



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Etude d'un système d'équations différentielles fractionnaires

Présentée par:

Zouaoui Laiche Loudjina

Devant le Jury :

Dr. Bousalsal Naila	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. Bouaziz Asma	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Saifia Ouarda	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2022-2023

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	10
1	Notions et Préliminaires	12
1	Notations et définitions	12
2	Espaces fonctionnels	13
3	Fonctions spéciales	14
3.1	Fonction de Gamma	14
3.2	Fonction Bêta	16
4	Quelques théorèmes de point fixe	18
4.1	Théorème du point fixe (solution minimale et maximale) . . .	18
4.2	Théorème du point fixe de Banach	19
2	Introduction au calcul fractionnaire	21
1	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	21
1.1	Intégrale de Riemann-Liouville	21
1.2	Intégrale fractionnaire au sens de R-L de quelques fonctions usuelles	27
1.3	Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	31
2	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	34

2.1	Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville	38
2.2	Propriétés générales des dérivées fractionnaires	39
3	Etude d'un système fractionnaire à retards variables	41
1	Position du problème	41
2	Existence de solution	42
3	Unicité de la solution	51

REMERCIEMENT

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur **Dr. Bouaziz Asma** pour sa confiance, ses conseils avisés et pour toutes les heures qu'elle a consacré à diriger ce mémoire dès le début à la fin de ce travail.

Je remercie vivement les membres du jury :

Dr. Bousalsal Naila, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant d'être présidente de mon jury.

Dr. Saifia Ouarda, qui a bien voulu examiner ce travail.

Aussi je remercie tous les professeurs du département de mathématiques ainsi que l'administration en général.

Enfin, un grand merci à mes parents, à mes sœurs, à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicace

C'est avec fierté et amour que je dédie ce mémoire :

A mes "chers parents" pour leur amour, leur patience et leurs encouragements qui n'ont jamais cessé de me convenir durant mes années d'études.

A mes soeurs "Khaoula et Rihab".

A toutes les personnes chères à mon cœur.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة المفاهيم الأساسية لحساب التفاضل والتكامل الكسري، ثم اختيار نظام تفاضلي كسري غير خطي متعدد الرتب مع تأخيرات متغيرة، من أجل إثبات وجود الحل الموجب وتفرد استخدامه بعض نظريات النقطة الثابتة (الحد الأدنى والحد الأقصى ومبدأ انكماش باناخ).

الكلمات المفتاحية: النظام التفاضلي الكسري، الترتيب المتعدد، الحل الموجب، نظريات النقطة الثابتة، التأخيرات المتغيرة.

Résumé

Ce travail a pour objectif d'étudier les notions de base du calcul fractionnaire, puis de choisir un système différentiel non linéaire d'un système différentiel fractionnaire d'ordre multiple avec des retards variables, afin de prouver l'existence et l'unicité de la solution positive à l'aide de quelques théorèmes de point fixe (solution minimale et maximale et le principe de contraction de Banach).

Mots clés : Système différentiel fractionnaire, ordre multiple, solution positive, théorèmes de point fixe, retards variables.

Abstract

The objective of this work is to study the basic notions of fractional calculus, then to choose a nonlinear fractional differential system of multiple order with variable delays, in order to prove the existence and uniqueness of the positive solution using some fixed point theorems (minimum and maximum solution and the Banach contraction principle).

Key Words : Fractional differential system, multiple order, positive solution, fixed point theorems, variable delays.

Notations

\mathbb{N} : Ensemble des nombres entiers positive.

\mathbb{N}^* : $\mathbb{N} - \{0\}$.

\mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.

\mathbb{R}^+ : Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

\mathbb{R}^n : Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.

\mathbb{C} : Ensemble des nombres complexes.

$\| \cdot \|$: Norme.

$[a, b)$: Intervalle semi-ouvert de \mathbb{R} d'extrémité a et b .

$C([a, b], \mathbb{R}^+)$: Espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^+ .

$AC[a, b]$: Espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

$R - L$: Riemann-Liouville.

$\Gamma(\alpha)$: Fonction Gamma d'Euler.

$B(\alpha, \beta)$: Fonction Bêta.

$[\alpha]$: Partie entière de α .

I_a^α : Intégral fractionnaire de Riemann-Liouville.

D_a^α : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

${}^C D_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire de Caputo.

1 Introduction

Le calcul fractionnaire est un domaine de l'analyse mathématique qui consiste à étudier la notion d'intégration et de dérivation d'ordre fractionnaire et ses applications.

Dans les années 60 du siècle dernier, le calcul fractionnaire a fait des progrès remarquables, il est maintenant reconnu comme un domaine important pour les scientifiques en particulier les mathématiciens.

On pense généralement que le concept de calcul fractionnel provient d'une question posée en 1695 par le marquis de L'hôpital (1661 – 1704) à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), qui cherchait à comprendre le sens de Leibniz notation $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ quand $n = \frac{1}{2}$ (Et qu'est-ce qui se passerait si $n = \frac{1}{2}$?). Dans sa réponse datée du 30 septembre 1695, Leibniz écrivit à L'Hôpital ce qui suit : "...C'est un paradoxe apparent à partir duquel, un jour, des conséquences utiles seront tirées..." (voir [6], [9], [17], [18]).

Une liste des mathématiciens ayant joué un rôle important dans le calcul fractionnaire, jusqu'au milieu du 20 ème siècle, inclut : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823 – 1826), J. Liouville (1832 – 1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865 – 67), A.K. Grunwald (1867 – 1872), A.V.Letnikov (1868 – 1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J.Hadamard (1892), O. Heaviside (1892 – 1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E.Littlewood (1917 – 1928), H. Weyl (1917), P. L'évy (1923), A. Marchaud (1927), H.T.Davis (1924 – 1936), A. Zygmund (1935 – 1945) E.R. Amour (1938 – 1996), A. Erdélyi (1939 – 1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Les application de la théorie du calcul fractionnaire apparaissent de plus en plus fréquemment dans les divers domaines de recherche, par exemple : circulation des

1. Introduction

fluides, rhéologie, processus dynamiques dans les structures auto-similaires et poreuses, transport par diffusion s'apparentant à la diffusion, réseaux électriques, probabilités et statistiques, théorie du contrôle des systèmes dynamiques, viscoélasticité, électrochimie de la corrosion, physique chimique, optique et traitement du signal, etc.

En revanche, la modélisation de nombreux systèmes d'ingénierie, de physique et d'économie peut être obtenue à l'aide d'équations avec retard. De nombreuses recherches ont été effectuées sur l'existence et l'unicité des solutions pour les systèmes différentiels fractionnaires à retard. Certains résultats récents sur ces équations peuvent être trouvés dans ([3], [5], [15], [21], [22]).

Notre mémoire est organisée selon le plan suivant :

- Dans le premier chapitre, nous présentons quelques notions préliminaires essentielles, utilisés dans les chapitres suivants.
- Le deuxième chapitre de cette mémoire est destiné à une étude introductive des intégrales et dérivées fractionnaires telles que Riemann et Caputo.
- Le dernier chapitre a pour objet l'étude de l'existence et l'unicité d'une solution positive pour le système différentiel fractionnaire d'ordre multiple avec des retards variables suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))), & i \in [1, n], t > 0, \\ x(t) = \phi(t) \geq 0, & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

où ${}^C D^{\alpha_i}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha_i \in (0, 1)$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))'$, où $'$ désigne la transposée du vecteur, $f_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues pour $i \in [1, n]$, $\phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))'$, est un vecteur de fonction défini sur $[-\tau, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , et τ_i sont des fonctions à valeurs réelles continues définies sur \mathbb{R}^+ , tels que $\tau = \max\{\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \tau_i(t), i \in [1, n]\} > 0$.

CHAPITRE 1

Notions et Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour la bonne compréhension de ce travail.

1 Notations et définitions

Définition 1.1 (*Norme*) [19] Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On appelle une norme sur E toute application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie :

- $\forall x \in E : \| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$.
 - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$ (*homogénéité*).
 - $\forall x, y \in E : \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (*inégalité triangulaire*).
- on dit alors que $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 1.2 (*Suite de Cauchy*) On dit qu'une suite (u_n) de réels ou de complexes est une suite de Cauchy lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \epsilon.$$

Définition 1.3 (*Opérateur linéaire*) [2] Un opérateur linéaire (ou plus simplement un opérateur) est une fonction entre deux espaces vectoriels qui est linéaire sur son

domaine de définition.

Définition 1.4 (Opérateur compact) Soit $D \subset E$, un opérateur $F : D \rightarrow E$ est dit compact si pour tous ensemble borné $S \subset D$, $F(S)$ est relativement compact. De plus, F est complètement continu s'il est continu et compact.

2 Espaces fonctionnels

Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) un intervalle borné ou non borné de \mathbb{R} .

Définition 2.1 [10] Pour $1 \leq p \leq \infty$ on définit :

i) L'espace $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, des (classes de) fonctions f réelles ou complexes sur Ω telles que f est mesurable et $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$, muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.1)$$

ii) L'espace $L^\infty(\Omega)$ des (classes de) fonctions mesurables bornées presque partout sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} \text{ess} |f(t)| = \{M \geq 0; |f(t)| \leq M, \text{ p.p. sur } \Omega\}. \quad (1.2)$$

Définition 2.2 [10] Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et $n \in \mathbb{N}$. Alors l'espace des fonction continues, noté $C^n(\Omega)$, est défini comme l'espace des fonctions f qui leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n soit continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_C = \sum_{k=0}^n \max_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|, n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

En particulier, si $n = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$, l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\| f \|_C = \max_{x \in \Omega} |f(x)|. \quad (1.4)$$

Définition 2.3 [10] Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle borné de \mathbb{R} , alors l'espace des fonction absolument continues, noté $AC(\Omega)$, est défini comme l'espace des fonctions f qui sont primitives de fonctions intégrables, c'est à dire :

$$AC([a, b]) = \{f / \exists \varphi \in L([a, b]) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt\}. \quad (1.5)$$

Définition 2.4 Un espace métrique (E, d) est un ensemble E muni d'une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ appelée distance, qui vérifie les conditions suivantes :

- $\forall x, y \in E \ d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
- $\forall x, y, z \in E \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Définition 2.5 [12] On dit qu'un espace métrique $(E, \| \cdot \|)$ est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente.

Définition 2.6 [19] On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

3 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma d'Euler et Bêta. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

3.1 Fonction de Gamma

L'interprétation la plus simple de la fonction Gamma d'Euler est simplement la généralisation de la factorielle pour tous les nombres réels.

3. Fonctions spéciales

Définition 3.1 La fonction Gamma est en général définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad (1.6)$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$, $\Gamma(\alpha)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < \alpha \leq 1$.

Lemme 3.1 [13] Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction Gamma vérifie la propriété suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad (1.7)$$

et

$$\Gamma(n) = (n - 1)!, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.8)$$

Preuve. Une intégration par parties de (1.6) donne :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(\alpha+1)-1} dt \\ &= [-e^{-t} t^\alpha]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1\Gamma(1) = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2.1\Gamma(1) = 3!,\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) \dots 2.1 = \alpha!.$$

Par conséquent

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!. \quad (1.9)$$

■

3.2 Fonction Bêta

Définition 3.2 *La fonction Bêta (ou la fonction de Bessel de second espèce) est définie par :*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0; \operatorname{Re} \beta > 0). \quad (1.10)$$

Proposition 3.1 [8] *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par :*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0; \operatorname{Re} \beta > 0). \quad (1.11)$$

3. Fonctions spéciales

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt \int_0^{\infty} e^{-s}s^{\beta-1}ds \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(t+s)}t^{\alpha-1}s^{\beta-1}dtds.\end{aligned}$$

On pose $t + s = x$, pour $0 < t < \infty$ et $0 < s < \infty$ implique $0 < x < \infty$ et $0 < y < 1$. Le jacobie est

$$\frac{D[t, s]}{D[x, y]} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 - y & -x \end{vmatrix} = -xy - x + xy = -x.$$

Donc

$$dtds = \left| \frac{D[t, s]}{D[x, y]} \right| dx dy = x dx dy.$$

Alors

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^1 \int_0^1 e^{-x}(xy)^{\alpha-1}x^{\beta-1}(1-y)^{\beta-1}x dx dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha+\beta-1}dx \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy \\ &= \Gamma(\alpha + \beta)B(\alpha, \beta).\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Remarque 3.1 Il s'ensuit de (1.11) que la fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire :

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha), \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0; \operatorname{Re} \beta > 0). \quad (1.12)$$

4 Quelques théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe sont des outils très utiles en mathématiques, essentiellement dans le domaine de résolution des équations différentielles. Dans cette section, on donne les théorèmes de point fixe qui sont nécessaire dans ce travail.

4.1 Théorème du point fixe (solution minimale et maximale)

Avant de donner le théorème de la solution minimale et maximale, nous aborderons d'abord quelques définitions que nous avons besoin dans ce travail.

Définition 4.1 Soit A une application d'un ensemble E dans lui-même. On appelle point fixe de A tout point $\tilde{u} \in E$ tel que : $A(\tilde{u}) = \tilde{u}$.

Définition 4.2 Soit E un espace de Banach réel. Soit K un sous-ensemble non vide fermé de E . K est appelé cône si $ax + by \in K$ pour tout $x, y \in K$ et a, b sont réels positifs où $K \cap (-K) = \{0\}$ et $K \neq \{0\}$.

Définition 4.3 [25] Un sous-ensemble non vide $K \subset E$ est dit cône s'il est convexe, fermé, et s'il satisfait les conditions suivantes :

1. $\lambda K \subset K$, pour tout nombre positif λ ,
2. $x, -x \in K \Rightarrow x = 0$.

Un cône K introduit un ordre partiel \leq dans E de la manière suivante

$$x \leq y \text{ si } y - x \in K.$$

Définition 4.4 [25] Pour $x, y \in E$ l'intervalle d'ordre $\langle x, y \rangle$ est définie par

$$\langle x, y \rangle = \{z \in E : x \leq z \leq y\}.$$

Définition 4.5 [25] La fonctionnelle $h(t, x_1, \dots, x_n)$ est dite croissante sur $I \times E^n$, $I \subset \mathbb{R}$, si pour tout $(t, \phi_1, \dots, \phi_n) \in I \times E^n$, $(t, \psi_1, \dots, \psi_n) \in I \times E^n$, tels que $\phi_i \leq \psi_i$, $i \in [1, n]$, on a l'inégalité suivante

$$h(t, \phi_1, \dots, \phi_n) \leq h(t, \psi_1, \dots, \psi_n).$$

Théorème 4.1 [25] *Soit D un sous-ensemble du cône K l'espace partiellement ordonné E , $F : D \rightarrow E$ est croissante. S'il existe $x_0, y_0 \in D$ telle que $x_0 \leq y_0$, $\langle x_0, y_0 \rangle \subset D$ et x_0, y_0 sont respectivement des sous et sur solutions de l'équation $x - F(x) = 0$ a une solution minimale et une solution maximale $x^*, y^* \in \langle x_0, y_0 \rangle$ telle que $x^* \leq y^*$, lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. K est normal et F est complètement continue ;
2. K est régulier et F est continue ;
3. E est réflexif, K est normal, et F est continue ou faiblement continue.

4.2 Théorème du point fixe de Banach

Définition 4.6 [20] *Soit $(E; d)$ un espace métrique. Une application $f : E \rightarrow E$ est dit k -Lipschitzienne de constante $k \geq 0$ si*

$$\forall u, v \in E, d(f(u), f(v)) \leq kd(u, v).$$

Définition 4.7 [20] *L'application k -Lipschitzienne f est dite une contraction si $k \in (0, 1)$.*

Théorème 4.2 [20] *(Théorème du point fixe de Banach)*

Soit $(E; d)$ un espace métrique complet, soit F une fermée de E , et soit $f : F \rightarrow E$ une contraction. Alors f admet un unique point fixe.

Définition 4.8 *Soit U un intervalle de \mathbb{R} et soit f une fonction avec $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $|\cdot|$ une norme quelconque dans \mathbb{R}^p .*

- i) f est uniformément bornée sur U s'il existe $L \geq 0$ tel que $|f(t)| \leq L$ pour tout n et tout $t \in U$.
- ii) f est équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $t_1, t_2 \in U$ et $|t_1 - t_2| < \delta$ alors $|f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon$ quel que soit n .

Définition 4.9 Une fonction $x \in \Omega$ est dite presque équicontinue sur I si elle est équicontinue dans chaque intervalle $[-\tau, T]$, $-\tau < T < \infty$.

Lemme 4.1 Soit $\Omega \subset E$. Si Ω est presque équicontinue sur I et uniformément bornée dans $(E, \|\cdot\|_{\theta^*})$, où la fonction de poids est positive et continue sur I , et

$$\theta(t) = o(\theta^*(t)), \text{ comme } t \rightarrow +\infty,$$

alors Ω est relativement compact dans $(E, \|\cdot\|_{\theta})$.

CHAPITRE 2

Introduction au calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une partie de l'analyse dont l'étude porte sur les opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au calcul intégral fractionnaire et à la dérivation au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

1.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Considérons une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue et intégrable, où b peut être fini ou infini, une primitive de f est donnée par :

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (2.1)$$

Pour une intégrale double, on aura :

$$\begin{aligned}
 (I_a^2 f)(x) &= I_a^1 f(I_a^1 f(s))(x) \\
 &= \int_a^x \left(\int_a^s f(t) dt \right) ds \\
 &= \int_a^x \left(\int_t^x ds \right) f(t) dt \\
 &= \int_a^x (x-t) f(t) dt.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pour l'intégrale triple, on aura :

$$\begin{aligned}
 (I_a^3 f)(x) &= \int_a^x \left(\int_a^s \left(\int_a^t f(\tau) d\tau \right) dt \right) ds \\
 &= \int_a^x \left(\int_a^s (s-\tau) f(\tau) d\tau \right) ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f(t) dt.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

et par récurrence dans le cas général, on aura :

$$(I_a^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \tag{2.4}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy.

Définition 1.1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale de Riemann-Liouville de f est définie comme suit :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (2.5)$$

où α est un réel positive (ou même complexe).

Remarque 1.1 *On convient de prendre :*

$$(I_a^0 f)(x) = f(x). \quad (2.6)$$

Proposition 1.1 [1] [14] *Soit $f \in C^0([a, b])$, pour α, β complexes on a :*

- i) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(x) = f(x)$.
- ii) $I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ et $\operatorname{Re}(\beta) > 0$.
- iii) $\frac{d}{dx} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.

Preuve. i) Si $f \in C^1([a, b])$, alors par intégration par partie on trouve :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{(x-a)^\alpha f(x)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^\alpha f'(t) dt,$$

et

$$\begin{aligned} \lim(I_a^\alpha f)(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(a) + [f(x) - f(a)]. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim(I_a^\alpha f)(x) = f(x). \quad (2.7)$$

Si $f \in C^0([a, b])$, on peut écrire $(I_a^\alpha f)(x)$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
 (I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t) - f(x) + f(x)] dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t) - f(x)] dt + \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-p} (x-t)^{\alpha-1} [f(t) - f(x)] dt \tag{I_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-p}^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t) - f(x)] dt \tag{I_2} \\
 &\quad + \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha+1)} (x-t)^\alpha.
 \end{aligned}$$

Comme f est continue nous écrivons :

$$\forall \epsilon, \exists \gamma t q : \forall t : |t - x| < \gamma \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \epsilon.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 |I_2| &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-p}^x (x-t)^{\alpha-1} \epsilon dt < \frac{\epsilon \gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \\
 &\Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow 0} |I_2| = 0. \\
 &\Rightarrow |I_2| < \epsilon. \tag{i}
 \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha \geq 0$, pour γ fixé, on a :

$$|I_1| < \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-p} (x-t)^{\alpha-1} M dt < \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (p^\alpha - (x-a)^\alpha).$$

1. Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

De laquelle il suit, pour $p > 0$ fixé :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} |I_1| = 0. \quad (\text{ii})$$

On considère :

$$\begin{aligned} |I_a^\alpha f(x) - f(x)| &\leq |I_1 + I_2 + \frac{f(x)(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} - f(x)|. \\ \Rightarrow |I_a^\alpha f(x) - f(x)| &\leq |I_1| + |I_2| + |f(x)| \left| \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| \end{aligned}$$

De (i) et (ii), on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} |I_a^\alpha f(x) - f(x)| &\leq \epsilon \\ \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_a^\alpha f(x) &= f(x). \end{aligned}$$

ii) On a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (I_a^\beta f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left(\int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \right) dt. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $s = t + (x-t)\tau \Rightarrow ds = (x-t)d\tau$, alors :

$$\begin{cases} s = t \Rightarrow t + (x-t)\tau = t \Rightarrow \tau = 0 \\ s = x \Rightarrow t + (x-t)\tau = x \Rightarrow \tau = 1 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds &= \int_0^1 (x-(t+(x-t)\tau))^{\alpha-1} (t+(x-t)\tau)^{\beta-1} (x-t) d\tau \\
 &= \int_0^1 ((x-t)(1-\tau))^{\alpha-1} ((x-t)\tau)^{\beta-1} (x-t) d\tau \\
 &= (x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau.
 \end{aligned}$$

Et comme la fonction Béta est définie par :

$$\begin{aligned}
 B(\beta, \alpha) &= \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
 \end{aligned}$$

Alors la formule précédente devient :

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha (I_a^\beta f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left((x-t)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right) dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\
 &= (I_a^{\alpha+\beta} f)(x).
 \end{aligned}$$

Pour la proposition (iii), on a :

$$\frac{d}{dx} (I_a^\alpha f)(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right).$$

D'après la formule de récurrence de la fonction Gamma d'Euler :

1. Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ et comme $\text{Re}(\alpha) > 1$, On peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^x \frac{d}{dx}(x - s)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^x (\alpha - 1)(x - s)^{(\alpha-1)-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^x (x - s)^{(\alpha-1)-1} f(s) ds \\ &= (I_a^{\alpha-1} f)(x).\end{aligned}$$

■

1.2 Intégrale fractionnaire au sens de R-L de quelques fonctions usuelles

1- On considère la fonction $f(x) = (x - a)^\beta$ et on calcule son intégrale :

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt.$$

Par le changement de variable $t = a + (x - a)\tau$, on obtient :

$$\begin{aligned}dt &= (x - a)d\tau \\ t = a &\Rightarrow a + (x - a)\tau \Rightarrow \tau = 0 \\ t = x &\Rightarrow a + (x - a)\tau \Rightarrow \tau = 1\end{aligned}$$

Alors :

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - a + (x - a)\tau)^{\alpha-1} (a + (x - a)\tau - a)^\beta (x - a) d\tau$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} (x-a)^\beta \tau^\beta (x-a) d\tau \\
 &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau \\
 &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}.
 \end{aligned}$$

Donc :

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}. \quad (2.8)$$

2- La fonction constante $f(x) = C$

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} C dt \\
 &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\
 &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha} \right]_a^x \\
 &= \frac{C}{\alpha\Gamma(\alpha)} (t-x)^\alpha \\
 &= \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-x)^\alpha.
 \end{aligned}$$

D'où :

$$I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-x)^\alpha. \quad (2.9)$$

1. Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Théorème 1.1 [23] Si $f \in L^1[a, b]$ et $\alpha > 0$, alors l'intégrale $I_a^\alpha f(x)$ existe pour presque tout $x \in [a, b]$ et on a :

$$I_a^\alpha f(x) \in L^1[a, b]. \quad (2.10)$$

Preuve. Soit $f \in L[a, b]$, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x-t) \varphi_2(t) dt,$$

avec

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , \text{pour } 0 < u \leq b-a \\ 0 & , \text{pour } u \in \mathbb{R} - \{[0, b-a]\} \end{cases},$$

et

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} f(u) & , a \leq u \leq b \\ 0 & , \mathbb{R} - \{[a, b]\} \end{cases},$$

Par construction, $\varphi_j \in L^1(\mathbb{R})$ pour $j \in 1, 2$, on a : $I_a^\alpha f \in [a, b]$. ■

Théorème 1.2 [23] [7] Soit $\alpha > 0$, et supposons que $(f_k)_{k=1}^\infty$ est une suite des fonction continues uniformément convergentes sur $[a, b]$ alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la limite comme suit :

$$(I_a^\alpha \lim_{k \rightarrow \infty} f_k)(x) = (\lim_{k \rightarrow \infty} I_a^\alpha f_k)(x). \quad (2.11)$$

Preuve. Soit f la limite de (f_k) , il est clair que f est continue, et on a l'estimation :

$$\begin{aligned}
 |I_a^\alpha f_k(x) - I_a^\alpha f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f_k(t) - f(t)| dt \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f_k - f\|_\infty \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_k - f\|_\infty (x-a)^\alpha \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_k - f\|_\infty (b-a)^\alpha.
 \end{aligned}$$

Ce dernier terme converge uniformément vers zéro lorsque $k \rightarrow \infty$, pour $x \in [a, b]$.

■

Théorème 1.3 *L'opérateur intégrale I_a^α est linéaire i.e : Si f et g sont deux fonctions telles que $I_a^\alpha f$ et $I_a^\alpha g$ existent, alors pour c_1 et c_2 deux réels on a :*

$$I_a^\alpha(c_1f + c_2g)(x) = c_1I_a^\alpha f(x) + c_2I_a^\alpha g(x). \quad (2.12)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha(c_1f + c_2g)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (c_1f + c_2g)(t) dt \\
 &= c_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + c_2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt \\
 &= c_1 I_a^\alpha f(x) + c_2 I_a^\alpha g(x).
 \end{aligned}$$

■

1.3 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2 Soit $n - 1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction f définie par la relation suivante :

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n [(I^{n-\alpha} f)(x)]. \quad (2.13)$$

Exemple 1.1 On prend la même fonction précédente $f(x) = (x - a)^\beta$, et on calcule leur dérivées fractionnaire au sens de R-L d'ordre α :

$${}^{RL}D_a^\alpha (x - a)^\beta = \left(\frac{d}{dx}\right)^n [I^{n-\alpha} (x - a)^\beta].$$

On a vu la formule de l'intégrale d'ordre α de cette fonction, alors pour l'ordre $n - \alpha$ on trouve :

$$I_a^{n-\alpha} (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} (x - a)^{\beta + n - \alpha}.$$

Donc

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha (x - a)^\beta &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} (x - a)^{\beta + n - \alpha} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x - a)^{\beta + n - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} \frac{\Gamma(\beta + n - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^\beta \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Car on a :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x - a)^{\beta + n - \alpha} = (\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots (\beta + n - \alpha - (n - 1))(x - a)^{\beta - \alpha}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\beta + n - \alpha)!}{(\beta + n - \alpha - n)!} (x - a)^{\beta - \alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + n - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$${}^{RL}D_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}. \quad (2.14)$$

Exemple 1.2 *Maintenant, on aura la dérivée d'ordre α d'une fonction constante, d'après l'exemple précédent, on prend $\beta = 0$ on trouve :*

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D_a^\alpha (x - a)^0 &= \frac{\Gamma(0 + 1)}{\Gamma(0 - \alpha + 1)} (x - a)^{0 - \alpha} \\
 {}^{RL}D_a^\alpha 1 &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} (x - a)^{-\alpha}.
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Remarque 1.2 *La dérivée d'une constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle.*

Le lemme ci-dessous prouve que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :

Lemme 1.1 [11] *Soit $\alpha > 0$, alors pour tout $f \in L^1[a, b]$, on a :*

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t), \quad (2.16)$$

pour presque tout $t \in [a, b]$.

Preuve. En utilisant la proposition (ii), on obtient :

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(t) = D^n I_a^n f(t) = f(t),$$

presque partout sur $[a, b]$. ■

Lemme 1.2 [11] Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire ${}^{RL}D_a^\alpha f$ existe presque partout sur $[a, b]$, en plus elle est donnée par :

$$D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds. \quad (2.17)$$

Théorème 1.4 [7] Soient f et g deux fonction dont les dérivées fractionnaire de R-L, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$${}^{RL}D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 {}^{RL}D_a^\alpha f(x) + c_2 {}^{RL}D_a^\alpha g(x). \quad (2.18)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_a^{n-\alpha} (c_1 f(x) + c_2 g(x))) \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (c_1 f(t) + c_2 g(t)) dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (c_1 \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \\ &\quad + c_2 \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t) dt) \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \\ &\quad + \frac{c_2}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t) dt \\ &= c_1 {}^{RL}D_a^\alpha f(x) + c_2 {}^{RL}D_a^\alpha g(x). \end{aligned}$$

■

2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on appelle dérivée de f au sens de Caputo la fonction définie par :

$$({}^C D_a^\alpha f)(x) = (I_a^{n-\alpha} f^{(n)})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt. \quad (2.19)$$

Exemple 2.1 Concernant la dérivée de fonction $f(x) = (x-a)^\beta$, on a :

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha (x-a)^\beta &= I_a^{n-\alpha} \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^n (x-a)^\beta \right) \\ &= I_a^{n-\alpha} \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} (x-a)^{\beta-n} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} I_a^{n-\alpha} (x-a)^{\beta-n} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} \frac{\Gamma(\beta+1-n)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Donc

$${}^C D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.20)$$

Remarque 2.1 La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle, d'après la définition :

$${}^C D_a^\alpha C = I_a^{n-\alpha}(0) = 0, \forall C \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Lemme 2.1 [16] La dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont liés par la formule suivante :

$$({}^C D_a^\alpha f)(x) = {}^{RL} D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \right]. \quad (2.22)$$

Ou

$$({}^C D_a^\alpha f)(x) = ({}^{RL} D_a^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}. \quad (2.23)$$

Preuve. D'après la définition, on a :

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha f)(x) &= (I_a^{n-\alpha} f^{(n)})(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \right] \\ &= {}^{RL} D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \right] \\ &= ({}^{RL} D_a^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2 On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ on aura :

$${}^C D_a^\alpha = {}^{RL} D_a^\alpha. \quad (2.24)$$

Proposition 2.1 [1] [11] La dérivée fractionnaire au sens de Caputo vérifie les propriétés suivantes :

1. ${}^C D_a^\alpha (I_a^\alpha f) = f$.
2. Si ${}^C D_a^\alpha f = 0$ alors $f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (x-a)^j$.

3. $I_a^\alpha ({}^C D_a^\alpha f)(x) = f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a).$

4. Si $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ et f de classe C^1

$$({}^C D_a^\alpha \circ {}^C D_a^\beta) f = {}^C D_a^{\alpha+\beta} = ({}^C D_a^\beta \circ {}^C D_a^\alpha) f.$$

Preuve. 1. On a :

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha (I_a^\alpha f)(x) &= I_a^{n-1} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_a^\alpha f)(x) \right] \\ &= {}^{RL} D_a^\alpha \left[I_a^\alpha f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(I_a^\alpha f)^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!} \right] \\ &= {}^{RL} D_a^\alpha [I_a^\alpha f](x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(I_a^\alpha f)^{(j)}(a)(x-a)^{j-a}}{\Gamma(j+1-\alpha)} \\ &= {}^{RL} D_a^\alpha [I_a^\alpha f](x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{I_a^{\alpha-j} f(a)(x-a)^{j-a}}{\Gamma(j+1-\alpha)} \\ &= {}^{RL} D_a^\alpha [I_a^\alpha f](x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On a par définition :

$$\text{On a } ({}^C D_a^\alpha f)(x) = 0 \text{ ça implique que } I_a^{n-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x) \right] = 0,$$

et alors

$$I^n \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x) \right] = 0,$$

D'où

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a).$$

2. Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

3. On peut donc considérer que :

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha ({}^C D_a^\alpha f)(x) &= I_a^\alpha (I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x)) \\
 &= I^n f^{(n)}(x) \\
 &= f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!}.
 \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
 ({}^C D_a^\alpha \circ {}^C D_a^\beta) f &= ((I_a^{1-\alpha} \circ D^1) \circ (I_a^{1-\beta} \circ D^1)) f \\
 &= (I_a^{1-\alpha-\beta} \circ I_a^\beta \circ D^1 \circ I_a^{1-\beta} \circ D^1) f \\
 &= (I_a^{1-\alpha-\beta} \circ {}^C D_a^{1-\beta} \circ I_a^{1-\beta} \circ D^1) f \\
 &= (I^{1-(\alpha+\beta)} \circ D^1) f \\
 &= {}^C D_a^{\alpha+\beta}
 \end{aligned}$$

car on a

$$I_a^\beta \circ D^1 = {}^C D_a^{1-\beta} \text{ et } {}^C D_a^{1-\beta} \circ I_a^{1-\beta} = I. \text{ (identité)}$$

Donc

$$({}^C D_a^\alpha \circ {}^C D_a^\beta) f = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f.$$

d'où le résultat. ■

Théorème 2.1 [23] Soient f et g deux fonction définies sur $[a, b]$, telles que ${}^C D_a^\alpha f$ et ${}^C D_a^\alpha g$ existent presque partout, et soient c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$ alors, ${}^C D_a^\alpha (c_1 f + c_2 g)$ existe presque partout et on a :

$${}^C D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 {}^C D_a^\alpha f(x) + c_2 {}^C D_a^\alpha g(x). \quad (2.25)$$

Preuve. La preuve découle directement de la définition, on a :

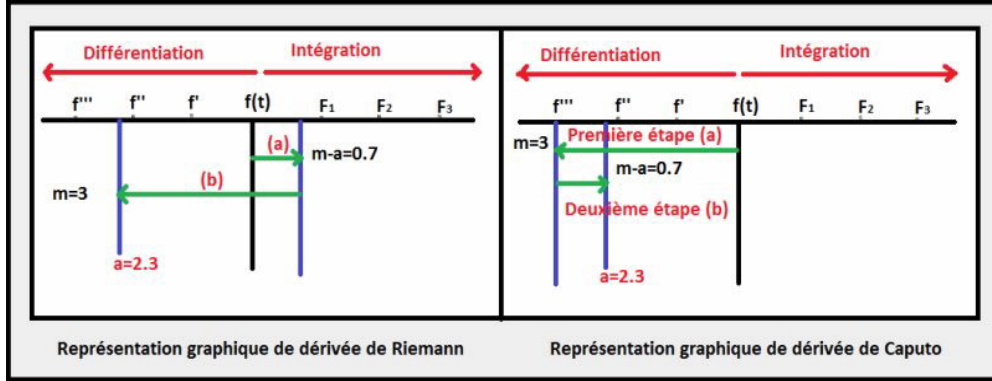
$${}^C D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (c_1 f + c_2 g)^{(n)}(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{c_1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)^n dt \\
 &\quad + \frac{c_2}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t)^n dt \\
 &= c_1 I_a^{n-\alpha} f^n(x) + c_2 I_a^{n-\alpha} g^n(x) \\
 &= c_1 {}^C D_a^\alpha f(x) + c_2 {}^C D_a^\alpha g(x).
 \end{aligned}$$

■

2.1 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

- L’avantage principale de l’approche de Caputo est que les conditions initiales des équation différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les les équations différentielles d’ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.
- Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d’une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est $\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$.
- Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l’inverse quand on suit l’autre sens (Riemann-Liouville), c’est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d’ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l’approche de Riemann-Liouville, on commence d’abord par l’intégration fractionnaire d’ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l’ordre entier m , mais pour trouver la dérivée fractionnaire d’ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l’approche de Caputo on commence par la dérivée d’ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on l’intègre d’ordre fractionnaire $(m-\alpha)$.



2.2 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1. La linéarité :

la dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^\alpha(c_1f(t) + c_2g(t)) = c_1D^\alpha f(t) + c_2D^\alpha g(t). \quad (2.26)$$

2. La règle de Leibniz

Pour un entier n on a :

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x). \quad (2.27)$$

La généralisation de cette formule pour la dérivation fractionnaire est la suivante :

$$D^\alpha(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x)D^{\alpha-k}g(x) + R_n^\alpha(x),$$

où $n \geq \alpha + 1$ et

$$R_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t)dt \int_t^x (t-\tau)^n g^{(n+1)}(\tau)d\tau. \quad (2.28)$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\tau = t - \varsigma(x - t) \text{ et } t = a + \eta(x - a),$$

on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^\alpha(x) = 0.$$

Si f et g sont continues sur $[a, x]$, ainsi que toutes leurs dérivées, la formule s'écrit :

$$D^\alpha(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x) D^{(\alpha-k)}g(x). \quad (2.29)$$

CHAPITRE 3

Etude d'un système fractionnaire à retards variables

1 Position du problème

Dans ce chapitre, notre but est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution positive pour le système différentiel fractionnaire d'ordre multiple avec des retards variables

$${}^C D^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))), \quad i \in [1, n], t > 0. \quad (3.1)$$

avec la condition

$$x(t) = \phi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad (3.2)$$

où ${}^C D^{\alpha_i}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha_i \in (0, 1)$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))'$, où $'$ désigne la transposée du vecteur, $f_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues pour $i \in [1, n]$, $\phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))'$, est un vecteur de fonction défini sur $[-\tau, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , et τ_i sont des fonction à valeurs réelles continues définies sur \mathbb{R}^+ , tels que $\tau = \max\{\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \tau_i(t), i \in [1, n]\} > 0$.

Nous commençons par démontrer l'existence d'une solution positive au problème (3.1 – 3.2) à l'aide de la méthode de sous et sur solution (sur un cône), puis nous traitons l'unicité de la solution positive.

2 Existence de solution

Dans cette section, nous prouvons l'existence de solution positive du problème (3.1 – 3.2). Nous commençons par établir l'équivalence entre le problème (3.1 – 3.2) et une équation intégrale dans le lemme suivant :

Lemme 2.1 [3] *La fonction vecteur $x(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))$ est une solution du problème (3.1 – 3.2) si et seulement si*

$$x_i(t) = \begin{cases} \phi_i(0) + I^{\alpha_i} f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))), & t > 0, \\ \phi_i(t), & t \in [-\tau, 0], i \in [1, n]. \end{cases}$$

Preuve. Pour $t > 0$, l'équation (3.1) peut s'écrire comme

$$I^{1-\alpha_i} D x_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))).$$

Appliquant l'opérateur I^{α_i} sur les deux côtés,

$$\begin{aligned} I D x_i(t) &= I^{\alpha_i} f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))). \\ x_i(t) - x_i(0) &= I^{\alpha_i} f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))). \end{aligned}$$

Alors

$$x_i(t) = \phi_i(0) + I^{\alpha_i} f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))).$$

■

2. Existence de solution

Maintenant, pour trouver la solution du problème (3.1), nous utilisons la définition de l'espace E .

Soit l'espace $E = [C[-\tau, +\infty), \mathbb{R}^+]^n$ la classe de tous les fonctions n -vecteurs colonnes continues, muni de la norme

$$\|x\|_N = \sum_{i=1}^n \sup_{t \in I} \{e^{-Nt} |x_i(t)|\}, x \in E,$$

où $N \in \mathbb{R}^+$ sera choisi plus tard.

Dans l'espace E , le cône K définie par

$$K = \{x \in E : x_i(t) \geq 0, t \in I, i \in [1, n]\}.$$

et

$$D = \{x \in K : x(t) = \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0\} \subset K.$$

Il est clair que K est un cône normal dans E .

Remarque 2.1 *Un cône K est appelé normal s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x, y \in E$:*

$$\text{Si } 0 \leq x \leq y \text{ alors } \|x\| \leq c\|y\|.$$

Nous définissons l'opérateur intégral F par

$$Fx_i = \begin{cases} \phi_i(t), & t \in [-\tau, 0] \\ \phi_i(0) + I^{\alpha_i} f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))), & t > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

On impose les hypothèses suivantes :

(H_1) Il existe $g_{ij}, h_{ij} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues et bornés, telle que

$$f_i(t, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) \leq \sum_{j=1}^n g_{ij}(u_j) + \sum_{j=1}^n h_{ij}(v_j) \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

(H₂) Pour $i = 1, 2, \dots, n$, $f_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et croissante.

(H₃) Il existe $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)'$, $v_0 = (v_0^1, \dots, v_0^n)'$ qui sont respectivement une sous solution et une sur solution du problème, satisfaisant $u_0(t) \leq v_0(t)$, $t \in [0, +\infty)$.

Pour l'existence de la solution du problème (3.1 – 3.2), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2 [3] *On suppose que (H₁) est vérifiée, alors l'opérateur $F : D \rightarrow E$ est complètement continu.*

Preuve. L'opérateur $F : D \rightarrow E$ est continu compte tenu de l'hypothèse de continuité de f .

Soit $G \subset D$ borné, c'est à dire il existe une constante $l > 0$ tel que $\|x\| \leq l, \forall x \in G$.

Pour chaque $x \in G$, compte tenu de l'hypothèse (H₁) on a pour $i \in [1, n]$:

$$\begin{aligned} |Fx_i(t)| &\leq |\phi_i(0)| + \\ &\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |f_i(s, x_1(s), \dots, x_n(s), x_1(s-\tau_1(s)), \dots, x_n(s-\tau_n(s)))| ds \\ &\leq |\phi_i(0)| + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_{ij}(x_j(s)) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} h_{ij}(x_j(s-\tau_j(s))) ds. \end{aligned}$$

2. Existence de solution

Alors, pour $N > 0$, on a

$$\begin{aligned} e^{-Nt} |Fx_i(t)| &\leq e^{-Nt} |\phi_i(0)| + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} g_{ij}(x_j(s)) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N(t-s+\tau_j(s))} e^{-N(s-\tau_j(s))} |h_{ij}(x_j(s-\tau_j(s)))| ds. \end{aligned}$$

Pour simplifier, on pose $r_j(s) = s - \tau_j(s)$, et en effectuant le changement de variable $u = N(t-s)$ on trouve :

$$\begin{aligned} e^{-Nt} |Fx_i(t)| &\leq e^{-Nt} |\phi_i(0)| + \sum_{j=1}^n \sup_{\xi \in I} \{e^{-N\xi} |g_{ij}(x_j(\xi))|\} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N(t-s)} ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N(t-r_j(s))} e^{-Nr_j(s)} |h_{ij}(x_j(r_j(s)))| ds \\ &\leq e^{-Nt} |\phi_i(0)| + \sum_{j=1}^n \sup_{\xi \in I} \{e^{-N\xi} |g_{ij}(x_j(\xi))|\} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N(t-s)} ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sup_{\xi \in I} \{e^{-N\xi} |h_{ij}(x_j(\xi))|\} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha_i-1}}{N^{\alpha_i} \Gamma(\alpha_i)} e^{-u} e^{-N\tau_j(t-\frac{u}{N})} du \end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse (H_1) , il existe L_j, L'_j tel que $L_j = \sup_{t \in I} \{e^{-Nt} |g_{ij}(x_j(t))|\}$, $L'_j = \sup_{t \in I} \{e^{-Nt} |h_{ij}(x_j(t))|\}$, pour $i, j \in [1, n]$. Donc

$$\begin{aligned} e^{-Nt} |Fx_i(t)| &\leq e^{-Nt} |\phi_i(0)| + \sum_{j=1}^n L_j \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha_i-1}}{N^{\alpha_i} \Gamma(\alpha_i)} e^{-u} du \\ &\quad + \sum_{j=1}^n L'_j \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha_i-1}}{N^{\alpha_i} \Gamma(\alpha_i)} e^{-u} e^{-N\tau_j(t-\frac{u}{N})} du \end{aligned}$$

$$e^{-Nt} |Fx_i(t)| \leq c + \frac{\sum_{j=1}^n (L_j + L'_j)}{N^{\alpha_i}}, \forall t > 0$$

Ainsi FG est uniformément borné.

Maintenant, on montre que FG est localement équicontinue. Il y a trois cas possible pour $i \in [1, n]$:

Cas 1. Pour chaque $x \in G, \epsilon_i > 0, \forall T \in [0, +\infty), t_1, t_2 \in [0, T], t_1 < t_2$. Soit

$$\delta_i = \left(\frac{\epsilon_i \Gamma(\alpha_i + 1)}{2 \sum_{j=1}^n (c_j + c'_j)} \right)^{\frac{1}{\alpha_i}}, \text{ puis quand } t_2 - t_1 < \delta_i, \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} & |Fx_i(t_1) - Fx_i(t_2)| \\ \leq & \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} |f_i(s, x_i(s), x_1(s - \tau_1(s)), \dots, x_n(s - \tau_n(s)))| ds \\ & - \int_0^{t_1} \frac{(t_2 - s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} |f_i(s, x_i(s), x_1(s - \tau_1(s)), \dots, x_n(s - \tau_n(s)))| ds \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} |f_i(s, x_i(s), x_1(s - \tau_1(s)), \dots, x_n(s - \tau_n(s)))| ds \\ \leq & \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha_i - 1} - (t_2 - s)^{\alpha_i - 1}) (g_{ij}(x_j(s)) + h_{ij}(x_j(s - \tau_j(s)))) ds \\ & + \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} (g_{ij}(x_j(s)) + h_{ij}(x_j(s - \tau_j(s)))) ds. \end{aligned}$$

$\exists l > 0$ tel que pour $x \in G, \|x\| \leq l$, alors $|x_i(t)| \leq le^{Nt} \leq le^{Nt}$. De plus, les fonction $g_{ij}(x_j)$ et $h_{ij}(x_{ij})$ sont bornées, donc $\exists c_j, c'_j : c_j = \sup_{t \in [0, T]} |g_{ij}(x_i(t))|$, $c'_j = \sup_{t \in [0, T]} |h_{ij}(x_j(t - \tau_j(t)))|, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Alors

$$\begin{aligned}
& |Fx_i(t_1) - Fx_i(t_2)| \\
& \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha_i-1} - (t_2 - s)^{\alpha_i-1}) (c_j + c'_j) ds \\
& \quad + \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} (c_j + c'_j) ds \\
& \leq \sum_{j=1}^n \frac{c_j + c'_j}{\Gamma(\alpha_i)} \left\{ \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha_i-1} - (t_2 - s)^{\alpha_i-1}) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha_i-1} ds \right\} \\
& \leq \sum_{j=1}^n \frac{c_j + c'_j}{\alpha_i \Gamma(\alpha_i)} \{ (t_2 - t_1)^{\alpha_i} + t_1^{\alpha_i} - t_2^{\alpha_i} + (t_2 - t_1)^{\alpha_i} \} \\
& < 2 \sum_{j=1}^n \frac{c_j + c'_j}{\Gamma(\alpha_i)} (t_2 - t_1)^{\alpha_i} \\
& < 2 \sum_{j=1}^n \frac{c_j + c'_j}{\Gamma(\alpha_i)} \delta_i^{\alpha_i} = \epsilon_i.
\end{aligned}$$

Cas 2. Pour chaque $x \in G$, $\epsilon_i > 0$, $t_1 \in [-\tau, 0]$, $t_2 \in [0, T]$, $\forall T \in [0, +\infty)$. Puisque $\phi_i \in C[-\tau, 0]$, $\exists \delta' : |\phi_i(t_1) - \phi_i(0)| < \frac{\epsilon_i}{2}$ quand $0 - t_1 < \delta'$. Quand $t_2 - t_1 < \delta_i$, $\delta_i = \min \left(\delta', \left(\frac{\epsilon_i \Gamma(\alpha_i + 1)}{2 \sum_{j=1}^n (c_j + c'_j)} \right) \right)$, on a :

$$\begin{aligned}
& |Fx_i(t_1) - Fx_i(t_2)| \\
& \leq |\phi_i(t_1) - \phi_i(0)| + \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |f_i(s, x_i(s), x_1(s - \tau_1(s)), \dots, x_n(s - \tau_n(s)))| ds \\
& \leq \frac{\epsilon_i}{2} + \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} \sum_{j=1}^n \{g_{ij}(x_j(s)) + |h_{ij}(x_j(s - \tau_j(s)))|\} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Fx_i(t_1) - Fx_i(t_2)| &< \frac{\epsilon_i}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{c_j + c'_j}{\alpha_i \Gamma(\alpha_i)} t_2^{\alpha_i} \\ &< \frac{\epsilon_i}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{c_j + c'_j}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \delta_i^{\alpha_i} \end{aligned}$$

Donc

$$|Fx_i(t_1) - Fx_i(t_2)| < \frac{\epsilon_i}{2} + \frac{\epsilon_i}{2} = \epsilon_i.$$

Cas 3. Pour chaque $x \in G$, $\epsilon_i > 0$, $t_1, t_2 \in [-\tau, 0]$. En fait, par continuité de ϕ_i , quand $t_2 - t_1 < \delta_i$, on a

$$|Fx_i(t_1) - Fx_i(t_2)| = |\phi_i(t_1) - \phi_i(t_2)| < \epsilon_i.$$

Par conséquent, FG est équicontinue dans chaque intervalle borné. On conclut que FG est relativement compact. Donc l'opérateur F est complètement continu. Ceci achève la preuve. ■

Dans la définition suivante, nous introduisons la définition de sous et sur solutions de l'équation (3.1).

Définition 2.1 [24] [4] *La fonction $u \in E$ est appelée sous solution du problème (3.1 – 3.2) si*

$${}^C D^{\alpha_i} u_i(t) \leq f_i(t, u_1(t), \dots, u_n(t), u_1(t - \tau_1(t)), \dots, u_n(t - \tau_1(t))), \quad i \in [1, n], t > 0,$$

et

$$u(t) \leq \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0]$$

De même, la fonction $v \in E$ est appelée sur solution du problème (3.1 – 3.2) si

2. Existence de solution

$${}^C D^{\alpha_i} v_i(t) \geq f_i(t, v_1(t), \dots, v_n(t), v_1(t - \tau_1(t)), \dots, v_n(t - \tau_n(t))), \quad i \in [1, n], t > 0,$$

et

$$v(t) \geq \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0].$$

Si les inégalités sont strictes, $u(t), v(t)$ sont appelées sous et sur solutions strictes.

Notre résultat principal dans cette étude est le théorème suivant, qui donne des conditions suffisantes pour que le problème (3.1–3.2) a au moins une solution positive sur $[0, +\infty)$.

Théorème 2.1 [3] *On suppose que $(H_1) - (H_3)$ sont vérifiés. Alors le problème (3.1 – 3.2) a au moins une solution positive.*

Preuve. Par le lemme (2.1), le problème (3.1 – 3.2) est équivalent au problème du point fixe $x = Fx$. De plus, par le lemme (2.2), on a $F : D \rightarrow E$ est complètement continue. Par (H_2) , si $x, y \in D, x \leq y$, on a pour $i \in [1, n]$:

$$\begin{aligned} Fx_i(t) &= x_i(0) + I^{\alpha_i} f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))) \\ &\leq y_i(0) + I^{\alpha_i} f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t), y_1(t - \tau_1(t)), \dots, y_n(t - \tau_n(t))) \\ &\leq Fy_i(t). \end{aligned}$$

Donc F est un opérateur croissant. Il est clair que pour $j \in [1, n] : w_0^j \leq Fw_0^j, v_0^j \geq Fv_0^j$. Par conséquent, d'après le théorème (4.1), $x = Fx$ a un point fixe $x \in \langle u_0, v_0 \rangle$. ■

Exemple 2.1 *Considérons le problème suivant*

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{\frac{1}{2}}x_1(t) = e^{-t}[\pi + \arctan(x_1(t - \frac{1}{t+1} - 2))]^{\frac{1}{2}} \frac{x_2(t)}{(t+1)\sqrt{1+x_2^2(t)}}, t > 0, \\ D^{\frac{1}{3}}x_1(t) = (2t + 1)^{-1}[\frac{\pi}{2} \arctan(x_1(t))] + e^{-3t} \frac{x_2^2(t - \cos^2(t))}{2+x_2^2(t - \cos^2(t))}, t > 0, \\ x_1(t) = 4 + t, t \in [-3, 0]. \\ x_2(t) = t^2, t \in [-3, 0]. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

On a

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{3}, \tau_1(t) = 2 + \frac{1}{t+1}, \tau_2(t) = \cos^2(t), \tau = 3,$$

et

$$f_1(t, u_1, u_2, v_1, v_2) = e^{-t}[\pi + \arctan v_1]^{\frac{1}{2}} \frac{u_2}{(t+1)\sqrt{1+u_2^2}},$$

$$f_2(t, u_1, u_2, v_1, v_2) = (2t + 1)^{-1}[\frac{\pi}{2} + \arctan u_1] + e^{-3t} \frac{v_2^2}{2+v_2^2},$$

Qui peut être estimé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f_1(t, u_1, u_2, v_1, v_2) &\leq e^{-2t}[\pi + \arctan v_1]^{\frac{1}{2}} \frac{u_2^2}{(t+1)^2(1+u_2^2)} \\ &\leq \pi + \arctan v_1 + \frac{u_2^2}{1+u_2^2}, \end{aligned}$$

et

$$f_2(t, u_1, u_2, v_1, v_2) \leq \frac{\pi}{2} + \arctan u_1 + \frac{v_2^2}{2+v_2^2}.$$

Donc

$$g_{11}(u_1) = 0, g_{12}(u_2) = \frac{u_2^2}{1+u_2^2}, h_{11}(v_1) = \pi + \arctan v_1, h_{12}(v_2) = 0,$$

$$g_{21}(u_1) = \frac{\pi}{2} + \arctan u_1, g_{22}(u_2) = 0, h_{21}(v_1) = 0, h_{22}(v_2) = \frac{v_2^2}{2+v_2^2}.$$

De plus, il existe ψ_1 et ψ_2 tels que

3. Unicité de la solution

$$\begin{aligned} f_1(t, u_1, u_2, v_1, v_2) &\leq \frac{3\pi}{2}e^{-t} + \frac{1}{(t+1)^2} = \psi_1(t), \\ f_2(t, u_1, u_2, v_1, v_2) &\leq \frac{\pi}{2t+1} + e^{-3t} = \psi_2(t). \end{aligned}$$

Nous vérifions facilement que $\int_0^{+\infty} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \psi_1(s) ds$ et $\int_0^{+\infty} (t-s)^{-\frac{2}{3}} \psi_2(s) ds$ sont finies. Par conséquent, tous les hypothèses du théorème (2.1) sont satisfaites et donc le problème (3.4) a au moins une solution positive.

3 Unicité de la solution

Un théorème important de l'unicité de la solution positive est le résultat suivant :

Théorème 3.1 [3] Soient $f_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues et satisfont la condition de Lipschitz pour $i \in [1, n]$:

$$\begin{aligned} &|f_i(t, u_1, \dots, u_n, U_1, \dots, U_n) - f_i(t, v_1, \dots, v_n, V_1, \dots, V_n)| \\ &\leq \sum_{j=1}^n l_{ij} |u_j - v_j| + \sum_{j=1}^n k_{ij} |U_j - V_j|. \end{aligned}$$

Alors le problème (3.1 – 3.2) a une unique solution positive.

Preuve. Soient $u, v \in D$, alors :

$$\begin{aligned} &|Fu_i(t) - Fv_i(t)| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} \{l_{ij} |u_j(s) - v_j(s)| + k_{ij} |u_j(s - \tau_j(s)) - v_j(s - \tau_j(s))|\} ds \end{aligned}$$

Soient $l = \sum_{j=1}^n |l_{ij}| = \sum_{j=1}^n \max |l_{ij}|$, $k = \sum_{j=1}^n |k_{ij}| = \sum_{j=1}^n \max |k_{ij}|$. Alors

$$\begin{aligned}
& e^{-Nt} |Fu_i(t) - Fv_i(t)| \\
\leq & l_i \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} |u_j(s) - v_j(s)| ds \\
& + k_i \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N(t-s+\tau_j(s))} e^{-N(s-\tau_j(s))} |u_j(s-\tau_j(s)) - v_j(s-\tau_j(s))| ds.
\end{aligned}$$

On pose $r_j(s) = s - \tau_j(s)$

$$\begin{aligned}
& e^{-Nt} |Fu_i(t) - Fv_i(t)| \\
\leq & l_i \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} |u_j(s) - v_j(s)| ds \\
& + k_i \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N(t-r_j(s))} e^{-Nr_j(s)} |u_j(r_j(s)) - v_j(r_j(s))| ds, \\
\leq & l_i \sum_{j=1}^n \sup \{ e^{-N\xi} |u_j(\xi) - v_j(\xi)| \} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N(t-s)} ds \\
& + k_i \sum_{j=1}^n \sup \{ e^{-N\xi} |u_j(\xi) - v_j(\xi)| \} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N(t-r_j(s))} ds \\
\leq & l_i \sum_{j=1}^n \sup \{ e^{-N\xi} |u_j(\xi) - v_j(\xi)| \} \frac{1}{N^{\alpha_i}} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} du \\
& + k_i \sum_{j=1}^n \sup \{ e^{-N\xi} |u_j(\xi) - v_j(\xi)| \} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha_i-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-N\tau_j(t-\frac{u}{N})} du.
\end{aligned}$$

Par conséquent

3. Unicité de la solution

$$\begin{aligned}
& e^{-Nt} |Fu_i(t) - Fv_i(t)| \\
\leq & l_i \sum_{j=1}^n \sup \{e^{-N\xi} |u_j(\xi) - v_j(\xi)|\} \frac{1}{N^{\alpha_i}} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha_i-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha_i)} du \\
& + k_i \sum_{j=1}^n \sup \{e^{-N\xi} |u_j(\xi) - v_j(\xi)|\} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha_i-1} e^{-u}}{N^{\alpha_i} \Gamma(\alpha_i)} du \\
\leq & \frac{nl_i}{N^{\alpha_i}} \|u - v\|_N + \frac{nk_i}{N^{\alpha_i}} \|u - v\|_N \\
\leq & n \frac{l_i + k_i}{N^{\alpha_i}} \|u - v\|_N.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|Fu - Fv\|_N &= \sum_{i=1}^n \sup_{t \in I} e^{-Nt} |Fu_i(t) - Fv_i(t)| \\
&\leq \sum_{i=1}^n n \frac{l_i + k_i}{N^{\alpha_i}} \|u - v\|_N \\
&\leq n \frac{l + k}{N^{\alpha_i}} \|u - v\|_N,
\end{aligned}$$

Où $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$. Par conséquent

$$\|Fu - Fv\|_N \leq n \frac{l + k}{N^{\alpha_i}} \|u - v\|_N.$$

Nous choisissons N assez grand de telle sorte $n \frac{l+k}{N^\alpha} < 1$, Alors, d'après le théorème de point fixe de Banach, F a un point fixe unique dans D , qui est l'unique solution positive. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, notre intérêt se porte sur l'étude d'un système d'équations différentielles fractionnaires non linéaires avec des variables à retard. Nous avons appliqué dans ce travail certains théorèmes de point fixe, qui permettent d'établir l'existence et l'unicité d'une solution positive.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Benbachir, Calcul fractionnaire, <https://youtube.com/@maamarbenbachir>.
- [2] N. Boccara, Analyse Fonctionnelle une introduction pour physiciens, 1984.
- [3] A. Bouaziz, M.A. Kerker, Positive Solutions for a Multi-order Fractional Nonlinear System with Variable Delays, *Filomat* 32 :18 (2018), 6155–6166.
- [4] J. Caballero, J. Harjani, K. Sadarangani, Positive solutions for a class of singular fractional boundary-value problems, *Comput.Math. Appl.* (2011). 62, 1325-1332.
- [5] S. Choudhary, V. Daftardar-Gejji, Existence Uniqueness Theorems for Multi-Term Fractional Delay Differential Equations, *Fract.Calc. Appl. Anal.*, Vol.18, No 5, (2015), pp. 1113-1127, DOI : 10.1515/fca-2015-0064.
- [6] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag, 1985.
- [7] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer. 2004.
- [8] A.Erdelyi , W.Magnus, Oberhettinger F and Tricomi F, *Higher Transcendental Functions*, Vol.III, Krieger Pub, Melbourne, Florida, 1981.
- [9] D.J. Guo, V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press Inc, Boston, New York, 1988.

-
- [10] A.A. Kilbas, S.A. Mazran, Nonlinear differential equations with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, *Differential Equations*.41, (2005), 84 - 89.
- [11] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential Equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Edvan Mill, Amsterdam, 2006.
- [12] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.*, 2e edition, Editions Mir-Moscou, 1974.
- [13] C.J.Luo Albert. *Nonlinear systems and complexity, Introduction to Functional Differential Equations*, Springer Nature Switzerland AG, 2019.
- [14] K.S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional, Calculus and Fractional Differential Equation*, JohnWiley : New York, 1993.
- [15] L. Nisse, A. Bouaziz, Existence and stability of the solutions for systems of nonlinear fractional differential equations with deviating arguments, *Advances in Difference Equations*, (2014). 2014 :275.
- [16] K.B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press ; New York, 1974.
- [17] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York : London :Toronto, 1999.
- [18] S. Samko, A.A.A. Kilbas, O. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1993.
- [19] L. Schwartz, *Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Édition Corrigée Paris. 2008.
- [20] Y. Sonntag, *Topologie et analyse fonctionnelle*, ellipse, 1997.
- [21] H. Vu, N. Ngoc Phung, N. N. Phuong, On Fractional Random Differential Equations With Delay, *Opuscula Math.* 36, no. 4, (2016), 541-556.

-
- [22] F. Wang, Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional differential equation, *Appl. Math. Comput.* (2012), 39 :53. doi.org/10.1007/s12190-011-0509-9.
- [23] M. Wellbeer, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their, *Analytical Background*, D. Univ Braunschweig, 2010.
- [24] H. Ye, Y. Ding, J. Gao, The Existence of a Positive Solution of $D^\alpha [(t) - x(0)] = x(t)f(t, x_t)$, *Positivity* (2007). 11 : 341. doi.org/10.1007/s11117-006-2038-6.
- [25] C. Zhong, X. Fan, W. Chen, *Nonlinear Functional Analysis and Its Application*, Lanzhou Univ. Press, 1998.