations où les observations sont trop ou pas assez disperseés. Une autre limitation critique est sa propriété d'indépendance des incréments.

Bien qu'il existe des modèles de processus de comptage typiques qui ont été fréquemment utilisés comme illustré ci-dessus les modèles de processus de comptage disponibles en pratique qui peuvent être utilisés dans différentes situations sont très limités et il existe toujours un grand écart entre le besoin de modèles appropriés dans diverses applications et les modèles utiles disponibles. Si un nouveau modèle de processus de comptage qui surmonte les limites du PPNH est développé de manière appropriée, il pourrait être utilement appliqué dans la pratique lorsque le PPNH n'est pas approprié en raison de ses limites.

Ainsi le but de ce travail est de fournir un nouvel outil pour modéliser les événements récurrents aléatoires qui n'a pas des limites du PPNH. Dans le même temps, il est d'une grande importante de garder le traitement mathématique et les calculs aussi simples que possible. Cet aspect est pratiquement d'une grande importance car il permet l'expression explicite de la fonction de vraisemblance dans la procédure d'estimation et en conséquence, il rend le modèle développé pratiquement utile dans diverses applications.

Dans le premier chapitre nous rappelons certaines définitions et certains résultats que nous utiliserons par la suite. Ce rappel comporte des généralités sur quelques distributions de probabilités, estimation MM et MV. Dans le deuxième chapitre, nous faisons une collecte des différents processus stochastique. Enfn le troisième chapitre comporte le processus poisson lindley et le processus poisson lindley composé dont on donne quelques propriétés des deux derniers.

CHAPITRE 1

Chapite Notions de probabilités

1 Espace probabilisé

On appelle espace probabilisé tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ ou Ω est un ensemble nom vide, $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω et p une mesure sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $p(\Omega) = 1$.

2 Probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace de probabilité on appelle probabilité sur l'univers Ω tout application $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ vérifiant :

i) $p(\Omega) = 1$.

ii) Pour tout suite des événements $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux a deux disjoints on a :

$$P(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(F_n)$$

3 Variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ un espace probabilisé ,X une variable aléatoire reélle sur $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, P_X la loi de la variable aléatoire X et $\mathcal{F}_X$ sa fonction de répartition

Soit X une application définie de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit B un sous ensemble de $\mathbb{R}$ .On appelle image inverse de B par X, la partie de Ω noté $X^{-1}(B)$, noté par

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

- si $X(\Omega)$ est dénombrable, on dit que la variable aléatoire X est discréte.

- si la fonction de répartition $\mathcal{F}(x)$ définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ est continue, on dit que la variable aléatoire est continue .

4 Loi de probabilité

Définition 4.1 *On définie La loi de probabilité de la v.a X, par l'application P_X telle que :*

$$P_X(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}).$$

Définition 4.2

Définition 4.3 *la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, est la fonction F définie pour toute réel x par*

$$\begin{aligned} F_X \quad &: \quad R \to [0,1]. \\ x \quad &\to \quad F_X(x) = P(X \leq x) = P\{\omega \in \Omega / X(\omega) \prec x\}. \end{aligned}$$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilités P_i des évènements $\{X = x_i\}$, x_i parcourant l'univers image $X(\Omega)$. La loi de probabilité est donnée par les (x_i, p_i).

5 Moment centré et non centré

Le moment ordinaire d'ordre $r \in \mathbb{N}$ de X est défini, s'il existe, par :

$$\mu_r^{'} = E(X^r) = \begin{cases} \sum\limits_{K \in I} k^r P_K & si\ X\ est\ discrète \\ \int\limits_{x \in I} x^r f_X(x)\ dx & si\ X\ est\ continue \end{cases}$$

Le moment centré d'ordre $r \in \mathbb{N}$ de X est défini, s'il existe, par :

$$\mu_r = E([X - E(X)]^r) = \begin{cases} \sum\limits_{X \in I} [k - E(X)]^r P_k & si\ X\ est\ discrète \\ \int\limits_{x \in I} [X - E(X)]^r f(x)\ dx & si\ X\ est\ continue \end{cases}$$

6 Fonction Génératrice des moments

Pour la variable aléatoire X la fonction génératrice des moments est définie par :

$$H_X(u) = E\left(e^{Xu}\right), u \in R.$$

La notion de fonction génératrice peut être utile parfois pour calculer plus facilement les moments de certaines lois de probabilité. Par exemple l'espérance et la variance de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= H_X^{'}(0). \\ Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) = H_X^{''}(0) - \left[H_X^{'}(0)\right]^2. \end{aligned}$$

7 Estimation

7.1 Définition

Un estimateur de θ est une application T_n de E^n dans F qui à chaque échantillon $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de la loi P_θ associe une variable aléatoire réelle dont on peut déterminer la loi de probabilité, on appelle la valeur $\hat{\theta}$ estimateur ou estimation

$$\hat{\theta} = T_n\left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

7.2 Propriétés d'un estimateur

Biais

Définition 7.1 *pour pouvoir considérer T_n comme une valeur approchée de θ , il faut que les valeur prises par la variable T_n ne s'écartent pas trop de la valeur fixe de θ.*

$$B_n(\theta) = E\left(T_n\right) - \theta$$

un estimateur T_n de θ est dite sans biais si pour tout θ si $B_n\left(\theta\right) = 0$, et si $B_n\left(\theta\right) > 0$, l'estimateur est dit positivement biaisé.

Convergence

Définition 7.2 *Un estimateur T_n est convergent si la suite de variable aléatoire (T_n) converge en probabilité vers θ, soit :*

$$\begin{aligned} T_n \xrightarrow{P} \theta \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|T_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \to 1, n \to \infty; \forall \varepsilon > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|T_n - \theta\right| > \varepsilon\right) \to 0. \end{aligned}$$

Théorème 7.1 *Tout estimateur sans biais dont la variance tend vers 0 est convergent :*

$$\begin{pmatrix} E_\theta\left(T_n\right) = \theta \\ Var_\theta\left(T_n\right) \to 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T_n \xrightarrow{P} \theta; n \to \infty. \blacksquare$$

8 Construction d'un estimateur

Méthode du maximum de vraisemblance

Définition 8.1 *on appelle vraisemblance (likelihood) de l'échantillon* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *la loi de probabilité de ce n-uple, notée* $L(x_1, ..., x_n; \theta)$ *est définie par*

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i = x_i \ \diagdown \theta\right)$$

si X *est une variable discrète, et par :*

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i; \theta\right)$$

si X *est une variable aléatoire continue de densité* $f\left(x; \theta\right)$

Définition 8.2 *On appelle estimateur de maximum de vraisemblance (emv) de* θ *la valeur* $\hat{\theta}_n$ *de* θ *qui rend maximise la fonction de vraisemblance* $L(\theta; x_1, ..., x_n)$ *. Donc* $\hat{\theta}_n$ *sera en général calculé en maximisant la ln-vraisemblance :*

$$\hat{\theta}_n = max \ \ln L(\theta; x_1, ..., x_n).$$

La recherche de l'estimateur de vraisemblance peut se faire directement par la recherche du maximum de L, ou dans le cas particulier où la fonction L est deux fois dérivable par rapport à θ *comme solution de l'équation suivante :*

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta; x_1, ..., x_n) = 0.$$

$$\text{Où} \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\theta; x_1, ..., x_n) < 0.$$

Dans ce cas, on les résout numériquement.

9 Lois de probabilités usuelles

9.1 Loi de Poisson

La loi de Poisson est une distribution discrète très utile dans l'étude de la survenue dans le temps d'événements homogènes (le nombre d'absents par jour dans une entreprise, le nombre de clients dans une file d'attente durant des laps de temps de même durée).
Une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in R_{+}^{\star}$ (qui est à la fois la moyenne et la variance) si :

$$P\left(X=k\right)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}; \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{1.1}$$

L'espérance mathématique et la variance de X :

$$E[X]=var[X]=\lambda.$$

L'estimateur $\hat{\lambda}_{MoM}$ de paramètre λ obtenu par la méthode des moments est :

$$\hat{\lambda}_{MoM}=E[X]$$

10 Distribution Poisson–Lindley discrète

Une distribution composée de Poisson peut être obtenue en composant la distribution de Poisson et une distribution due à Lindley. Cette distribution a été introduit par Sankaran [11] pour modéliser des données de comptage.
La distribution de Poisson composée est : La fonction de densité de Poisson-Lindley (PLD) est :

$$f_{PLD}(x;\theta)=P_{x}\left(\theta\right)=\theta^{2}\frac{\left(x+2+\theta\right)}{\left(\theta+1\right)^{x+3}}, \quad x=0,1,...,\ \theta>0. \tag{1.2}$$

La fonction de répartition correspondante est :

$$F_{PLD}(x) = 1 - \frac{\theta^2 + 3\theta + 1 - \theta x}{(\theta + 1)^{x+3}}, \quad x = 0, 1, ..., \ \theta > 0. \tag{1.3}$$

La fonction génératrice de Poisson-Lindley (PLD) est :

$$M_X(s) = E\left(e^{SX}\right) = \frac{\theta^2}{\theta + 1} \frac{2 + \theta - s}{(\theta + 1 - s)^2}.$$

Moments et Mesures Connexes

Soit $X \rightsquigarrow PLD(\theta)$, La moyenne et la variance de X sont :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{2 + \theta}{\theta(\theta + 1)}, \\ E\left(X^2\right) &= \frac{\theta^2 + 4\theta + 6}{\theta^2 (\theta + 1)^2}, \\ Var(X) &= \frac{\theta^3 + 4\theta^2 + 6\theta + 2}{\theta^2 (\theta + 1)^2}. \end{aligned} \tag{1-4}$$

CHAPITRE 2

ChapterProcessus stochastique

1 Processus stochastique

Un processus stochastique est une famille des variables aléatoires $\left(x\left(t\right)_{t\in T}\right)$ à valeurs réelles définies sur un même espace de probabilité, l'indice t est souvent interprété comme le temps.

Un processus stochastique est une application mesurable

$$X : \Omega \times T \rightarrow E$$

$$(w, t) \rightarrow X\left(t, w\right) = X_t\left(w\right)$$

où a t_0 fixé, $w \rightarrow X_{t_0}\left(w\right)$ est une variable aléatoire, et a w_0 fixé, $t \rightarrow X\left(t, w_0\right)$ est une application mesurable

2 Processus stochastique équivalents

On dira que deux processus stochastiques sont équivalents s'ils décrivent le mème phénomène aléatoire au sens suivant :

$$(x_t)_{t\in T} : (\Omega, F, p) \to (E, A)$$

$$(x'_t)_{t\in T} : (\Omega', F', p') \to (E, A)$$

si $\forall n \geq 1, \forall t_1, ..., t_n \in T, \forall B_1, ..., B_n \in A$ on a :
$p\left(\{x_{t_1} \in B_1, ..., x_{t_n} \in B_n\}\right) = p'\left(\left\{x'_{t_1} \in B_1; ..., x'_{t_n} \in B_n\right\}\right)$

3 Processus stationnaire

Définition 3.1 *Un processus stochastique $(x_t)_{t\in T}$ est dit fortement stationnaire (stationnaire au sens strict) si les lois fini dimensionnelles sont invariantes par translation c,a,d $\forall h \geq 0, \forall t_1, t_2, ..., t_n \in T, n \in \mathbb{N}^*$ le vecteur $(x_{t_1}, x_{t_2}, ..., x_{t_n})$ a la même loi que le vecteur $(x_{t_1} + h, x_{t_2} + h, ..., x_{t_n} + h)$, en particulier $x_i + h$ ont la même loi $\forall t, h \in T$ (c,a,d x_t et x_s ont la même loi $\forall t, s \in T$)*

Définition 3.2 *Un processus stochastique $(x_t)_{t\in T}$ est dit faiblement stationnaire (stationnaire au sens large) si :*
i) $E(X_t) = m_t = m \leq +\infty$
ii) $E(x_t^2) = \delta_t^2 = \delta^2 \leq +\infty$
iii) $cov(x_t, x_s) = E((x_t - m)(x_s - m)) = \Gamma(t, s) = \Gamma(t - s)$

4 Processus stochastiques à accroissements indépendants (P,A,I) :

Soit $T = \mathbb{R}_+; (E, \epsilon) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ et $(x_t)_{t\in T}$ est un processus stochastique à valeurs dans (E, ϵ) basé sur (Ω, A, p) si on a :
i) $X_0 = 0$ $p_{p.s}$

ii) $\forall n \geq 2 \ \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ les variables aléatoires $x_{t_1}, x_{t_2} - x_{t_1}, ..., x_{t_n} - x_{t_{n-1}}$sont indépendantes alors $(x_t)_{t \in T}$ est un processus à accroissements indépendantes (P,A,I).

5 Processus de poisson

On appelle processus de poisson un processus ponctuel $(T_n)_{\ n \geq 1}$ pour lequel la fonction de comptage satisfait aux deux conditions suivantes :

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ et des réelles $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ les variables $\left(N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\right)_{1 \leq j \leq n}$sont indépendantes (accroissements indépendants)

ii) si $s \leq t$,alors $N_t - N_s$ à même loi que N_{t-s} (stationnarité)

la proposition suivante explique d'où vient le nom processus de poisson

Proposition 5.1 *Si $(T_n)_{n \geq 1}$ est un processus de poisson, il existe une constante $\theta \geq 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}^+$,N_s suit une loi de poisson de paramètre θs.Ce paramètre θ s'appelle l'intensité du processus, et il exprime le nombre moyen d'arrivées par unité de temps*

Preuve. Notons pour $0 \leq u \leq 1, f_s(u) = E\left(u^{Ns}\right)$ la fonction génératrice de la variable entière N_s. comme pour tous réels $0 \leq s \leq t$, on a $N_t = N_s + (N_t - N_s)$,que les variables N_s et $N_t - N_s$ sont indépendantes,et que la loi de $N_t - N_s$ est celle de N_{t-s},on a $f_t(u) = f_s(u) f_{t-s}(u)$ soit encore, pour tout s et t réels positifs

$$f_{t+s}(u) = f_t(u) f_s(u)$$

la fonction $s \to f_s(u)$ étant clairement décroissante (puisque $N_s$est croissante), un raisonnement classique (en raisonnant d'abord sur les entiers, puis sur les rationnels) montre que la solution de

$$f_{t+s}(u) = f_t(u) f_s(u)$$

est de la forme

$$f_s(u) = \exp(-s\theta(u))$$

où $\theta(u)$ est un réel positif.

On a

$$\begin{aligned}
\theta(u) &= \lim_{h\to 0}\frac{1-\exp(-h\theta(u))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-E\left(u^{N_h}\right)}{h} \qquad (*) \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{K\geq 1}\frac{1}{h}p(N_h=K)\left(1-u^K\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{p(N_h=1)}{h}(1-u)+\sum_{K\geq 2}\frac{1}{h}p(N_h=K)\left(1-u^K\right)\right]
\end{aligned}$$

Notons que

$$0\leq\sum_{K\geq 2}\frac{1}{h}p(N_h=K)\left(1-u^K\right)\leq\frac{p(N_h\geq 2)}{h}$$

on a

$$(\underset{n\geq 1}{\cup}\left(N_{nh}-N_{(n-1)h}\right)\geq 2, N_{(n-1)h}=0)\subset(T_2\leq T_1+h)\ldots(1)$$

L'union étant disjointe. Notons que $p(T_2\leq T_1+h)\downarrow 0$ quand $h\to 0$ puisque $T_1\leq T_2$ p.s.

calculant la probabilité de la réunion dans (1) ,on obtient en utilisant l'indépendance de $N_{nh}-N_{(n-1)h}$,ainsi que le fait que $N_{nh}-N_{(n-1)h}$ a même loi que N_h

$$\sum_{n\geq 1}p(N_h\geq 2)\,p\left(N_{(n-1)h}=0\right),\ldots(2)$$

on a,

$$p\left(N_{(n-1)h}=0\right)=f_{(n-1)h}(0)=\exp(-\theta(0)(n-1)h)$$

et donc (2) devient

$$\sum_{n\geq 1}\exp(-\theta(0)(n-1)h)\,p(N_h\geq 2)=(1-\exp(-\theta(0)h))^{-1}p(N_h\geq 2)$$

utilisant alors l'inclusion de (1),on obtient

$$0 \leq p\left(N_h \geq 2\right) \leq \left(1 - \exp\left(-\theta\left(0\right)h\right)\right) p\left(T_2 \leq T_1 + h\right)$$

et donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{p\left(N_h \geq 2\right)}{h} = 0.$$

de ce fait,de $(*)$,on tire

$$\theta\left(u\right) = \left[\lim_{h \to 0} \frac{p\left(N_h = 1\right)}{h}\right] \left(1 - u\right)$$

posant

$$\theta = \lim_{h \to 0} \frac{p\left(N_h = 1\right)}{h}$$

on obtient

$$f_s\left(u\right) = \exp\left(-\theta s\left(1 - u\right)\right)$$

et l'on reconnait la fonction génératrice d'une loi de poisson de paramètre θs. ■

6 Quelques propriétés du processus de poisson

Introduisons la notion d'échantillon uniforme réordonné. Supposons que $X_1, ..., X_n$ soient n variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $]0, t]$ .notons que pour chaque $1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n, i \neq j$, l'événement $(X_i = X_j)$ est de probabilité nulle, ce qui fait que p.s.,les $(X_i)_{i \leq i \leq n}$ prennent des valeurs différentes : ils sont donc ordonnables en une suite strictement croissante. On pose ainsi

$$X_1^* = \min\left\{X_i, 1 \leq i \leq n\right\}, X_2^* = \min\left\{\left\{X_i, 1 \leq i \leq n\right\} \setminus \left\{X_1^*\right\}\right\} ...$$

et p.s.$X_1^* \leq X_2^* \leq ... \leq X_n^*$.un calcul simple montre que la loi de $(X_1^*, ..., X_n^*)$ admet sur $\mathbb{R}^n$ la densité $d_n\left(s_1, ..., s_n\right) = \frac{n}{t^n} \varkappa_{0 \leq s_1 \leq s_2 \leq .... \leq s_n \leq t}$

6.1 Processus de poisson homogène (PPH)

un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est appelé processus de poisson d'intensité $\lambda \geq 0$ si

i) $N(0) = 0$

ii) le processus est a accroissements indépendants

iii) le nombre de tops se produisant dans un intervalle de temps de longueur $t \geq 0$ suit une loi de poisson de paramètre λ_t

$\forall\ s \geq 0, \forall t \geq 0, \forall n \in N$, $p(N(s+t) - N(s) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n}$

6.2 Processus de poisson non homogène (PPNH)

la fonction d'intensité d'un processus est une fonction du temps $\lambda = \lambda(t)$ .Ce processus est dit processus de poisson non homogéne. le nombre d'événement N, est alors distribué selon une loi de paramétre $\nu(t) = \int_0^t \lambda(u)\, \partial u$

ν : réprésente la valeur moyenne du nombre d'observations dans l'intervalle$[0, t)$.

Ainsi l'indépendance des intervalles entre deux événements successifs est conditionnelle à la variable de temps.

6.3 Processus de renouvellement

Un processus de renouvellement noté $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus stochastique à temps continu et à valeurs entieres non négatives dénombrant les occurrences d'un certain phénoméne lorsque les temps entre deux occurrences consécutives sont des variables aléatoires positives,indépendantes ,identiquement distribuées .

CHAPITRE 3

ChapterProcessus poisson lindley et ses propriétés

1 Processus poisson lindley et ses propriétés

L'un des objectifs importants de ce travail est de développer un nouveau modèle de processus de comptage afin qu"il ait des propriété mathématiques. Pour cela ,nous utilisons l'ideé de générer la distribution de poisson lindley, Soit Φ suit la distribution de Lindley avec le paramètre θ avec sa fonction de densité de probabilité

$$f(\Phi) = \frac{\theta^2}{1+\theta}(1+\Phi)\, e\{-\theta\Phi\}\, \Phi \geq 0, \theta \geq 0. \tag{3-1}$$

Le r iéme moment de la distribution lindley est donné par

$$\mu_r' = E[\Phi^r] = \frac{r}{\theta^r}\frac{(\theta+r+1)}{(\theta+1)}, r = 1, 2....$$

et les moments centraux sont donneé par :

$$E\left[(\Phi - \mu_r')^k\right] = \sum_{r=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} \mu_r' \left(-\mu_1'\right)^{k-r} k = 1, 2...$$

Un traitement complet des propriétés mathématiques de la distribution de lindley ,y compris les problèmes d'éstimation et de simulation, est également fourni dans **Ghitany et al. (2008)**.

La distribution de Poisson de Lindley est générée par le mélange de la distribution de Poisson avec la moyenne Φ, ce qui donne la fonction de masse de probabilité suivante

$$P(x,\theta) = \int_0^{\infty} \frac{\Phi^x}{x} e^{-\Phi} \frac{\theta^2}{1+\theta} (1+\Phi)\, e\{-\theta\Phi\}\, d\Phi = \frac{\theta^2(\theta+2+x)}{(\theta+1)^{x+3}}, \quad x = 1,2,....\theta \geq 0 \tag{3-2}$$

Pour étendre cette distribution de Poisson-Lindley à un modèle de processus de comptage ayant une probabilité explicite du nombre d'événements, l'idée est que, dans le processus de mélange dans (3-2), nous employons un terme supplémentaire dépendant du temps dans la valeur moyenne de la distribution de Poisson.

Soit $\{M(t), t \geq 0\}$ un processus de comptage ordonné. Nous utiliserons la notation $\{M(t), t \geq 0\} \sim PPNH(v(t))$ pour indiquer que le processus de comptage $\{M(t), t \geq 0\}$ suit le NHPP avec sa fonction d'intensité $v(t)$. En outre, nous utiliserons la notation $\Phi \sim L(\theta)$ pour représenter que la variable aléatoire continue Φ suit la distribution de Lindley avec le paramètre θ.

2 Processus de poisson lindley

Définition 2.1 *Un processus de comptage* $\{N(t), t \geq 0\}$ *est appelé processus de poisson lindley avec l'ensemble de paramétre* $(\lambda(t), \theta)$ $\theta \geq 0$, $\lambda(t) \geq 0$, *pour* $t \geq 0$ *si :*

- $\{N(t), t \geq 0\} \mid (\Phi = \phi) \sim PPNH(\Phi\lambda(t))$
- $\Phi \sim L(\theta)$

Tout aulong de ce travail ,le processus de poisson lindley avec lensemle des paramétres $(\lambda(t), \theta)$ sera noté processus de poisson lindley (PPL) et nous définissons

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(X)\, dX$$

Nous allons maintenant dériver quelques propriétés de base de $PPL(\lambda(t), \theta)$. Tout d'abord, lorsqu'on a traite un modèle de processus de comptage, on peut être intéressé par le(s) nombre(s) d'événements dans un (des) intervalle(s) de temps.

Proposition 2.1 *Soit* $\{N(t), t \geq 0\}$ *le processus de poisson lindley* $(\lambda(t), \theta)$ *alors pour* $t \geq 0 et\ 0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_m$ *vérifier les propriétés suivante :*

i)

$$P(N(t) = n) = \frac{\theta^2}{(\theta+1)} \Lambda(t)^n \frac{\theta + \Lambda(t) + n + 1}{(\theta + \Lambda(t))^{n+2}} \tag{3-3}$$

ii)

$$P(N(t_2) - N(t_1) = n) = \frac{\theta^2}{(\theta+1)} (\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1))^n \frac{\theta + (\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)) + n + 1}{(\theta + (\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)))^{n+2}} \tag{3-4}$$

iii)

$$\begin{aligned} P((N(t_i) - N(t_{i-1})) &= n_i, i = 1, 2, ...m) = \frac{\theta^2}{(\theta+1)} \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{(\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}))^{n_i}}{n_i} \right] \\ &* \left(\sum_{i=1}^{m} n_i \right) \left[\frac{\theta + \sum_{i=1}^{m} (\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^{m} n_{i+1}}{(\theta + \sum_{i=1}^{m} \Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1})) * \sum_{i=1}^{m} n_i + 2} \right] \end{aligned} \tag{3-5}$$

Preuve. D'après la définition de $PPL\ (\lambda(t), \theta)$

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= \int_0^\infty \frac{(\Phi\Lambda(t)^n e\{-\Phi\Lambda(t)\})}{n} \frac{\theta^2}{\theta+1} (1+\Phi) e\{-\theta\Phi\} \partial\Phi \\ &= \frac{\theta^2}{(\theta+1)} \Lambda(t)^n \frac{\theta + \Lambda(t) + n + 1}{(\theta + \Lambda(t))^{n+2}} \end{aligned}$$

La probabilité du nombre d'événements dans un intervalle arbitraire $[t_1, t_2]$, $P(N(t_2) - N(t_1) = n)$ peut être facilement obtenue à partir de la preuve de la propriété (i) en remplaçant $\Lambda(t)$ par $\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)$. En raison de la propriété d'accroissements indépendants du NHPP

$$P(N(t_i) - N(t_{i-1})) = n_i \ i = 1, 2, ...m \mid \Phi = \Phi)$$
$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{(\Phi(\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1})))^{n_i}}{n_i} e\{-\Phi(\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}))\}$$

$$= \frac{\theta^2}{(\theta+1)} \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{(\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}))^{n_i}}{n_i}\right] * \int_0^\infty \left(\Phi \sum_{i=1}^{m} n_i + \Phi \sum_{i=1}^{m} n_i + 1\right)$$
$$\times e\left\{-\Phi\left(\theta + \sum_{i=1}^{m} (\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i--1}))\right) \partial\Phi\right\}$$

$$= \frac{\theta^2}{(\theta+1)} \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{(\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}))^{n_i}}{n_i}\right] \left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right) * (\left[\frac{\theta + \sum_{i=1}^{m} (\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}))}{(\theta + \sum_{i=1}^{m} (\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}))) * \sum_{i=1}^{m} n_{i+1}}\right] +$$
$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i + 1}{(\theta + \sum_{i=1}^{m} (\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1})) \sum_{i=1}^{m} n_i + 2)}\right])$$

■

dans la plupart des applications pratiques , les propriétés statistiques de $N(t)$ sont d'une grande importance qui sont donneés de le théoreme suivant.

Dans la suite , la notation

$$\Psi(s) = E\left[e^{sN(t)}\right]$$

désigne la fonction génératrice de moments de $N(t)$.

Proposition 2.2 *Soit* $\{N(t), t \geq 0\}$ *un processus de poisson lindley , alors on a les propriété suivante :*

i) La fonction génératrice de moment de $N(t)$ est donnée par :

$$\Psi(s) = \frac{\theta^2}{\theta+1}\left[\frac{1}{(\theta+\Lambda(t)-\Lambda(t)e^s)} + \frac{1}{(\theta+\Lambda(t)-\Lambda(t)e^s)^2}\right], s \leq \ln\left(\frac{\theta+\Lambda(t)}{\Lambda(t)}\right) \tag{3-6}$$

ii) La moyenne et la variance de $N(t)$ sont données par :

$$\begin{aligned} E[N(t)] &= \frac{\theta+2}{\theta(\theta+1)}\Lambda(t) \quad (3\text{-}7) \\ var[N(t)] &= \frac{\theta^2+4\theta+2)\Lambda(t)^2+\theta\theta+1)\theta+2)\Lambda(t)}{\theta^2(\theta+1)^2} \end{aligned}$$

Preuve. *i)* pour $s \leq \ln\left(\frac{\theta+\Lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)$,on utilisant la forme de la fonction génératrice de la NHPP

$$\begin{aligned} \Psi(s) &= \int_0^\infty e^{\{\Phi(e^s\Lambda(t)-\Lambda(t))\}}\frac{\theta^2}{(\theta+1)}(1+\Phi)e\{-\theta\Phi\}\partial\Phi \\ &= \frac{\theta^2}{(\theta+1)}\left[\frac{1}{(\theta+\Lambda(t)-e^s\Lambda(t))} + \frac{1}{(\theta+\Lambda(t)-e^s\Lambda(t))^2}\right]. \end{aligned}$$

ii) on peut montrer que :

$$\frac{\partial\Psi(s)}{\partial s} = \frac{\theta^2}{(\theta+1)}\left[\frac{e^s\Lambda(t)}{(\theta+\Lambda(t)-e^s\Lambda(t))^2} + \frac{2e^s\Lambda(t)}{(\theta+\Lambda(t)-e^s\Lambda(t))^3}\right]$$

et de là,

$$E[N(t)] = \frac{\partial\Psi(s)}{\partial s}\mid_{s=0} = \frac{\theta+2}{\theta(\theta+1)}\Lambda(t)$$

De plus, on peut également montrer que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi(s)}{\partial s^2} &= \frac{\theta^2}{\theta+1}(\left[\frac{e^s\Lambda(t)}{(\theta+\Lambda(t)-e^e\Lambda(t))^2} + \frac{2(e^s\Lambda(t))^2}{(\theta+\Lambda(t)-e^s\Lambda(t))^3}\right] \\ &\quad + \left[\frac{2e^s\Lambda(t)}{(\theta+\Lambda(t)-e^s\Lambda(t))^3} + \frac{6(e^s\Lambda(t))^2}{(\theta+\Lambda(t)-e^s\Lambda(t))^4}\right]) \end{aligned}$$

$$E\left[N(t)^2\right] = \frac{\partial^2 \Psi(s)}{\partial s^2} \mid_{s=0} = \frac{\Lambda(t)\left[2\Lambda(t)(\theta+3)+\theta(\theta+2)\right]}{\theta^2(\theta+1)}.$$

Ainsi ,

$$var\left[N(t)\right] = E\left[N(t)^2\right] - \left(E\left[N(t)\right]\right)^2 = \frac{\left(\theta^2+4\theta+2\right)\Lambda(t)^2+\theta(\theta+1)(\theta+2)\Lambda(t)}{\theta^2(\theta+1)^2}$$

■

D'après la proposition 2-(ii),

$$var\left[N(t)\right] - E\left[N(t)\right] = \frac{\left(\theta^2+4\theta+2\right)\Lambda(t)^2}{\theta^2(\theta+1)^2} \geq 0 \qquad (3\text{-}7)$$

On voit donc que la PPL conviendrait à ces cas où les observations sont sur dispersées par rapport à un cas de processus de Poisson, pour lequel la moyenne est égale à la variance. En réalité, l'inégalité de (3-7) est valable pour une classe plus générale de modèles.

Dans la discussion qui suit, un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est appelé "processus GD (distribution générale) de Poisson" si $L(\theta)$ dans la définition $1-(ii)$ est remplacé par une "distribution générale" de Φ.

Proposition 2.3 *soit* $\{N(t), t \geq 0\}$ *processus de poisson lindley (distribution générale) alors :*

$$var\left[N(t)\right] \geq E\left[N(t)\right]. \qquad (3\text{-}8)$$

Preuve. on a :

$$var\left[N(t)\right] = E\left[var\left[N(t) \mid \Phi\right]\right] + var\left[E\left[N(t) \mid \Phi\right]\right]$$

comme

$$\{N(t), t \geq 0\} \mid (\Phi = \phi) \sim NHPP\left(\Phi\lambda(t)\right)$$

on a

$$var\left[N(t) \mid \Phi\right] = E\left[N(t) \mid \Phi\right]$$

et

$$var\left[N\left(t\right)\right]=E\left[E\left[N\left(t\right)\mid\Phi\right]\right]+var\left[E\left[N\left(t\right)\mid\Phi\right]\right]=E\left[N\left(t\right)\right]+var\left[E\left[N\left(t\right)\mid\Phi\right]\right]\geq E\left[N\left(t\right)\right].$$

■

3 Propriétés du processus Poisson lindley

Le PPNH possède la propriété d'accroissements indépendants. De toute évidence, le PPL possède des incréments dépendants. Pour voir comment l'histoire précédente affecte les occurrences futures des événements, nous dérivons maintenant l'intensité stochastique du PPL. Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus ponctuel ordonné dont l'historique (filtration interne) dans $[0, t)$ est dénotée par $H_{t-} \equiv \{N(u), 0 \leq u < t\}$. Comme discuté, par exemple, dans **Cha et Finkelstein (2011, 2016)**, l'intensité stochastique λ_t d'un processus ponctuel ordonné $\{N(t), t \geq 0\}$ est définie comme la limite suivante :

$$\lambda_t=\lim_{\partial t\rightarrow 0}\frac{\rho\left(N\left(t,t+\partial t\right)=1\mid H_t-\right)}{\partial t}=\lim_{\partial t\rightarrow 0}\frac{E\left[N\left(t,t+\partial t\right)\mid H_t-\right]}{\partial t}$$

où $N\left(t_1,t_2\right)$ $t_1\leq t_2$ répresente le nombre d'événements dans $\left[t_1,t_2\right]$.

Théorème 3.1 *l'intensité stochastique λ_t du processus de poisson lindley $\left(\lambda\left(t\right),\theta\right)$ donneé par :*

$$\lambda_t=\frac{\left(\theta+\Lambda\left(t\right)\right)+\left(N\left(t-\right)+2\right)}{\left(\theta+\Lambda\left(t\right)\right)^2\frac{1}{N(t-)+1}+\left(\theta+\Lambda\left(t\right)\right)}\lambda\left(t\right) \tag{3-9}$$

Preuve. on a :

$$\lambda\left(t\right)=\lim_{\partial t\rightarrow 0}\frac{\rho\left(N\left(t,t+\partial t\right)=1\mid H_t\right)}{\partial t}=E\left(\Phi\mid H_t-\right)\left[\lim_{\partial t\rightarrow 0}\frac{P\left(N\left(t,t+\partial t\right)=1\mid\Phi:H_t\right)}{\partial t}\right]$$

■

où $E(\Phi \mid H_t-)[.]$ représente l'esperence par rapport a la distribution conditionnel de $(\Phi \mid H_t)$ et

$$\lim_{\partial t\to 0}\frac{p\left(N\left(t,t+\partial t\right)=1\mid \Phi : H_t-\right)}{\partial t}=\Phi\lambda\left(t\right)$$

donc

$$\lambda_t = E\left(\Phi \mid H_t-\right)\left[\Phi\lambda\left(t\right)\right]$$

Notons que H_{t^-} peut être défini en termes de nombre d'événements dans $[0,t)$ noté $N(t-)$ et les temps d'arrivée séquentielle des événements, c'est-à-dire, $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq - - - \leq T_{N(t-)} < t$ et la fonction de masse de probabilité conditionnelle de $(H_t- \mid \Phi) = \left(T_1, T_2, ...T_{N(t-)} \mid \Phi\right)$ est donnée par

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}\left(\phi\lambda\left(t_j\right)\right)\right\}\exp\left\{-\phi\int_0^t\lambda\left(x\right)\partial x\right\} 0\leq t_1\leq t_2\leq ...\leq t_n\leq t, n=0,1,2,...$$

où :$\prod_{j=1}^{n}(.) = 1$ pour $n=0$, t_j représente la réalisation de T_j et n représente celle de $N(t)$. Ainsi, la distribution conjointe conditionnelle de $(\Phi \mid H_t = h_t-)$ où $h_t = (t_1, t_2, ...t_n, n)$ est la réalisation de H_{t-} est donnée par :

$$\left(\phi^n\left[\prod_{i=1}^{n}\lambda\left(t_i\right)\right]\exp\left\{-\phi\int_0^t\lambda\left(x\right)dx\right\}f\left(\phi\right)\right)$$
$$\times\left(\int_0^\infty\phi^n\left[\prod_{i=1}^{n}\lambda\left(t_i\right)\right]\exp\left\{-\phi\int_0^t\lambda\left(x\right)dx\right\}f\left(\phi\right)d\phi\right)^{-1}$$

$$=\left(\phi^n\exp\left\{-\phi\int_0^t\lambda\left(x\right)dx\right\}f\left(\phi\right)\right)\times\left(\int_0^\infty\phi^n\exp\left\{-\phi\int_0^t\lambda\left(x\right)\partial x\right\}f\left(\phi\right)d\phi\right)^{-1},\phi\geq 0$$

Alors,

$$\lambda_t = E\left(\Phi\mid H_{t-}\right)\left[\Phi\lambda\left(t\right)\right]=\frac{\int_0^\infty\phi^{n+1}\exp\left\{-\phi\int_0^t\lambda\left(x\right)\partial x\right\}f\left(\phi\right)\partial\phi}{\int_0^\infty\phi^{n}\exp\left\{-\phi\int_0^t\lambda\left(x\right)\partial x\right\}f\left(\phi\right)\partial\phi}$$

où

$$\int_{0}^{\infty} \phi^{n} \exp\left\{-\phi \int_{0}^{t} \lambda(x)\,\partial x\right\} f(\phi)\,\partial\phi = \frac{\theta^{2}}{\theta+1}\left[\frac{\Gamma(n+2)}{(\theta+\Lambda(t))^{n+2}} + \frac{\Gamma(n+1)}{(\theta+\Lambda(t))^{n+1}}\right]$$

Par conséquent,

$$\lambda_t = \frac{(\theta+\Lambda(t)) + (N(t-)+2)}{(\theta+\Lambda(t))^{2}\frac{1}{N(t-)+1} + (\theta+\Lambda(t))}\lambda(t)$$

Remarque 3.1 *L'une des raisons pour lesquelles le NHPP a été utilisé de manière si intensive dans la pratique est qu'il permet une fonction de vraisemblance explicite et une estimation des paramètres impliqués basée sur celle-ci. Jusqu'à présent, plusieurs modèles paramétriques pour la fonction d'intensité (c'est-à-dire la fonction de taux) du NHPP, tels que le modèle à loi de puissance, le modèle linéaire et le modèle log-linéaire, ont été établis* ***(voir Rausand et Høyland (2004))****. Pour le PPL, grâce aux résultats explicites de la Proposition 1 et du Théorème 1, il est possible de construire la fonction de vraisemblance pour l'estimation des paramètres du modèle, ce qui serait crucial pour l'application pratique du modèle développé. Plus précisément, si l'on observe uniquement le nombre d'événements survenus dans certains intervalles de temps, la proposition 1 peut être utilisée pour construire la fonction de vraisemblance. D'autre part, si l'on observe l'historique complet des événements dans un intervalle de temps* $(0,t]$*, alors la fonction de vraisemblance correspondante peut être construite en utilisant le théorème 1. Comme dans le cas du NHPP, plusieurs modèles paramétriques spécifiques pour* $\lambda(t)$ *pourraient être développés pour le PPL.*

D'après le théorème 1, nous pouvons voir que la PPL à une propriété de Markov, c'est-à-dire que l'état actuel du processus ne dépend que du dernier état du processus $N(t-)$*, et non de l'historique complet* H_{t-}*.*

De plus, λ_t *est croissant dans* $N(t-)$*, ce qui implique que la prédisposition à l'occurrence d'un événement futur est croissante dans le nombre d'événements qui se sont produits précédemment. Cela implique une sorte de propriété d'accroissements dépendants positifs. Dans ce qui suit, nous analysons la structure de dépendance dans les accroissements de PPL. Pour cela, nous commençons par introduire un concept* *de dépendance multivariable. Les variables aléatoires $U_1, U_2, ..., U_m$ sont positivement dépendantes de l'orthant supérieure (PUOD) si l'inégalité*

$$p(Ui) \geq u_i, i = 1, 2, ...m) \geq \prod_{i=1}^{m} p(U_i \geq u_i), pour\ tout\ u_i i = 1, 2, ..m \tag{3-10}$$

(voir, par exemple, Joe (1997))*. Intuitivement, l'inégalité (3-10) implique que $U_1, U_2, ...U_m$ sont plus susceptibles d'avoir simultanément de grandes valeurs, par rapport à un vecteur de variables aléatoires indépendantes ayant les mêmes distributions marginales univariées. Nous définissons maintenant un concept similaire pour les accroissements multivariés dans un modèle de processus de comptage.*

Définition 3.1 *(accroissements dépendants de l'orthant supérieure positive). On dit qu'un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ à des accroissements dépendants supérieur positif si pour tout entier arbitraire $m \geq 2$ et $0 < t_1 < t_2 < - - - < t_m$,*

$$\begin{aligned} p(N(t_i + \partial t_i) + N(t_i)) &\geq n_i; i = 1, 2, ...m) \geq \prod_{i=1}^{m} p(N(t_i - N(t_i)) \geq n_i) \quad pour \quad tout\ n_i, \\ i &= 1, 2, ...m\ ou\ t_{i+1, i=1,2,...m-1} \end{aligned}$$

dans ce qui suit , nous montrons que le processus de poisson (DG)a les incréments dependants de l'orthant superieure positifs a cette fin , nous avons besoin du lemme et des définitions suivants pour certains ordres stochastique

Lemme 3.1 *i) si $g(x)$et $h(x)$ sont toutes deux croissantes ; ou si $g(x)$et $h(x)$ sont toutes deux décroissantes, alors*

$$E[g(x) h(x)] \geq E[g(x)] E[h(x)]$$

Lemme 3.2 *ii) si $g(x)$ est croissante et $h(x)$ est décroissante ou si $g(x)$ est décroissante et $h(x)$ est croissante alors :*

$$E[g(x) h(x)] \leq E[g(x)] E[h(x)]$$

Définition 3.2 *Soit* X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires continues (discrètes) non négatives avec les fonctions de distribution cumulative correspondantes* $F_{X_1}(t)$ *et* $F_{X_2}(t)$*, respectivement. On désigne leurs fonctions de densité de probabilité (fonctions de masse de probabilité) par* $f_{X_1}(t)$ *et* $f_{X_2}(t)$*, respectivement.*

i) Si $F_{X_1}(t)$*et* $F_{X_2}(t)$ *pour tout* $t \geq 0$ *alors* X_1 *est plus petit que* X_2 *dans l'ordre stochastique habituel, dénoté par* $X_1 \underset{st}{\leq} X_2$

ii) Si $f_{X_1}(t) \diagup f_{X_2}(t)$ *diminue en* $t \geq 0$ *alors* X_1 *est plus petit que* X_2 *dans l'ordre du rapport de vraisemblence noté par* $X_1 \underset{lr}{\leq} X_2$ *Il est connu que* $X_1 \underset{lr}{\leq} X_2$ *implique* $X_1 \underset{st}{\leq} X_2$ *(voir Shaked et Shanthikumar (2007)).*

Théorème 3.2 *Soit* $\{N(t), t \geq 0\}$ *le processus de poisson (GD) Alors il possède les accroissements dépendants de l'orthant supérieur positif.*

Preuve. Notons que

$$p(N(t_i + \partial t_i) - N(t_i) \geq n_i, i = 1, 2, ...m) = E[p(N(t_i + \partial t_i) - N(t_i) \geq n_i, i = 1, 2, ...m \mid \phi)]$$

et

$$p(N(t_i + \partial t_i) - N(t_i) \geq n_i; i = 1, 2, ...m \mid \Phi = \phi) = \prod_{i=1}^{n} \left[\sum_{n=n_{i+1}}^{\infty} \frac{\left(\phi \int_{t_i}^{t_{i+\partial t_i}} \lambda(x)\, \partial x\right)^n}{n} \exp\left\{ -\phi \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda(x)\, \partial x \right\} \right] = \prod_{i=1}^{m} h_i(\phi)$$

où

$$h_i(\phi) = \sum_{n_i=n_{i+1}}^{\infty} \frac{\left(\phi \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda(x)\, \partial x\right)^n}{n} \exp\left\{ -\phi \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda(x)\, \partial x \right\} i = 1, 2, ...m$$

pour $\phi_1 \leq \phi_2$

$$\frac{\left(\frac{\left(\phi_1 \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda(x)dx\right)^n}{n} \exp\left\{-\phi_1 \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda\left(x\right)dx\right\}\right)}{\left(\frac{\left(\phi_2 \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda(x)dx\right)^n}{n} \exp\left\{-\phi_2 \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda\left(x\right)dx\right\}\right)}$$

est décroissante en n. Cela implique que Poi $\left(\phi_2 \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda\left(x\right)dx\right)$ est stochastiquement plus grand que Poi $\left(\phi_1 \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda\left(x\right)dx\right)$ dans le sens de l'ordre du rapport de vraisemblance où Poi (μ) représente une variable aléatoire de poisson ayant une valeur moyenne μ. Ceci implique à son tour que Poi$\left(\phi_2 \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda\left(x\right)dx\right)$ est stochastiquent plus grand que Poi $\left(\phi_1 \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda\left(x\right)dx\right)$ dans le sens de l'ordre stochastique et donc la fonction de survie de Poi $\left(\phi \int_{t_i}^{t_i+\partial t_i} \lambda\left(x\right)\partial x\right)$, $h_i\left(\phi\right)$ est croissante en ϕ .Alors, en appliquant récursivement le lemme 1, on a :

$$\begin{aligned}
p\left(N\left(t_i+\partial t_i\right)-N\left(t_i\right)\geq n_i, i=1,2,...m\right) &= E\left[\prod_{i=1}^{m} h_i\left(\Phi\right)\right] \geq .\\
.. &\geq E\left[h_1\left(\Phi\right)h_2\left(\Phi\right)\right]\prod_{i=1}^{m} E\left[h_i\left(\Phi\right)\right] \geq \prod_{i=1}^{m} E\left[h_i\left(\Phi\right)\right]\\
&= \prod_{i=1}^{m} p\left(N\left(t_i+\partial t_i\right)-N\left(t_i\right)\geq n_i\right)
\end{aligned}$$

d'où le résultat ■

4 Processus de poisson lindley composé

Le processus stochastique $\{w\left(t\right), t\geq 0\}$ est dit processus de Poisson Lindley composé si $w\left(t\right)=\sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t\geq 0$.

où $\{N\left(t\right), t\geq 0\}$,est un processus de poisson lindley et $\{X_i, i\geq 1\}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées indépendante de $\{N\left(t\right), t\geq 0\}$.

Soit $M_x(s) = E[e^{sx_i}]$, la FGM de x_i, le résultat suivant donne la fonction génératrice de moments, la moyenne et la variance de $w(t)$.

Théorème 4.1 *La fonction génératrice de moment de $w(t)$ noté par $M_{w(t)}(s)$ est donneé par :*

$$M_{w(t)}(s) = \frac{\theta^2}{\theta+1}\left[\frac{1}{(\theta+\Lambda(t)-M_x(s)\Lambda(t))}+\frac{1}{(\theta+\Lambda(t)-M_x(s)\Lambda(t))^2}\right] \quad \text{(3-11)}$$

la moyenne et la variance de $w(t)$ sont :

$$\begin{aligned} E[w(t)] &= \frac{\theta+2}{\theta(\theta+1)}E[x]\Lambda(t) && \textit{(3-12)} \\ var[w(t)] &= \frac{\theta+2}{\theta(\theta+1)}E\left[x^2\right]\Lambda(t)+\frac{\left(\theta^2+4\theta+2\right)}{\theta^2(\theta+1)^2}(E[x]\Lambda(t))^2 \end{aligned}$$

Preuve. Par conditionnement sur $N(t)$

$$M_{w(t)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{sw(t)} \mid_{N(t)=n}\right] p(N(t)=n) =$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{s(x_1+x_2+x_3+\ldots x_n)} \mid N(t)=n\right] p(N(t)=n) &= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{s(x_1+x_2+\ldots+x_n)}]p(N(t)=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (M_x(s))^n p(N(t)=n) \end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant des arguments similaires à ceux décrits dans la preuve de la proposition 2, nous obtenons les résultats souhaités ■

.

Conclusion

Dans ce travail nous définissons un nouveau modèle de processus de comptage nommé processus Poisson Lindley . Diverses propriétés de ce processus ont été étudier, notamment la fonction génératrice de moments (FGM), la moyenne,la variance, les distributions du nombres (s) d'événements dans un certain intervalle de temps (s) . Certaines propriétés stochastiques de base sont dérivées. En outre, un nouveau concept d'accroissements dépendants positifs est défini et la structure de dépendance est analysée. Enfin le processus composé correspondant brièvement discuté .

BIBLIOGRAPHIE

[1] chaarles-Michel Marle-2006-probabilités 100-101

[2] cha,J.H.2011.comparaison of combined stochastic risk processes and its applications.European J.Oper.Res.215,404-410.

[3] cha,J.H.,Finkelstein,M.,2009.On a terminating shock process with independent wear increments.J.appl.probab.46,353-362

[4] cha,J.H.,Finkelstein,M.,2011.stochastic intensity for minimal repairs in heterogeneous populations.J.Appl.probab.48,868,876.

[5] cha,J.H.,Finkelstein,M.,2016.New shock models based on the generalized polya process.European J.Oper,Res,135-141.

[6] chien, Y.H.,Sheu, S,H.,2006.Extended optimal age -replacement policy with minimal repair of a system subject to shocks.European J.Oper.Res.174,169-181.

[7] Ghitany, M.E.,Atieh, B., Nadarajah,S.,2008.Lindley distribution and its applications.Math.comput.Simulation 78,493-506

[8] Ji, Hwan.,Cha., (2019) . Poisson Lindley process and its main proprities. Statistics and probability letters. 152 ,74,81

[9] joe,H.,1997.Multivariate Models and Dependence concepts.Chapman & Hall,Boca Raton.

[10] Pham, H.,2003.Software reliability and cost models :Perspectives,comparason,and practice.European J.Oper.Res.159,475-489

[11] Rausand, M.,Hoyland,A.,2004.system Reliability Theory : Models,Statistical Methods,and Application.John Wiley & Sons,New Jersey.

[12] Sankaran,M.,1970.The disrete poisson-lindley distribution .Biometrics 26,145-149.

[13] Shaked,M.,Shanthikumar,J.G.,2007.Stochastic Orders.Springer,New york.

[14] Sgeu,S,H.,Chien,Y,H.,2004.Optimal age-replacement policy of a system subject to shocks with random lead-time.European J.Oper.Res.159,132-144.

[15] Thierry callouet Raphaéle Herbin,Mesure,integration,probabilités 42-113

[16] Zarezadeh, S.,Asadi,M.,Balakrishnan,N.,2014.Dynamic network reliability modeling under nonhomogeneous poisson processes.European J.Oper.Res.232,561-571.J.Oper.Res.232,561-571.