



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

**Estimation d'erreur de la méthode mixte -
éléments finis et différences finies - d'une
équation Parabolique : cas équation de la chaleur**

Présentée par:

Mender Chourouk

Devant le Jury :

Dr. SAIFIA Ouarda	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. MEHRI Allaoua	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. CHIDOUH Amar	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examineur

Année Universitaire 2023-2024

Table des matières

Résumé	5
Abstract	6
Notation	7
Introduction	9
1 Méthodes des éléments finis - Rappels et Généralités	10
1.1 Introduction	10
1.2 Problème variationnel	11
1.3 Approximation du problème variationnel - Méthode de Galerkin	11
1.4 Eléments finis linéaires	13
1.4.1 Maillage et fonctions de base	13
1.4.2 Eléments finis P_1	14
1.5 Convergence et estimation d'erreur	15
1.5.1 Principe du maximum	16
1.6 Eléments finis en dimension $n=2$	16
1.6.1 Eléments finis triangulaires	17
2 Analyse numérique de l'équation de la chaleur	19
2.1 Formulation variationnelle	19
2.2 Problème variationnels abstraits-Existence et unicité	21
2.3 Méthode de semi discrétisation	22
2.4 Méthode de discrétisation totale	27
2.4.1 Analyse de l'erreur	28
2.5 Application Numérique	33

Conclusion	40
Bibliographie	42

REMERCIEMENT

Avant tous, nous tenons à remercier de tout coeur notre Dieu "ALLAH" le tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

En tout premier lieu, mes profonds remerciements, ma gratitude sont destinées à mon encadreur, Dr. **Mehri Allaoua**. Je le remercie sincèrement ses encouragements, ses conseils précieux et pour le temps qu'il ma accordé. Nous remercions les membres de jury Dr. **Saifia Ouarda** et Dr. **Chidouh Amar** d'avoir accepté d'évaluer notre travail.

Finalement, je tiens exprimer tous mes remerciements et ma profonde gratitude à toute mes enseignants du département de Mathématiques et tous ceux qui m'ont aidé de près ou loin pour achever ce travail.

Dédicace

C'est avec de profonds sentiments, de respect et d'amour, que je dédie ce modeste travail :

À ma chère mère "**Khadra**" qui m'encouragé et aider durant tout le cycle d'études en lui souhaitant longue vie et que dieu le protège.

À mon père "**Mohammed**" qui n'a jamais cessé de m'encourager dans la poursuite de mes études en m'apportant tout son soutien, que dieu le garde.

À ma chère soeur "**Hana**".

À mes chers frères "**Hamza**" et "**Tarek**" et "**Aymen**".

À toute les personnes de ma grande famille et à tous ceux qui me sont chère.

Résumé

Dans ce mémoire nous considérons la méthode mixte-éléments finis et différences finies pour une équation parabolique cas équation de la chaleur. Une estimation d'erreur du problème semi-discret spatialement par la méthode des éléments finis est discutée. Un Problème totalement discret est proposé en introduisant l'approximation par différences finies pour la variable temps. L'estimation d'erreur et la convergence de la solution approchée ont été prouvés.

Abstract

In this thesis we consider the mixed finite element and finite difference method for a parabolic heat equation. An error estimate of the spatially semi-discrete problem using the finite element method is discussed. A fully discrete problem is proposed by introducing the finite difference approximation for the time variable. Error estimation and convergence of the approximate solution have been proved.

Notations

Δ : Laplacien.

∇ : Le gradient.

λ : Valeur propre.

Ω : Un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

$L^2(\Omega)$: Espace de Lebesgue.

$H^1(\Omega), H_0^1(\Omega), H^2(\Omega)$: Espaces de Sobolev.

V : Désigne l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

$\|\cdot\|$: Norme dans $L^2(\Omega)$.

V_h : L'espace d'approximation.

Introduction

Les problèmes d'évolution apparaissent dans de très nombreuses applications : finance (équation de black-Scholes), analyse d'images (équation de Schrödinger), mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes, ...), etc [2, 3, 5].

Nous nous intéressons à un exemple typique d'équation aux dérivées partielles : l'équation de la chaleur, introduite initialement en 1807 par Joseph Fourier, après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelées ensuite séries de Fourier et transformées de Fourier, qui ont permis une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes, en particulier pour les fondements de la thermodynamique, et qui ont entraîné aussi des travaux mathématiques très importants pour les rendre rigoureuses, véritable révolution à la fois physique et mathématique.

En tant qu'EDP typique, l'équation de la chaleur est l'un des sujets les plus étudiés en mathématiques pures, et appliquées et son analyse est fondamentale [3, 5].

Une variante de cette équation est très présente en physique sous le nom générique d'équation de diffusion on la retrouve dans la diffusion de masse dans un milieu binaire ou de charge électrique dans un conducteur, le transfert radiatif, etc. Elle est également liée à l'équation de Burgers et à l'équation de Schrödinger.

L'équation de la chaleur, ainsi que ses variables, est également importante dans de nombreux domaines des sciences et des mathématiques appliquées. En théorie des probabilités, l'équation de la chaleur associée à l'étude de la progression aléatoire et du mouvement brownien via l'équation de Fokker Planck.

La résolution numérique de l'équation de la chaleur reste un problème très important intervenant dans de nombreux calculs de physique. Cette équation trouve plusieurs méthodes de résolution, comme la méthode des différences finies, méthode des éléments finis, ...etc [6, 7, 8].

Ce mémoire est principalement divisé en trois chapitres : le premier chapitre est dédié à un rappel général de la méthode des éléments finis, où nous présentons les éléments finis de degré 1 et 2. Dans le deuxième chapitre nous présentons la formulation variationnelle du problème, un théorème d'existence et d'unicité, un problème semi-discret, et un problème totalement discret. Nous démontrons aussi dans ce chapitre une analyse complète de l'er-

reur de la solution approchée (stabilité et convergence). Le troisième chapitre s'étend à la simulation numérique d'un exemple test.

Méthodes des éléments finis - Rappels et Généralités

1.1 Introduction

La résolution analytique d'équations différentielles pose par fois des difficultés insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. Le recours aux modèles physiques et à la simulation expérimentale pour la recherche d'une solution analogue à la solution recherchée peut s'avérer couteux en temps et en moyens. Avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des système d'équations différentielles très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions satisfaisantes à des problèmes d'ingénierie très variés. La méthode des éléments finis [1, 7, 8] est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traité par la méthode des éléments finis. Cette méthode consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimension non infinitésimale. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples, et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

1.2 Problème variationnel

Les formulations variationnelles de la plupart des problèmes aux limites que l'on aura à considérer s'écrivent sous la forme générale suivante,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que,} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in V. \end{cases} \quad (1.1)$$

où V est espace de Hilbert dont la norme et le produit scalaire seront notés par : $\|\cdot\|_V$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respectivement. Les hypothèses sur a et L sont comme suit,

1. $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire.
2. a est continue, c'est à dire qu'il existe une constante $M > 0$ tel que,

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \cdot \|v\|_V, \forall (u, v) \in V \times V.$$

3. a est coercive, c'est à dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que,

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2, \forall v \in V.$$

4. L est une forme linéaire continue sur V (i.e L est un élément de V^* , espace dual de V).

Alors nous avons le résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du problème ci-dessus.

Théorème 1.2.1 (Lax-Milgram) *Soit V un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire, continue et coercive sur V , et L une forme linéaire continue sur V . Alors le problème variationnel (1.1) admet une unique solution faible $u \in V$. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L ,*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V^*}.$$

Où α est la constante de coercivité de a .

1.3 Approximation du problème variationnel - Méthode de Galerkin

L'idée de base de cette méthode est d'approcher les éléments de l'espace V par ceux d'un espace V_h de dimension finie, où h est un paramètre réel positif caractérisant la discrétisation

et destiné à tendre vers 0. La méthode des éléments, est une méthode de Galerkin particulière possédant des propriétés qui la rendent spécialement intéressante pour la résolution des problèmes aux limites. Soit V_h une famille d'espaces dépendants d'un paramètre positif h telle que :

$$V_h \subset V, \dim V_h = N_h < +\infty, \forall h > 0.$$

Le problème approché est tout simplement l'analogue discret du problème (1.1), il prend la forme,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que,} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (1.2)$$

Et est appelé problème de Galerkin. La résolution du problème discret (1.2) est facile comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.3.1 *Soit V un espace de Hilbert, et V_h un espace de dimension finie incluse dans V . Soit a une forme bilinéaire, continue et coercive sur V , et L une forme linéaire continue sur V . Alors le problème variationnel discret (1.2) admet une unique solution faible. Par ailleurs cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive et symétrique si $a(.,.)$ est symétrique.*

Le lemme suivant dû à Jean Cea, montre que la distance entre la solution exacte u et la solution discrète u_h est majorée **uniformément par rapport au sous-espace V_h** par la distance entre u et V_h . Ce lemme joue un rôle crucial dans la démonstration de la convergence de la solution discrète.

Lemme 1.3.1 (Lemme de Cea). *Soit u, u_h les solutions de (1.1), (1.2) respectivement. Alors on a l'estimation suivante,*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Preuve : Puisque $V_h \subset V$, on déduit par soustraction des formulations variationnelles (1.1), (1.2), que,

$$a(u - u_h, w_h) = 0, \forall w_h \in V_h.$$

En choisissant $w_h = u_h - v_h$, on obtient,

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) - a(u - u_h, u_h - v_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \\ &\leq M \|u - u_h\|_V \cdot \|u - v_h\|_V. \end{aligned}$$

d'où l'on déduit le résultat. ■

Finalement pour démontrer la convergence de cette approximation variationnelle, nous donnons un lemme général.

Lemme 1.3.2 *Supposons qu'il existe un sous-espace $\mathcal{V} \subset V$ dense dans V , et une application r_h de \mathcal{V} dans V_h (appelée **opérateur d'interpolation**) tels que,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_V = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (1.3)$$

Alors la méthode d'approximation variationnelle (de Galerkin) converge, c'est à dire,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0. \quad (1.4)$$

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. Par densité de \mathcal{V} il existe $v \in \mathcal{V}$, tel que $\|u - v\|_V < \epsilon$. Par ailleurs, il existe un h_0 (dépendant de ϵ), tel que pour cet élément v de \mathcal{V} , on a,

$$\|v - r_h(v)\|_V \leq \epsilon, \quad \forall h \leq h_0.$$

En vertu du lemme [1.3.1](#), on a,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq C \|u - r_h(v)\|_V \\ &\leq C (\|u - v\|_V + \|v - r_h(v)\|_V) \\ &\leq 2C\epsilon. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit le résultat. ■

1.4 Éléments finis linéaires

1.4.1 Maillage et fonctions de base

Nous allons établir comment construire les fonctions de base de la méthode de Galerkin de manière efficace. Pour fixer les idées et simplifier la présentation, nous supposons que $V = H^1(0, 1)$ ou $V = H_0^1(0, 1)$. Dans le cas du problème de poisson par exemple, ceci correspond aux choix adaptés aux conditions aux limites de type de Neumann et Dirichlet, respectivement. On introduit une partition de $\bar{\Omega} = [0, 1]$ en $N + 1$ sous-intervalles $]x_{j-1}, x_j[$, appelés éléments, de longueur $h_j = x_j - x_{j-1}$ avec,

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1.$$

On pose

$$h = \max_j h_j.$$

Lorsque les noeuds x_j sont équidistants le maillage est dit uniforme. Dans ce cas,

$$x_j = jh \text{ avec } h = \frac{1}{N+1}, 0 \leq j \leq N+1.$$

Par souci de simplicité, nous supposons aussi que le maillage est uniforme. Notre objectif est de construire des approximations de l'espace V . Nous appliquerons donc la méthode des éléments finis afin de construire des sous-espaces V_h . La base de fonctions correspondante doit satisfaire les trois critères suivantes.

1. La base de fonctions est engendrée par des fonctions simples définies par morceaux sur chaque élément de la grille.
2. Les fonctions de la base sont suffisamment régulières pour appartenir à V .
3. Les fonctions de la base sont choisies de sorte que les paramètres définissant la solution approchée u_h soient précisément les valeurs de u_h aux noeuds.

1.4.2 Éléments finis P_1

Soit P_1 l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Considérons l'espace des fonctions continues et affines par morceaux sur chaque élément de la maille, défini par,

$$V_h = \{v_h \in \mathbf{C}([0, 1]) \cap V \text{ tel que } v_h|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_1 \text{ pour tout } 0 \leq j \leq N\}$$

Nous pouvons présenter les fonctions de V_h à l'aide des $(N+2)$ fonctions de base de Lagrange caractérisées par,

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, \dots, N+1.$$

Où δ représente le symbole de Kronecker.

$$\phi_j(x_j) = 1 \text{ et } \phi_j(x_i) = 0, \quad \forall i \neq j.$$

On construit les fonctions de base $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ de telle sorte qu'elles satisfaisent les critères cités ci-dessus. Pour $j = 0, \dots, N+1$, la fonction ϕ_j associée au sommet x_j est définie par,

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \\ \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

Lorsque le maillage est uniforme,

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \\ \frac{x-x_{j-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1}-x}{h} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

Proposition 1.4.1 *Si $V = H^1(0, 1)$, alors l'espace V_h est un sous-espace de $H^1(0, 1)$ de dimension $N + 2$ et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{0 \leq j \leq N+1}$,*

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v_h(x_j) \phi_j(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Proposition 1.4.2 *Si $V = H_0^1(0, 1)$, alors l'espace V_h est un sous-espace de $H_0^1(0, 1)$ de dimension N et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{1 \leq j \leq N}$,*

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^N v_h(x_j) \phi_j(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Nous désignons par $m(h)$ la dimension de l'espace V .

1.5 Convergence et estimation d'erreur

Définition 1.5.1 (Opérateur d'interpolation) *On appelle opérateur d'interpolation Π_h^1 , l'application linéaire de V dans V_h définie pour tout $v \in V$ par,*

$$\Pi_h^1 v(x) = \sum_{j=1}^{m(h)} v(x_j) \phi_j(x). \quad (1.5)$$

L'interpolée d'une fonction v est la fonction affine par morceaux qui coïncide avec v sur les sommets du maillage. Ici $\mathcal{V} = V$ et $r_h = \Pi_h^1$.

La convergence de la méthode des éléments finis repose sur le lemme suivant.

Lemme 1.5.1 (Lemme d'interpolation) *Soit $v \in V$, et soit $\Pi_h^1 v \in V_h$ l'interpolée de la fonction v définie par (1.5). Alors $\forall v \in V$, il vérifie,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - \Pi_h^1 v\|_V = 0.$$

De plus si $v \in H^2(0, 1)$, alors il existe deux constantes C_0, C_1 indépendante de h tel que,

$$\|v - \Pi_h^1 v\|_{L^2(0,1)} \leq C_0 h^2 \|v''\|_{L^2(0,1)}.$$

et,

$$\|v - \Pi_h^1 v\|_V \leq C_1 h \|v''\|_{L^2(0,1)}.$$

L'estimation d'erreur est plus précise dans le des fonctions suffisamment régulières. Le résultat suivant nous donne une estimation d'erreur d'approximation par la méthode des éléments finis linéaires pour le problème de Dirichlet.

Théorème 1.5.2 Soient $u \in V$ et $u_h \in V_h$ les solutions de (1.1) et (1.2), respectivement. Alors la méthode des éléments finis converge, i.e.,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0. \quad (1.6)$$

De plus, si $u \in H^2(0,1)$, alors il existe une constante C indépendante de u et de h telle que,

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}. \quad (1.7)$$

Remarque 1.5.1 L'estimation (1.7) indique la vitesse de convergence de la méthode des éléments finis. Comme cette majoration est proportionnelle à h , on dit que la méthode des éléments finis converge linéairement.

Preuve : Il est clair que $\Pi_h^1 \in V_h$. En utilisant le lemme 1.3.1 de Cea, il vient que,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \\ &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h^1 u\|_V. \end{aligned}$$

Les deux assertions (1.6) et (1.7) sont une séquence du lemme 1.5.1. ■

1.5.1 Principe du maximum

Proposition 1.5.3 Considérons le cas de l'équation de Poisson, et supposons que $f \geq 0$ presque partout dans $]0,1[$. Alors, la solution u_h de l'approximation variationnelle par la méthode des éléments finis (1.2) vérifie $u_h \geq 0$ dans $[0,1]$.

1.6 Eléments finis en dimension $n=2$

Nous nous plaçons maintenant en dimension $n \geq 2$ en pratique $n = 2, 3$. Pour simplifier l'exposé nous supposons $n = 2$, mais certains résultats s'étendent à $n = 3$. Nous considérons le problème modèle de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.8)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$. On sait qu'il admet une solution faible dans $V = H_0^1(\Omega)$. Dans tout ce qui suit nous supposons que Ω est un polygone de frontière Γ de classe C^1 par morceaux.

1.6.1 Eléments finis triangulaires

Définition 1.6.1 *Un maillage ou une famille de triangulation de $\bar{\Omega}$ est un ensemble \mathcal{T}_h 2-simplexes (triangles) non-dégénérés $(K_i)_{1 \leq i \leq m}$ qui vérifient,*

1. $K_i \subset \bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^m K_i$.
2. l'intersection $K_i \cap K_j$ de deux triangles distincts est soit vide, soit réduit à un sommet commun, soit à une arête commune entière.

Les sommets (ou noeuds) du maillage \mathcal{T}_h sont les sommets (a_j) des 2-simplexes (K_i) qui le composent. Par convention, le paramètre h désigne le maximum des diamètres des 2-simplexes (K_i) .

On pose,

$h_K = \text{diam}(K)$, le diamètre du triangle K .

$\rho(K)$, la rondeur du triangle K .

Définition 1.6.2 *Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages de Ω . On dit que $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est régulières si,*

1. la suite $h = \max_{K_i \in \mathcal{T}_h} (\text{diam}(K_i))$ tend vers 0 quand h_{K_i} tend vers 0.
2. il existe une constante C telle que, pour tout $h > 0$ et tout $K \in \mathcal{T}_h$ on a,

$$0 < \frac{\text{diam}(K)}{\rho(K)} \leq C$$

.

On approxime l'espace V par un espace V_h de dimension finie égale à $m(h)$. On appelle $m(h)$ le nombre de degré de liberté de la famille de triangulation \mathcal{T}_h . De plus, il existe une base de V_h notée $(\phi_i)_{1 \leq i \leq m(h)}$ définie par,

$$\phi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq m(h)$$

telle que $\forall v_h \in V_h$ on a,

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{m(h)} v_h(a_i) \phi_i(x)$$

Résolution pratique

On résout le problème modèle par la méthode des éléments finis en introduisant les polynômes de Lagrange \mathbf{P}_1 de degré 1. On pose,

$$V_h = \{v_h \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega), \text{ tel que } v_h|_{K_j} \in \mathbf{P}_1 \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m\}$$

La formulation variationnelle du problème discret est,

$$\text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que : } \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx, \quad \forall v_h \in V_h.$$

On décompose u_h sur la base des $(\phi_j)_{1 \leq j \leq m(h)}$ et on prend $v_h = \phi_i$ ce qui donne,

$$\sum_{j=1}^{m(h)} u_h(a_j) \int_{\Omega} \nabla \phi_j \nabla \phi_i dx = \int_{\Omega} f \phi_i dx, \quad 1 \leq i \leq m(h).$$

On écrit le système ci-dessus sous la forme vectorielle,

$$A_h U_h = B_h \tag{1.9}$$

Avec,

$$\text{Le vecteur inconnu : } U_h = (u_h(a_j))_{1 \leq j \leq m(h)}.$$

$$\text{Le second membre : } B_h = \int_{\Omega} f \phi_i dx, \quad 1 \leq i \leq m(h).$$

$$\text{La matrice de rigidité : } A_h = (a(\phi_i, \phi_j))_{1 \leq i, j \leq m(h)} = \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_j \nabla \phi_i dx \right)_{1 \leq i, j \leq m(h)}$$

En générale, l'intersection des supports ϕ_j et ϕ_i est vide et la plupart des coefficients de A_h sont nuls. La matrice de rigidité est donc creuse. Les éléments du second membre B_h se calculent par les méthodes d'intégrations numériques.

Le système d'équations linéaires (1.9) se résout par les méthodes numériques itératives ou directes.

2 Analyse numérique de l'équation de la chaleur

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^1 par morceaux. Considérons le problème suivant : trouver une fonction $u(x, t) : \bar{\Omega} \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega \times]0, \infty[\\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \times]0, \infty[\\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le laplacien par rapport aux variables d'espace $x = (x_1, \dots, x_n)$, et t est la variable de temps. le problème aux limites (2.1) modélise l'évolution de la température $u(x, t)$ dans un corps thermiquement conducteur qui occupe le domaine Ω . La distribution de la température initiale à $t = 0$ est donnée par la fonction u_0 . Sur la frontière Γ du corps considéré, la température est maintenue à une valeur constante, utilisée comme valeurs de référence (c'est la condition de Dirichlet homogène $u(x, t) = 0$ sur $\Gamma \times \mathbb{R}_+^*$). Les sources de chaleur sont modélisées par la fonction $f = f(x, t)$. On peut, bien sûr associer d'autres conditions aux limites à l'équation de la chaleur, par exemple une condition de Neumann, $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sur $\Gamma \times]0, \infty[$ où η est le vecteur unitaire de la normale extérieure à Γ . Cette dernière expression exprime que le flux de la chaleur à travers Γ est nul.

2.1 Formulation variationnelle

L'idée est d'écrire une formulation variationnelle qui ressemble à une équation différentielle ordinaire du premier ordre [1, 2]. Pour cela nous multiplions l'équation de la chaleur (2.1) par une fonction test $v(x)$ qui ne dépend pas du temps t , soit $v \in H_0^1(\Omega)$ on a,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x) \, dx + \int_{\Omega} \Delta u(x, t)v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En introduisant la formule de Green, on obtient,

$$\int_{\Omega} \Delta u(x, t) v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) v(x) d\sigma.$$

Alors,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.2)$$

Comme ni Ω ni $v(x)$ ne varient avec le temps, on peut écrire cette dernière équation sous la forme,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Nous séparons les variables x et t , en considérant désormais la solution $u(x, t)$ comme une fonction du temps t à valeurs dans un espace de fonctions définies sur Ω . Plus précisément, si l'on se donne un temps final $T > 0$ (éventuellement égal à $+\infty$), on considère que u est définie par, $u :]0, T[\rightarrow H_0^1(\Omega)$, $t \rightarrow u(t)$, et nous continuerons de noter $u(x, t)$ la valeur de $u(x)(t)$. De même le terme source $f(x, t)$ est désormais considéré comme une fonction en t à valeur dans $L^2(\Omega)$. Soient le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et la forme bilinéaire $a(w, v)$ définis par,

$$\langle w, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} w(x) v(x) dx, \quad a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w(x) \nabla v(x) dx.$$

Dorénavant on note $\langle w, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ par $\langle w, v \rangle$. On peut alors mettre (2.2) sous la forme d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre en t . On obtient ainsi la formulation variationnelle suivante.

Trouver $u(t)$ fonction de $]0, T[$ à valeur dans $H_0^1(\Omega)$ tels que,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Il reste plusieurs points à préciser dans la formulation variationnelle (2.3) pour lui donner un sens mathématique précis : Quelle est la régularité en temps de f et de u , et quel sens donner à la dérivée en t ? En particulier, il faudra absolument que $u(t)$ soit continue en $t = 0$ pour donner un sens correct à la donnée initiale u_0 . Nous n'analysons pas ces questions théoriques dans ce mémoire.

2.2 Problème variationnels abstraits-Existence et unicité

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (2.3), nous revenons au cadre général en considérant deux espaces de Hilbert V et H tels que $V \subset H$ avec injection compacte et dense. Typiquement on aura $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$. Puisque la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique, continue et coercive alors d'après le théorème des valeurs propres [1, 2], il existe une suite croissante positive de valeurs propre $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots$, et une base Hilbertienne orthonormale dans H de vecteurs propres $(w_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ telles que,

$$a(w_i, v) = \lambda_i \langle w_i, v \rangle_H, \quad \forall v \in V. \quad (2.4)$$

Théorème 2.2.1 *Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection compacte et V est dense dans H . Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive dans V . Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in H$, et un terme source $f \in L^2(]0, T[; H)$. Alors le problème,*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle_H + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_H & \forall v \in V, 0 < t < T \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

(Où l'équation (2.5) a lieu au sens faible dans $]0, T[)$ a une unique solution $u \in L^2(]0, T[; V) \cap C([0, T]; H)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de Ω) telle que on a l'estimation de l'énergie suivante,

$$\|u\|_{L^2(]0, T[; V)} + \|u\|_{C([0, T]; H)} \leq C(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(]0, T[; H)}). \quad (2.6)$$

En outre la solution u est donnée par

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \langle u_0, w_i \rangle e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \langle f(s), w_i \rangle e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right\} w_i. \quad (2.7)$$

Donnons enfin un résultat de continuité de la solution u par rapport aux données u_0 et f .

Théorème 2.2.2 *Sous les conditions d'application du théorème 2.2.1, la solution u du problème (2.5) vérifie l'inégalité*

$$|u(t)| \leq |u_0| e^{-\lambda_1 t} + \int_0^t |f(s)| e^{-\lambda_1(t-s)} ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

Où λ_1 est la plus petite valeur propre de (2.4)

Preuve : C'est une application simple de l'existence du développement en série de (2.7).

On en déduit,

$$|u(t)| \leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_0, w_i \rangle e^{-\lambda_i t} w_i \right| + \int_0^t \left| \sum_{i=1}^{\infty} \langle f(s), w_i \rangle e^{-\lambda_i(t-s)} w_i \right| ds.$$

Or,

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_0, w_i \rangle e^{-\lambda_i t} w_i \right| \leq \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u_0, w_i \rangle|^2 e^{-2\lambda_i t} \right\}^{1/2} \leq |u_0| e^{-\lambda_1 t},$$

et pour $0 \leq s \leq t$,

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \langle f(s), w_i \rangle e^{-\lambda_i(t-s)} w_i \right| \leq \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f(s), w_i \rangle|^2 e^{-2\lambda_i(t-s)} \right\}^{1/2} \leq |f(s)| e^{-\lambda_1(t-s)}$$

D'où le résultat. ■

2.3 Méthode de semi discrétisation

Nous considérons un espace de dimension 2. Nous introduisons une famille de triangulation régulière quasi-uniforme \mathcal{T}^h sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, h étant le paramètre de la discrétisation spatiale, et considérons V_h l'espace d'éléments finis linéaires par morceaux sur chaque triangle K dans \mathcal{T}^h , plus précisément soit,

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \cap V : v_h|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}^h\}, \text{ (ici } V = H_0^1(\Omega)\text{)}.$$

Où P_1 est l'ensemble des polynômes de Lagrange de degré inférieur ou égal à 1. Soit M_l , $l = 1, \dots, m(h)$ les noeuds de la famille de triangulation \mathcal{T}^h qui n'appartiennent pas à Γ . V_h est de dimension finie égale à $m(h)$. Nous notons par φ_l , $l = 1, \dots, m(h)$ les fonctions de base usuelles ($\varphi_l(M_j) = \delta_{lj}$, symbole de Kronecker). L'analogue semi-discret du problème continu (2.3) est donné par : étant donné $u_{0h} \in V_h$, trouver une fonction $u_h : t \in [0, T] \rightarrow u_h(t) \in V_h$ solution du système différentiel ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle u_h(t), v_h \rangle + a(u_h(t), v_h) = \langle f(t), v_h \rangle, \forall v_h \in V_h \\ u_h(t=0) = u_{0h} \end{cases} \quad (2.8)$$

Puisque la forme bilinéaire est symétrique et coercive dans l'espace V_h , alors d'après le théorème des valeurs propres [1, 2] relatif à $a(\cdot, \cdot)$, il existe une suite finie de valeurs propres croissantes et strictement positives : $0 < \lambda_{1h} \leq \lambda_{2h} \leq \dots \leq \lambda_{m(h)h}$, et une suite de fonctions propres $w_{1h}, w_{2h}, \dots, w_{m(h)h}$ de V_h orthonormale dans $L^2(\Omega)$ telle que,

$$a(w_{ih}, v_h) = \lambda_{ih} \langle w_{ih}, v_h \rangle, \forall v_h \in V_h. \quad (2.9)$$

Théorème 2.3.1 Le problème de semi-discret (2.8) admet une solution unique $u_h(t) \in V_h$ donnée par

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m(h)} \left\{ \langle u_{0h}, w_{ih} \rangle e^{-\lambda_{ih}t} + \int_0^t \langle f(s), w_{ih} \rangle e^{-\lambda_{ih}(t-s)} ds \right\} w_{ih}$$

Preuve : La démonstration est en tout point analogue à celle des théorème 2.2.1. De manière pratique on cherche une fonction u_h sous la forme,

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^{m(h)} \xi_j(t) \varphi_j,$$

Alors en posant,

$$u_{0h}(t) = \sum_{j=1}^{m(h)} \xi_{0j}(t) \varphi_j$$

Le problème semi-discret (2.8) s'écrit,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{m(h)} \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \frac{d\xi_j}{dt}(t) + \sum_{j=1}^{m(h)} a(\varphi_j, \varphi_i) \xi_j(t) = \langle f(t), \varphi_i \rangle, \quad 1 \leq i \leq m(h) \\ \xi_i(0) = \xi_{0i}, \quad 1 \leq i \leq m(h). \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Introduisons la matrice de rigidité $R = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq m(h)}$ et la matrice de masse $M = (\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle)_{1 \leq i, j \leq m(h)}$, le système semi-discret (2.10) se met alors sous la forme,

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d\xi}{dt}(t) + R\xi(t) = \beta(t), \\ \xi(0) = \xi_0, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Où on a posé,

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (\xi_1(t), \dots, \xi_{m(h)}(t))^T, \quad \xi_0 = (\xi_{01}, \dots, \xi_{0m(h)})^T \\ \beta(t) &= (\beta_1(t), \dots, \beta_{m(h)}(t))^T, \quad \beta_i(t) = \langle f(t), \varphi_i \rangle_{1 \leq i \leq m(h)}. \end{aligned}$$

Il s'agit alors de résoudre numériquement ce système différentiel (2.11) de dimension $m(h)$.

■

Nous allons examiner l'erreur commise lorsque on remplace le problème continue (2.3) par le problème semi-discret (2.8). Pour simplifier un peu l'exposition des résultats, considérons l'opérateur de projection elliptique (projection de Ritz),

$$\mathcal{R}_h : V \longrightarrow V_h,$$

défini par,

$$a(\mathcal{R}_h v, v_h) = a(v, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad v \in V \quad (2.12)$$

\mathcal{R}_h n'est autre que la projection orthogonale de V sur V_h pour le produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$. On peut dire aussi que $\mathcal{R}_h v$ est une approximation par éléments finis de la solution du problème elliptique correspondant au solution exacte v . Avant d'estimer l'erreur de la solution semi-discrète on a besoin de quelques lemmes [9]. Nous notons la norme dans l'espace $L^2(\Omega)$ par $\|\cdot\|$, et la norme dans l'espace $H^2(\Omega)$ par $\|\cdot\|_{H^2}$.

Lemme 2.3.1 *Il existent deux constantes C_0, C_1 indépendantes de h , telles qu'on a les estimations suivantes,*

$$\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \|\mathcal{R}_h v - v\| \leq C_0 h^2 \|v\|_{H^2}, \quad (2.13)$$

et

$$\|\nabla(\mathcal{R}_h v - v)\| \leq C_1 h \|v\|_{H^2}. \quad (2.14)$$

Lemme 2.3.2 *Avec \mathcal{R}_h défini par (2.12), et sous les hypothèses de régularité de $u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et $u_t \in H^2(\Omega)$ il existent deux constantes C_0, C_1 indépendantes de t et h telles qu'on a les estimations suivantes,*

$$\|\mathcal{R}_h u(t) - u(t)\| + h \|\nabla(\mathcal{R}_h u(t) - u(t))\| \leq C_0 h^2 \|u\|_{H^2}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.15)$$

et

$$\left\| \frac{d}{dt} (\mathcal{R}_h u(t) - u(t)) \right\| + h \left\| \nabla \left(\frac{d}{dt} (\mathcal{R}_h u(t) - u(t)) \right) \right\| \leq C_1 h^2 \|u_t\|_{H^2}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.16)$$

Où $u_t = \frac{du}{dt}$.

Théorème 2.3.2 (Estimation d'erreur) *Soient u et $u_h(t)$ les solutions respectivement de (2.1) et (2.8). Alors sous les hypothèses de régularité de $u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et $u_t \in H^2(\Omega)$ on a l'estimation d'erreur suivante,*

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq \|u_{0h} - u_0\| + Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2} + \int_0^t \|u_t\|_{H^2} ds \right).$$

Où C est une constante indépendante de t et h .

Preuve : Posons,

$u_h(t) - u(t) = \theta(t) + \rho(t)$, où $\theta(t) = u_h(t) - \mathcal{R}_h u(t)$, et $\rho(t) = \mathcal{R}_h u(t) - u(t)$. L'estimation de $\rho(t)$ se déduit du lemme 2.3.2. En effet,

$$\|\rho(t)\| = \|\mathcal{R}_h u(t) - u(t)\| \leq Ch^2 \|u\|_{H^2}.$$

Or,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u_t(s) ds.$$

Donc,

$$\|u\|_{H^2} \leq \|u_0\|_{H^2} + \int_0^t \|u_t\|_{H^2} ds.$$

Par conséquent on a,

$$\|\rho(t)\| \leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2} + \int_0^t \|u_t\|_{H^2} ds \right). \quad (2.17)$$

Reste à estimer la fonction $\theta(t)$ qui forme la grande partie de cette démonstration. En posant $\frac{d\theta}{dt}(t) = \theta_t$, on a,

$$\begin{aligned} \forall v_h \in V_h, \langle \theta_t, v_h \rangle + a(\theta, v_h) &= \langle u_{h,t} - \mathcal{R}_h u_t, v_h \rangle + a(u_h - \mathcal{R}_h u, v_h) \\ &= [\langle u_{h,t}, v_h \rangle + a(u_h, v_h)] - \langle \mathcal{R}_h u_t, v_h \rangle - a(\mathcal{R}_h u, v_h) \\ &= \langle f, v_h \rangle + \langle u_t, v_h \rangle - \langle \mathcal{R}_h u_t, v_h \rangle - \langle u_t, v_h \rangle - a(\mathcal{R}_h u, v_h) \\ &= \langle f, v_h \rangle - \langle \mathcal{R}_h u_t - u_t, v_h \rangle - \langle u_t, v_h \rangle - a(\mathcal{R}_h u, v_h) \\ &= \langle f, v_h \rangle - \langle \rho_t, v_h \rangle - \langle u_t, v_h \rangle - a(\mathcal{R}_h u, v_h). \end{aligned}$$

En introduisant l'expression (2.12), il vient,

$$\begin{aligned} \langle \theta_t, v_h \rangle + a(\theta, v_h) &= \langle f, v_h \rangle - \langle \rho_t, v_h \rangle - \langle u_t, v_h \rangle - a(u, v_h) \\ &= \langle f, v_h \rangle - \langle \rho_t, v_h \rangle - [\langle u_t, v_h \rangle + a(u, v_h)] \\ &= \langle f, v_h \rangle - \langle \rho_t, v_h \rangle - \langle f, v_h \rangle. \end{aligned}$$

Donc, $\forall v_h \in V_h, \forall t \in]0, T]$ on a,

$$\langle \theta_t, v_h \rangle + a(\theta, v_h) = -\langle \rho, v_h \rangle. \quad (2.18)$$

Puisque $\theta \in V_h$, on peut choisir dans (2.18) $v_h = \theta$, et on obtient,

$$\langle \theta_t, \theta \rangle + \|\nabla \theta\|^2 = -\langle \rho_t, \theta \rangle, \quad \forall t > 0. \quad (2.19)$$

Le second terme du membre de droite de (2.19) est non négatif, ce qui conduit à,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 = \|\theta\| \frac{d}{dt} \|\theta\| \leq \|\rho_t\| \cdot \|\theta\|$$

Après simplification par $\|\theta\|$ et par intégration, on obtient,

$$\|\theta(t)\| \leq \|\theta(0)\| + \int_0^t \|\rho_t(s)\| ds.$$

En appliquant le lemme [2.3.1](#), on obtient,

$$\begin{aligned} \|\theta(0)\| &= \|u_{0h} - \mathcal{R}_h u_0\| \\ &\leq \|u_{0h} - u_0\| + \|\mathcal{R}_h u_0 - u_0\| \\ &\leq \|u_{0h} - u_0\| + Ch^2 \|u_0\|_{H^2}. \end{aligned}$$

De plus on a aussi d'après le lemme [2.3.2](#),

$$\begin{aligned} \|\rho_t\| &= \|\mathcal{R}_h u_t - u_t\| \\ &\leq Ch^2 \|u_t\|_{H^2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|\theta(t)\| \leq \|u_{0h} - u_0\| + Ch^2 \|u_0\|_{H^2} + Ch^2 \int_0^t \|u_t\|_{H^2} ds. \quad (2.20)$$

En combinant [\(2.17\)](#) et [\(2.20\)](#) on en déduit que,

$$\begin{aligned} \|u_h(t) - u(t)\| &\leq \|u_{0h} - u_0\| + Ch^2 \|u_0\|_{H^2} + Ch^2 \int_0^t \|u_t\|_{H^2} ds \\ &\quad + Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2} + \int_0^t \|u_t\|_{H^2} ds \right) \\ &\leq \|u_{0h} - u_0\| + Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2} + \int_0^t \|u_t\|_{H^2} ds \right) \quad c.q.f.d. \end{aligned}$$

■

D'après le théorème des valeurs propres relatif à la forme bilinéaire symétrique $a(.,.)$ (voir [\[1, 2\]](#)) on a,

$$a(v, v) = \lambda \langle v, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

Soit λ_1 la plus petite valeur propre de la suite $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$, alors on a,

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 = \lambda \|v\|^2 \geq \lambda_1 \|v\|^2, \quad \forall v \in V. \quad (2.21)$$

Du théorème [2.3.2](#) on déduit l'estimation d'erreur suivante.

Corollaire 2.3.3 Soient u et $u_h(t)$ les solutions respectivement de [\(2.1\)](#) et [\(2.8\)](#). Alors sous les hypothèses de régularité de $u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et $u_t \in H^2(\Omega)$ on a l'estimation d'erreur suivante,

$$\begin{aligned} \|u_h(t) - u(t)\| &\leq e^{-\lambda_1 t} \|u_0 - u_{0h}\| + \\ &Ch^2 \left(e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_{H^2} + \|u(t)\|_{H^2} + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t\|_{H^2} ds \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Preuve : En introduisons l'expression (2.21) dans (2.19) on a,

$$\|\theta\| \frac{d}{dt} \|\theta\| + \lambda_1 \|\theta\|^2 \leq \|\rho_t\| \cdot \|\theta\|, \quad \forall \theta \in V_h \subset V.$$

Donc il s'ensuit que,

$$\frac{d}{dt} \|\theta\| + \lambda_1 \|\theta\| \leq \|\rho_t\|.$$

En multipliant par $e^{\lambda_1 t}$ on obtient,

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda_1 t} \|\theta(t)\| \leq e^{\lambda_1 t} \|\rho_t\|.$$

En intégrant l'expression ci-dessus sur $[0, t]$, il vient,

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\| &\leq e^{-\lambda_1 t} \|\theta(0)\| + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|\rho_t(s)\| ds \\ &\leq e^{-\lambda_1 t} \|\mathcal{R}_h u_0 - u_{0h}\| + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} (Ch^2 \|u_t\|_{H^2}) ds \\ &\leq e^{-\lambda_1 t} (\|u_0 - u_{0h}\| + \|\mathcal{R}_h u_0 - u_0\|) + Ch^2 \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t\|_{H^2} ds \\ &\leq e^{-\lambda_1 t} (\|u_0 - u_{0h}\| + Ch^2 \|u_0\|_{H^2}) + Ch^2 \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t\|_{H^2} ds \end{aligned}$$

Donc on a l'estimation de $\theta(t)$,

$$\|\theta(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t} \|u_0 - u_{0h}\| + Ch^2 \left(e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_{H^2} + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t\|_{H^2} ds \right). \quad (2.23)$$

En combinant (2.13) et (2.23) on conclut que,

$$\begin{aligned} \|u_h(t) - u_t\| &\leq Ch^2 \|u(t)\|_{H^2} + e^{-\lambda_1 t} \|u_0 - u_{0h}\| + Ch^2 e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_{H^2} \\ &\quad + Ch^2 \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t\|_{H^2} ds \\ &\leq e^{-\lambda_1 t} \|u_0 - u_{0h}\| + Ch^2 \left(e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_{H^2} + \|u(t)\|_{H^2} + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t\|_{H^2} ds \right). \end{aligned}$$

■

2.4 Méthode de discrétisation totale

Dans cette section nous discrétisons la variable temporelle t . Divisons l'intervalle $[0, T]$ en N parties égales, en posant le pas $\tau = \frac{T}{N}$ et l'instant $t_n = n\tau$, pour $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Soit u_h^n la valeur approchée de la solution semi-discrète $u_h(t_n)$ à l'instant $t = t_n$. Considérons un schémas d'Euler regressif [3, 4],

$$\bar{\partial} u_h^n = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau}.$$

On définit le problème totalement discret comme suit : étant donnée une valeur initiale $u_h^0 \in V_h$, trouver $u_h^n \in V_h$, $n = 1, 2, \dots$ telle que,

$$\langle u_h^n, v_h \rangle + \tau a(u_h^n, v_h) = \langle f(t_n), v_h \rangle + \langle u_h^{n-1}, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.24)$$

Le système itératif (2.24) montre qu'à chaque étape de temps t_n , la solution approchée u_h^n dépend de la valeur u_h^{n-1} calculée à l'étape précédente.

2.4.1 Analyse de l'erreur

Cette section a pour objet l'étude de la convergence et l'ordre de convergence du problème totalement discret (2.24).

Théorème 2.4.1 Soit u et u_h^n les solution de (2.2) et (2.24) respectivement. On a si $\|u_0 - u_h^0\| \leq ch^2 \|u_0\|_{H^2}$ et $u_0 = 0$ sur Γ , l'estimation d'erreur suivante,

$$\|u_h^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} ds \right) + \tau \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds, \quad \forall n \geq 1.$$

Preuve : On suit le même raisonnement du théorème 2.3.2 on pose,

$$u_h^n - u(t_n) = (u_h^n - R_h u(t_n)) + (R_h u(t_n) - u(t_n)) = \theta^n + \rho^n.$$

Où $\rho^n = \rho(t_n)$ est bornée d'après (2.15). Examinons l'estimation de θ^n . En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle \bar{\partial}\theta^n, v_h \rangle + a(\theta^n, v_h) &= \left\langle \frac{\theta^n - \theta^{n-1}}{\tau}, v_h \right\rangle + a(\theta^n, v_h) \\ &= \left\langle \frac{u_h^n - R_h u(t_n)}{\tau} - \frac{u_h^{n-1} - R_h u(t_{n-1})}{\tau}, v_h \right\rangle + a(u_h^n - R_h u(t_n), v_h) \\ &= \left[\left\langle \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau}, v_h \right\rangle + a(u_h^n, v_h) \right] - \left\langle \frac{R_h u(t_n) - R_h u(t_{n-1})}{\tau}, v_h \right\rangle \\ &\quad - a(R_h u(t_n), v_h) \\ &= \langle f(t_n), v_h \rangle + \langle u_t(t_n), v_h \rangle - \left\langle \frac{R_h u(t_n) - R_h u(t_{n-1})}{\tau}, v_h \right\rangle \\ &\quad - \langle u_t(t_n), v_h \rangle - a(R_h u(t_n), v_h) \end{aligned}$$

En introduit l'expression (2.12), il vient

$$\begin{aligned} \langle \bar{\partial}\theta^n, v_h \rangle + a(\theta^n, v_h) &= \langle f(t_n), v_h \rangle + \langle u_t(t_n), v_h \rangle \\ &\quad - \langle R_h \bar{\partial}u(t_n), v_h \rangle - [\langle u_t(t_n), v_h \rangle + a(u(t_n), v_h)] \\ &= \langle f(t_n), v_h \rangle + \langle u_t(t_n), v_h \rangle - \langle R_h \bar{\partial}u(t_n), v_h \rangle - \langle f(t_n), v_h \rangle \\ &= - \langle R_h \bar{\partial}u(t_n) - u_t(t_n), v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

Donc,

$$\langle \bar{\partial}\theta^n, v_h \rangle + a(\theta^n, v_h) = -\langle w^n, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \quad \forall n \geq 1 \quad (2.25)$$

Où

$$\begin{aligned} w^n &= R_h \bar{\partial}u(t_n) - u_t(t_n) \\ &= (R_h \bar{\partial}u(t_n) - \bar{\partial}u(t_n)) + (\bar{\partial}u(t_n) - u_t(t_n)) \\ &= (R_h - I) \bar{\partial}u(t_n) + (\bar{\partial}u(t_n) - u_t(t_n)) \\ &= w_1^n + w_2^n \end{aligned}$$

En choisissant $v_h = \theta^n$ dans (2.25), on obtient

$$\langle \bar{\partial}\theta^n, \theta^n \rangle + \|\nabla \theta^n\|^2 = -\langle w^n, \theta^n \rangle$$

Ceci implique que,

$$\langle \bar{\partial}\theta^n, \theta^n \rangle \leq \|w^n\| \cdot \|\theta^n\|$$

Qu'on peut la mettre sous la forme,

$$\langle \theta^n, \theta^n \rangle - \langle \theta^{n-1}, \theta^n \rangle \leq \tau \|w^n\| \cdot \|\theta^n\|$$

Où encore sous la forme,

$$\|\theta^n\|^2 - \|\theta^{n-1}\| \cdot \|\theta^n\| \leq \tau \|w^n\| \cdot \|\theta^n\|.$$

Donc,

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^{n-1}\| + \tau \|w^n\|. \quad (2.26)$$

Par récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \|\theta^n\| &\leq \|\theta^0\| + \tau \sum_{j=1}^n \|w^j\| \\ &\leq \|\theta^0\| + \tau \sum_{j=1}^n \|w_1^j\| + \tau \sum_{j=1}^n \|w_2^j\|, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \theta^0 &= \theta(0) = u_h^0 - R_h u(0) \\ &= u_h^0 - R_h u_0 \\ &= (u_h^0 - u_0) + (u_0 - R_h u_0). \end{aligned}$$

Donc

$$\|\theta^0\| \leq \|u_h^0 - u_0\| + \|R_h u_0 - u_0\|.$$

En appliquant (2.15) et en choisissant $\|u_h^0 - u_0\| \leq ch^2 \|u_0\|_{H^2}$, il vient

$$\|\theta^0\| \leq Ch^2 \|u_0\|_{H^2}. \quad (2.27)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} w_1^j &= (R_h - I) \bar{\partial} u(t_j) \\ &= (R_h - I) \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t ds \\ &= \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (R_h - I) u_t ds, \end{aligned}$$

alors, on a

$$w_1^j = \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \rho_t ds. \quad (2.28)$$

Donc

$$\begin{aligned} \tau \sum_{j=1}^n \|w_1^j\| &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\rho_t\| ds \\ &\leq Ch^2 \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} ds. \end{aligned}$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned} \tau w_2^j &= \tau \bar{\partial} u(t_j) - \tau u_t(t_j) \\ &= u(t_j) - u(t_{j-1}) - \tau u_t(t_j). \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\tau w_2^j = - \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds. \quad (2.29)$$

Donc

$$\begin{aligned} \tau \sum_{j=1}^n \|w_2^j\| &\leq \sum_{j=1}^n \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds \right\| \\ &\leq \tau \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^0\| + Ch^2 \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} ds + \tau \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \quad (2.30)$$

En combinant (2.17), (2.26) et (2.30), on obtient,

$$\begin{aligned} \|u_h^n - u(t_n)\| &\leq Ch^2 \|u_0\|_{H^2} + Ch^2 \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} ds + \tau \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds + Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} ds \right) \\ &\leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2} ds \right) + \tau \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \quad C.Q.f.d \end{aligned}$$

■

Remarque 2.4.1 L'estimation (2.30) indique la propriété de stabilité de la solution approchée u_h^n . En effet, si

$$\|u_0 - u_h^0\| \leq Ch^2 \|u_0\|_{H^2},$$

alors on a

$$\|u_h^n - R_h u(t_n)\| = \|\theta^n\| \leq C(u) (h^2 + \tau). \quad (2.31)$$

Nous pouvons aussi estimer le gradient de l'erreur de la solution du problème totalement discret. En effet, soit le théorème suivant.

Théorème 2.4.2 Soit u et u_h^n les solutions de (2.2) et (2.22) respectivement. On a si

$$\nabla(u_0 - R_h u_0) = 0, \quad \text{et } u_0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

l'estimation du gradient d'erreur suivante

$$\|\nabla(u_h^n - u(t_n))\| \leq C(u) (h + \tau).$$

Preuve : Reprenons la démonstration du théorème 2.4.1. En posant $v_h = \bar{\partial}\theta^n$ dans (2.25), on a,

$$\langle \bar{\partial}\theta^n, \bar{\partial}\theta^n \rangle + a(\theta^n, \bar{\partial}\theta^n) = -\langle w^n, \bar{\partial}\theta^n \rangle$$

Ceci implique

$$\|\bar{\partial}\theta^n\|^2 + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \nabla\theta^n \nabla\theta^n - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \nabla\theta^n \nabla\theta^{n-1} \leq \|w^n\| \|\bar{\partial}\theta^n\|.$$

En appliquant l'inégalité de Young, on obtient

$$\|\bar{\partial}\theta^n\|^2 + \frac{1}{\tau} \|\nabla\theta^n\|^2 - \frac{1}{2\tau} \|\nabla\theta^n\|^2 - \frac{1}{2\tau} \|\nabla\theta^{n-1}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|w^n\|^2 + \frac{1}{2} \|\bar{\partial}\theta^n\|^2.$$

Par simplification, on a,

$$\frac{1}{2} \|\bar{\partial}\theta^n\| + \frac{1}{2\tau} \|\nabla\theta^n\|^2 - \frac{1}{2\tau} \|\nabla\theta^{n-1}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|w^n\|^2.$$

Donc

$$\|\nabla\theta^n\|^2 \leq \|\nabla\theta^{n-1}\|^2 + \tau\|w^n\|^2.$$

Par itération, et par hypothèse $\nabla\theta^0 = 0$, on déduit

$$\begin{aligned} \|\nabla\theta^n\|^2 &\leq \|\nabla\theta^0\|^2 + \tau \sum_{j=1}^n \|w^j\|^2 \\ &= \tau \sum_{j=1}^n \|w^j\|^2 \\ &\leq \tau \sum_{j=1}^n \|w_1^j\|^2 + \tau \sum_{j=1}^n \|w_2^j\|^2 \end{aligned}$$

De (2.28), on a,

$$\|w_1^j\|^2 \leq \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\rho_t|^2 ds$$

Donc

$$\tau \sum_{j=1}^n \|w_1^j\|^2 \leq \int_0^{t_n} \|\rho_t\|^2 ds \leq Ch^4 \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2}^2 ds \quad (2.32)$$

De même, de (2.29) on a,

$$\tau \|w_2^j\|^2 \leq \tau^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_{tt}\|^2 ds$$

D'où,

$$\tau \sum_{j=1}^n \|w_2^j\|^2 \leq \tau^2 \int_0^{t_n} \|u_{tt}\|^2 ds. \quad (2.33)$$

En reportant (2.32) et (2.33) dans l'expression ci-dessus, on obtient l'estimation suivante,

$$\|\nabla\theta^n\|^2 \leq ch^4 \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^2}^2 ds + \tau^2 \int_0^{t_n} \|u_{tt}\|^2 ds \leq C(h^4 + \tau^2)$$

Donc

$$\|\nabla\theta^n\| \leq C(h^2 + \tau). \quad (2.34)$$

Puisque

$$\|\nabla\rho^n\| \leq Ch \quad (2.35)$$

alors en combinant (2.34) et (2.35), on déduit l'estimation du gradient de l'erreur de la solution du problème totalement discret. ■

2.5 Application Numérique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0, T[\\ u(x, y, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.36)$$

On pose :

$$f = 2(\pi^2 t^2 + t + 3\pi^2) \sin \pi x \sin \pi y, \quad u_0 = 3 \sin \pi x \sin \pi y$$

$$u_{exact} = (t^2 + 3) \sin \pi x \sin \pi y$$

Ω est un carré de coté égal à 1.

```
// Equation de la chaleur, omega=[0,1]*[0,1]
// du/dt-delta(u)=f in omega*(0,T),
// u(x,y,0)=u0 on omega
// u=0 on gamma
// Schema implicite
//verbosity=0.;
real Dx=.1,Dy =.1; //declaration des variables
real t, L2error , dt=0.1, Tf=10. ;
mesh Th=square (floor(1./Dx), floor(1./Dy)); //
    definition du maillage
plot(Th,ps ="square.jpg",cmm= "maillage");
// visualisation du maillage
```

```

fespace Vh(Th ,P1); // ensemble d'elements finis
Vh uh,vh , uh0=3.*sin( pi*x)*sin (pi*y);
func f=2*(pi ^2*t^2 + t + 3*pi^2)* sin(pi*x )*sin(pi* y); // se-
cond membre
// func uh0=3*sin(pi*x)*sin(pi*y); // condition initiale
func uexact=(t ^2+3)*sin( pi *x)*sin( pi*y);//
    solution exacte
func g=0; // condition de Dirichlet
// resolution du problème variationnel
macro Grad(u)[dx(u),dy(u)]//
problem chaleur(uh,vh) = int2d( Th)(uh*vh /dt + Grad(uh)*
Grad(vh))
- int2d(Th)(uh0 *vh/dt + f*vh)+ on (1,2,3,4,uh=g);
int kk=0;
for (real t =0. ;t<Tf; t+=dt)
{
chaleur;
uh0=uh;
    if (!(kk % 20)) // kk%20= le reste de la division kk/20
//!(kk
//!(kk%20)= true or false
{
plot(uh,cmm = "t=" +t+ "[sec]",dim=3,fill=true,value= true,

```

```

wait=1);
// plot(uh,cmm="t="+t+"[sec]",dim=3,fill=false,value=true,
wait=1);
plot(uh,cmm="t="+t+"[sec]",dim=2,fill=true,value=true,
wait=1);
}
kk+=1;
}
L2error= sqrt(int2d(Th)((uh- uexact)^2));
cout<<"uh[]="<< uh[]<<endl;
cout<<"Taille.uh="<< uh[].n<<endl; // La taille du tableau
cout<<"Max.uh="<< uh[].max
<<" ; Min.uh="<<uh[].min <<endl; // Max et min
cout<<"Norme.uh l1="<< uh[].l1<<endl; // Norme l1
cout<<"Norme.uh l2="<< uh[].l2<<endl; // Norme l2
cout<<"Norme.uh sup="<<uh[].lifty<< endl; // Norme sup
cout<<"Somme des termes="<<uh[].sum
<< endl; // Somme
cout<<"uh[] (10)="<<uh[](10)<<endl;
cout<<"L2error="<< L2error<<endl;<<

```

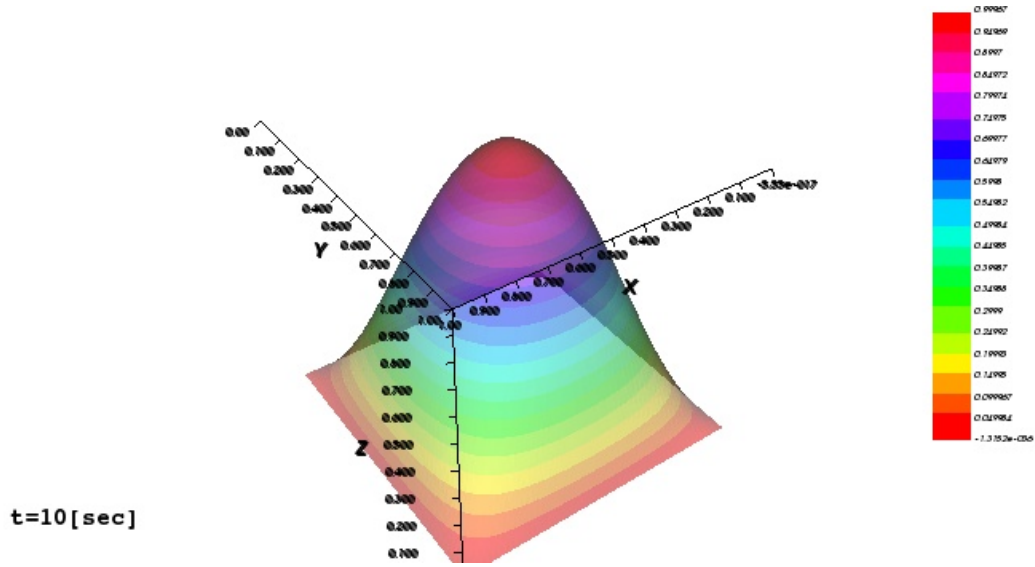



FIGURE 2.3 – Surface de la solution numérique : $uh.max = 2.99961$, $uh.min = 0$, $taille.uh = 6561$

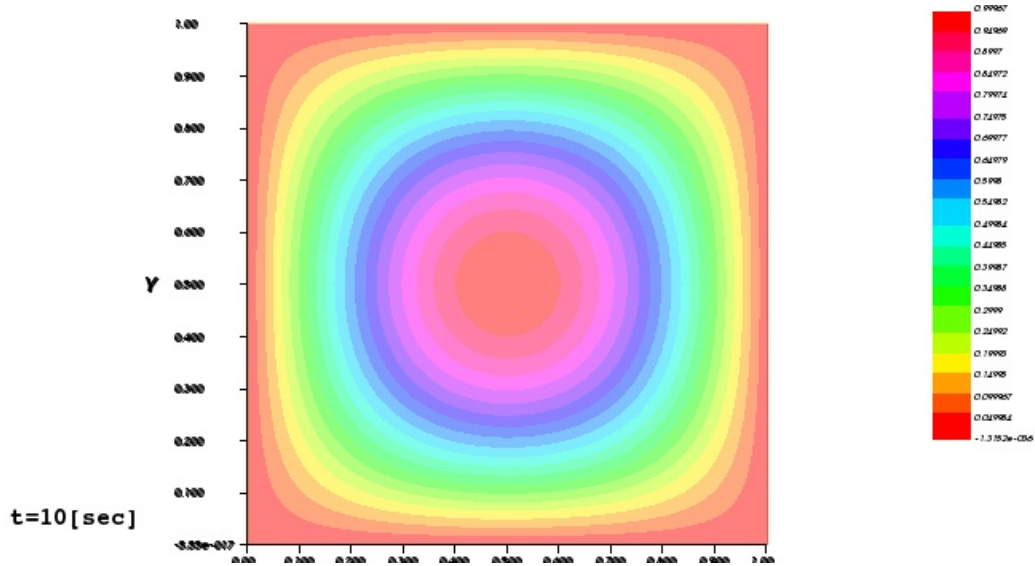
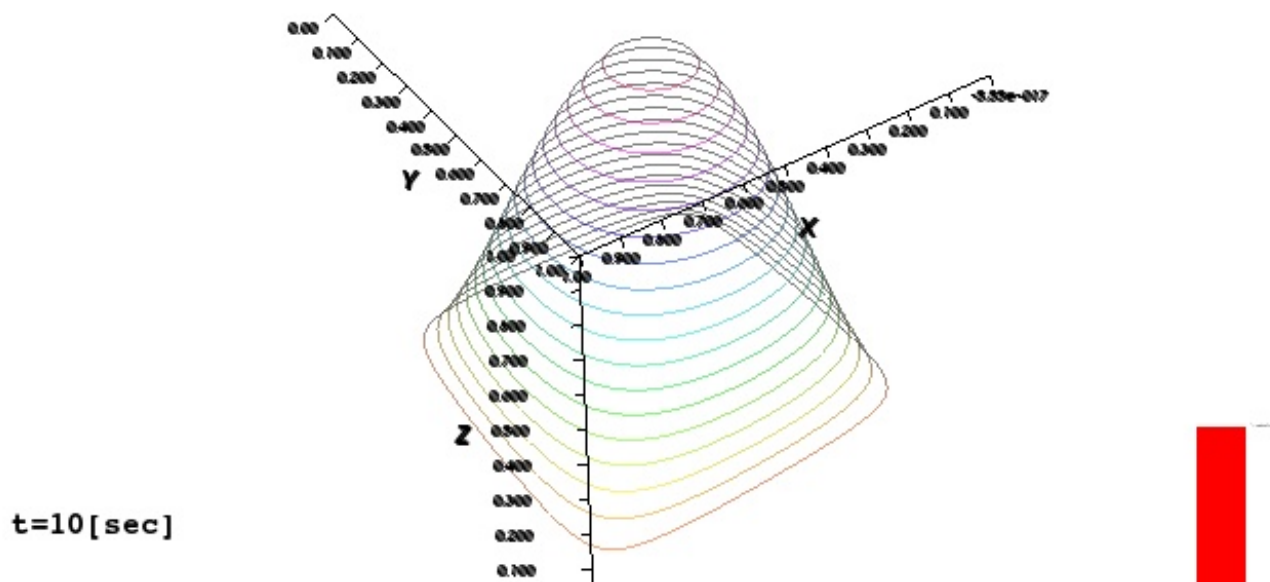


FIGURE 2.4 – Projection de la solution approché sur le plan $Z = 0$

FIGURE 2.5 – la solution u_h formée par des contours

h	Nombres de noeuds	Erreur en norme L2	Ordre de convergence	$u_h.max$	$u_h.min$
$\frac{1}{10}$	121	$0.409191e - 01$	/	2.97545	0
$\frac{1}{20}$	441	$0.103471e - 01$	1.983568	2.99384	0
$\frac{1}{40}$	1681	$0.259425e - 02$	1.995857	2.99846	0
$\frac{1}{80}$	6561	$0.649034e - 03$	1.998972	2.99961	0
$\frac{1}{160}$	25921	$0.162288e - 03$	1.999758	2.99990	0

TABLE 2.1 – Tableau récapitulatif, $V_h=V_h(Th,P1)$

On remarque que la valeur de l'erreur décroît dès qu'on raffine le maillage, ce qui nous garantit la stabilité et la convergence de la méthode. De plus l'ordre de convergence s'approche de la valeur 2, ce qui prouve que les résultats numériques sont conformes avec l'analyse théorique.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a établi l'équation de la chaleur. En premier lieu, on a exposé le cadre général de la méthode des éléments finis. En second lieu, on a présenté une formulation variationnelle, et on a prouvé l'estimation d'erreur du problème semi-discret et totalement discret. Une simulation numérique a été introduite pour un exemple test. Une extension éventuelle est la discrétisation de l'équation des ondes par la méthode des éléments finis.

Bibliographie

- [1] G. Allaire, Analyse Numérique et Optimisation, Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, Ed. de l'Ecole Polytechnique de Paris, 2005.
- [2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Ed. Masson, Paris, 1987.
- [3] B. Lucquin, Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ed. Ellipses, Paris, 2004.
- [4] A. Mehri, Méthode des différences finies pour les équations aux dérivées partielles, Polycopié du Cours, Université 08 Mai 1945 Guelma, 2018.
- [5] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri, Numerical Mathematics, Ed. Springer-Verlag, 2000.
- [6] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri, Méthodes Numériques, Algorithmes, analyse et applications, Ed. Springer-Verlag Italia, Milano 2004.

- [7] A. Quarteroni, A. Valli, Numerical Approximation of Partial Differential, Ed. Springer, 2008.
- [8] P. A. Raviart, J.M.Thomas, Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles, Ed. Masson, Paris, 1988.
- [9] V. Thomée, Galerkin finite methods for parabolic problems, Springer Series in computational Mathematics, Second Edition 2006.