الـجمهـورية الـجزائريــة الديمـقراطـية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعـليـم العالي والــبحـث الـعلـمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامـعة الـشادلي بن جديد- الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Problème de contrôle optimal stochastique résolu par la méthode de la programmation dynamique

Présenté par:

Messaadia Amina

Devant le Jury :

Dr. Grabsia Imen	**MCB**	Univ. Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. Benseghir Rym	**MCA**	Univ. Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Grine Razika	**MCB**	Univ. Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2021-2022

À Ma Tante

“ À ma tante, qui m’a enseigné les bases des mathématiques"

À Mme. Benseghir

À Ma Soeur et Mes parents

Remerciements

Mes premiers remerciements vont, comme il se doit, à Madame Bensghir Rym qui a dirigé ce Mémoire. Tout d'abord, je la remercie pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Je tiens à lui exprimer mes plus vifs remerciements pour m'avoir permis de la suivre dans cette aventure de la recherche en Mathématiques où j'ai pu apprécier tant son dynamisme que sa rigueur scientifique. Outre sa compétence, la patience et la confiance qu'elle m'a accordées. Travailler sous sa direction fût pour moi un grand plaisir.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury, Madame Grabsia Imen la présidente de la soutenance et Madame Grine Razika l'examinatrice de la soutenance, pour leurs présence, pour leurs lecture de ce mémoire, ainsi que pour les remarques qu'ils m'adresseront lors de cette soutenance afin d'ameliorer mon travail.

J'adresse également des remerciements à tous les enseignants de la faculté de l'universite de Chadli Benjdid. Ainsi que tous les membres du département de Mathématique, pour toute l'aide qui m'été accordée.

Je tiens enfin à exprimer mes remerciements à ma famille pour leur soutien et leur encouragement. Plus précisément ma tante qui était pour moi une vraie source d'inspiration.

Résumé

Un problème de contrôle optimal $(P1)$ est considéré. La méthode de la programmation dynamique est adoptée pour le résoudre. Elle nous amène à étudier une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman qui, à l'aide d'une transformation logarithmique, se transforme en une EDP linéaire (problème de Cauchy). Des conditions suffisantes nous permettent de démontrer que le contrôle optimal est admissible et correspond au drift d'un processus de Markov et cela en appliquant le théorème de vérification de Fleming-Rishel.

Mots clés : *Contrôle optimale, Programmation dynamique, Calcul stochastique, Processus de Markov.*

Abstract

An optimal control problem $(P1)$ is considered. We use the method of dynamic programming to resolv this stochastic optimal control problem. This method it allows us to study the Hamilton-Jacobi-Bellman equation which, a logarithmic transformation, becomes a linear PDE (Cauchy problem). Sufficient conditions allow us to prove that the optimal control is admissible and corresponds to the drift of a Markov process, by applying the verification theorem of Fleming-Rishel.

Key Words : *Optimal control, Dynamique programming, Stochastic calcula, Markov process.*

الملخص

نعتبر مشكلة التحكم الأمثل (P 1). لحلها تم اعتماد طريقة البرمجة الديناميكية. تقودنا هده الطريقة إلى دراسة معادلة هاملتون-جاكوبي-بيلمان والتي ، باستخدام تحويل اللوغاريتمي، تتحول إلى معادلة تفاضلية خطية جزئية (مشكلة كوشي). تسمح لنا الشروط المفروضة الكافية بإثبات أن التحكم الأمثل مسموح به و يتوافق مع الحل و هو عملية ماركوف، وهذا من خلال تطبيق نظرية التحقق لفليمينغ-ريشيل.

الكلمات المفتاحية: التحكم الأمثل ، البرمجة الديناميكية ، حساب التفاضل والتكامل العشوائي ، عملية ماركوف.

Table des matières

Introduction

Durant les années 1949, Richard Bellman, un jeune Professeur de 28 ans de Mathématiques à l'université de Stanford, déjà reconnu pour ses travaux prometteurs en théorie des nombres, fut engagé comme consultant chez RAND corporation, une institution de Recherche et Développement fondée en 1945 par l'armée de l'air américaine. Bellman commença à travailler sur la théorie du contrôle optimal. Ce domaine traite des problèmes afin de trouver une stratégie de contrôle pour un système donné de manière à satisfaire un critère d'optimalité faisant appel à une fonctionnelle de coût dépendant de variables d'état et de contrôle. Par exemple, considérons une voiture parcourant une route vallonnée. La question est de déterminer comment le conducteur doit rouler dans le but de minimiser la durée totale du voyage. Ici, la stratégie de contrôle désigne la manière dont le conducteur doit presser la pédale d'accélérateur ou de frein. Le système consiste à la fois de la voiture et de la route et le critère d'optimalité est la minimisation de la durée globale du parcours. Les problèmes de contrôle incluent usuellement des contraintes auxiliaires. Dans le cas de l'exemple considéré, il peut s'agir de la quantité d'essence qui est limitée, de vitesses limites, etc...
Une fonctionnelle de coût est ici une expression mathématique donnant le temps de trajet en fonction de la vitesse, de considérations géométriques de la route, etc...
Jusqu'à cette époque, les problèmes de contrôles optimaux étaient analysés par les techniques de calcul des variations qui s'est développé depuis le 17ème siècle conjointement au développement de la physique et de la géométrie, sous l'impulsion de grands noms parmi les mathématiciens des trois siècles passés : Euler, Lagrange, Hamilton, Jacobi.... Bellman observa que le traitement analytique des problèmes de contrôles optimaux pouvait s'avérer très complexe, et de son point de vu, une solution ne devait pas être seulement un ensemble d'équations mais une règle indiquant ce que le contrôleur doit faire comme stratégie : Que fait-on si on se trouve dans telle portion de l'espace et avec le temps restant ?
Il s'est intéressé par les applications des mathématiques et on lui suggéra de travailler sur les processus de décision à étapes multiples. A cette époque, la recherche en mathématique n'était pas vraiment appréciée au ministère de la défense et quelques politiciens qui dirigeaient l'armée de l'air et la première tâche de Bellman fût de trouver à son travail un nom qui plairait

à ses supèrieurs. Il choisit d'utiliser le mot "Programmation" qui signifiait plus à l'époque planification et ordonnancement que la programmation au sens informatique de nos jours. Il le combina avec le terme "Dynamique" pour évoquer l'idée d'évolution dans le temps. La terminologie de "Programmation Dynamique" servit donc de parapluie à Richard Bellman pour abriter ses activités de recherche chez la RAND corporation. La programmation dynamique repose sur une technique que Bellman appela "principe d'optimalité". Ce principe général stipule que la solution d'un problème global peut être obtenue en décomposant le problème en sous problèmes plus simples à résoudre.
Il comprit alors ce que pouvait apporter la programmation dynamique dans la résolution de problèmes de contrôles optimaux.
Dans le cadre décrit dans le deuxième chapitre, l'état du système est complètement déterminé par la dynamique f et le contrôle. On parle de problème de contrôle déterministe. Dans de nombreuses situations, les systèmes dynamiques sont perturbés par des évènements aléatoires. C'est typiquement le cas sur les marchés financiers où l'observation empirique montre que les actifs ne sont pas déterminés de manières certaines par leur histoire. Plusieurs éléments n'appartenant pas à l'histoire modifient le cours des actifs. On représente souvent le terme aléatoire par un mouvement Brownien W, tandis que les systèmes dynamiques sont modélisés par des processus de diffusion sur lesquels on peut agir au moyen de variable de contrôle. Il s'agit de problèmes de contrôle optimal stochastique. Pour résoudre ces problèmes, comme dans le cas déterministe et en suivant les recherches nitiée par Richard Bellman dans les années 50 pour résoudre des problèmes d'optimisation, l'application la méthode de la programmation dynamique conduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), c'est à dire des problèmes où l'on doit prendre les meilleures décisions possibles à chaque date pour un critère de performance donné. L'équation de la programmation dynamique généralise les travaux antérieurs en mécanique classique de Hamilton et Jacobi, et est usuellement appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman en reconnaissance de la contribution de ces trois grandes personnalités scientifiques. Historiquement appliquée en ingénierie puis dans d'autres domaines des mathématiques appliquées, l'équation d'HJB est devenue un outil important dans les problèmes de décision intervenant en économie et finance.
Dans ce présent travail, nous allons étudier un problème d'optimisation stochastique ou un problème de contrôle optimal stochastique en utilisant la méthode de la progrmmation dynamique. Mais d'abord, dans le premier chapitre, et avant de commencer notre travail, nous rappelons quelques no-

tions générales sur le calcul stochastique. On précisera les définitions et les notions adoptées dans ce mémoire et les résultats que nous utiliserons par la suite. Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons d'abord aux problèmes d'optimisation et la méthode de la programmation dynamique déterministes. Cette méthode permet de résoude les problèmes de contrôle optimal qui conduit à l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman (HJB). Ainsi, nous nous intéressons à la méthode de la programmation dynamique stochastique pour résoudre un problème de contrôle optimal stochastique. Le cadre adoptè dans ce chapitre est celui des processus de diffusion contrôllés à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. L'idée basique de la méthode est de considérer une famille de problèmes de contrôles à différents états initiaux et d'établir des relations entre les fonctions valeurs associées. Ce principe est ainsi appelé principe de la programmation dynamique. L'équation de la programmation dynamique conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire du second ordre, appelée comme dans le cas déterministe l'équation d'HJB. Lorsque cette EDP peut être résolue par l'obtention explicite ou théorique d'une solution régulière, le théorème de vérification, rappelé à la fin de ce chapitre, valide l'optimalité de ce candidat solution de l'équation d'HJB, et permet aussi de caractériser un contrôle optimal. Cette approche classique de la programmation dynamique est appelée étape de vérification. Notons que cette méthode se justifie si l'EDP de l'équation d'HJB admet une solution satisfaisant les conditions d'application du théorème de vérifition. Des résultats d'existence de solutions régulières à des équations de type paraboliques. Soulignons aussi qu'il n'est pas toujours facile d'obtenir l'existence d'une solution de l'EDS associé au candidat pour être le contrôle optimal.
Dans le troisieme chapitre, et comme illustration, nous allons étudier un problème de contrôle optimale stochastique que nous allons résoudre en appliquant la méthode de la programmation dynamique bien détaillée dans le deuxième chapitre.

Préliminaire

Ω : ensemble non vide,

$\mathcal{F}$: tribu,

$(\Omega, \mathcal{F})$: ensemble mesurable,

$\mathbb{P}$: mesure de probabilité,

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: espace mesuré,

$\mathfrak{B}$: tribu borélienne,

$\mathbb{P} - p.s.$: $\mathbb{P}$-presque sûrement,

$\Sigma \otimes \Sigma$: produit tensoriel,

$C^0([0,T];\mathbb{R}^n)$: $\{f : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ continues$\}$,

$C^1([0,T];\mathbb{R}^n)$: $\{f : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ continues et dérivables $\}$,

$C^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n)$: $\{f : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ continues et dérivables, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$ existent et continues$\}$.

Chapitre 1

Introduction au calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux différents concepts du calcul stochastique qui seront utiles par la suite. Plus précisemment, nous nous rappelons la définition d'un processus stochastique et quelques processus usuels à savoir les martingales, les processus de Markov, les processus de diffusion, les mouvements brownien et les processus réciproques. Ensuite, nous aurons besoin d'introduire la notion des intégrales et des différentielles stochastiques qui nous permettent de définir les équations différentielles stochastiques. Enfin, nous allons finir par rappeler un résultat très important dans le calcul stochastique, le théorème de Girsanov.
Dans toute la suite, on suposera donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.1 Processus stochastique et processus usuels

1.1.1 Définition d'un processus

On commence d'abord par rappeler la définition d'un processus stochastique.

Définition 1.1.1. *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires, définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans (E, Σ), notée par $(\xi(t), t \in I)$, où I est un ensemble ordonné quelconque tel que*

$$\xi : \Omega \times I \longrightarrow E,$$

$$(\omega, t) \mapsto \xi(\omega, t).$$

Pour $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $t \rightsquigarrow \xi_t(\omega)$ de I dans E est appelée trajectoire du processus.

Définition 1.1.2. *Nous disons qu'un processus stochastique ξ_t est continue si presque tout $\omega \in \Omega$, ses trajectoires sont continus, i.e,*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega, t \longrightarrow \xi_t(\omega) \quad est\ continue\} = 1.$$

Définition 1.1.3. *Un processus stochastique $(\xi(t), t \in I)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dit séparable, s'il existe une suite dénombrable $T = \{t_i\}$ dense dans I, un sous ensemble N de Ω, avec $\mathbb{P}(N) = 0$ tels que, si $\omega \notin N$, on a*

$$\{\xi(t, \omega) \in F, \forall t \in J\} = \{\xi(t_j, \omega) \in F, \forall t_j \in J\},$$

pour tout sous ensemble ouvert J de I et pour tout ensemble fermé F de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.4. *Deux processus stochastiques $(\xi(t), t \in I)$ et $(\xi^{'}(t), t \in I)$ définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont stochastiquement équivalents si*

$$\mathbb{P}\left\{\xi(t) \neq \xi^{'}(t)\right\} = 0, \quad t \in I.$$

Dans ce cas nous disons que $\xi^{'}(t)$ est une version de $\xi(t)$.

1.1.2 Processus usuels

Avant de définir la notion d'une martingale, on aura besoin des défintions suivantes.

Définition 1.1.5. 1)*Une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ est une famille croissante de sous-tribus vérifiant*

$$\forall s, t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad si \quad s \leq t.$$

Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré.

2) *Un processus $\{X_t, t \in I\}$, est dit adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

3) *On appelle filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^{\xi}, t \geq 0)$ d'un processus stochastique $(\xi(t), t \geq 0)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ la filtration définie par*

$$\mathcal{F}_t^{\xi} = \sigma\{\xi(s), 0 \leq s \leq t\}.$$

4) *Un processus* $(\xi(t), t \geq 0)$ *est dit processus progressivement mesurable si*

$$\xi(.,.) : \mathcal{B}([\alpha, \beta]) \otimes \mathcal{F}_t \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

est mesurable.

Maintenant, nous donnons la définition d'une martingale.

Martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t\geq 0}\}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré.

Définition 1.1.6. *On appelle une martingale tout processus stochastique* $(M_t)_{t\in T}$ *vérifiant*

1. $(M_t)_{t\geq 0}$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable, pour tout* t,
2. $\mathbb{E}(|M_t|) \leq \infty$,
3. $\mathbb{E}(M_s|\mathcal{F}_t) = M_s$, *pour tout* $s \geq t$.

Si $\mathbb{E}\left(M_s|\mathcal{F}_t\right) \leq M_t$, on dit que M_t est une sur-martingale.
Si $\mathbb{E}\left(M_s|\mathcal{F}_t\right) \geq M_t$, on dit que M_t est une sous-martingale.

Processus de Markov

Pour définir la notion d'un processus de Markov, nous aurons besoin d'introduire la notion d'une fonction de transition de Markov.

Définition 1.1.7. *(Fonction de transition de Markov)*
Toute fonction positive $\mathrm{Q}(s, x; t, A)$ *définie sur* $I \times \mathbb{R}^n \times I \times \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$, $(0 \leq s < t < \infty)$ *satisfaisant*

1. $\mathrm{Q}(s, .; t, A)$ *est borélienne,*
2. $\mathrm{Q}(s, .; t, .)$ *est une mesure de probabilité,*
3. Q *vérifie l'équation de Chapman-Kolmogorov*

$$\mathrm{Q}(s, x; t, A) = \int_{R_n} \mathrm{Q}(s, x; u, dy)\mathrm{Q}\left(u, y; t, A\right),\ (s \leq u \leq t)$$

est dite fonction de probabilité de transition ou bien fonction de transition de Markov.

Notons que, si pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, on définit π_x par

$$\pi_x(B) = \begin{cases} 1 & x \in B, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

et $\mathbb{P}_{s,x}$ la probabilité $\mathbb{P}_s$ construite sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^s)$ quand $\pi = \pi_x$ et $\mathbb{E}_{s,x}$ l'espérence associée à $\mathbb{P}_{s,x}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty^0$.

Théorème 1.1.8. *[33] Soit* Q *une probabilité de transition de Markov. Alors pour tout $s \geq 0$ et $\pi(dx)$ une distribution de probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, il existe un processus stochastique $\{X(t), s \leq t < \infty\}$ de dimension n défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que*

$$\mathbb{P}(X(s) \in B) = \pi(B) \tag{1.1}$$

et pour tous $s \leq u \leq t$, et $B \in \mathcal{B}(R^n)$, on a

$$\mathbb{P}(X(t) \in B | \sigma\{X(v), s \leq v \leq u\}) = Q(u, X(u); t, B), \mathbb{P} - p.s, \tag{1.2}$$

alors, on obtient

1. *$(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $\mathcal{F}_t^s = \sigma(X(r), s \leq r \leq t)$,*
2. *Il existe une fonction $X(t, \omega)$ de $[0, +\infty[\times \Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $t \geq s$, $X(t, .)$ soit $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$, il existe une probabilité $\mathbb{P}_{s,x}$ définie sur $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty^0$ telle que*

$$\mathbb{P}_{s,x}(X(s, w) = x) = 1 \tag{1.3}$$

et

$$\mathbb{P}_{s,x}\{X(t+h, w) \in \mathcal{B} | \mathcal{F}_t^s\} = Q(t, X(t, w), t+h, B) \quad \mathbb{P}_{s,x} - p.s., \tag{1.4}$$

où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $t \geq s$, $h \geq 0$.

Définition 1.1.9. *Toute famille $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t^s, X(t), \mathbb{P}_{s,x})$, $s \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant 1), 2), 3) est appelée processus de Markov correspondant à la probabilité de transition Q.*

Remarque 1.1.1. *La relation* (1.4)*, dite propriété de Markov, peut être décrite par*

$$\mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(A|C).\mathbb{P}(B|C),$$

où A représente les événemenets passés, B les événemenets futur et C les événemenets présents, i.e., le futur et le passé sont conditionnellement indépendants étant donné le présent.

Maintenant, nous allons donner la définition d'un processus de diffusion.

Processus de diffusion

Définition 1.1.10. *Un processus de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit processus de diffusion si sa probabilité de transition $p(s,x,t,A)$ satisfait les propriétés suivantes*

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} p(t,x,t+h,dy) = 0.$$

2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, il existe deux fonctions $a(t,x)$et $b(t,x)$ vérifiants*

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} (y-x)p(t,x,t+h,dy) = a(t,x)$$

et

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} (y-x)^2 p(t,x,t+h,dy) = b(t,x),$$

où $a(t,x)$ est appelée fonction de diffusion et $b(t,x)$ est appelée drift.

Temps d'arrêt

Définition 1.1.11. *Une variable aléatoire $\tau : \Omega \to [0,+\infty[$, i.e., un temps aléatoire, est appelé temps d'arrêt (par rapport à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$) si pour tout $t \in I$, on a*

$$\{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Mouvement Brownien

Maintenat, nous allons donner la définition d'un mouvement brownien.

Définition 1.1.12. *Un processus stochastique $(W(t), t \geq 0)$ à valeurs réelles est appelé mouvement brownien s'il vérifie les propriétés suivantes*

1. *les trajectoires $t \longrightarrow W_t(.)$ sont continus $\mathbb{P}-p.s.$,*
2. *$W(0) = 0$,*
3. *Pour tous $0 \leq t_0 \leq .... \leq t_n$, les variable aléatoires $W(t_k) - W(t_{k-1})$ telles que $0 \leq k \leq n$ sont indépendantes.*

4. *Pour tous $0 \leq s \leq t$, on a*

$$\mathbb{E}\left[w\left(t\right)-w\left(s\right)\right]=\left(t-s\right)\mu,$$

$$\mathbb{E}\left[\left(w\left(t\right)-w\left(s\right)\right)^{2}\right]=\left(t-s\right)\sigma^{2},$$

où μ et σ sont des constantes réelles positives avec $\sigma \neq 0$.
μ est appelé le drift et σ^2 est la variance.

Notons que si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, le mouvement brownien est dit standard.

Dans cette partie, nous allons introduire la notion de l'intégrale stochastique qui nous sert à définir par la suite les équations différentielles stochastiques. A cet effet, nous aurons besoin de quelques notions et définitions.

1.2 Intégrale stochastique

Définition 1.2.1. *Une classe de fonction $f : [\alpha, \beta] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ est dite non anticipative relativement à $\mathcal{F}_t, t \in [\alpha, \beta]$, si on a*

1) *f(t) est un processus séparable,*
2) *f(t) est un processus progressivement mesurable, i.e., $(t, w) \longrightarrow f(t, w)$ est mesurable,*
3) *$\forall t \in [\alpha, \beta], f(t)$est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Notons par

$$L^p_W[\alpha,\beta] = \left\{ \begin{array}{ccc} f & \text{non anticipatives : } \mathbb{P}[\int_a^b |f(t)^p|\, dt \leq \infty] = 1, & \text{si} \quad 1 \leq p \leq \infty, \\ & \mathbb{P}(supess|f(t)| \leq \infty)_{\alpha \leq t \leq \beta} = 1 & \text{si } p = \infty. \end{array} \right. \tag{1.5}$$

$$M^p_W[\alpha,\beta] = \left\{ \begin{array}{ll} f \in L^p_W[\alpha,\beta] : \mathbb{E}\left[\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right] \leq \infty, & si\ 1 \leq p \leq \infty, \\ \mathbb{E}(supess\,|f(t)|_{t\alpha \leq t \leq \beta} \leq \infty & si\ p = \infty. \end{array} \right. \tag{1.6}$$

Pour introduire la notion de l'intégrale stochastique, on commence d'abord par le définir pour toute fonction étagées.

1.2.1 Intégrale stochastique pour les fonctions étagées

Définition 1.2.2. *Un processus $f(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$ est dit processus étagé (élémentaire) s'il existe une partition $\alpha = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_r = \beta$ dans $[\alpha,\beta]$ telle que*

$$f(t) = f(t_i) \text{ pour } t_i \leq t \leq t_{i+1},\ i = 0, ..., r-1.$$

Définition 1.2.3. *Soient $f \in L^2_W[\alpha,\beta]$ une fonction étagée et $W(t)$ un mouvement brownien définie sur l'intervalle $I = [\alpha,\beta]$. La variable aléatoire*

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(W(t_k) - W(t_k))$$

que l'on note

$$\int_I f(t)\, dW(t)$$

dite intégrale stochastique ou intégrale d'Itô pour la fonction $f \in L^2_W[\alpha,\beta]$.

1.2.2 Convergence

Pour définir l'intégrale stochastique pour toute fonction $f \in L^2_W[\alpha,\beta]$, on a besoin des résultats de la convergence suivants.

Lemme 1.2.1. *Soit $f \in L^2_W[\alpha,\beta]$. Il existe une suite de fonctions étagées $f_n \in L^2_w[\alpha,\beta]$ telle que*

$$\int_{[\alpha,\beta]} |f_n(t) - f(t)|^2\, dt \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Lemme 1.2.2. *Pour toute fonction élémentaire $f \in L^2_W[\alpha,\beta]$ et pour tous $\varepsilon > 0$ et $N > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\left\{\left|\int_{[\alpha,\beta]} f(t)\, dw(t)\right|^2 > \varepsilon\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\int_{[\alpha,\beta]} f^2(t)\, dt > N\right\} + \tfrac{N}{\varepsilon^2}.$$

Les lemmes suivants nous amènent à la définition de l'intégrale stochastique pour tout $f \in L^2_w[\alpha,\beta]$.

1.2.3 Intégrale stochastique pour toutes fonctions

Définition 1.2.4. *L'intégrale stochastique de* $f \in L^2_W[\alpha,\beta]$ *est définie comme la limite en probabilité de*

$$\int_{[\alpha,\beta]} f_n(t)dW(t)$$

où f_n *est une suite de fonctions étagées dans* $L^2_W[\alpha,\beta]$ *,i.e.,*

$$\int_{[\alpha,\beta]} f_n(t)\,dW(t) = \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)(W(t_k)-W(t_k)), \quad \mathbb{P}-p.s.$$

1.2.4 Propriétés

1. Linéarité :
   Soient $f_1, f_2 \in L^2_W[\alpha,\beta]$ et λ_1, λ_2 deux nombres réels quelconques. Alors, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in L^2_W$ et on a
   $$\int_{[\alpha,\beta]} (\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t))dW(t) = \lambda_1 \int_{[\alpha,\beta]} f_1(t)dW(t)+\lambda_2 \int_{[\alpha,\beta]} f_2(t)dW(t).$$
2. Isométrie :
   Soit $f \in M^2_W[\alpha,\beta]$, alors
   $$\mathbb{E}\left|\int_{[\alpha,\beta]} f(t)dW(t)\right|^2 = \mathbb{E}\int_{[\alpha,\beta]} f^2(t)dt.$$
3. Soit $f \in M^2_W[\alpha,\beta]$ alors
   $$\mathbb{E}\int_{[\alpha,\beta]} f(t)dW(t) = 0.$$
4. Soit $f \in M^2_W[\alpha,\beta]$, alors on a
   $$\mathbb{E}\left[\int_{[\alpha,\beta]} f(t)dW(t)|\mathcal{F}_\alpha\right] = 0, \quad \mathbb{P}-p.s.$$
   et
   $$\mathbb{E}\left[\left|\int_{[\alpha,\beta]} f(t)dW(t)\right|^2 |\mathcal{F}_\alpha\right] = \int_\alpha^\beta \mathbb{E}|f^2(t)|dt, \quad \mathbb{P}-p.s.$$

1.3 Différentielles stochastiques

Soit $(\xi(t), t \in [0,T])$ un processus stochastique réel tel que, pour tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, on a

$$\xi(t_1) - \xi(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t)\, dW(t),$$

où $a \in L_w^1[0,T]$ et $b \in L_w^2[0,T]$.

Nous allons définir d'abord la formule d'Itô qui nous permet d'introduire la notion des différentielles stochastiques. Il est un outil particuliérement important dans l'étude des processus stochastiques.

1.3.1 Formule d'Itô

La formule d'Itô est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *[26] Soient $\xi(t)$ un processus tel que $d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$ et le processus stochastique $f(t, \xi(t))$ ayant les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$ continues.Alors le processus admet une différentielle stochastique donnné par*

$$df(t,\xi(t)) = \big[\frac{\partial f}{\partial t}(t,\xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial \xi}(t,\xi(t))a(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}b^2(t)\big]dt$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t))b(t)dW(t). \tag{1.7}$$

Ce résultat se généralise dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.3.2. *[26] Soient les processus $\xi_1(t), ...\xi_n(t)$ admettant tous des différentielles stochastiques données par*

$$d\xi_i(t) = a_i(t)\, dt + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\, dW_j(t), \quad i = 1, .., m$$

où $a = (a_1, ..., a_m) \in L_w^1[0,T]$, $b = b_{ij} \in L_w^2[0,T]$ et $W(t))$ est un mouvement brownien en dimension n.
Si $(t, x_1, ..., x_n)$ est une fonction continue dans $[0, \infty[\times \mathbb{R}^{\ltimes}$ admettant aussi des dérivées continus $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, ..., m$ alors, le processus $\eta(t) = u(t, \xi_1(t), .., \xi_m(t))$ admet aussi une différentielle stochastique donnée par

$$d\eta(t) = [\frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi(t)) + \sum_{K=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, \xi(t)) a_i(t)$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{K=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, \xi(t)) b_{ik}(t) b_{jk}(t)] dt$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, \xi(t)) b_{ik}(t) dW_k(t). \tag{1.8}$$

Définition 1.3.3. *On dit que $\xi\,(t)$ admet une différentielle stochastique $d\xi$ si elle s'écrit sous la forme*

$$d\xi\,(t) = a\,(t)\,dt + b\,(t)\,dW\,(t)\,.$$

1.4 Équations différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques (EDS) sont des équations différentielles dans les quelles une perturbation stochastique (un terme aléatoire) est introduite. Elle est représentée par un mouvement brownien. Elles permettent de prendre en compte, dans la description des phénomènes naturels, les perturbations et les EDS nous permettent de modéliser les trajectoires aléatoires.

Définition 1.4.1. *On appelle équation différentielle stochastique toute équation définie sur $\mathbb{R}^d$ de drift b et de diffusion σ donnée par*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad \forall t \in [0, T]\,, \\ X_0 = \xi, \end{cases}$$

où T est un reel strictement positif, $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : \times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ sont deux fonctions boreliennes, $(W_t)_{t\geq 0}$ un movement brownien standard sur $\mathbb{R}^d$ défini sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_{t\geq 0})\,, \mathbb{P})$ et ξ est une variable aléatoire quelconque indépendante du movement brownien appartient $\mathbb{R}^n$.

Si la matrice de diffusion est nulle, une EDS devient une équation differentielle ordinaire (EDO).

1.4.1 Existence et unicité de la solution

Pour l'existence et l'unicité de la solution, on a les résultats suivants.

Théorème 1.4.2. *[22] Supposons que*

1. *a(t,x) et b(t,x) sont mesurables dans* $[0,T] \times \mathbb{R}$.
2. $|a(t,x) - a(t,y)| \leq k_1 |x-y|, |b(t,x) - b(t,y)| \leq k_1 |x-y|$.
3. $|a(t,x))| \leq K_2 (1 + |x|), |b(t,x)| \leq K_2 (1 + |x|)$, *(*$k_1$ *et* k_2 *des constantes quelconques).*

Si ξ_0 *est un vecteur aléatoire en dimension* n *indépendant de* $\sigma(W(t), 0 \leq t \leq T)$ *tel que* $\mathbb{E}|\xi|^2 \leq \infty$ *alors, il existe une solution unique dans* $\mathcal{M}_w^2$.

L'unicité est comprise au sens des trajectoires, i.e., si $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ sont deux solutions, alors

$$\mathbb{P}\{\xi_1(t) = \xi_2(t), t \in [0,T]\} = 1.$$

Théorème 1.4.3. *[22] Supposons que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. De plus, soient* a *et* b *deux fonctions continues dans* $[0,+\infty[\times \mathbb{R}^n$ *alors, la solution de l'équation est un processus de diffusion de drift* $a(.,.)$ *et de matrice de diffusion*

$$\sigma(t,x) = b(t,x) b^t(t,x), \left(\sigma_{ij}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t,x) b_{jk}(t,x) \right).$$

Il existe deux types de solution d'une EDS, les solutions fortes et les solutions faibles.

Solution fortes et faibles

On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + b(t,\xi(t))d(t), \quad t \in [0,T], \\ \xi(0) = \xi_0, \end{cases} \tag{1.9}$$

telle que

1. $\mathbb{P}[\xi(0) = \xi_0] = 1$,
2. $\mathbb{P}\left[\int_0^t \left(|a(s,\xi(s))| + |b(s,\xi(s))|^2\right) ds < \infty\right] = 1$,
3. $\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s,\xi(s))dt + \int_0^t b(s,\xi(s))dW(s), \mathbb{P} - p.s.$,

i.e, l'équation (1.9) a lieu, $\mathbb{P} - p.s$ pour tout $t \in [0,T]$.

Solution forte

Commençons d'abord par définir les solutions fortes.

Définition 1.4.4. *On dit que l'équation diffréntielle stochastique* (1.9) *admet une solution forte, si pour tout espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *et pour tout mouvement brownien* $(W(t)_{t\geq 0})$, *il existe un processus continu* $\xi = (\xi(t)_{t\geq 0})$ *tel que les propriétés* 1, 2 *et* 3 *soient vérifiées.*

Solution faible

Maintenant nous allons définir les solutions faibles.

Définition 1.4.5. *On dit que l'équation différentielle stochastique* (1.9) *admet une solution faible (ou en loi), si on peut trouver un espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, *un mouvement brownien* $(W(t)_{t\geq 0})$ *et un processus continu* $\xi = (\xi(t)_{t\geq 0})$ *tels que les propriétés* 1, 2 *et* 3 *soient vérifiées. Donc une solution faible est une collection d'objets*

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}, \omega(t)_{t\geq 0}, \xi(t)_{t\geq 0}).$$

Maintenant, nous allons donner un résultat trés important au calcul stochastique. Ce résultat permet de chercher une solution faible pour les EDS, c'est le théorème de Girsanov.

1.4.2 Théorème de Girsanov

Théorème 1.4.6. *[22] Soit* $W(t)$ *un mouvement brownien de dimension* n *dans* $[0, T]$ *défini dans l'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et soit* $\Phi = (\Phi_1, .., \Phi_n)$ *une fonction dans* $\mathrm{L}^2_w[0, T]$. *Définissons*

1. $\zeta(\Phi) = \int_s^t \Phi(u) d\omega(u) - \frac{1}{2} \int_s^t |\Phi(u)|^2 \, du$,
2. $\tilde{W}(t) = W(t) - \int_0^t \Phi(s) ds$,
3. $d\tilde{\mathbb{P}}(\omega) = \exp[\xi(\Phi)] d\mathbb{P}(\omega)$.

Si

$$\tilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1,$$

alors $\tilde{\omega}(t), 0 \leq t \leq T$ *est un mouvement brownien dans* $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$.

Chapitre 2

Problème d'optimisation et Programmation dynamique

Dans ce chapitre, nous nous intérressons aux problèmes d'optimisation stochastiques. Plus précisemment, les équations différentielles stochastiques contrôlées où nous ajoutons un contrôle stochastique. Nous allons résoudre ces problèmes en utilisant la méthode de la programmation dynamique stochastique. Mais tout d'abord, il est utile de commencer par étudier les problèmes déterministes et rappeler la méthode de la programmation dynamique déterministe.

2.1 Problèmes d'optimisation déterministes

Nous allons commencer par étudier les problèmes d'optimisation déterministes.

2.1.1 Généralités

Soit M un espace métrique avec $T > 0$. Soient u une fonction mesurable de $[0, T]$ à valeurs dans M, $f \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n \times M; \mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)) \quad \text{sur } [0, T] \tag{2.1}$$

$$y(0) = x, \tag{2.2}$$

ou de maniére équivalente sa forme intégrale

$$y(t) = x + \int_0^t f(s, y(s), u(s))\, ds. \tag{2.3}$$

Définition 2.1.1. *L'équation* (2.1) *est appelée équation différentielle contrôlée où la variable u est la variable de contrôle qui influence la dynamique de la variable d'état y.*

Sous les conditions classiques de Lipschitz et de croissance contrôlée sur la fonction f, nous supposons qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall (t, x, y, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times M$, vérifiant

$$|f(t, x, u) - f(t, y, u)| \leq C\,|x - y| \text{ et } |f(t, x, u)| \leq C(1 + |x|),$$

Ainsi, on définit usuellement une fonctionnelle de côut prenant en compte toute la trajectoire du système jusqu'à un horizon T et un côut terminal,

$$J(u) = \int_0^T L(t, y_u, u(t))\, dt + g(y_u(T)), \tag{2.4}$$

où les fonctions L et g sont données et appelées respectivement fonction de côut courant et fonction de côut terminal.
Etant donné $L \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n \times M; \mathbb{R}^n)$ et $g \in C^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. L'équation (2.1) admet une solution unique définie sur tout $[0, T]$ que nous noterons y_u.

2.1.2 Problème de minimisation

L'objectif est de déterminer quel est le "meilleur" contrôle pour résoudre ce systéme, i.e., minimiser la fonctionnelle de côut. Plus précisemment, nous considérons le problème de contrôle optimal ou de commande optimale suivant

$$\inf_u J(u) = \inf_u \int_0^T L(t, y_u, u(t))\, dt + g(y_u(T)). \tag{2.5}$$

La variable d'état y_u étant reliée à la variable de commande u par la dynamique (2.1) et la condition initiale x étant donnée.
Le problème est alors de trouver la commande u^* qui minimise la fonctionnelle J sur tout les contrôles u. Un tel contrôle u^* est appelé optimal.
Pour résoudre ce type de prolèmes, nous utilisons la méthode de la programmation dynamique déterministe.

2.2 Programmation dynamique déterministe

La méthode de la programmation dynamique est une méthode exacte de résolution des problèmes de contrôle optimal. Le principe de cette méthode est un principe fondamental pour la théorie du contrôle optimal.

2.2.1 Principe de la programmation dynamique déterministe

Si un contrôle est optimal entre t et T pour la condition initiale x, alors il est aussi optimal entre $t+h$ et T, avec la condition initiale $x(t+h)$, $h>0$.
En s'appuyant sur le principe "philosophique" raisonnable, cela veut dire qu'il vaut mieux être intelligent depuis le début que d'être stupide pendant un certain temps et intelligent ensuite.
En effet, avant d'appliquer le principe de la programmation dynamique déterministe, on définit d'abord la fonction valeur associée, i.e., définir la valeur de la fonction objective lorsque le système se trouve dans l'état x à l'instant t sous la forme

$$v(t,x) = \inf\left\{\int_0^T L(s, y_u, u(s))\, ds + g(y_u(T)) : y_u(s) = x\right\}. \tag{2.6}$$

On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonctionnelle v vérifie la condition aux limites

$$v(T,x) = g(x). \tag{2.7}$$

Si on applique le principe de la programmation dynamique pour le problème (2.5) sur la fonction valeur v entre deux instants t et $t+h$, alors on obtient

$$v(t,x) = \inf\left\{\int_t^{t+h} L(s, y_u, u(s))\, ds + v(t+h, x(t+h))\right\}. \tag{2.8}$$

Le principe de la programmation dynamique nous amène à définir l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

2.2.2 Équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

En étudiant le comportement de la fonction valeur entre deux instants proches, i.e., en faisant tendre h vers 0 dans la relation ci-dessus de la programmation dynamique, on obtient que la fonction $v(t,x)$ satisfait une équation aux dérivées partielles (EDP) de premier ordre appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB), donnée par

$$\partial_t v(t,x) + H(t,x,\nabla_x v(t,x)) = 0, \tag{2.9}$$

où H est appelé le Hamiltonien, donnè ci-dessous. La résolution de cette équation nous permet de définir le contrôle optimal de ce problème. Ainsi, si on ajoute une variable adjointe qui peut s'interpréter comme un multiplicateur $p \in \mathbb{R}^n$ associé à (2.1) et l'on définit le pré-Hamiltonien $\mathcal{H}$ $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{H}(t,x,,u,p) = L(t,x,u) + p.f(t,x,u), \tag{2.10}$$

alors, on peut définire ensuite le Hamiltonien $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$H(t,x,p) = \inf\{L(t,x,u) + p.f(t,x,u)\} = \inf \mathcal{H}(t,x,u,p), \quad u \in v. \tag{2.11}$$

Ainsi, on résout l'EDO

$$\dot{y}(t) = f(t,y(t),u^*(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.12}$$

pour la dynamique de la variable d'état associée à cette commande, i.e., pour la commande optimale u^*. Finallement, on définit le contrôle

$$u^*(t) = u^*(t,y(t)),$$

qui est un contrôle optimal pour (2.4).

2.2.3 Contrôle feedback

Nous allons voir que si l'on connait une solution du problème aux limites pour l'équation d'HJB

$$\begin{cases} \partial_t W(t,x) + H(t,x,\nabla_x W(t,x)) = 0, & sur\ [0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ w(T,x) = g(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.13}$$

alors on peut en déduire une commande optimale feedback. Pour cela, nous aurons besoin de définir la notion d'une commande feedback.

Définition 2.2.1. *Une commande feedback est une fonction qui ne dépend pas seulement du temps mais aussi de l'état du système, c'est donc une fonction U de $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'espace des contrôles M.*

Pour un Contrôle feedback $U(.,.)$, la dynamique de la variable d'état est régie par l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), U(t, y(t))), y(0) = x. \tag{2.14}$$

Notons qu'il est naturel de s'intéresser à des contrôles feedback, i.e., dépendant de l'état du système.
Donnons maintenant la définition du contrôle feedback optimal.

Définition 2.2.2. *On dira que le contrôle feedback $U(.,.)$ est optimal pour* (2.4) *si le contrôle $u(t) = U(t, y(t))$ est optimal avec $y(.)$ solution du problème de Cauchy* (2.13).

2.3 Problème d'optimisation stochastique

Notre objectif est de définir le contrôle optimal d'une classe de processus de Markov ξ. On note par Σ l'espace d'état.

2.3.1 Généralités

On considère un modéle de contrôle où l'état du système est gouverné par une équation différentielle stochastique (EDS), donnée par

$$\begin{cases} d\xi(t) = f(t, \xi(t), u(t))\, dt + \sigma(t, \xi(t), u(t))\, dW(t), \quad t \geq s, \\ \xi(0) = \xi_0, \end{cases} \tag{2.15}$$

où $\xi(t)$ est un processus stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ défini sur un système usuel $\left(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P}, w(t)\right)$, ξ_0 est une variable aléatoire telle que

$$\mathbb{E}|\xi_0|^2 < \infty$$

et $u(t)$ est la variable du contrôle appliqué définit à valeurs dans un ensemble U.
Soient T_0 et T deux nombres fixés avec $T_0 < T$, $\mathcal{F}_0 = [T_0, T]$, $Q = (T_0, T) \times \mathbb{R}^n$ et $C^j(D)$ est la classe des fonctions telle que les dérivées partielles sont d'ordre inférieur ou égal a j existent et sont continues dans D.
De plus, supposons que les fonctions $f(t, x, u)$ et $\sigma(t, x, u)$ sont de classe $C^1\left(\bar{Q} \times U\right)$ et vérifient

$$\begin{array}{ll} |f(t,0,0)| \leq C, & |\sigma(t,0,0)| \leq C, \\ |f_x| + |f_u| \leq C & |\sigma_x| + |\sigma_u| \leq C, \end{array} \tag{2.16}$$

où C est une constante positive.
A l'instant t, on applique un contrôle feedback u que l'on note $u(t)$, i.e.,

$$u(t) = u(t, \xi(t)).$$

Notons que par la suite, pour toute fonction $g(t, x, u)$, on utilise la notation

$$g^u(t, x) = g(t, x, u(t, x)).$$

Par conséquent, l'équation (1.14) s'écrit sous la forme

$$d\xi(t) = f^u(t, \xi(t))\, dt + \sigma^u(t, \xi(t))\, dW(t), \quad t \geq s, \tag{2.17}$$

i.e., les coéfficients f^u et σ^u sont dépendants du contrôle u.
Aussi, notons par v la classe des fonctions de contrôles feedback admisibles. Cette notion est donnée dans la définition suivante

Définition 2.3.1. *Un contrôle feedback u est dit admissible s'il est une fonction borélienne définie sur $[T_0, T] \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans U telle que*

1. *$\forall (s, y) \in [T_0, T] \times \mathbb{R}^n$, il existe un mouvement brownien tel que l'EDS (2.16) admet une solution ξ unique en loi.*
2. *$\forall k > 0, \mathbb{E}_{sy} |\xi(t)|^k$ est bornée pour $s \leq t \leq T$ et on a*

$$\mathbb{E}_{sy} \int_s^T |u(t)|^k\, dt < \infty.$$

Notons que l'équation (2.14) peut s'écrire sous la forme intégrale

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t f(s, \xi(s), u(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s), u(s))\, dW(s) \tag{2.18}$$

et pour que l'intégrale stochastique ait un sens, nous allons supposer que que les contrôle u sont progressivement mesurables.
Ensuite, en faisant varier l'instant initial et l'état initial, alors on obtient une famille d'EDS, donnée par

$$\begin{cases} d\xi(t) = f(t, \xi(t), u(t))\, dt + \sigma(t, \xi(t), u(t))\, dW(t), \\ \xi(s) = y. \end{cases} \tag{2.19}$$

Supposons qu'il existe $\xi_{sy}^u(t)$ une solution de l'équation (2.19) qui est un processus de Markov, de probabilité de transition de Markov notée $P^u(s, y, t, B)$.
On associe à la fonction P^u les opérateurs $S_{s,t}^u$ et $\mathcal{A}^u(t)$ et l'on suppose que

$$[A^u(s)\Phi](y) = [\mathcal{A}^\nu(s)\Phi](y), \quad \text{quand} \quad \nu = u(s, y),$$

alors l'opérateur $\mathcal{A}^{\nu}(s)$ prend la forme

$$\mathcal{A}^{v}(s) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(s,y,v)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i,j=1}^{n} f_i(s,y,v)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

ou

$$\mathcal{A}^{u}(s) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{u}(s,y)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i,j=1}^{n} f_i^{u}(s,y)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

où $a = (a_{ij})$ est une matrice symétrique définie par $a = \sigma\acute{\sigma}$
Nous considérons les fonctions L et Ψ satisfaisant

1. $L : [T_0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues,
2. $|L(t,x,u)| \leq C(1+|x|+|u|)^k$, où k est une constante positive,
3. $|\Psi(x)| \leq C(1+|x|)^k$, C est une constante positive.

2.3.2 Problème de minimisation

L'objectif consiste à trouver un contrôle feedback $u^* \in \vartheta$ qui minimise la fonctionnelle de coût

$$J(s,y,u) = \mathbb{E}_{s,y}^{u}\left\{\int_s^T L[t,\xi(t);u(t)]\,dt + \Psi[\xi(t)]\right\}.$$

Pour se faire, on introduit la fonction valeur

$$W^0(s,y) = \inf_u J(s,y,u).$$

Définition 2.3.2. *On dit que u^* est un contrôle optimal si il vérifie*

$$W^0(s,y) = J(s,y,u^*), \forall (s,y) \in [T_0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser, comme dans le cas déterministe, la méthode de la programmation dynamique stochastique.

2.4 Programmation dynamique stochastique

Nous allons commencer par donner le principe de la programmation dynamique stochastique.

2.4.1 Principe de la programmation dynamique stochastique

Comme dans le cas déterministe, la méthode de la programmation dynamique résoud aussi les problèmes de contrôle optimal stochastique dans le contexte de contrôle des processus de diffusion et plus généralement des processus de Markov. L'idée intuitive du principe de la programmation dynamique stochastique est qu'un contrôle optimal u^* sur $[s,T]$ peut être recollé en deux contrôles optimaux, l'un sur $[s,s+h]$ et l'autre sur $[s+h,T]$, il est exprimé par

$$W^0(s,y) = \inf \mathbb{E}^u_{s,y} \int_s^{s+h} L[r,\xi(r);u(r)]\,dr \qquad (2.20)$$

$$+\mathbb{E}^u_{s,y} W^0(s+h,\xi(s+h)),\, u \in U_{[s,s+h]}.$$

L'application du principe de la programmation dynamique nous conduit à d'éfinir l'équation d'HJB.

2.4.2 Équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

L'Équation d'HJB est la version infinitésimale du principe de la programmation dynamique

Proposition 2.4.1. *Supposons que W verifie $W^0 \in C^2([T_0,T]\times\mathbb{R}^n)$ et $\nabla_y W^0(t,\xi(t),u(.))\,\sigma(t,\xi(t)) \in M^2_W[T_0,T]$, alors l'équation d'HJB s'ecrit sous la forme*

$$\frac{\partial W^0(s,y)}{\partial s} = H^*\left(s,y,\nabla_y W(s,y),\nabla_y.\nabla_y W^0(s,y)\right)$$

ou

$$H^*(s,y,u,p) = \sup_{v\in u}\left[-L(s,y,u) - F(s,y,u).p - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(s,y,u).\bar{R}_{ij}\right].$$

Démonstration. Supposons d'abord que

$$W^0(s,y) = \inf_u J(s,y,u).$$

Ensuite, comme on a

$$\mathbb{E}^u_{s,y}\left\{\int_s^t L[t,\xi(t);u(t)]\,dt + \Psi[\xi(T)]\right\} = \mathbb{E}^u_{s,y}\Bigg(\int_s^{s+h} L[t,\xi(t);u(t)]\,dt$$

$$+\mathbb{E}^u_{s+h,\xi(s+h)} \int_{s+h}^{T} L\left[t,\xi\left(t\right);\tilde{u}\left(t\right)\right]dt + \Psi\left[\xi\left(T\right)\right]\Bigg), \tilde{u} \in U,$$

alors on a

$$W^0\left(s,y\right) = \inf_{u\in U[s,s+h]} \left\{\mathbb{E}^u_{s,y} \int_s^{s+h} L\left[t,\xi\left(t\right);u\left(t\right)\right]dt\right\}$$

$$+\mathbb{E}^u_{s,y} W^0\left(s+h,\xi\left(s+h,u\left(.\right)\right)\right), \tag{2.21}$$

qui, si on divise par h et on le fait tendre vers 0^+, i.e.,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \inf_{u\in U[s,s+h]} \left\{\mathbb{E}^u_{s,y} \int_s^{s+h} L\left[t,\xi\left(t\right);u\left(t\right)\right]dt\right\},$$

on obtient

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\mathbb{E}^u_{s,y}\left\{W^0\left(s+h,\xi\left(s+h\right),u\left(.\right)\right) - W^0\left(s,y\right)\right\}. \tag{2.22}$$

Supposons que $W^0 \in C^2\left(\left[T_0,T\right]\times\mathbb{R}^n\right)$. Si on applique la formule d'Itô à $W^0\left(s+h,\xi\left(s+h,u\left(.\right)\right)\right) - W^0\left(s,y\right)$, on trouve

$$W^0\left(s+h,\xi\left(s+h,u\left(.\right)\right)\right) - W^0\left(s,y\right)$$

$$= \int_s^{s+h} \frac{\partial W^0\left(t,\xi\left(t\right)\right)}{\partial t}dt + \int_s^{s+h} \nabla_y W^0\left(t,\xi\left(t\right),u\left(.\right)\right)d\xi\left(t\right) \tag{2.23}$$

$$+\frac{1}{2}\int_s^{s+h}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(t,\xi\left(t\right),u\left(.\right)\right)\frac{\partial^2 W^0\left(t,\xi\left(t\right)\right)}{\partial y_i \partial y_j}dt$$

Comme $\xi^u_{s,y}\left(t\right)$ est la solution de (2.18) et si l'on suppose que

$$\nabla_y W^0\left(t,\xi\left(t\right),u\left(.\right)\right)\sigma\left(t,\xi\left(t\right)\right) \in M^2_W\left[T_0,T\right],$$

alors on obtient

$$\mathbb{E}^u_{s,y}\int_s^{s+h}\nabla_y W^0\left(t,\xi\left(t\right),u\left(.\right)\right)\sigma\left(t,\xi\left(t\right)\right)dw\left(t\right) = 0.$$

Puisque on a

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\frac{\partial W^0\left(t,\xi\left(t\right)\right)}{\partial t}dt = \frac{\partial W^0\left(s,y\right)}{\partial s},$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\nabla_y W^0\left(t,\xi\left(t\right),u\left(.\right)\right)d\xi\left(t\right)=f\left(s,y,u\right)\nabla_y W^0\left(s,y\right),$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(t,\xi\left(t\right),u\left(.\right)\right)\frac{\partial^2 W^0\left(t,\xi\left(t\right)\right)}{\partial y_i\partial y_j}dt=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(s,y,u\right)\frac{\partial^2 W^0\left(s,y\right)}{\partial y_i\partial y_j},$$

où $a_{ij}\left(s,y\right)=\sum_{k=1}^{m}\sigma_{ik}\left(s,y,u\right)\sigma_{jk}\left(s,y,u\right)$, alors le membre de droite de (2.21) devient

$$\frac{\partial W^0\left(s,y\right)}{\partial s}+f\left(s,y,u\right)\nabla_y W^0\left(s,y\right)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(s,y,u\right)\frac{\partial^2 W^0\left(s,y\right)}{\partial y_i\partial y_j}. \quad (2.24)$$

Ainsi, l'égalité (2.21) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\partial W^0\left(s,y\right)\partial s=\sup\nolimits_{v\in u}\Bigg[&-L\left(s,y,u\right)-f\left(s,y,u\right)\nabla_y W^0\left(s,y\right)\\&-\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(s,y,u\right)\tfrac{\partial^2 W^0\left(s,y\right)}{\partial y_i\partial y_j}\Bigg].\end{aligned} \quad (2.25)$$

Si l'on pose que

$$H^*\left(s,y,u,p\right)=\sup_{v\in u}\left[-L\left(s,y,u\right)-F\left(s,y,u\right).p-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(s,y,u\right).\bar{R}_{ij}\right],$$

avec $p=\nabla_y W^0\left(s,y\right)$ et $\bar{R}_{ij}=\frac{\partial^2 W^0\left(s,y\right)}{\partial y_i\partial y_j}$, alors l'équation s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial W^0\left(s,y\right)}{\partial s}=H^*\left(s,y,\nabla_y W\left(s,y\right),\nabla_y.\nabla_y W^0\left(s,y\right)\right).$$

Cette équation est l'équation de la programmation dynamique ou l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), avec la condition terminale

$$W^0\left(T,y\right)=\Psi\left(y\right).$$

Notons que l'équation d'HJB s'écrit également sous la forme

$$0=W_s^0+\min_{v\in U}\left[\mathcal{A}^v\left(s\right)W^0+L\left(s,y,v\right)\right]. \quad (2.26)$$

□

2.4.3 Théorème de vérification

Étant donné une solution régulière de l'équation d'HJB, qui sous des conditions suffisantes coïncide avec la fonction valeur. Ce résultat est appelé théorème de vérification et permet aussi d'obtenir un contrôle optimal. Nous donnons ici une version assez générale contenant ce contexte.

Théorème 2.4.2. *[22] Soit* $W \in C^{1,2}\left([T_0, T[\times \mathbb{R}^n\right) \cap C^0\left([T_0, T] \times \mathbb{R}^n\right)$ *à croissance quadratique, i.e., il existe une constante* C *telle que*

$$|W(s,y)| \leq C\left(1+|y|^2\right), \forall (s,y) \in [T_0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Supposons que $W(s,y)$ *est une solution de l'équation de la programmation dynamique*

$$\begin{cases} 0 = W_s + \min\limits_{v \in U}\left[\mathcal{A}^v(s) W + L(s,y,u)\right] \quad ,(s,y) \in [T_0, T[\times \mathbb{R}^n, \\ W(T,y) = \Psi(y), \end{cases} \tag{2.27}$$

alors

1. *Pour tout contrôle admissible* u*, on a*

$$W(s,y) \leq J(s,y,u), \forall (s,y) \in [T_0, T] \times \mathbb{R}^n. \tag{2.28}$$

2. *Si* u^* *est un contrôle admissible tel que*

$$\mathcal{A}^{u^*} W(s) - L^{u^*}(s,y) = \min_{v \in U}\left[\mathcal{A}^v(s) W + L(s,y,u)\right], \quad \forall (s,y) \in [T_0, T[\times \mathbb{R}^n$$

alors on a

$$W(s,y) = J(s,y,u^*) \tag{2.29}$$

et u^* *est un contrôle optimal.*

Démonstration. (i) Par hypothèse, on a $W \in C^{1,2}([T_0, T[\times \mathbb{R}^n)$.
Soient $(t,x) \in [T_0, T[\times \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}(t,x), s \in [t, T[$ et τ un temps d'arrêt à valeurs dans $[t, +\infty[$. Appliquons la formule d'Itô, on trouve

$$W(s \wedge \tau, X^{t,x}_{s \wedge \tau}) = W(t,x) + \int_t^{s \wedge \tau} (\frac{\partial W}{\partial t}(u, X^{t,x}_u)$$

$$+\mathcal{L}^{\alpha_u} W(u, X^{t,x}_u))du + \int_t^{s \wedge \tau} D_x W(u, X^{t,x}_u)' \sigma(X^{t,x}_u, \alpha_u) dW_u.$$

Ensuite, en choisissant

$$\tau = \tau_n = \inf \left\{ s \geq t : \int_t^s |D_x W(u, X_u^{t,x})' + \sigma(X_u^{t,x}, \alpha_u)|^2 du \geq n \right\},$$

on remarque que $\tau_n \nearrow +\infty$ quand n tend vers l'infini. Ainsi, le processus arrêté

$$\left\{ \int_t^{s\wedge\tau_n} D_x W(u, X_u^{t,x})' \sigma(X_u^{t,x}, \alpha_u) dW_u, t \leq s \leq T \right\}$$

est une martingale. Si on applique l'espérance mathématique, i.e.,

$$\mathbb{E}[W(s\wedge\tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x})] = W(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} \frac{\partial W}{\partial t}(u, X_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\alpha_u} W(u, X_u^{t,x}) du \right],$$

on trouve

$$\mathbb{E}[W(s \wedge \tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x})] \geq W(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^{s\wedge\tau_n} f(X_u^{t,x}, \alpha_u) d_u \right], \forall \alpha \in \mathcal{A}(t,x). \tag{2.30}$$

Comme on a

$$\left| \int_t^{s\wedge\tau_n} f(X_u^{t,x}, \alpha_u) du \right| \leq \int_t^T |f(X_u^{t,x}, \alpha_u)| du$$

et comme, d'aprés la condition d'intégrablité sur $\mathcal{A}(t,x)$, alors le terme de droite est intégrable. De plus, comme W est à croissance quadratique, on a

$$\left| W(s \wedge \tau_n, X_{s\wedge\tau_n}^{t,x}) \right| \leq C \left(1 + \sup_{s\in[t,T]} |X_s^{t,x}|^2 \right).$$

Ainsi, comme le terme de droite est intégrable, en appliquant le théorème de convergence dominée et en faisant tendre n vers l'infinie dans (2.29), on trouve

$$\mathbb{E}[(s, X_s^{t,x})] \geq W(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_s^t f(X_u^{t,x}, \alpha_u) du \right], \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}(t,x).$$

Comme W est continue sur $[T_0, T] \times \mathbb{R}^n$, en faisant tendre s vers T, alors on a par le théorème de convergence dominée

$$\mathbb{E}[g(X_T^{t,x})] \geq W(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^T f(X_u^{t,x}, \alpha_u) \right], \forall \alpha \in \mathcal{A}(t,x)$$

et donc $W(t,x) \leq v(t,x), \forall (t,x) \in [T_0, T] \times \mathbb{R}^n$.

(ii) Appliquons la formule d'Itô à $W(u, \hat{X}_u^{t,x})$ entre $t \in [T_0, T[$ et $s \in [t, T[$ et après avoir localisé avec τ_n, on trouve

$$\mathbb{E}[W(s, \hat{X}_s^{t,x})] = W(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^s \frac{\partial W}{\partial t}(u, \hat{X}_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(u,(\hat{X}_u^{t,x})}W(u, \hat{X}_u^{t,x})du\right].$$

Or par définition de $\hat{\alpha}(t,x)$, on trouve

$$-\frac{\partial W}{\partial t} - \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(t,x)}W(t,x) - f(t,x,\hat{\alpha}(t,x)) = 0,$$

d'où

$$\mathbb{E}\left[W(s, \hat{X}_s^{t,x})\right] = W(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^s f(\hat{X}_u^{t,x}, \hat{\alpha}(u, \hat{X}_u^{t,x}))du\right].$$

Ainsi, en faisant tendre s vers T, on obtient

$$\begin{aligned} W(t,x) &= \mathbb{E}\left[\int_t^T f(\hat{X}_u^{t,x}, \hat{\alpha}(u, \hat{X}_u^{t,x}))du + g(\hat{X}_T^{t,x})\right] \\ &= J(t,x,\hat{\alpha}). \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$W(t,x) = J(t,x,\hat{\alpha}) \geq v(t,x)$$

et $W = v$ avec $\hat{\alpha}$ comme contrôle optimal. □

2.4.4 Recherche du contrôle optimal admissible

Pour résoudre le probléme de contrôle optimal stochastique, le théorème précédent suggère la stratégie suivante : Nous allons commencer par résoudre l'équation d'HJB

$$0 = W_s + \min_{v \in U}\left[\mathcal{A}^v(s)W + L(s,y,u)\right], (s,y) \in [T_0, T[\times \mathbb{R}^n,$$

avec la condition terminale $W(T,y) = \Phi(y)$. Ensuite, pour $(s,y) \in [T_0, T[\times \mathbb{R}^n$ fixé, nous allons résoudre l'équation

$$\min_{v \in U}\left[\mathcal{A}^v(s)W + L(s,y,u)\right].$$

Ainsi, notons par $u^*(s,y)$, la valeur de u qui réalise le minimum. Enfin, si l'EDP non linéaire obtenue avec une condition terminale admet une solution réguliére W, alors cette solution W est la fonction valeur du problème de contrôle stochastique et u^* est un contrôle optimal.
Notons que cette méthode se justifie donc si l'EDP de l'équation d'HJB admet une solution dans $C^{1,2}$ satisfaisant les conditions d'application du théorème de vérification. Soulignons aussi dans la vérification des conditions 2 du théorème précédent qu'il n'est pas toujours facile et parfois problématique d'obtenir une solution de l'EDP associé au contrôle optimal u^*.

Chapitre 3

Application : Problème de contrôle optimale stochastique résolue par la méthode de la programmation dynamique

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de contrôle optimale stochastique que nous allons résoudre en utilisant la méthode de la programmation dynamique. Nous commençons par donner des conditions pour que le problème soit bien posé. Ensuite, en appliquant le principe de la programmation dynamique qui, à l'aide d'une transformation logarithmique, nous conduit à résoudre cette équation. Enfin, d'après le théorème de vérification, nous allons démontrer que le contrôle optimale est admissible et la solution correspond à un processus Markov.

Notations et hypothèses

Soient les fonctions L, U et W_T définies par
$L : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t,x,\nu) \to L(t,x,\nu) = \frac{1}{2} m\nu^2 + U(t,x), \quad m > 0, \quad \nu \in \mathbb{R}^n,$$

$U : \bar{S} = [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue vérifiant

$$|U\,(t,x)| \leq C(1 + |x|^k), \tag{3.1}$$

$W_T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue vérifiant

$$W_T \leq C(1 + |x|)^k, \quad C, k = cte. \tag{3.2}$$

Soit ϑ l'ensemble des fonctions admissibles défini par $\vartheta = \{\ v : \bar{S} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ boréliennes telles que

1. $\forall (s,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$, il existe un système usuel $(\Omega, \mathcal{F}_T^s, Q_v^{s,x}, \mathcal{F}_t^s, w_{s,x}(t))$ où $w_{s,x}$ est un mouvement brownien standard et $\sigma_{ij} = \sqrt{2D}\delta_{ij}, D > 0$ tels que l'EDS

$$\begin{cases} d\xi(t) = v(t,\xi(t))dt + \sigma dw_{s,x}(t), \\ \xi(s) = x, \end{cases} \tag{3.3}$$

admette une solution unique en loi de probabilité.

2. $\forall k, \exists M$ dépend de (s,x) telle que

$$\mathbb{E}_v^{s,x}|\xi(t)|^k \leq M, \quad 0 \leq s \leq t \leq T \tag{3.4}$$

et

$$\mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T |v(t,\xi(t))|^2 dt < \infty\ \}. \tag{3.5}$$

3.1 Problème de minimisation

L'énoncé du Problème est le suivant.

$$(P_1)\begin{cases} Trouver \quad v^* : \bar{S} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad tel \quad que \\ \inf_{v\in v} J(s,x;v), \end{cases} \tag{3.6}$$

$$J(s,x;v) = \mathbb{E}_v^{s,x}\left[\int_s^T \left(\frac{1}{2}m\nu^2(t,\xi(t)) + U(t,\xi(t))\right)dt + W_T(\xi(t)),\right]$$

admet une solution.
Tout d'abord, nous devrons démontrer que le problème soit bien posé. Pour cela, on a le résultat suivant.

Proposition 3.1.1. *Sous les hypothşes précédentes, on a*

1. $J(s,x;v) > -\infty$,
2. $\mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T \frac{1}{2}m\nu^2(t,\xi(t))ds < \infty$,
3. $\mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T U(t,\xi(t))dt < \infty$,
4. $J(s,x;v) \neq +\infty$.

Démonstration. Remarquons que le problème ait un sens. En effet, d'une part, puisque tous les termes sont positifs, on a

$$J(s,x;v) > -\infty.$$

D'autre part, puisque par hypothèse on a

$$\mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T \frac{1}{2}m\nu^2(t,\xi(t))ds < \infty$$

et

$$\mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T W_T(t,\xi(t))dt < \infty,$$

alors on trouve

$$\inf_{v\in v} J(s,x;v) \neq +\infty.$$

Il nous reste donc à démontrer que

$$\mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T U(t,\xi(t))dt < \infty.$$

En effet, d'après la condition (3.1) on a

$$\mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T U(t,\xi(t))dt < \mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T C(1+|\xi(t)|)^k dt$$

$$= \mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T C dt + \mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T C|\xi(t)^k|dt.$$

Comme T est fini alors

$$\mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T C dt < \infty.$$

Aussi d'après (3.4) et comme $|\xi(t)|^k > 0$, d'après Fubini-Tonelli, on trouve

$$\mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^T |\xi(t)|^k dt = \int_s^T \mathbb{E}_v^{s,x}|\xi(t)|^k dt.$$

$$\int_s^T M dt < \infty.$$

D'où

$$J(s,x;v) \neq +\infty.$$

□

3.2 Résolution du problème

Le principe de la programmation dynamique stochastique nous conduit à définir l'équation d'HJB et cela est obtenu dans le résultat suivant.

Proposition 3.2.1. *Soit W donnée par*

$$W\left(s,x\right)=\inf_{v\in\upsilon}\left\{\mathbb{E}_{v}^{s,x}\left[\int_{s}^{T}L[t,\xi(t),v\left(t,\xi(t)\right)]\right]dt+W_{T}(\xi(t))\right\}.$$

Supposons que $W(s,x)\in C^{1,2}(]0;T[\times\mathbb{R}^{n})\cap C^{0}([0;T]\times\mathbb{R}^{n})$, alors l'équation d'HJB est donnée par

$$\frac{\partial W}{\partial s}+\inf_{\nu\in\mathbb{R}^{n}}\left[D\Delta_{x}W+\nu.\nabla_{x}W+\frac{1}{2}m\nu^{2}+U\right]=0,\quad\forall(s,x)\in S.\qquad(3.7)$$

Démonstration. 1. D'après le principe de la programmation dynamique on a,

$$W(s,x)=\inf_{v\in\upsilon}\mathbb{E}_{v}^{s,x}\Bigg(\left[\int_{s}^{s+h}L[t,\xi(t),v(t,\xi(t))]dt\right]$$

$$+\inf_{v\in\upsilon}\left\{\mathbb{E}_{v}^{s+h,\xi(s+h)}\int_{s+h}^{T}L[t,\xi(t),v(t,\xi(t))]dt+W_{T}(\xi(T))\right\}\Bigg)$$

qui est équivalente à

$$W(s,x)=\inf_{v\in\upsilon}\mathbb{E}_{v}^{s,x}\left[\int_{s}^{s+h}L[t,\xi(t),v(t,\xi(t))]dt+W(s+h,\xi(s+h,v(.)))\right].$$

Ainsi, l'équation devient

$$\inf_{v\in\upsilon}\mathbb{E}_{v}^{s,x}\left[\int_{s}^{s+h}L[t,\xi(t),v(t,\xi(t))]dt+W(s+h,\xi(s+h,v(.)))-W(s,x)\right]=0.$$

2. On divise par h et on le fait tendre vers 0^{+}, on trouve

$$0=\lim_{h\longrightarrow0^{+}}\frac{1}{h}\Bigg(\inf_{v\in\vartheta}\mathbb{E}_{v}^{s,x}\Big[\int_{s}^{s+h}L[t,\xi(t),v(t,\xi(t))]dt$$

$$+W(s+h,\xi(s+h,v(.)))-W(s,x)\Big]\Bigg).$$

Comme on a, $W(s,x)\in C^{1,2}(]0;T[\times\mathbb{R}^n)\cap C^0([0;T]\times\mathbb{R}^n)$ et en appliquant la formule d'Itô à $W(s+h,\xi(s+h,v(.)))-W\,(s,x)$, on trouve

$$W(s+h,\xi(s+h,v(.)))-W\,(s,x)=$$

$$\int_s^{s+h}\frac{\partial W(t,\xi(t,v(.)))}{\partial t}dt+\int_s^{s+h}\nabla_x W(t,\xi(t,u(.)))(v\,(t,\xi(t))+\sigma dw_{s,x}(t))$$

$$+\frac{1}{2}\int_s^{s+h}2D\frac{\partial^2 W(t,\xi(t,v(.)))}{\partial^2 x_i}dt.$$

Ainsi, puisque on a

$$\mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^{s+h}\nabla_x W(t,\xi(t,v(.)))(\sigma dw_{s,x}(t))=0,$$

on obtient

$$0=\inf_{v\in\vartheta}\Big(\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\mathbb{E}_v^{s,x}\left[\int_s^{s+h}L[t,\xi(t),v(t,\xi(t))]dt\right]$$

$$+\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\mathbb{E}_v^{s,x}\left[\int_s^{s+h}\frac{\partial W(t,\xi(t,v(.)))}{\partial t}dt\right]$$

$$+\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_v^{s,x}\left[\int_s^{s+h}\nabla_x W(t,\xi(t,v(.)))v\,(t,\xi(t))\,dt\right]$$

$$+\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}\mathbb{E}_v^{s,x}\int_s^{s+h}2D\frac{\partial^2 W(t,\xi(t,v(.))}{\partial^2 x_i}dt\right]\Big).$$

Par passage à la limite on trouve

$$0=\inf_{v\in\vartheta}[\mathbb{E}_v^{s,x}\frac{1}{2}m\nu^2(s,\xi(s))+U(s,\xi(s))+\frac{\partial W(s,\xi(s),v(.)))}{\partial s}$$

$$+\frac{\partial W(s,\xi(s,v(.)))}{\partial x}W(s,\xi(s,v(.)))v(s,\xi\,(s))+D\frac{\partial^2 W(s,v\,(.)))}{\partial^2 x^2}],$$

qui est équivalente à

$$0=\inf_{v\in\vartheta}\mathbb{E}_v^{s,x}[\int_s^{s+h}\frac{1}{2}m\nu^2(s,\xi(s),U(s,\xi(s))dt$$

$$+\frac{\partial W(s,\xi(s))}{\partial s}+\nabla_x W[s,\xi(s)]\nu(s,\xi(s))+\nabla_x W\,(s,\xi(s))],$$

qui s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial W}{\partial s}+\inf_{\nu\in\mathbb{R}^n}\left[D\Delta_x W+\nu.\nabla_x W+\frac{1}{2}m\nu^2+U\right]=0,\quad\forall(s,x)\in S.$$

d'où l'obtention de l'équation d'HJB. $\square$

Recherche du contrôle

Pour que ν réalise le minimum, il suffit que

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left[D\Delta_x W + \nu.\nabla_x W + \frac{1}{2}m\nu^2 + U\right] = 0,$$

alors on a,

$$\nabla_x W + m\nu = 0.$$

Par conséquent, on trouve

$$\nu^* = -\frac{\nabla_x W}{m}.$$

Notons par $\nu^* = v^*$ et c'est le contrôle optimale du problème $(P1)$.

3.2.1 Résolution de l'équation d'HJB

Supposons qu'il existe un W et un contrôle optimal v^*. Si nous remplaçons la valeur de v^* dans l'équation d'HJB, on trouve

$$\frac{\partial W}{\partial s} = -D\Delta W + \frac{1}{2m}(\nabla_x W)^2 - U.$$

En ajoutant à cette équation une condition finale

$$W(T, x) = W_T(x),$$

on en déduit que, $\forall(s, x) \in S$, l'équation d'HJB s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial s} = D\Delta W + \frac{1}{2m}(\nabla_x W)^2 - U, \\ W(T, x) = W_T(x). \end{cases}$$

Remarquons que l'équation d'HJB est non linéaire. Pour la rendre linéaire, nous aurons besoin de ce résultat.

Proposition 3.2.2. *Soit*

$$\rho(s, x) = \exp(-\frac{W(s, x)}{2mD}), \quad (s, x) \in \bar{S}.$$

Alors, pour $0 \leq s \leq T, x \in \mathbb{R}^n$*, l'équation d'HJB s'écrit sous la forme*

$$P2)\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial s} = -D\Delta\rho + \frac{U(s,x)}{2mD} \\ \rho(T, x) = \exp(-\frac{W_T(x)}{2mD}) = \rho_T(x) \end{cases}$$

Démonstration. Calculons les dérivées $\frac{\partial W}{\partial s}$, $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ et ∇W, alors on obtient

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{-2mD}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s},$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{-2mD}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -2mD\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$\nabla W = \frac{-2mD}{\rho}\nabla \rho.$$

Si l'on substitue les formules précédentes dans l'équation d'HJB on trouve

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = -D\Delta\rho + \frac{U(s,x)}{2mD}.$$

Ainsi, notons par $\rho_T(x) = \rho(T,x)$, la condition finale telle que

$$\rho(T,x) = \exp(-\frac{W_T(x)}{2mD}).$$

□

Pour résoudre le problème (P_2), on a les résultats suivants.

Lemme 3.2.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *W continue, positive sur $\bar{S}$ et $W(t,x) \leq A(1+|x|^2)$, tel que $A = cste$,*
2. *ρ continue sur $\bar{S}$ et $M\exp(-\alpha|x|^2) \leq \rho(t,x) \leq 1$ telle que $0 < M \leq 1$ et $\alpha \geq 0$.*

Démonstration. *i*)(1) $\Longrightarrow$ (2)
On a

$$\rho(T,x) = \exp(-\frac{W_T(x)}{2mD}).$$

Remarquons que comme ρ est continue puisque W est continue. Ainsi, d'après (1) on a

$$0 \leq W(t,x) \leq A(1+|x|^2),$$

qui est équivalente à

$$\exp\left\{-\frac{A(1+|x|^2)}{2mD}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{W(t,x)}{2mD}\right\} \leq 1. \tag{3.8}$$

Elle s'écrit sous la forme

$$\exp\left\{-\frac{A}{2mD}\right\}\exp\left\{-\frac{A(1+|x|^2)}{2mD}\right\} \leq \rho(t,x) \leq 1.$$

Supposons que

$$\exp\left\{-\frac{A(1+|x|^2)}{2mD}\right\} = M$$

et

$$\frac{A}{2mD} = \alpha,$$

donc on obtient

$$M\exp\{-\alpha\} \leq \rho(t,x) \leq 1.$$

Comme A et $2mD$ sont deux constantes positives alors,

$$0 \leq \exp\left\{-\frac{A}{2mD}\right\} \leq 1.$$

Par conséquent, on trouve

$$0 \leq M \leq 1$$

et

$$\alpha \geq 0.$$

$ii)(2) \Longrightarrow (1)$
On a

$$W(t,x) = -2mD\log\rho.$$

Comme ρ est continue alors, W l'est aussi.Ainsi, on a

$$\exp\left\{-\frac{W(t,x)}{2mD}\right\} \leq 1.$$

Ensuite, puisque $m > 0$ et $D > 0$ alors,

$$W(t,x) \geq 0, (t,x) \in \bar{S},$$

qui, d'après $\exp\left\{-\frac{A(1+|x|^2)}{2mD}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{W(t,x)}{2mD}\right\} \leq 1.$ on a

$$-\frac{A(1+|x|^2)}{2mD} \leq -\frac{W(t,x)}{2mD}.$$

Par conséquent, on a

$$W(t,x) \leq A(1+|x|^2), \quad A = cte.$$

Le résultat suivant montre l'existence et l'unicité de l'équation d'HJB. $\square$

Théorème 3.2.3. *[22] D'après les lemmes précédents, l'équation d'HJB admet une unique solution que notée W.*

Démonstration. comme $W_T(x)$ vérifie (3.2) alors, d'après le lemme précédent, $\rho_T(x)$ vérifie les hypothèses du théorème.
De plus, comme U vérifie la condition (3.1) alors le problème de Cauchy $(P2)$ admet une solution unique $\rho(s,x)$ où la solution est comprise dans le sens qu'elle est continue dans $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ et $C^{1,2}(([T_0,T[\times\mathbb{R}^n)$, et donc d'après le lemme précédent, on a

$$W \in C^{1,2}(([T_0,T[\times\mathbb{R}^n) \cap C^0([T_0,T] \times \mathbb{R}^n)$$

et

$$|W(s,x)| \leq C(1+|x|^2), \forall (s,x) \in [T_0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

□

Maintenant, nous allons appliquer le théorème de vérification pour obtenir une commande optimale admissible.

3.2.2 Existence d'une commande optimale admissible

Nous allons vérifier les conditions du théorème de vérification.
En effet, d'une part, on a

$$W(s,x) \leq J(s,x;v), \quad \forall v \in \vartheta.$$

D'autre part, il nous reste à montrer que

$$v^* = -\frac{\nabla_x W}{m}(= 2D\frac{\nabla_x \rho}{\rho})$$

soit admissible. Pour cela, on a le résultat suivant.

Proposition 3.2.4. *Soit $v^* \in \vartheta$ est borné dans $\bar{S}$. Supposons que W vérifie l'hypothèse 2) du théorème de vérification, alors v^* est un contôle admissible, i.e., Si $v^* \in \vartheta$.*

Démonstration. La démonstration se base sur l'application du théorème de Girsanov (voir chapitre 01). En effet, on a

a. Soit $z(t)$ un mouvement brownien dans $[0,T]$ défini dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{s,x})$ et $v^* \in L^2_W[0,T]$. Défnissons

1. $\zeta(v^*) = \int_s^t v^*(u)dw(u) - \frac{1}{2}\int_s^t |v^*(u)|^2 du,$
2. $w_{s,x}(t) = z(t) - \frac{1}{\sqrt{2D}}\int_0^t v^*(s)ds,$
3. $dQ^{s,x}_{v^*} = \exp[\zeta(\Phi)]d\mathbb{P}_{s,x}(w).$

Comme v^* est bornée, la condition de Novikov est vérifiée et on obtient

$$dQ^{s,x}_{v^*}(\Omega) = 1,$$

i,e.,

$$\mathbb{E}^{s,x}_{v^*} \exp\left\{\int_x^t v^*(s)dw_{s,x}(s) - \frac{1}{2}\int_s^t |v^*(s)|^2 ds\right\} = 1, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Alors, d'après le théorème de Girsanov, $w_{s,x}$ est un mouvement brownien défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, Q^{s,x}_{v^*})$.
Si l'on remplace $z(t)$ dans l'EDS

$$d\eta_{s,x}(t) = \sqrt{2D}dz(t), \text{ dans } (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{s,x}),$$

on trouve

$$d\eta_{s,x}(t) = v^*(t, \eta_{s,x}) + \sqrt{2D}dw_{s,x}. \tag{3.9}$$

Cette équation admet une solution faible.
b. Comme $\eta_{s,x}(t)$ est solution de (3.8) alors

$$\mathbb{E}^{s,x}_{v^*}|\eta_{s,x}(t)|^k \leq M, \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{3.10}$$

c. Comme v^* est bornée alors on a

$$\mathbb{E}^{s,x}_{v^*}\int_s^T |v^*(t, \xi(t))|^2 dt < \infty. \tag{3.11}$$

De (a),(b) et (c) on en déduit que

$$v^* \in \vartheta.$$

Donc d'après le théorème de vérification on a

$$W(s, y) = J(s, y, v^*).$$

D'où la résolution du problème $(P1)$. $\square$

Conclusion

L'obtention de conditions suffisantes nous ont permis de résoudre de maniére rigoureuse le problème de contrôle optimal stochastique considéré. En effet, à l'aide du théorème de vériffication de Fleming-Rishel et du calcul stochastique, le principe de la programmation dynamique stochastique a ramené le problème de contrôle optimal stochastique à l'étude de l'équation d'HJB. Comme cette dernière est non linéaire et donc difficile à résoudre, la transformation logarithmique nous permet de la transformer en une EDP linéaire (problème de Cauchy).
La résolution du problème de Cauchy nous permet d'obtenir l'existence effective de la fonction valeur W, supposée dans le théorème de vériffication, et de montrer que le v^* trouvé est une commande optimale admissible et correspond au drift d'un processus Markov.

Bibliographie

[1] V. Allexeev, S.V, Fomine, V.M. Tikhomirov : *Commande optimale,* MTR, Moscou (1982).

[2] V. Allexeev, E. GALEEV, V.M. Tikhomirov : *Receuil de problèmes d'optimisation,* MIR, Moscou (1987).

[3] Artzner P., Delbaen F., Eber J.M. et D. Heath : *Mathematical Finance,* Coherent measures of risk, 9, 203–228, (1999).

[4] Avellaneda M., Levy A. et A. Paras : *Applied Mathematical Finance,* Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities, 2, 73–88, (1995).

[5] G. Barles : *Solution de Viscosité des équations de Hamilton-Jacobi,* Springer-Verlag (1994).

[6] Barles G. : *Solutions de viscosité des équations d'Hamilton Jacobi,* Springer Verlag, Mathématiques et Applications, (1995).

[7] Barrieu P. et N. El Karoui : *Optimal design of derivatives under dynamic risk measures,* Proceedings of the AMS, Spring (2004).

[8] Bellini F. et M. Frittelli : *On the existence of minimax martingale measures,* Mathematical Finance, 12, 1–21, (2002).

[9] Bellman R. : *Dynamic programming,* Princeton University Press, (1957).

[10] A. Benchettah : *Thèse doctorat,* Paris 7 (1990).

[11] A. Benchettah : *Commande Optimale Stochastique pour l'Equation de Fokker-Plank,* MMR (2002).

[12] Bensoussan A. : *Proceedings of the 3rd 1981 session,* CIME, Lect. Notes in Maths. 972, (1981).

[13] Bensoussan A. : *Stochastic control of partially observable systems,* Cambridge University Press, (1992).

[14] Bensoussan A. et J.L. Lions : *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique,* Dunod, (1978).

[15] Bensoussan A. et J.L. Lions : *Contrôle impulsionnel et inéquations qausi-variationnelles contrôle stochastique*, Dunod, (1982).

[16]]Bernstein : *Sur les liaisons entre les grandeurs aléatoires,* Verh. desintern. Mathematikerkong. I Zürich (1932).

[17] A. Beurling : *An automorphism of product measures,* Ann. of Math. 72, 189-200.S, (1960).

[18] P. Billingsley : *Convergence of probability measures.* Wiliy, NewYork (1968).

[19] M. Camien, N. SHWARTZ : *Dynamic Optimization,* NorthHolland (1981).

[20] I. Ekeland, R. TEMAM : *Convex Analysis and Variational Problems,* North-Holland (1972).

[21] L. C. Evans : *An introduction to the Mathematical Optimal Control Theory,* téléchargeable : http ://math.berkeley.edũevans.

[22] W. H. Fleming, R. W. RISHEL : *Deterministic and stochastic Optimal Control,* Springer-Verlag, New-York (1975).

[23] R. Fortet : *Résolution d'un système d'équation de M. Shrödinger,* j. Math, IX, 83-105, Pures Appl (1940).

[24] A. D. Ioffe, V. M. TIKHOMIROV : *Theory of Extremal Problems,* North-Holland (1979).

[25] B. Jamison : *Reciprocal processes,* Z. Warsch. Verw. Geb, 65-86, 30 (1974).

[26] B. Jamison : *Reciprocal processes,* The stationnary Gaussien case, Ann. Math. 41, 1624-1630, Statists (1970).

[27] B.Jamison : *Reciprocal processes,* Z. Warsch. Verw. Geb. 30 65-86, (1974).

[28] I. Karatzas, S. E. SHREVE : *Brownien Motion and Stochastc Calculus,* Springer (1988).

[29] I. Karatzas, S. E. SHREVE : *Brownien Motion and Stochastc Calculus,* Springer (1988).

[30] E. Paradoux, S. PENG : *Adapted solution of a backward stochastic differential equation,* Systems Control Lett, no. 1, 55-61, 14 (1990).

[31] D.Lamberton, B. LAPEYRE : *Introduction au calcule stochastique appliqué à la finance,* Ellipses Edition Marketing (1997).

[32] T. Lion : *Differential eqautions driven bu rought signals,* Rev. Mat. Iberoamericana , 14 :2, 215-310, (1998).

[33] R. Liptser, A. V. SHIRYAYEV : *Statistics of Random processes I, General theory, Springer-Verlag,* New York (1977).

[34] R. Liptser, A. V. SHIRYAYEV : *Statistics of Random processes I, General theory,* New York (1977).

[35] R. E. Lucas JR, N. STOKEY : *Recurcive méthods in economics Dynamics,* Harvard University Press (1989).

[36] D. Reuz, M. Yor : *Continuous Martingales and Brownien Motion,* Springer (1991).

[37] D. W. Srook, S. R. VARADHAN : *Multidimensional Diffusion Process,* Springer (1979).

[38] Ma J. et J. Yong : *Forward-Backward stochastic differential equations and their applications,* Lect. Notes in Math., 1702, (2000).