



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف  
Université Chadli Bendjedid – El Tarf  
كلية العلوم والتكنولوجيا  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
قسم الرياضيات  
Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

### Thème

## Distribution Poisson Lindley Modifiée

Présentée par:

*BOUKHATEM Safa*

Devant le Jury :

Dr. GRABSIA Imen	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. GRINE Razika	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. KASSA Sara	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2023-2024

Distribution Poisson Lindley Modifiée  
Boukhatem Safa

Juin 2024

Encadré par : Dr GRINE Razika

# TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction . . . . .	9
1	<b>Notions et quelques lois de probabilités</b>	<b>12</b>
1	Définitions . . . . .	12
1.1	Variable aléatoire . . . . .	12
1.2	Loi de probabilité . . . . .	13
1.3	Moment ordinaire . . . . .	13
1.4	Moment centré . . . . .	14
2	Fonction Génératrice des moments . . . . .	14
3	Estimation . . . . .	15
3.1	Définition . . . . .	15
3.2	Propriétés d'un estimateur . . . . .	15
3.3	Normalité asymptotique . . . . .	16
3.4	Construction d'estimateurs . . . . .	16
4	Fonction de survie . . . . .	18
5	Taux de hasard . . . . .	18
6	Fonction W de Lambert . . . . .	18
7	Fonction Quantile . . . . .	19
8	Lois de probabilités usuelles . . . . .	20

8.1	Loi de Poisson . . . . .	20
8.2	Loi Exponentielle . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Distribution de Lindley et ses applications</b>	<b>22</b>
1	Introduction . . . . .	22
2	Distribution de Lindley . . . . .	22
2.1	Moments et mesures connexes . . . . .	24
2.2	Fonction de hasard et fonction de survie . . . . .	25
2.3	Fonction Quantile de la distribution Lindley . . . . .	25
2.4	Estimation . . . . .	27
3	Distribution Poisson–Lindley discrète . . . . .	29
3.1	Moments et Mesures Connexes . . . . .	30
3.2	Fonction Quantile de la distribution de Poisson Lindley	30
3.3	Estimation . . . . .	32
4	Distribution de Deux-Paramètres de Lindley . . . . .	35
5	Distribution de Lindley Modifiée. . . . .	36
5.1	Moments ordinaire . . . . .	37
5.2	Paramètre de fiabilité . . . . .	39
5.3	Estimation . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Distribution Poisson–Lindley modifiée et ses application</b>	<b>43</b>
1	Introduction . . . . .	43
2	Fonction de densité de probabilité . . . . .	43
3	Fonction de repartition . . . . .	44
4	Moments ordinaire . . . . .	45
5	Moments factoriels . . . . .	46
6	Fonction génératrice . . . . .	47
7	Estimation et applications . . . . .	48
8	Applications . . . . .	49

---

## REMERCIEMENT

*Avant tout, je tiens à remercier dieu le tout puissant, de m'avoir donné le courage et la patience pour pouvoir mener à terme ce travail.*

*Je tiens à remercier Dr. Grine Razika, mon encadreur, pour tout le soutien, l'aide ; l'orientation ; la guidance ; ainsi que pour ses précieux conseils et ses encouragements lors de la réalisation de ce travail.*

*Je remercie les membres du jury Dr .Grabsia Imen et Dr. Kassa Sara .*

*Ensuite un grand remerciement à mes parents pour le soutien, l'encouragement tout au long de mes études, et à tous ma famille.*

*Je remercie également toutes les personnes de près ou de loin, ont participé à l'élaboration de ce mémoire.*

*Je remercie tous les amies et les collègues du département de mathématiques*

---

*Dédicace*

*Je dédie ce mémoire*

*A Mes chers parents ma mère "**Beldia**" et mon père "**laiche**"*

*Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

*A mes frère "**yacine**" et "**ayoub**"*

*A mes soeurs "**marwa**", "**fatma**", "**khadija**", "**yamina**", "**kaoither**'*

*A mes soeur de filles "**rayen,yakine,maram,loudjayn**"*

*Ames enfants de soeur ' **iyad,abdo,idris**"*

*A mes amies "**waim, samiha, radia, ilhem,rokaya, abir, chourouk, mariem**"*

*mon fiance et future mari "**ayoub**'*

*tous les membres de famille "**boukhatem**" *petite et grands**

*et mes camarades.*

*Sans oublier tous les professeurs que ce soit du*

*Primaire, du moyen, du secondaire ou de*

*L'enseignement supérieur..*

*BOUKHATEM SAFA*

---

## ملخص

في هذا العمل نقترح تقديم توزيع جديد (منفصل) يسمى توزيع بواسون ليندلي المعدل، عن طريق المزج بين توزيع بواسون وتوزيع ليندلي المعدل. تمت دراسة الخصائص مثل التقدير بطريقة العزوم والاحتمال الأقصى، وتم تطبيق المحاكاة.

---

## Résumé

Dans ce travail On se propose de présenter une nouvelle distribution (discrètes) appelée distribution poisson lindley modifiée, par le mélange des distributions poisson et lindley modifiée. Des propriétés ont été étudiées comme l'estimation par la méthode des moments et maximum de vraisemblance, des simulations ont été appliquées.

---

**Abstract**

In this work, we give a treatment of the mathematical properties for new distribution named poisson Lindley modified (PLM), by compounding Poisson and modified Lindley distributions. The properties studied include : moments, maximum likelihood estimation. Simulations studies and data driven applications

## 1 Introduction

Les statistiques touchent tous les aspects de la vie moderne. Elles sous-tendent de nombreuses décisions des pouvoirs publics, des entreprises et des collectivités. Elles renseignent sur les tendances et les forces qui influent sur notre vie. La qualité des procédures utilisées dans une analyse statistique dépend fortement de modèle de la probabilité supposée ou la distribution. Pour cela, des efforts considérables ont été déployés dans le développement de grandes classes de distributions de probabilité standard ainsi que des méthodologies statistiques pertinentes. Cependant, il reste beaucoup de problèmes importants où les données réelles ne suivent aucune des modèles de probabilité standard.

Soit  $X$  une variable aléatoire suit la distribution d'un seul paramètre donné par la fonction de densité suivante :

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2(1+x)e^{-\theta x}}{1+\theta} & x, \theta > 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1)$$

Introduite par Lindley (1958). Sankaran [23] a introduit la distribution discrète de Poisson-Lindley (*PL*) en combinant les distributions de Poisson et de Lindley. Les aspects statistiques de la distribution *PL* à été étudiée dans [12]. La distribution *PL* elle-même a été généralisée par de nombreux chercheurs. Ghitany et al [10] et Asgharzadeh et al. [1] ont dérivé les distributions *PL* tronquée à zéro et Poisson-Lindley de Pareto respectivement. Mahmoudi et Zakerzadeh [19] ont proposé une version étendue de la distribution de Poisson composée, qui a été obtenue en composant la distribution de Poisson avec la distribution de Lindley généralisée (établie par [37]), afin de modéliser la distribution de Poisson et la distribution de Lindley généralisée.

Pour modéliser les ensembles de données de comptage surdispersées et ont montré que la distribution de Poisson-Lindley généralisée donne de meilleurs résultats que la distribution de Poisson. Gomez-Déniz et al. [13] ont présenté les distributions *PL* discrètes multivariées et ont étudié leurs extensions ainsi que leurs applications dans la science actuarielle. Shanker et Mishra [31] ont introduit une distribution de

Poisson Lindley à deux paramètres en combinant la distribution de Poisson avec la distribution de Lindley à deux paramètres introduite par [26]. Une distribution quasi Poisson-Lindley a été développée par [25], en combinant la distribution de Poisson avec une distribution quasi Lindley introduite par [27]. Shanker et al [28] ont proposé une distribution PL discrète à deux paramètres en mélangeant la distribution de Poisson avec une distribution de Lindley à deux paramètres pour modéliser les temps d'attente et de survie introduites par [29]. En outre, Shanker et Tekie [30] ont obtenu une nouvelle distribution quasi Poisson-Lindley en combinant la distribution de Poisson avec une nouvelle distribution quasi Lindley introduite par [31].

Nedjar et Zeghdoudi [40] et Zeghdoudi et Nedjar [35] ont présenté deux nouvelles distributions de Poisson composées, nommées la distribution de Poisson gamma Lindley et les distributions de Poisson pseudo-Lindley, en combinant la distribution de Poisson avec les distributions de gamma Lindley et de pseudo-Lindley, proposées respectivement par [39] et [38]. De plus, Grine et Zeghdoudi [14] ont étudié la distribution de Poisson quasi Lindley et ses applications. Recement C. Chesneau, L. Tomy et J. Gillariose, introduit une nouvelle distribution de Lindley modifiée et ils ont étudié leurs extensions ainsi que leurs applications dans [7].

Dans ce travail, nous étudions une nouvelle distribution de durée de vie en utilisant les modèles de mélange et en combinant la distribution de Poisson et la distribution lindley modifiée à un paramètre qui apportera un plus à la littérature existant sur la modélisation des données de survie, des sciences biologiques et des sciences actuarielles.

Dans le premier chapitre nous rappelons certaines définitions et certains résultats que nous utiliserons par la suite. Ce rappel comporte des généralités sur quelques distributions de probabilités, estimation MM et MV.

Dans le chapitre II, nous faisons une synthèse des résultats obtenus sur les distributions de Lindley et Poisson Lindley en nous inspirant des travaux de Lindley (1958), Ghitany et al. (2008,a) et Sankaran (1970). Le chapitre III comporte la nouvelle distribution à un paramètre (poisson Lindley Modifiée) dont on donne quelques propriétés à savoir : la fonction de repartition, méthode des moments, des estimateurs des paramètres obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance et leurs

## ***1. Introduction***

---

applications dans l'analyse de survie. Dans ce travail, on introduit une nouvelle distribution de durée de vie en combinant la distribution Poisson et la distribution quasi Lindley, ou cette distribution apporte un petit plus sur la modélisation des données de survie, dans le domaine de la biologie et de l'actuariat.

# CHAPITRE 1

## Notions et quelques lois de probabilités

### 1 Définitions

Soit  $X$  une application définie de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $B$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ . On appelle image inverse de  $B$  par  $X$ , la partie de  $\Omega$  noté  $X^{-1}(B)$ , noté par

$$X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

#### 1.1 Variable aléatoire

La notion la plus utiliser dans la théorie des probabilités et de la statistique c'est la variable aléatoire.

##### Variable aléatoire réelle

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé. l'application  $X$  définie de  $\Omega$  dans  $R$  est une variable aléatoire vérifiée

$$\begin{aligned} X & : \omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in R. \\ \forall x \in R & : \{X \leq x\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

## 1. Définitions

---

$\mathcal{F}$  étant une tribu.

la variable aléatoire réelle  $X$  est dite discrète si l'espace probabilisé est dénombrable . Sinon la variable aléatoire réelle  $X$  est dite continue.

### 1.2 Loi de probabilité

**Définition 1.1.** On définit La loi de probabilité de la v.a  $X$ , par l'application  $P_X$  telle que :

$$P_X(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}).$$

**Définition 1.2.** la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$ , est la fonction  $F$  définie pour toute réel  $x$  par

$$\begin{aligned} F_X & : R \rightarrow [0, 1]. \\ x & \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = P\{\omega \in \Omega / X(\omega) \prec x\}. \end{aligned}$$

### Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilités  $P_i$  des événements  $\{X = x_i\}$ ,  $x_i$  parcourant l'univers image  $X(\Omega)$ . La loi de probabilité est donnée par les  $(x_i, p_i)$ .

### 1.3 Moment ordinaire

Le moment ordinaire d'ordre  $r \in \mathbb{N}$  de  $X$  est défini, s'il existe, par :

$$\mu_r' = E(X^r) = \left( \begin{array}{l} \sum_{K \in I} k^r P_K \quad \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{x \in I} x^r f_X(x) dx \quad \text{si } X \text{ est continue} \end{array} \right)$$

### 1.4 Moment centré

Le moment centré d'ordre  $r \in \mathbb{N}$  de  $X$  est défini, s'il existe, par :

$$\mu_r = E([X - E(X)]^r) = \left( \begin{array}{ll} \sum_{k \in I} [k - E(X)]^r P_k & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{x \in I} [X - E(X)]^r f(x) dx & \text{si } X \text{ est continue} \end{array} \right)$$

## 2 Fonction Génératrice des moments

Pour la variable aléatoire  $X$  la fonction génératrice des moments est définie par :

$$H_X(u) = E(e^{Xu}), u \in R.$$

La notion de fonction génératrice peut être utile parfois pour calculer plus facilement les moments de certaines lois de probabilité. par exemple :

l'espérance et la variance de  $X$  :

$$\begin{aligned} E(X) &= H'_X(0). \\ \text{Var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) = H''_X(0) - [H'_X(0)]^2. \end{aligned}$$

Le coefficient de variation ( $\gamma$ ), le coefficient d'asymétrie ( $\sqrt{\beta_1}$ ) et le coefficient d'aplatissement ( $\beta_2$ ) sont :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}. \\ \sqrt{\beta_1} &= \frac{E(X^3)}{(\text{Var}(X))^{\frac{3}{2}}}. \\ \beta_2 &= \frac{E(X^4)}{(\text{Var}(X))^2}. \end{aligned}$$

## 3 Estimation

### 3.1 Définition

Un estimateur de  $\theta$  est une application  $T_n$  de  $E^n$  dans  $F$  qui à chaque échantillon  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de la loi  $P_\theta$  associe une variable aléatoire réelle dont on peut déterminer la loi de probabilité, on appelle la valeur  $\hat{\theta}$  estimateur ou estimation

$$\hat{\theta} = T_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

### 3.2 Propriétés d'un estimateur

#### Biais

pour pouvoir considérer  $T_n$  comme une valeur approchée de  $\theta$ , il faut que les valeurs prises par la variable  $T_n$  ne s'écartent pas trop de la valeur fixe de  $\theta$ .

$$B_n(\theta) = E(T_n) - \theta$$

un estimateur  $T_n$  de  $\theta$  est dite sans biais si pour tout  $\theta$  si  $B_n(\theta) = 0$ , et si  $B_n(\theta) > 0$ , l'estimateur est dit positivement biaisé.

#### Convergence

Un estimateur  $T_n$  est convergent si la suite de v.a.  $(T_n)$  converge en probabilité vers  $\theta$ , soit :

$$\begin{aligned} T_n \xrightarrow{P} \theta &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \theta| < \varepsilon) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty; \forall \varepsilon > 0. \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Théorème 1.1** Tout estimateur sans biais dont la variance tend vers 0 est convergent :

$$(E_\theta(T_n) = \theta \text{ et } Var_\theta(T_n) \rightarrow 0) \Rightarrow T_n \xrightarrow{P} \theta; n \rightarrow \infty.$$

### Erreur quadratique moyenne

La qualité d'un estimateur va se mesurer à l'aide d'une distance moyenne au paramètre qu'on appelle l'erreur quadratique moyenne (*Mean Squared Error en anglais*) appelée aussi risque quadratique est l'espérance du carré de l'erreur entre la vraie valeur et sa valeur estimée.

$$EQM(T_n) = E_\theta((T_n - \theta)^2).$$

Si le risque est faible, l'estimateur  $T_n$  est proche de  $\theta$ .

### 3.3 Normalité asymptotique

On applique le théorème central limite suivant

**Théorème 1.2. (Théorème central limite).** Soient une suite de variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  indépendantes suit le même loi (donc de même espérance  $m$  et de même écart-type  $\sigma$ ).

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow N(0, 1).$$

La variable aléatoire  $Z_n$  converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

### 3.4 Construction d'estimateurs

#### Méthode du maximum de vraisemblance

**Définition 1.4** on appelle vraisemblance (likelihood) de l'échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  la loi de probabilité de ce n-uple, notée  $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  est définie par :

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i \mid \theta).$$

si  $X$  est une variable discrète, et par :

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta).$$

### 3. Estimation

---

si  $X$  est une variable aléatoire continue de densité  $f(x; \theta)$

**Définition 1.5** On appelle estimateur de maximum de vraisemblance (emv) de  $\theta$  est la valeur  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$  qui rend maximise la fonction de vraisemblance  $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$ . Donc  $\hat{\theta}_n$  sera en général calculé en maximisant la ln-vraisemblance :

$$\hat{\theta}_n = \max \ln L(\theta; x_1, \dots, x_n).$$

La recherche de l'estimateur de vraisemblance peut se faire directement par la recherche du maximum de  $L$ , ou dans le cas particulier où la fonction  $L$  est deux fois dérivable par rapport à  $\theta$  comme solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta; x_1, \dots, x_n) = 0.$$

$$\text{Où } \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\theta; x_1, \dots, x_n) < 0.$$

Dans ce cas, on les résout numériquement

#### Méthode des Moments

dans le cas ou le paramètre à estimer est  $\theta = E_\theta(X)$  moyenne théorique de la loi, l'estimateur naturel est la moyenne empirique

$$\hat{\theta}_n = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

de même pour estimer le paramètre  $\theta = V_\theta(X)$  variance de  $X$ , l'estimateur naturelle serait la variance empirique

$$S_n'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Plus généralement, pour  $\theta \in \Theta$ , si  $E(X) = \varphi(\theta)$ , où  $\varphi$  est une fonction inversible,

alors l'estimateur de  $\theta$  par la méthode des moments est :

$$\hat{\theta}_n = \varphi^{-1}(\theta).$$

## 4 Fonction de survie

La fonction de survie est la probabilité pour que l'événement d'intérêt (le décès par exemple)  $T$  intervienne après un délai supérieur à  $t$ , autrement dit, que l'événement d'intérêt  $T$  ne survienne pas avant la date  $t$ , c'est-à-dire

La fonction de survie est par définition le complément à un de la fonction de répartition :

$$S(t) = P(T > t) = 1 - F_T(t), \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

## 5 Taux de hasard

Le risque instantané (ou taux d'incidence), pour  $t$  fixé caractérise la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps après  $t$ , conditionnellement au fait d'avoir survécu jusqu'au temps  $t$  (c'est-à-dire le risque de mort instantané pour ceux qui ont survécu) :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{1 - F_T(t)}. \quad (1.2)$$

## 6 Fonction W de Lambert

Lambert en 1758 définit une fonction complexe multivaluée appelé fonction de Lambert ( $W$ ) qui est la solution de l'équation suivante

$$W(z) \exp(W(z)) = z. \quad (1.3)$$

## 7. Fonction Quantile

---

Où  $z$  est un nombre complexe. Si  $z$  est un nombre réel sachant que  $z \geq -1/e$  alors  $W(z)$  devient une fonction réelle et elle a deux branches réelles possibles.

La première branche réelle qui a des valeurs dans l'intervalle  $]-\infty, -1]$  c'est la branche négative et notée par  $W_{-1}$ . et la deuxième branche réelle qui a des valeurs dans l'intervalle  $[-1, \infty[$  est appelée la branche principale et notée  $W_0$ . Les deux branches réelles de  $W$  sont représentées par la figure.1.1. L'émeray ([3]) montre qu'il y a d'autres équations qui peuvent être résolues en termes de la fonction (1.3)  $W$  de Lambert. À cet effet, le lemme suivant, sera essentiel dans notre travail.

**Lemme 1.1** (L'émeray et al.[3]) Soient  $a, b$  et  $c$  des nombres complexes fixés. Par rapport à  $z \in \mathbb{C}$  la solution de l'équation  $z + ab^z = c$  est :

$$z = c - \frac{1}{\log(b)} W(ab^c \log(b)).$$

Où  $W$  est la fonction de Lambert.

**Preuve.** Pour tous nombres complexes  $a, b$  et  $c$  fixés, par rapport à la variable complexe  $z$  on doit résoudre l'équation  $z + ab^z = c$ . Pour cela il faut multiplier les deux côtés de cette équation par  $b^c \log(b)$ , alors l'équation résultante peut être écrite sous cette forme :

$$(c - z) \log(b) \exp((c - z) \log(b)) = ab^c \log(b). \quad (1.4)$$

Comparant l'équation (1.4) par  $b^c \log(b)$  avec l'équation (1.3). Il est clair que  $(c - z) \log(b)$  est la fonction  $W$  de Lambert de l'argument complexe  $ab^c \log(b)$ . Par conséquent, on a

$$W(ab^c \log(b)) = (c - z) \log(b).$$

Ce qui implique le résultat souhaité. Ceci termine la preuve du lemme 1.1.

## 7 Fonction Quantile

La fonction quantile d'une variable aléatoire (ou d'une loi de probabilité) est l'inverse de sa fonction de répartition. On appelle fonction quantile de  $X$  la fonction,

notée  $Q_X$ , de  $]0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ , qui à  $u \in ]0, 1[$  associe :

$$Q_X(u) = F^{-1}(u) \quad 0 < u < 1. \quad (1.5)$$

## 8 Lois de probabilités usuelles

dans cette partie on définit quelques lois usuelles la plus utilisées dans notre travail.

### 8.1 Loi de Poisson

La loi de Poisson est une distribution discrète très utile dans l'étude de la survenue dans le temps d'événements homogènes (le nombre d'absents par jour dans une entreprise, le nombre de clients dans une file d'attente durant des laps de temps de même durée).

Une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  (qui est à la fois la moyenne et la variance) si :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}; \quad k \in \mathbb{N}.$$

L'espérance mathématique et la variance de  $X$  :

$$E[X] = \text{var}[X] = \lambda.$$

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi gamma est donné par :

$$\log L(x_i, \beta, \eta) = n\lambda + \log \lambda + \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \log(x_i!).$$

L'estimateur  $\hat{\lambda}_{MoM}$  de paramètre  $\lambda$  obtenu par la méthode des moments est :

$$\hat{\lambda}_{MoM} = E[X].$$

## 8.2 Loi Exponentielle

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure . En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant  $t$  heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps  $t$ . Une variable aléatoire continue  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre (d'intensité ou inverse de l'échelle )  $\lambda > 0$  si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \forall x \in R^+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On note  $X \rightsquigarrow EXP(\lambda)$ .

La fonction de répartition de  $X$  :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & \forall x \in R^+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

L'espérance mathématique (ou durée de vie moyenne) et la variance de  $X$  :

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \text{var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

L'estimateur  $\hat{\lambda}_{MoM}$  de paramètre  $\lambda$  obtenu par la méthode des moments est :

$$\hat{\lambda}_{MoM} = \frac{1}{E[X]}.$$

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi exponentielle est donné par

$$\log L(x_i, \alpha, ) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n \log x_i.$$

## CHAPITRE 2

# Distribution de Lindley et ses applications

## 1 Introduction

La distribution de Lindley d'un seul paramètre est introduit par Lindley en 1958 comme mélange des deux distribution  $\text{Exp}(\theta)$  et  $\text{Gamma}(2, \theta)$ . plus de détails sur la distribution de Lindley peut être trouvés en Ghitany et autres ([11]). Cette distribution traitée par plusieurs chercheurs pour son usage en modelant des données de vie, et on l'a observé en plusieurs articles que cette distribution a exécuté excellemment

## 2 Distribution de Lindley

Soient  $Y_1$  et  $Y_2$  deux variables aléatoires indépendantes. Pour  $\theta > 0$ , on considère la variable aléatoire  $X = Y_1$  et  $X = Y_2$  avec les probabilités respectivement  $P_1 = \frac{\theta}{1+\theta}$  et  $P_2 = \frac{1}{1+\theta}$ . ou  $Y_1 \sim \text{exp}(\theta)$  et  $Y_2 \sim \text{Gamma}(2, \theta)$

La distribution lindley est spécifiée par la fonction densité suivante

$$f(x; \theta) = \frac{\theta^2(1+x)e^{-\theta x}}{1+\theta}; x, \theta > 0 \quad (2.1)$$

## 2. Distribution de Lindley

---

ou la fonction de répartition est donné par :

$$F(x) = 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{1 + \theta} e^{-\theta x}; x > 0, \theta > 0 \quad (2.2)$$

La dérivée première de (2.1) est :

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\theta^2}{1 + \theta} (1 - \theta - \theta x) e^{-\theta x}.$$

Il en résulte que

(i) pour  $\theta < 1$ ,  $\frac{d}{dx} f(x) = 0$  implique que  $x_0 = \frac{1-\theta}{\theta}$  est le point critique unique à laquelle  $f(x)$  est maximisée.

(ii) pour  $\theta \geq 1$ ,  $\frac{d}{dx} f(x) \leq 0$ , c-à-d . $f(x)$  diminue en  $x$  .

**Remarque 2.1** : le mode de cette distribution est :

$$Mode(X) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{\theta}, & 0 < \theta < 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

**Théorème 2.1** Soit  $X \sim Lindley(\theta)$  . Alors

$$Mode(X) < Median(X) < E(X) .$$

**Preuve.** Soient  $M = Mode(X)$ ,  $m = Median(X)$  et  $\mu = E(X) = \frac{\theta+2}{\theta(\theta+1)}$ . A partir la fonction de répartition de la distribution de Lindley, il en résulte que :

$$F(M) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1 + \theta} e^{-(1-\theta)}, & 0 < \theta < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, F(me) = \frac{1}{2}$$

et

$$F(\mu) = 1 - \frac{\theta^2 + 3\theta + 3}{(1 + \theta)^2} e^{-\frac{\theta + 2}{\theta + 1}}.$$

Notons que  $F(M)$  est une fonction décroissante en  $\theta \in (0, 1)$  et, pour tout  $\theta > 0$ ,  $0 \leq F(M) < 1 - 2e^{-1} < (1/2)$ .

De même,  $F(\mu)$  est une fonction croissante en  $\theta > 0$  et  $(1/2) < 1 - 3e^{-2} < F(\mu) < 1$ . Enfin, étant donné que  $F(x)$  est une fonction croissante en  $x > 0$  pour tout  $\theta > 0$ , on a  $M < m < \mu$ .

## 2.1 Moments et mesures connexes

Le  $r^{\text{ieme}}$  moment de la distribution de Lindley est :

$$\mu_r^{\cdot} = E(X^r) = \frac{r!(\theta + r + 1)}{\theta^r(\theta + 1)}, r = 1, 2, \dots$$

En particulier on a

$$\mu_1^{\cdot} = \frac{(\theta + 2)}{\theta(\theta + 1)}, \mu_2^{\cdot} = \frac{2(\theta + 3)}{\theta^2(\theta + 1)}, \mu_3^{\cdot} = \frac{6(\theta + 4)}{\theta^3(\theta + 1)}, \mu_4^{\cdot} = \frac{24(\theta + 5)}{\theta^4(\theta + 1)}.$$

Le moment centré de la distribution de Lindley est donné par :

$$\mu_k = E\{(X - \mu)^k\} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \mu_r^{\cdot} (-\mu)^{k-r}.$$

En particulier on a

$$\mu_2 = \frac{\theta^2 + 4\theta + 2}{\theta^2(\theta + 1)} = \sigma^2, \mu_3 = \frac{2(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2)}{\theta^3(\theta + 1)^3}, \mu_4 = \frac{3(3\theta^4 + 24\theta^3 + 44\theta^2 + 32\theta + 8)}{\theta^4(\theta + 1)^4}.$$

## 2. Distribution de Lindley

---

Le coefficient de variation ( $\gamma$ ), le coefficient de d'asymétrie ( $\sqrt{\beta_1}$ ) et le coefficient d'aplatissement ( $\beta_2$ ) sont :

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\sqrt{\theta^2 + 4\theta + 2}}{\theta + 2}, \\ \sqrt{\beta_1} &= \frac{2(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2)}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \beta_2 &= \frac{3(3\theta^4 + 24\theta^3 + 44\theta^2 + 32\theta + 8)}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^2}.\end{aligned}$$

### 2.2 Fonction de hasard et fonction de survie

Pour la distribution lindley la fonction de taux de hasard est :

$$h(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(X < x + \Delta x \mid X > x)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\theta^2(1+x)}{\theta + 1 + \theta x}. \quad (2.3)$$

et la fonction de survie est :

$$S(x) = 1 - F(x) = \frac{\theta + 1 + \theta x}{1 + \theta} e^{-\theta x}. \quad (2.4)$$

#### Remarque 2.2

(i)  $h(0) = f(0) = \frac{\theta^2}{\theta+1}$ .

(ii) Comme  $\frac{d}{dx}h(x) = \frac{\theta^2(1+x)}{\theta+1+\theta x}$ ,  $h(x)$  est une fonction croissante en  $x$  et  $\theta$  en plus  $\frac{\theta^2}{\theta+1} < h(x) < \theta$ .

### 2.3 Fonction Quantile de la distribution Lindley

La distribution Lindley de paramètre  $\theta$  est spécifiée par sa fonction de répartition définie en (2.2). Il convient de noter qu'est continue et strictement croissante de sorte

que la fonction de quantile  $X$  est  $Q_X(u) = F_X^{-1}(u)$ ,  $0 < u < 1$ . Dans le résultat suivant, on donne une expression explicite de  $Q_X$  en fonction de la fonction  $W$  de Lambert.

**Théorème 2.2** Pour tout  $\theta > 0$ , la fonction quantile de la distribution Lindley  $X$  est :

$$Q_X(u) = -1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} W_{-1} \left( \frac{\theta + 1}{\exp(\theta + 1)} (u - 1) \right), \quad 0 < u < 1, \quad (2.5)$$

Où  $W_{-1}$  désigne la branche négative de la fonction  $W$  de Lambert.

**Preuve.** Pour tout  $\theta$  fixe,  $\theta > 0$ , soit  $u \in (0, 1)$ . On doit résoudre l'équation  $F_X(x) = u$  par rapport à  $x$ , pour tous  $X > 0$  comme suit :

$$(\theta + 1 + \theta x) e^{-\theta x} = (\theta + 1)(1 - u). \quad (2.6)$$

En multipliant par  $-\exp(-\theta - 1)$  l'équation (2.6), on obtient :

$$-(\theta + 1 + \theta x) \exp(-\theta - 1 - \theta x) = (\theta + 1)(u - 1) \exp(-\theta - 1). \quad (2.7)$$

D'après l'équation (2.7), conjointement avec l'équation (1.3), on voit que  $-(\theta + 1 + \theta x)$  est la fonction  $W$  de Lambert de l'argument réel  $(\theta + 1)(u - 1) \exp(-\theta - 1)$ . Alors, on a

$$W \left( \frac{\theta + 1}{\exp(\theta + 1)} (u - 1) \right) = -(\theta + 1 + \theta x), \quad 0 < u < 1. \quad (2.8)$$

Toujours, pour tout  $\theta > 0$  et  $x > 0$  il est immédiat que  $(\theta + 1 + \theta x) > 1$  et il peut également être vérifié que puisque  $u \in (0, 1)$ . Il pour, en prenant en compte les propriétés de la branche négative de la fonction  $W$  de Lambert a présenté en première chapitre, l'équation (2.8) devient

$$W_{-1} \left( \frac{\theta + 1}{\exp(\theta + 1)} (u - 1) \right) = -(\theta + 1 + \theta x). \quad (2.9)$$

Ce qui implique le résultat. la preuve du théorème est terminée .

## 2.4 Estimation

### Estimation par la méthode des moments (MoM)

Étant donné un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$ , de la distribution de Lindley (2.1), l'estimateur des moments (MoM) de  $\theta$  est :

$$\hat{\theta}_{MoM} = \frac{-(\bar{X} - 1) + \sqrt{(\bar{X} - 1)^2 + 8\bar{X}}}{2\bar{X}}, \bar{X} > 0. \quad (2.10)$$

Le théorème suivant montre que l'estimateur  $\hat{\theta}_{MoM}$  de  $\theta$  est biaisé.

**Théorème 2.3** L'estimateur  $\hat{\theta}_{MoM}$  de  $\theta$  est positivement biaisée, i.e.  $E(\hat{\theta}) - \theta > 0$ .

**Preuve.** Soient  $\hat{\theta}_{MoM} = g(\bar{X})$  et  $g(t) = \frac{-(t-1) + \sqrt{(t-1)^2 + 8t}}{2t}$ ,  $\forall t > 0$ .

Comme  $g''(t) = \frac{1}{t^3} \left[ 1 + \frac{3t^3 + 15t^2 + 9t + 1}{[(t-1)^2 + 8t]^{\frac{3}{2}}} \right] > 0$ ,  $g(t)$  est strictement convexe.

Ainsi, par l'inégalité de Jensen, on a  $E(g(\bar{X})) > g[E(\bar{X})]$ . Enfin, étant donné que

$$E(g(\bar{X})) = g(\mu) = g\left(\frac{\theta + 2}{\theta(\theta + 1)}\right) = \theta,$$

On obtient

$$E(\hat{\theta}_{MoM}) > \theta.$$

Le théorème suivant donne la loi limite de  $\hat{\theta}_{MoM}$ .

**Théorème 2.4.** L'estimateur  $\hat{\theta}_{MoM}$  de  $\theta$  est convergent et asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{P} N\left(0, \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

L'intervalle de confiance de  $\theta$  pour un seuil de confiance  $100(1 - \alpha)\%$  est donné par :

$$\hat{\theta} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n\hat{\sigma}^2}}.$$

Où  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  est le  $(1 - \frac{\alpha}{2})$  percentile de la distribution normale standard.

**Preuve.** Étant donné  $\mu$  est finie,  $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$ .  $g(t)$  est une fonction continue à  $t = \mu$ ,

$g(\bar{X}) \xrightarrow{P} g(\mu)$ , c'est-à-dire  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ . Comme  $\sigma^2 < \infty$ , par le théorème central limite, on a

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow{P} N(0, \sigma^2).$$

En outre, puisque  $g(\mu)$  est différentiable et  $g'(\mu) \neq 0$ , par la méthode Delta, on a :

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}) - g(\mu)) \xrightarrow{P} N\left(0, [g'(\mu)]^2 \sigma^2\right).$$

Enfin, étant donné que

$$g(\bar{X}) = \hat{\theta}_{MoM}, g(\mu) = \theta, \quad \text{et} \quad g'(\mu) = \frac{-1}{2\mu^2} \left[ 1 + \frac{1 + 3\mu}{\sqrt{(\mu - 1)^2 + 8\mu}} \right] = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

### Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Soient  $X_i \sim LD(\theta), i = \overline{1, n}$   $n$  variables aléatoires. La fonction de logvraisemblance est :

$$\ln l(x_i; \theta) = 2n \ln \theta - n \ln(\theta + 1) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i + 1) - n\theta \bar{X}.$$

L'estimateurs de la méthode du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_{MV}$  de  $\theta$  est une solution de l'équation :

$$\frac{\partial \ln l(x_i; \beta, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - \bar{X} - \frac{n}{(\theta + 1)} = 0.$$

On obtient

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{-(\bar{X} - 1) + \sqrt{(\bar{X} - 1)^2 + 8\bar{X}}}{2\bar{X}}, \bar{X} > 0.$$

Avec

$$\frac{\partial^2 \ln l(x_i; \beta, \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{2n}{\theta^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(\theta x_i + \theta)^2} < 0.$$

**Remarque 2.3** L'estimateur de la méthode des moments  $\hat{\theta}_{MoM}$  et l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_{MV}$  du paramètre  $\theta$  sont les mêmes.

### 3 Distribution Poisson–Lindley discrète

Une distribution composée de Poisson peut être obtenue en composant la distribution de Poisson et une distribution due à Lindley. Cette distribution a été introduit par Sankaran [23] pour modéliser des données de comptage.

Supposons que le paramètre  $\lambda$  de la distribution de Poisson à une distribution appartenant à la famille exponentielle de distribution donnée par

$$dF(\lambda) = e^{\lambda\Phi} h(\lambda) B(\Phi) d\lambda, \text{ où } h(\lambda) = 1 + \lambda \text{ et } B(\Phi) = \frac{[-\Phi]^2}{(1-\Phi)}.$$

Alors la distribution de Poisson composée est :

$$\begin{aligned} P_x(\Phi) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} dF(\lambda) \\ &= \frac{B(\Phi)}{x!} \left[ \int_0^{\infty} e^{(\Phi-1)\lambda} \lambda^x d\lambda + \beta \int_0^{\infty} e^{(\Phi-1)\lambda} \lambda^{x+1} d\lambda \right] \\ &= \frac{\Phi^2}{(1-\Phi)} \left( \frac{1-\Phi+x+1}{(1-\Phi)^{x+2}} \right). \end{aligned}$$

Alors on remplace  $\Phi$  par  $-\theta$  on trouve :

$$P_x(\theta) = \theta^2 \frac{(x+2+\theta)}{(\theta+1)^{x+3}}.$$

La fonction de densité de Poisson-Lindley (*PLD*) est :

$$f_{PLD}(x; \theta) = P_x(\theta) = \theta^2 \frac{(x+2+\theta)}{(\theta+1)^{x+3}}, \quad x = 0, 1, \dots, \theta > 0. \quad (2.11)$$

La fonction de répartition correspondante est :

$$F_{PLD}(x) = 1 - \frac{\theta^2 + 3\theta + 1 - \theta x}{(\theta+1)^{x+3}}, \quad x = 0, 1, \dots, \theta > 0. \quad (2.12)$$

La fonction génératrice de Poisson-Lindley (*PLD*) est :

$$M_X(s) = E(e^{sX}) = \frac{\theta^2}{\theta + 1} \frac{2 + \theta - s}{(\theta + 1 - s)^2}.$$

### 3.1 Moments et Mesures Connexes

Soit  $X \rightsquigarrow PLD(\theta)$ , La moyenne et la variance de  $X$  sont :

$$E(X) = \frac{2 + \theta}{\theta(\theta + 1)}, \quad (2.13)$$

$$E(X^2) = \frac{\theta^2 + 4\theta + 6}{\theta^2(\theta + 1)^2}, \quad (2.14)$$

$$Var(X) = \frac{\theta^3 + 4\theta^2 + 6\theta + 2}{\theta^2(\theta + 1)^2}. \quad (2.15)$$

le coefficient d'asymétrie( $\sqrt{\beta_1}$ ) et le coefficient d'aplatissement( $\beta_2$ ) sont :

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{2(\theta + 1)^4(\theta + 2) - \theta^3(\theta + 2)(\theta + 3)}{[2(\theta + 1)^3 - \theta^2(\theta + 2)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\beta_2 = 3 + \frac{2(\theta + 1)^5[(\theta + 3)^2 - 3] - \theta^4(\theta + 2)[(\theta + 4)^2 - 3]}{[2(\theta + 1)^3 - \theta^2(\theta + 2)]^2}.$$

### 3.2 Fonction Quantile de la distribution de Poisson Lindley

Notons  $Q_X$  la fonction quantile de  $X$  défini selon la formule (1.5).

Désormais,  $\log(\cdot)$  désigne le logarithme naturel et  $[t]$  représente le plafond d'un nombre réel  $t$ , qui est,  $t := \inf\{k \in \mathbb{Z} : k \geq t\}$ . Avec la précédente notation, on est en mesure de déclarer ce qui suit.

### 3. Distribution Poisson–Lindley discrète

---

**Théorème 2.5** Pour tout  $\theta > 0$ , la fonction quantile de la distribution de Poisson Lindley  $X$  est

$$Q_X(u) = -\frac{\theta^2 + 3\theta + 1}{\theta} - \frac{1}{\log(\theta + 1)} W_{-1} \left( \frac{\log(\theta + 1)}{\theta(\theta + 1)^{\frac{\theta^2 + 1}{\theta}}} (u - 1) \right), \quad 0 < u < 1. \quad (2.16)$$

Où  $W_{-1}$  désigne la branche négative de la fonction  $W$  de Lambert.

**Preuve.** Pour tout  $\theta > 0$ , soit  $u \in (0, 1)$  Afin d'obtenir l'expression de  $Q_X$ , on a pour résoudre l'équation  $F_X(x) = u$  par rapport à  $k$ , pour tout  $k \geq 0$ , comme suit :

$$\frac{\theta^2 + 3\theta + 1 + \theta k}{(\theta + 1)^k} = 1 - u, \quad k \geq 0. \quad (2.17)$$

l'équation (2.17) peut être écrit comme suit :

$$k + \frac{(\theta + 1)^3}{\theta} (u - 1) (\theta + 1)^k = - \left( \frac{\theta^2 + 3\theta + 1}{\theta} \right). \quad (2.18)$$

Maintenant, on applique le lemme 1.1 pour résoudre l'équation (2.18) par rapport à  $k$ . Par conséquent, l'égalité suivante est réalisée :

$$W \left( \frac{\log(\theta + 1)}{\theta(\theta + 1)^{\frac{\theta^2 + 1}{\theta}}} (u - 1) \right) = - \left( k + \frac{\theta^2 + 3\theta + 1}{\theta} \right) \log(\theta + 1). \quad (2.19)$$

Voyant maintenant l'équation. (2.19). Pour tout  $\theta > 0, k \geq 0$  et  $u \in (0, 1)$  les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(i) \quad \frac{-1}{e} < \frac{\log(\theta + 1)}{\theta(\theta + 1)^{\frac{\theta^2 + 1}{\theta}}} (u - 1) < 0,$$

et

$$(ii) \quad \left( k + \frac{\theta^2 + 3\theta + 1}{\theta} \right) \log(\theta + 1) > 1.$$

En vertu des inégalités (i) et (ii) ci-dessus ainsi que les propriétés de la fonction  $W$  de Lambert, la branche réelle de  $W$  impliqué dans l'équation (2.19) est précisément la branche  $W_{-1}$ , négative, ce qui conduit au résultat souhaité.

### 3.3 Estimation

#### Maximum de vraisemblance

Étant donné un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$ , de la distribution de Poisson-Lindley discrète (2.11), la fonction de logvraisemblance est :

$$\log l(x_i; \beta, \theta) = 2n \log \theta - n(\bar{x} + 3) \log(1 + \theta) + \sum_{i=1}^n \log [x_i + \theta + 2].$$

Sankaran [7] a montré que l'estimateur de la méthode du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  est une solution de l'équation :

$$\frac{\partial \ln l(x_i, \theta)}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - n\left(\frac{\bar{x} + 3}{1 + \theta}\right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + \theta + 2} = 0. \quad (2.20)$$

Sankaran [7] a déclaré que la résolution de l'équation (2.20) est équivalente à la résolution d'un polynôme de degré  $(n + 1)$ , et l'équation (2.20) peuvent avoir plusieurs solutions. Dans ce qui suit, on montre que l'équation (2.20) a une solution unique pour tout  $n$ .

**Théorème 2.6** l'équation (2.20) est équivalent à

$$\varphi(\theta) = 2n - n\bar{x}\theta - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + 1)\theta}{x_i + \theta + 2} = 0.$$

La fonction  $\varphi(\theta)$  est strictement décroissante en  $\theta$ , puisque

$$\varphi'(\theta) = -n\bar{x} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + 1)(x_i + 2)}{(x_i + \theta + 2)^2} < 0.$$

Comme  $\varphi(0) = 2n$  et  $\varphi(\infty) = -\infty$ , il en résulte que  $\varphi(\theta)$  traversera l'axe  $\theta$  qu'une seule fois, c'est-à-dire il existe un unique  $\hat{\theta}$  tel que  $\varphi(\theta) = 0$ .

**Remarque 2.5** Bien qu'efficace de l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}$  mais ce dernier n'est pas simple obtenu et il peut être suffisant pour des raisons

### 3. Distribution Poisson–Lindley discrète

---

pratiques d'utiliser l'estimation des moments

#### Méthode des moments

Étant donné un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$ , de la distribution de Poisson-Lindley discrète (2.11), l'estimateur des moments ( $MoM$ ) de  $\theta$  est :

$$\hat{\theta}_{MoM} = \frac{-(\bar{X} - 1) + \sqrt{(\bar{X} - 1)^2 + 8\bar{X}}}{2\bar{X}}, \bar{X} > 0. \quad (2.21)$$

Le théorème suivant montre que l'estimateur  $\hat{\theta}_{MoM}$  de  $\theta$  est positivement biaisé.

**Théorème 2.7** L'estimateur  $\hat{\theta}_{MoM}$  de  $\theta$  est positivement biaisée, c'est-à-dire

$$E(\hat{\theta}) - \theta > 0$$

**Preuve.** Soit  $\hat{\theta} = g(\bar{X})$  et  $g(t) = \frac{-(t-1) + \sqrt{(t-1)^2 + 8t}}{2t} \quad \forall t > 0$ .

Comme  $g''(t) = \frac{1}{t^3} \left[ 1 + \frac{3t^3 + 15t^2 + 9t + 1}{[(t-1)^2 + 8t]^{\frac{3}{2}}} \right] > 0$ ,  $g(t)$  est strictement convexe.

Ainsi, par l'inégalité de Jensen, on a  $E(g(\bar{X})) > g[E(\bar{X})]$ . Enfin, étant donné que

$$E(g(\bar{X})) = g(\mu) = g\left(\frac{\theta + 2}{\theta(\theta + 1)}\right) = \theta,$$

On obtient

$$E(\hat{\theta}_{MoM}) > \theta.$$

Le théorème suivant donne la loi limite de  $\hat{\theta}_{MoM}$ .

**Théorème 2.8.** L'estimateur  $\hat{\theta}_{MoM}$  de  $\theta$  est convergent et asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n} \left( \hat{\theta}_{MoM} - \theta \right) \xrightarrow{D} N \left( 0, \vartheta^2(\theta) \right).$$

Où

$$\vartheta^2(\theta) = \frac{\theta^2 (\theta + 1)^2 (\theta^3 + 4\theta^2 + 6\theta + 2)}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^2}.$$

**Preuve.** Etant donné  $\mu < \infty$ ,  $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$ ,  $g(t)$  est une fonction continue à  $t = \mu$ ,  $g(\bar{X}) \xrightarrow{P} g(\mu)$ , c'est-à-dire  $\hat{\theta}_{MoM} \xrightarrow{P} \theta$ . Comme  $\sigma^2 < \infty$ , par le théorème central limite, on a :

$$\sqrt{n} (\bar{X} - \mu) \xrightarrow{P} N(0, \sigma^2).$$

En outre, puisque  $g(\mu)$  est différentiable et  $g'(\mu) \neq 0$ , par la méthode Delta, on a

$$\sqrt{n} (g(\bar{X}) - g(\mu)) \xrightarrow{P} N \left( 0, \left[ g'(\mu) \right]^2 \sigma^2 \right).$$

Enfin, étant donné que

$$g(\bar{X}) = \hat{\theta}_{MoM}, g(\mu) = \theta, \quad \text{et} \quad g'(\mu) = \frac{-1}{2\mu^2} \left[ 1 + \frac{1 + 3\mu}{\sqrt{(\mu - 1)^2 + 8\mu}} \right] = -\frac{\theta^2 (\theta + 1)^2}{(\theta^2 + 4\theta + 2)}.$$

En conséquence du théorème 2.6, L'intervalle de confiance de  $\theta$  pour un seuil de confiance  $100(1 - \alpha)\%$  est donné par :

$$\hat{\theta}_{MoM} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n\hat{\sigma}^2}}.$$

où  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  est le  $(1 - \frac{\alpha}{2})$  percentile de la distribution normale standard.

## 4 Distribution de Deux-Paramètres de Lindley

La distribution de Deux Paramètres de Lindley (*Tow Parameter Lindley (TowPLD)*) avec les paramètres  $\alpha$  et  $\theta$  est définie par sa fonction de densité de probabilité

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\theta^2}{\theta + \alpha} (1 + \alpha x) e^{-\theta x}; \quad x > 0, \theta > 0, \alpha > -\theta. \quad (2.22)$$

Il est facile de voir que si  $\alpha = 1$ , la fonction (2.26) de *TowPLD* réduit à la fonction de distribution de LD (2.1) et si  $\alpha = 0$ , elle se réduit à la distribution Exponentielle ( $\theta$ ). La fonction de densité (2.22) de *TowPLD* peut être montrée sous forme de mélange des distributions Exponentielle ( $\theta$ ) et Gamma ( $2, \theta$ ) comme suit :

$$f(x; \alpha, \theta) = p f_1(x) + (1 - p) f_2(x)$$

Où  $p = \frac{\theta}{\theta + \alpha}$ ,  $f_1(x) = \theta e^{-\theta x}$  et  $f_2(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}$ . (pour plus de détails voir. S.Sharma et al.(2013) [24])

La fonction de répartition correspondante est :

$$F(x) = 1 - \frac{\theta + \alpha + \alpha \theta x}{\theta + \alpha} e^{-\theta x}; \quad x > 0, \theta > 0, \alpha > -\theta. \quad (2.23)$$

Le moment d'ordre  $k$  de la distribution de Deux-Paramètres de Lindley est :

$$\mu_k^l = E(X^k) = \frac{\Gamma(k+1) (\theta + \alpha + \alpha k)}{\theta^k (\theta + \alpha)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

d'où, on a

$$\mu_1^l = \frac{(\alpha + 2\alpha)}{\theta(\theta + \alpha)}, \mu_2^l = \frac{2(\alpha + 3\alpha)}{\theta^2(\theta + \alpha)}, \mu_3^l = \frac{6(\alpha + 4\alpha)}{\theta^3(\theta + \alpha)}, \mu_4^l = \frac{24(\alpha + 5\alpha)}{\theta^4(\theta + \alpha)}.$$

La fonction de logvraisemblance de la distribution de deux-Paramètres de Lindley est:

$$\log L(x; \alpha, \theta) = n \log \theta^2 - n \log (\alpha + \theta) + \sum_{i=0}^n \log (1 + \alpha \theta x_i) - n \theta \bar{X}.$$

### Estimation par la méthode des moments

Étant donné un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$ , de Deux-Parameter de Lindley, les estimateurs des moments  $\hat{\theta}_{MoM}$  de  $\theta$  et  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha$  peuvent être obtenus comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \frac{1}{\mu'_2} \left( 2\bar{X} + \sqrt{2} \sqrt{2\bar{X}^2 - \mu'_2} \right), & \bar{X} > 0. \\ \hat{\alpha} &= \frac{\hat{\theta} - \bar{X}\hat{\theta}^2}{\bar{X}\hat{\theta} - 2}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

## 5 Distribution de Lindley Modifiée.

Nous nous intéressons ici à la distribution de Lindley modifiée à un paramètre est défini par sa fonction de densité de probabilité

$$f(x; \theta) = \frac{\theta}{1 + \theta} e^{-2\theta x} [(1 + \theta) e^{\theta x} + 2\theta x - 1], x > 0. \quad (2.25)$$

La fonction de répartition correspondante est :

$$F(x) = 1 - \left[ 1 + \frac{\theta x}{1 + \theta} e^{-x\theta} \right] e^{-x\theta}, x > 0. \quad (2.26)$$

La fonction hasard correspondante est donné par

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\theta(\theta x - 1)}{(1 + \theta) e^{\theta x} + \theta x} + \theta \quad x > 0. \quad (2.27)$$

Plusieurs remarques sur les fonctions  $ML$  sont présentées ci-dessous

**Remarque 5.1** Puisque  $F''(x) = -[\theta^2/(1 + \theta)] e^{-2\theta x} [(1 + \theta) e^{\theta x} + 4(\theta x - 1)] < 0$  pour  $x > 1/\theta$  la fonction  $F(x)$  est concave en fonction de  $x$  pour tout  $\theta > 0$  et  $x > 1/\theta$

**Remarque 5.2** Il est immédiat que  $f(0) = \theta^2/(1 + \theta)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  Le mode de la distribution  $ML$  est obtenu en résolvant l'équation  $f'(x) = 0$  c'est-à-

## 5. Distribution de Lindley Modifiée.

---

dire  $(1 + \theta)e^{\theta x} + 4\theta x = 4$  Une brève étude analytique montre que la distribution  $ML$  est unimodale.

### 5.1 Moments ordinaire

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la distribution  $ML$ , c'est-à-dire, dont la  $cdf$  est donnée par (3). Introduisons tout d'abord la fonction gamma

définie par  $T(X) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$ . En utilisant (4), pour toute fonction  $Q(x)$  telle que toute l'intégrale à venir existe, on a

$$\begin{aligned} E(Q(X)) &= \int_0^{+\infty} Q(x) f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} Q(x) f_1(x) dx + a \left[ \int_0^{+\infty} Q(x) f_2(x) dx - \int_0^{+\infty} Q(x) f_3(x) dx \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

En particulier, en utilisant des propriétés bien connues de la fonction gamma, pour tout entier positif  $r$ , le  $r^{ieme}$  moment de  $X$  existe et il est déterminé par

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_0^{+\infty} x^r f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^r \theta e^{-\theta x} dx + \frac{1}{2(1+\theta)} \left[ \int_0^{+\infty} x^r (2\theta)^2 x e^{-2\theta x} dx - \int_0^{+\infty} x^r (2\theta) e^{-2\theta x} dx \right] \\ &= \frac{T(r+1)}{\theta^r} + \frac{1}{2(1+\theta)} \left[ \frac{T(r+2)}{(2\theta)^r} - \frac{T(r+1)}{(2\theta)^r} \right] \\ &= \frac{1}{\theta^r} \left( 1 + \frac{r}{2^{r+1}(1+\theta)} \right) r!. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Les quatre premiers moments de  $X$  sont donnés par

$$\mu_1^1 = \frac{4\theta + 5}{4\theta(\theta + 1)}, \mu_2^1 = \frac{4\theta + 5}{2\theta^2(\theta + 1)}, \mu_3^1 = \frac{3(19 + 16\theta)}{8\theta^3(\theta + 1)}, \mu_4^1 = \frac{3(9 + 8\theta)}{\theta^4(\theta + 1)} \quad (2.30)$$

Le moment centré de la distribution de Lindley est donné par :

$$\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2$$

En particulier on a

$$\sigma^2 = \frac{(4\theta + 5)(4\theta + 3)}{16\theta^2(\theta + 1)^2}$$

Le  $r^{ieme}$  moment central de  $X$  est donné par

$$E((x - \mu)^r) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \left( \frac{4\theta + 5}{4\theta(1 + \theta)} \right)^k \frac{1}{\theta^{r-k}} \left( 1 + \frac{r-k}{2^{r-k+1}(1 + \theta)} \right) (r-k)! \quad (2.31)$$

le coefficient de d'asymétrie( $\sqrt{\beta_1}$ ) et le coefficient d'aplatissement( $\beta_2$ ) sont :

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{1}{\sigma^3} E[(X - \mu)^3] \quad , \quad \beta_2 = \frac{1}{\sigma^4} E[(X - \mu)^4] .$$

Pour tout  $t < \theta$  la fonction génératrice de moments de  $X$  est donnée par

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tx}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tx} \theta e^{-\theta x} dx + \frac{1}{2(1 + \theta)} \left[ \int_0^{+\infty} e^{tx} (2\theta)^2 x e^{-2\theta x} - \int_0^{+\infty} e^{tx} 2\theta e^{-2\theta x} \right] \quad (2.32) \\ &= \frac{\theta}{\theta - t} + \frac{1}{2(1 + \theta)} \left[ \frac{(2\theta)^2}{(2\theta - t)^2} - \frac{2\theta}{2\theta - t} \right] \\ &= \frac{\theta}{\theta - t} + \frac{t\theta}{(1 + \theta)(2\theta - t)^2} . \end{aligned}$$

En adoptant une approche similaire, pour  $t \in \mathbb{R}$ , la fonction caractéristique de  $X$  est donnée par

$$Q(t) = E(e^{itx}) = \frac{\theta}{\theta - it} + \frac{t\theta}{(1 + \theta)(2\theta - it)^2} . \quad (2.33)$$

## 5. Distribution de Lindley Modifiée.

---

Introduisons maintenant la fonction gamma incomplète définie par  $\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt$ ,  $x > 0$  et la fonction indicatrice sur un événement A notée  $1_A$ . Alors, pour  $t > 0$ , le troisième moment incomplet de  $X$  est donné par

$$\begin{aligned} \mu_r^l(t) &= E(X^r 1_{\{X \leq t\}}) = \int_0^t x^r f(x) dx \\ &= \int_0^t x^r \theta e^{-\theta x} dx + \frac{1}{2(1+\theta)} \left[ \int_0^t x^r (2\theta)^2 x e^{-2\theta x} dx - \int_0^t x^r (2\theta) e^{-2\theta x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\theta^r} \left( \gamma(r+1, \theta t) + \frac{1}{2^{r+1}(1+\theta)} [\gamma(r+2, 2\theta t) - \gamma(r+1, 2\theta t)] \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} \mu_1^l(t) &= \frac{1}{\theta} \left( \gamma(2, \theta t) + \frac{1}{4(1+\theta)} [\gamma(3, 2\theta t) - \gamma(2, 2\theta t)] \right) \\ &= \frac{1}{\theta} \left( 1 - (1+\theta t) e^{-\theta t} - \frac{1}{4(1+\theta)} [4\theta^2 t^2 e^{-2\theta t} + 2\theta t e^{-2\theta t} + e^{-2\theta t} - 1] \right). \end{aligned}$$

À partir des moments incomplets, plusieurs quantités liées à la distribution  $ML$  peuvent être exprimées. Par exemple, l'écart moyen autour de  $\mu$  est donné par

$$\delta_1 = E(|X - \mu|) = 2\mu F(\mu) - 2\mu_1^l(\mu)$$

### 5.2 Paramètre de fiabilité

Nous allons maintenant étudier le paramètre de fiabilité lié à la distribution  $ML$ . Soit  $X_1$  une variable aléatoire suivant la distribution  $ML$  avec le paramètre  $\theta_1 > 0$  et  $X_2$  une variable aléatoire suivant la distribution  $ML$  avec le paramètre  $2\theta_2 > 0$ . avec le paramètre  $\theta_2 > 0$ . Nous supposons que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendants. indépendants. Dans ce cas, un paramètre de fiabilité important lié au modèle

modèle contrainte-résistance est donné par  $R = P(X_2 < X_1)$  (pour plus de

détails, voir Kotz et al. (2003)). Nous l'exprimons en fonction des paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ci-dessous. Nous avons

$$\begin{aligned}
 R &= P(X_2 < X_1) = \int_0^{+\infty} F_2(X) f_1(x) dx \\
 &= 1 - \int_0^{+\infty} \left[ 1 + \frac{\theta_2 x}{1 + \theta_2} e^{-\theta_2 x} \right] e^{-\theta_2 x} \frac{\theta_1}{1 + \theta_1} e^{-2\theta_1 x} \left[ (1 + \theta_1) e^{\theta_1 x} + 2\theta_1 x - 1 \right] dx \\
 &= 1 - \frac{\theta_1}{1 + \theta_1} \int_0^{+\infty} e^{-(2\theta_1 + \theta_2)x} \left[ (1 + \theta_1) e^{\theta_1 x} + 2\theta_1 x - 1 \right] dx - \\
 &\quad \frac{\theta_1 \theta_2}{(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)} \int_0^{+\infty} x e^{-2(\theta_1 + \theta_2)x} \left[ (1 + \theta_1) e^{\theta_1 x} + 2\theta_1 x - 1 \right] dx \\
 &= 1 - \frac{\theta_1}{1 + \theta_1} \left( \frac{1 + \theta_1}{\theta_1 + \theta_2} + \frac{2\theta_1}{(2\theta_1 + \theta_2)^2} - \frac{1}{2\theta_1 + \theta_2} \right) - \\
 &\quad \frac{\theta_1 \theta_2}{(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)} \left( \frac{1 + \theta_1}{(\theta_1 + 2\theta_2)^2} + \frac{4\theta_1}{8(\theta_1 + \theta_2)^3} - \frac{1}{4(\theta_1 + \theta_2)^2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

En particulier, cette expression peut être intéressante dans un contexte de fiabilité statistique. dans un contexte de fiabilité statistique : les estimations de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  donnent une estimation de  $\mathbb{R}$  par substitution.

### 5.3 Estimation

Dans cette section, nous examinons l'inférence pour le modèle  $ML$  via les méthodes des moments et du maximum de vraisemblance.

#### Estimation par la méthode des moments

Soit  $x_1, \dots, x_n$  observations indépendantes de la distribution  $ML$  indépendantes. L'estimation du moment du premier ordre pour  $\theta$  est alors obtenue comme la solution de l'équation suivante :

$$\mu = \bar{x} \text{ en fonction de } \theta$$

## 5. Distribution de Lindley Modifiée.

---

, où  $\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$  Puisque  $\mu = (5 + 4\theta) / [4\theta(1 + \theta)]$  l'estimation du moment pour  $\theta$  est obtenue comme  $\tilde{\theta}^* = g(\bar{x})$  où

$$g(y) = \frac{1 - y + \sqrt{5y + (1 - y)^2}}{2y} \quad (2.36)$$

On peut alors montrer que  $g''(y) > 0$ , ce qui implique que la version aléatoire de  $\tilde{\theta}$ , disons  $\tilde{\theta}^*$ , est (positivement) biaisée. De plus, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la méthode delta implique que  $\sqrt{n}(\tilde{\theta}^* - \theta)$  converge en distribution vers la distribution normale  $N(0, \sigma^2 [g'(\mu)]^2)$  m g. Grâce à ce résultat, nous pouvons construire des intervalles de confiance et des tests statistiques impliquant  $\theta$ , entre autres.

### Estimation du maximum de vraisemblance

Soit  $x_1, \dots, x_n$  un échantillon aléatoire de la distribution  $ML$ . Dans ce cas, la fonction de vraisemblance est donnée par

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{\theta^n}{(1 + \theta)^n} e^{-2\theta \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n [(1 + \theta) e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1]$$

La fonction de log-vraisemblance est donnée par

$$l(\theta) = \log[L(\theta)] = n \log(\theta) - n \log(1 + \theta) - 2\theta \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \log[(1 + \theta) e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1]$$

L'estimation du maximum de vraisemblance pour  $\theta$  est obtenue en résolvant  $\partial l(\theta) / \partial \theta = 0$  en fonction de  $\theta$ , c'est-à-dire

$$\frac{n}{\theta} - \frac{n}{1 + \theta} - 2 \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\theta x_i} (\theta x_i + x_i + 1) + 2x_i}{(1 + \theta) e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1} = 0 \quad (2.37)$$

Il n'existe pas de solution analytique pour cette équation, mais l'estimation du maximum de vraisemblance peut être déterminée au moins numériquement avec n'importe quelle méthode de calcul avec logiciel mathématique. Désignons l'estimation du maximum de vraisemblance

par  $\tilde{\theta}$  et sa version aléatoire par  $\tilde{\theta}^*$ . Il est bien connu que, sous certaines conditions de régularité,  $\tilde{\theta}^*$  est cohérente et asymptotiquement normale, c'est-à-dire, comme  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\sqrt{n} \left( \tilde{\theta}^* - \theta \right)$  tend vers la distribution normale avec une moyenne de 0 et une variance de  $l(\theta)^{-1}$  où  $l(\theta)$  représente l'information de Fisher attendue donnée par  $l(\theta) = -E \left[ \partial^2 \log [f(X)] / \partial \theta^2 \right]$ , où  $X$  désigne une variable aléatoire suivant la distribution  $ML$ . En pratique, sans impact sur la distribution asymptotique, nous pouvons estimer  $l(\theta)$  par  $(1/n) \left[ -\partial^2 l(\tilde{\theta}) / \partial \theta^2 \right]$  où

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{n}{(1+\theta)^2} \sum_{i=1}^n \frac{-2\theta(1+\theta)x_i^3 e^{\theta x_i} + (5+\theta)x_i^2 e^{\theta x_i} + 6x_i e^{\theta x_i} + e^{2\theta x_i} + 4x^2}{[(1+\theta)e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1]^2}.$$

Il est alors possible de construire des ensembles de confiance et des tests statistiques. sont possibles.

**Remarque 5.3** *Contrairement aux distributions exponentielle et de Lindley, l'estimation du moment de  $\theta$  pour la distribution  $ML$  est différente de l'estimation du maximum de vraisemblance. En effet, nous rappelons que, pour la distribution exponentielle, nous avons  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} = 1/\bar{x}$  alors que, pour la distribution de Lindley, nous avons*

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} = \left[ -(\bar{x} - 1) + \sqrt{(\bar{x} - 1)^2 + 8\bar{x}} \right] / (2\bar{x}). \quad (2.38)$$

# CHAPITRE 3

## Distribution Poisson–Lindley modifiée et ses application

### 1 Introduction

Dans ce chapitre on introduit une nouvelle distribution à un paramètre ou on va étudier quelques propriétés comme : la fonction quantile, méthode des moments, estimation du maximum de vraisemblance. Des simulations sont établies pour examiner les estimateurs des paramètres obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance et leur application dans l'analyse de survie.

### 2 Fonction de densité de probabilité

La *pmf* de la distribution *PLM*, c'est-à-dire  $Pp_{-ML}(x; \theta) = P(Y = x)$  où  $P$  désigne la mesure de probabilité, est définie dans par :

$$Pp_{-LM}(x; \theta) = \frac{\theta [(2\theta + 1)^{x+2} + (2\theta x - 1)(\theta + 1)^x]}{(\theta + 1)^{x+1} (2\theta + 1)^{x+2}}, x \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

On peut montrer que  $Pp_{-LM}(x; \theta) \in (0, 1)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . De plus, en utilisant

les formules géométriques suivantes :  $\sum_{i=1}^{+\infty} z^x = 1/(1-z)$  et  $\sum_{i=1}^{+\infty} xz^{x+1} = 1/(1-z)^2$  avec  $|z| < 1$ , on vérifie que

$\sum_{i=0}^{+\infty} Pp_{-ML}(x; \theta) = 1$  ce qui garantit la propriété de base de *pmf*. Comme l'ancienne distribution *LM*, elle constitue une alternative à un paramètre à la distribution *PL* et à l'ancienne distribution de Poisson.

### 3 Fonction de repartition

La fonction de distribution de  $Y$  est donnée par  $Fp_{-LM}(m; \theta) = P(Y \leq m)$  pour tout entier positif  $m$ . Sur la base de (1), nous avons

$$\begin{aligned} Fp_{-LM}(m; \theta) &= \sum_{x=0}^m Pp_{-LM}(x; \theta) \\ &= \frac{\theta}{\theta+1} \left[ \sum_{x=0}^m \frac{1}{(\theta+1)^x} + \frac{2\theta}{(2\theta+1)^2} \sum_{x=1}^m \frac{x}{(2\theta+1)^x} - \frac{1}{(2\theta+1)^2} \sum_{x=0}^m \frac{1}{(2\theta+1)^x} \right] \end{aligned}$$

Maintenant, grâce à l'utilisation des formules suivantes :

$$\sum_{x=0}^m z^x = (1 - z^{m+1}) / (1 - z) \text{ et } \sum_{x=0}^m xz^x = z [mz^{m+1} - (m+1)z^m + 1] / (1 - z)^2$$

pour  $z = 1$ , après quelques factorisations, on obtient

$$\begin{aligned} Fp_{-LM}(m; \theta) &= \frac{1}{(\theta+1)^{m+1} (2\theta+1)^{m+2}} \times \tag{3.2} \\ &\left[ \begin{aligned} &4\theta^3 (\theta+1)^m (2\theta+1)^m + 4\theta^2 [2(\theta+1)^m - 1] (2\theta+1)^m + \\ &[(\theta+1)^m - 1] (2\theta+1)^m + \\ &\theta [5(2\theta+1)^m (\theta+1)^m - m(\theta+1)^m - (\theta+1)^m - 4(2\theta+1)^m] \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Nous pouvons exprimer la fonction quantile de  $Y$  comme  $Qp_{-LM}(q; \theta) = \inf\{m \in \mathbb{N} : Fp_{-LM}(m; \theta) \geq q\}$ . Même si nous avons une expression fermée pour  $Fp_{-LM}(m; \theta)$ , une expression analytique pour  $Qp_{-LM}(q; \theta)$  semble être impossible. Avec l'aide d'un logiciel mathématique, nous pouvons cependant facilement obtenir une évaluation numérique point par point de cette expression.

## 4 Moments ordinaire

Le  $r$  moment de  $Y$  est défini par  $\mu^r = E(Y^r)$  où  $E$  représente l'espérance liée à la mesure de probabilité  $P$ . Mathématiquement, pour  $r \geq 1$ , on peut l'obtenir comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_r^1 &= \sum_{x=0}^m x^r p_{p-LM}(x; \theta) \\ &= \frac{\theta}{\theta+1} \left[ \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{x^r}{(\theta+1)^r} + 2\theta \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{x^{r+1}}{(2\theta+1)^{x+2}} - \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{x^r}{(2\theta+1)^{x+2}} \right] \\ &= \frac{\theta}{\theta+1} \left[ Li_{-r} \left( \frac{1}{1+\theta} \right) + \frac{2\theta}{(2\theta+1)^2} + Li_{-r-1} \left( \frac{1}{2\theta+1} \right) - \frac{1}{(2\theta+1)^2} Li_{-r} \left( \frac{1}{2\theta+1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $Li_s(z) = \sum_{x=1}^{+\infty} z^x/x^s$ , avec  $s \in R$  et  $|z| < 1$ , est la fonction polylogarithme connue.

Il n'existe pas de formule synthétique pour  $Lis(z)$  pour tout  $s$ , mais pour les quatre premières valeurs entières, les égalités suivantes sont valables :  $Li_{-1}(z) = z/(1-z)^2$ ,  $Li_{-2}(z) = z(z+1)/(1-z)^3$ ,  $Li_{-3}(z) = z(z^2+4z+1)/(1-z)^4$  et  $Li_{-4}(z) = z(z^3+11z^2+11z+1)/(1-z)^5$ . Sur la base de ces résultats, après quelques développements, nous pouvons exprimer les quatre premier moment ordinaire de  $Y$  comme

$$\begin{aligned} \mu_1^1 &= \frac{4\theta+5}{4\theta(\theta+1)}, \mu_2^1 = \frac{(\theta+2)(4\theta+5)}{4\theta^2(\theta+1)}, \mu_3^1 = \frac{8\theta^3+58\theta^2+108\theta+57}{8\theta^3(\theta+1)^2}, \\ \mu_4^1 &= \frac{4\theta^4+61\theta^3+214\theta^2+276\theta+108}{4\theta^4(\theta+1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

En particulier, la variance de  $Y$  est donnée comme suit :

$$\sigma^2 = \mu_2^1 - \mu^2 = \frac{(4\theta+5)(2\theta+1)(2\theta+3)}{16\theta^2(\theta+1)^2} \quad (3.5)$$

Nous sommes en mesure de prouver que  $\sigma^2$  est une fonction décroissante par rapport

à  $\theta$  avec  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \sigma^2 = 0$ .

Le coefficient de variation ( $CV$ ) est le suivant :

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \sqrt{\frac{(2\theta + 1)(2\theta + 3)}{4\theta + 5}} \quad (3.6)$$

ainsi que l'indice de dispersion ( $DI$ ) :

$$DI = \frac{\sigma^2}{\mu} = \frac{(2\theta + 1)(2\theta + 3)}{4\theta(\theta + 1)} \quad (3.7)$$

Puisque  $(2\theta + 1)(2\theta + 3) = 4\theta^2 + 8\theta + 3 > 4\theta(\theta + 1)$ , on a l'importante inégalité :  $DI > 1$ . Plus précisément, nous pouvons prouver que  $DI$  est plus précisément, on peut prouver que  $DI$  est une fonction décroissante par rapport à  $\theta$  avec  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} DI = 1$ . Ainsi, La distribution  $P - LM$  peut être utilisée pour la modélisation d'ensembles de données de comptage surdispersées.

En outre, l'asymétrie et l'aplatissement de  $Y$  sont respectivement définis par :

$$S = \frac{\mu_3' - 3\mu_2'\mu + 2\mu^3}{\sigma^3} \quad (3.8)$$

$$K = \frac{\mu_4' - 4\mu_3'\mu + 6\mu_2'\mu^2 - 3\mu^4}{\sigma^4} \quad (3.9)$$

En substituant les expressions des quatre premiers moments de  $Y$ , on obtient l'expression suivante pour  $S$  :

$$S = \frac{106 + 516\theta + 1004\theta^2 + 928\theta^3 + 400\theta^4 + 64\theta^5}{(15 + 52\theta + 52\theta^2 + 16\theta^3)^{3/2}} \quad (3.10)$$

## 5 Moments factoriels

Une autre façon de déterminer les différents moments consiste à utiliser les moments factoriels. En d'autres termes, supposons que  $Y_{(r)} = Y(Y-1)\dots(Y-r+1)$ . Puisque  $Y$  a la distribution d'une variable aléatoire  $X$  suit la distribution de Poisson avec le paramètre  $\lambda$ , en supposant que  $\lambda$  est une variable aléatoire suit la distribution

## 6. Fonction génératrice

---

$LM$ , le  $r$  moment factoriel de  $Y$  est donné par :

$$\mu_{(r)}^{\downarrow} = E(Y_{(r)}) = E[E(X_{(r)} | \lambda)] = E(\lambda^r)$$

Ainsi, grâce au  $r$  moment brut de  $\lambda$ , nous obtenons

$$\mu_{(r)}^{\downarrow} = \frac{1}{\theta^r} \left( 1 + \frac{r}{2^{r+1}(1+\theta)} \right) r! \quad (3.11)$$

Cette relation permet de déduire toutes les mesures obtenues avec les moments bruts.

## 6 Fonction génératrice

Étant donné que  $Y$  a la distribution d'une variable aléatoire  $X$  suivant la distribution de Poisson avec le paramètre  $\lambda$ , en supposant que  $\lambda$  est une variable aléatoire suivant la distribution  $LM$ , la fonction génératrice de probabilités de  $Y$  est définie comme suit :

$$G(s; \theta) = E(s^Y) = E[E(s^X | \lambda)] = E(e^{(s-1)\lambda}) \quad (3.12)$$

La fonction génératrice des moments de  $\lambda$ , avec  $t = s - 1$  permet de conclure que :

$$G(s; \theta) = \frac{\theta}{\theta + 1 - s} + \frac{(s-1)\theta}{(1+\theta)(2\theta+1-s)^2}$$

pour  $s < \theta + 1$ . Les fonctions génératrices des moments et les fonctions caractéristiques suivent immédiatement ; elles sont respectivement données comme

$$M(t; \theta) = E(e^{tY}) = G(e^t; \theta) = \frac{\theta}{\theta + 1 - e^t} + \frac{(e^t - 1)\theta}{(1+\theta)(2\theta+1-e^t)^2} \quad (3.13)$$

pour  $t < \log(\theta + 1)$ , et

$$Q(t; \theta) = E(e^{itY}) = G(e^{it}; \theta) = \frac{\theta}{\theta + 1 - e^{it}} + \frac{(e^{it} - 1)\theta}{(1+\theta)(2\theta+1-e^{it})^2} \quad (3.14)$$

avec  $t^2 = -1$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . À partir de ces fonctions, nous pouvons retrouver certaines caractéristiques de base de la distribution de Poisson Lindley modifiée (PLM) telles que les moments bruts, l'asymétrie, etc.

Nous pouvons également établir certaines inégalités probabilistes, telles que, par l'inégalité de Markov, pour tout  $t \in (0, \log(\theta + 1))$ ,  $P(Y \geq m) \leq e^{-tm} M(t; \theta)$ , et étudier la distribution des combinaisons linéaires de variables aléatoires impliquant la méthode  $P - LM$ .

## 7 Estimation et applications

Nous considérons maintenant le modèle  $P - ML$ , en supposant que  $\theta$  est inconnu. Nous adoptons la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer ce paramètre, avec la méthode des moments discutée brièvement, et nous illustrons l'applicabilité de la distribution  $P - ML$  à l'aide de deux exemples de données réelles.

Soit  $x_1, \dots, x_n$  soit  $n$  observations de  $Y$ ,  $k$  la plus grande valeur entière parmi elles, et  $n_x$  le nombre de valeurs observées  $x$ , satisfaisant ainsi à l'égalité suivante :  $\sum_{x=0}^k n_x = n$ . Ensuite, sur la base de (3.1), la fonction de vraisemblance de  $\theta$  est donnée comme suit

$$L(\theta) = \theta^n \frac{1}{(\theta + 1)^{\sum_{x=0}^k n(x+1)} (2\theta + 1)^{\sum_{x=0}^k n_x(x+2)}} \prod_{x=1}^k [(2\theta + 1)^{x+2} + (2\theta - 1)(\theta + 1)^x]^{n_x} \quad (3.15)$$

Par conséquent, la fonction de log-vraisemblance, définie par  $l(\theta) = \log[L(\theta)]$ , peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} l(\theta) &= n \log \theta - \log(\theta + 1) \sum_{x=0}^k n_x(x + 1) - \log(2\theta + 1) \sum_{x=0}^k n_x(x + 2) + \\ &\quad \sum_{x=0}^k n_x \log [(2\theta x + 1)^{x+2} + (2\theta - 1)(\theta + 1)^x] \\ &= n \log \theta - n \log(\theta + 1) - (\bar{x} + 1) - n \log(2\theta + 1) (\bar{x} + 2) + \\ &\quad \sum_{x=0}^k n_x \log [(2\theta + 1)^{x+2} + (2\theta x - 1)(\theta + 1)^x] \end{aligned}$$

## 8. Applications

---

où  $\bar{x} = (1/n) \sum_{i=0}^n x_i$ . L'estimation du maximum de vraisemblance (*MLE*) de  $\theta$ , disons  $\hat{\theta}$ , est la solution de l'équation non linéaire suivante :  $\partial l(\theta)/\partial \theta = 0$ , avec

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \frac{n}{\theta + 1} (\bar{x} + 1) - \frac{2n}{2\theta + 1} (\bar{x} + 2) + \sum_{x=0}^k n_x \frac{2(x+2)(2\theta+1)^{x+1} + 2x(\theta+1)^x + (2\theta x - 1)x(\theta+1)^{x-1}}{(2\theta+1)^{x+2} + (2\theta x - 1)(\theta+1)^x}$$

Alternativement à la *EMV*, on peut considérer l'estimation du moment (*EMM*) pour  $\theta$  qui est obtenue en résolvant  $\mu = \bar{x}$  en fonction de  $\theta$ . Mathématiquement, cette *EMM* correspond exactement à celle de  $\theta$  dans l'ancienne distribution *ML* c'est-à-dire

$$\hat{\theta} = \frac{1 - \bar{x} + [(\bar{x} - 1)^2 + 5\bar{x}]^{1/2}}{2x} \quad (3.16)$$

Sous des conditions de régularité standard, on peut prouver que  $\hat{\theta}$  et  $\hat{\mu}$  sont cohérents et asymptotiquement normaux. Ces propriétés sont utiles pour construire divers objets statistiques permettant une évaluation précise de  $\theta$ , tels que des intervalles de confiance et des tests statistiques.

## 8 Applications

Dans cette section, deux applications à des données réelles sont développées pour souligner l'importance du modèle *P-LM*. La *EMV* du paramètre  $\theta$  est calculée et les statistiques d'ajustement du nouveau modèle sont comparées à celles d'autres modèles concurrents.

Le premier ensemble de données réelles décrit dans le tableau 1 provient de [5]. Il contient des données d'expériences biologiques qui représentent le nombre de larves de la pyrale du maïs européenne dans le champ. Il s'agit d'une expérience menée au hasard sur huit collines dans 15 répétitions, au cours de laquelle l'expérimentateur a compté le nombre de larves par colline de maïs.

Le deuxième ensemble de données réelles présenté dans le tableau 2 est disponible dans [3] et dans l'ensemble de données 141 de [15]. Il représente le nombre de fois où l'ordinateur tombe en panne chaque semaine au cours des 128 semaines consécutives de fonctionnement

Tableau 1 : Nombre de larves de la pyrale du maïs *pyrausta* dans le champ et résultats statistiques obtenu

Y	Obs freq	Poisson	Poisson-Lindley	Poisson -quasi Lindley	Poisson-Lindley Modifiée
0	43	44.145534184	44.9999986	39.8862899	44.1157918
1	35	44.145532941	29.9999997	33.6138756	31.2144367
2	17	22.072765849	18.7500002	21.3426248	19.2709893
3	11	7.357588409	11.2500004	12.0995966	11.2005392
4	5	1.839397050	6.5625003	6.4591469	6.3208825
5	4	0.367879400	3.7500003	3.3244158	3.5170072
6	1	0.061313232	2.1093752	1.6704471	1.9454977
7	2	0.008759033	1.1718751	0.8255575	1.0748488
8	2	0.001094879	0.6445313	0.4031898	0.5945558
Ttotal	60	60	60	60	-
$\lambda$	-	1	-	-	-
$\hat{\theta}$	-	-	1	0.5624285	0.7700874
$-2 \log L$	-	462.7437	400.8745	402.1484	400.6870
$\chi^2$	-	4162.608	5.4990496	10.0146132	5.6789650
p-value	-	0.000	0.5992985	0.1877469	0.5776942
AIC	-	464.7437	402.8745	404.1484	402.6870
AICc	-	464.7776	402.9084	404.1823	402.7209
BIC	-	467.5312	405.6620	406.9358	405.4745

## 8. Applications

---

Tableau 2 : Distribution du nombre de fois où l'ordinateur est tombé en panne au cours de chacune des 128 semaines consécutives de fonctionnement. avec les résultats statistiques obtenus.

Y	Obs freq	Poisson	Poisson-Lindley	Poisson -quasi Lindley	Poisson-Lindley Modifiée
0	15	4.708857e+01	19.27560383	14.42977774	17.7259203
1	19	4.708857e+01	19.13170881	19.08231193	19.6220324
2	23	2.354428e+01	17.36852330	18.95570258	18.2549947
3	14	7.848094e+00	14.96193268	16.76368107	15.6530792
4	15	1.962024e+00	12.45058537	13.91999018	12.8183756
5	10	3.924047e-01	10.10964793	11.11329656	10.2024619
6	8	6.540078e-02	8.05988261	8.63910859	7.9718041
7	4	9.342968e-03	6.33514960	6.58853505	6.1531345
8	6	1.167871e-03	4.92341554	4.95346750	4.7110926
9	2	1.297634e-04	3.79105622	3.68353642	3.5881866
10	3	1.297634e-05	2.89676320	2.71566028	2.7241949
11	3	1.179668e-06	2.19908843	1.98833716	2.0646421
12	2	9.830563e-08	1.66018086	1.44768579	1.5636915
13	1	7.561971e-09	1.24731297	1.04921528	1.1843565
16	1	2.250586e-12	0.51675851	0.39135270	0.5170605
17	1	1.323874e-13	0.38278119	0.28028170	0.3931708
22	1	4.189369e-20	0.08240787	0.05157894	0.1018824
$\lambda$	-	1	-	-	-
$\hat{\theta}$	-	-	0.4232876	0.2077904	0.2963483
$2 \log L$	-	1427	634.2476	633.2061	632.9591
$\chi^2$	-	2.386995e+19	17.3813201	24.58311211	13.9381964
p-value	-	0.0000e+00	0.2965847	0.05583001	0.5302216
AIC	-	1429.0671	636.2476	635.2061	634.9591
AICc	-	1429.0988	636.2793	635.2378	634.9908
BIC	-	1431.9191	639.0996	638.0581	637.8111

Dans les deux applications, nous comparerons le modèle  $P - LM$  aux modèles de Poisson,  $PL$  et  $PB$ . Les Les mesures d'ajustement incluent le critère d'information

d'Akaike ( $AIC$ ), le critère d'information d'Akaike corrigé ( $AICc$ ), le critère d'information bayésien ( $BIC$ ) et les statistiques du khi-deux ( $\chi^2$ ).

En général, plus les valeurs de ces statistiques sont faibles, meilleur est l'ajustement aux données. De plus les valeurs  $p$  du test de Chi-carré sont communiquées. Les calculs nécessaires sont effectués à l'aide d'un script en langage  $R$ . Les valeurs numériques de  $-2\text{Log}L$ , c'est-à-dire les 2 fois la fonction de log-vraisemblance estimée,  $\chi^2$  et les valeurs  $p$ ,  $AIC$ ,  $AICc$  et  $BIC$  sont répertoriées dans les tableaux 1 et 2 pour les modèles ajustés de Poisson,  $PL$ ,  $PB$  et  $P - LM$  pour le premier et le second ensemble de données, respectivement.

À partir des Tableaux 1 et 2, nous voyons que les plus petits statistiques  $X^2$ ,  $AIC$ ,  $AICc$  et  $BIC$  les plus faibles sont obtenus pour le modèle  $P - ML$ , sauf pour le premier ensemble de données où le modèle  $PL$  est meilleur que les autres en termes de  $\chi^2$  uniquement. Par conséquent, ces résultats nous permettent d'affirmer que la nouvelle distribution  $P - LM$  est un meilleur modèle que les autres. elle peut être préférée pour l'ajustement des ensembles de données actuels.

---

## Conclusion

Dans ce travail, une nouvelle distribution de durée de vie à un paramètre est introduite, définie comme la distribution d'une variable aléatoire  $X$  suivant la distribution de Poisson avec un paramètre  $\lambda$ , en supposant que  $\lambda$  est une variable aléatoire suivant la distribution de Lindley modifiée. Elle est appelée distribution  $P - LM$ . Ses propriétés et applications sont étudiées. Des expressions mathématiques explicites pour certaines de ses propriétés statistiques de base, telles que la fonction de distribution, la moyenne, la variance, le coefficient de variation, l'indice de dispersion, les moments factoriels, l'asymétrie, l'aplatissement et le générateur de probabilité, l'asymétrie, et la fonction génératrice de probabilité. La méthode d'estimation du maximum de vraisemblance est utilisée pour estimer le seul paramètre de la distribution  $P - LM$ .

La qualité de l'ajustement de la distribution  $P - LM$  par rapport à d'autres distributions concurrentes est évaluée pour deux ensembles de données réels. On constate que la distribution  $P - LM$  est plus efficace que d'autres distributions concurrentes.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Asgharzadeh, H. S. Bakouch et L. Esmaeili, Distribution de Pareto Poisson-Lindley avec applications, *J. Appl. Stat.*, 40 (2013), 1717 à 1734.
- [2] E. Altun, Une nouvelle distribution discrète à un paramètre avec régression associée et modèles autorégressifs, *Math. Slovaca*, 70(2020), 979-994.
- [3] A. Bertie et K. McConway, M345 Méthodes statistiques, Unité 11 : Calcul statistique III, Milton Keynes : Open University, 16 (1987).
- [4] D. Bhati, P. Kumawat et E. Gomez-Deniz, Un nouveau modèle de comptage généré à partir de trans-famille exponentielle muette avec une application aux données sur les soins de santé, *Comm. Statist. Méthodes théoriques*, 46(2017), 11060–11076.
- [5] W. Bodhisuwan et S. Sangpoom, La distribution de Lindley pondérée discrète. Dans les Actes de la Conférence internationale sur les mathématiques, les statistiques et leurs applications, Banda Aceh, Indonésie, (2016), 4–6.
- [6] L. Cheng, S. R. Geedipally et D. Lord, Le modèle linéaire généralisé de Poisson-Weibull pour l'analyse données sur les accidents de véhicules à moteur, *Safety Science*, 54 (2013), 38-42.
- [7] C. Chesneau, L. Tomy et J. Gillariose, Une nouvelle distribution de Lindley modifiée avec des propriétés et demandes, *Int. j. stat. manag. Syst.*, 24(2021), 1383-1403.

- [8] E. G. Düeniz, Une nouvelle distribution discrète : propriétés et applications dans les soins médicaux, *J. Appl. Stat.*, 40(2013), 2760–2770.
- [9] Y. Gencturk et A. Yigiter, Numéro de revendication de modélisation à l'aide d'un nouveau modèle de mélange : binôme négatif distribution gamma, *J. Stat. Comput. Simul.*, 86 (2016), 1829-1839.
- [10] M. E. Ghitany, D. K. Al-Mutairi et S. Nadarajah, Distribution de Poisson-Lindley tronquée zéro et son application, *Mathematics and Computers in Simulation*, 79 (2008), 279-287.
- [11] M. E. Ghitany, B. Atieh et S. Nadarajah, La distribution de Lindley et son application, *Math. Comput. Simulation*, 78 (2008), 493 à 506.
- [12] M. E. Ghitany et D. K. Al-Mutairi, Méthodes d'estimation pour la distribution discrète de Poisson-Lindley, *J. Stat. Comput. Simul.*, 79 (2009), 1-9.
- [13] E. Gómez-Düniz, J. M. Sarabia et N. Balakrishnan, Une distribution : extensions et applications actuarielles, *Bulletin ASTIN : Le Journal de l'AAI*, 42 (2012), 655–678.
- [14] R. Grine et H. Zeghdoudi, Sur la distribution quasi-Lindley de Poisson et ses applications, *Journal of Méthodes statistiques appliquées modernes* 16(2017), 21.
- [15] D. J. Hand, F. Daly, A. D. Lunn, K. J. McConway et E. O. Ostrowski, *Un livre manuel de petites données Sets*, cRc Press, Londres : Chapman and Hall, 1993.
- [16] T. Imoto, C. M. Ng, S. H. Ong et S. Chakraborty, Un binôme modifié de type Conway-Maxwell-Poisson distribution et ses applications, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 46(2017), 12210–12225.
- [17] D. V. Lindley, Distributions de repère et théorème de Bayes, *Journal de la Royal Statistical Society, série B (Méthodologique)*, 20 (1958), 102-107.
- [18] D. Lord et S. R. Geedipally, La distribution binomiale-Lindley négative comme outil d'analyse du crash données caractérisées par une grande quantité de zéros, *Accident Analysis and Prevention*, 43 (2011), 1738-1742.

- [19] E. Mahmoudi et H. Zakerzadeh, Distribution généralisée de Poisson-lindley, *Communications in Statistique-Théorie et méthodes*, 39(2010), 1785–1798.
- [20] M. Mohammadpour, H. S. Bakouch et M. Shirozhan, modèle Poisson-Lindley INAR (1) avec applications, *Braz. J. Probab. Stat.*, 32 (2018), 262 à 280.
- [21] J. Rodriguez-Avi, A. Conde-Sanchez, A. J. Saez-Castillo, M. J. Olmo Jimenez et A. M. Martinez-Rodriguez, Un modèle de régression de Waring généralisé pour les données de comptage, *Comput. Étatiste. Analyse des données*, 53(2009), 3717–3725.
- [22] A. J. Sáez-Castillo et A. Conde-Sánchez, Un modèle de régression hyper-Poisson pour les applications sur-dispersées et données de comptage sous-dispersées, *Comput. Étatiste. Analyse des données*, 61 (2013), 148 à 157.
- [23] M. Sankaran, La distribution discrète de Poisson-Lindley, *Biometrics*, 26 (1970), 145-149.
- [24] R. Shanker et A. Mishra, Une distribution de Poisson-Lindley à deux paramètres, *International journal of Statistiques et systèmes*, 9 (2014), 79-85.
- [25] R. Shanker et A. Mishra, Une distribution quasi de Poisson-Lindley, *J. Indian Statist. Assoc.*, 54 (2016), 113–125.
- [26] R. Shanker et A. Mishra, Une distribution de Lindley à deux paramètres, *Statistiques en transition nouvelle série*, 14(2013), 45–56.
- [27] R. Shanker et A. Mishra, Une distribution quasi Lindley, *African Journal of Mathematics and Computer Recherche scientifique*, 6 (2013), 64-71.
- [28] R. Shanker, S. Sharma et R. Shanker, Une distribution de Poisson Lindley discrète à deux paramètres, *Journal de l'Association éthiopienne de statistique*, 21 (2012), 15-22.
- [29] R. Shanker, S. Sharma et R. Shanker, Une distribution de Lindley à deux paramètres pour la modélisation de l'attente et de la données sur les temps de survie, *Appl. Math.*, 4 (2013), 363-368.
- [30] R. Shanker et A. L. Tekie, Une nouvelle distribution quasi de Poisson-Lindley, *International Journal of Statistics*

- et Systems, 9 (2014), 87-94.
- [31] R. Shanker et A. G. Amanuel, Une nouvelle distribution quasi Lindley, International Journal of Statistics et Systems, 8 (2013), 143-156.
- [32] G. Shmueli, T. P. Minka, J. B. Kadane, S. Borle et P. Boatwright, Une distribution utile pour l'ajustement données discrètes : renaissance de la distribution de Conway-Maxwell-Poisson, J. Roy. Étatiste. Soc. Ser. C, 54 (2005), 127-142.
- [33] M. M. Shoukri, M. H. Asyali, R. VanDorp et D. Kelton, La régression gaussienne inverse de Poisson modèle dans l'analyse des données de comptage en grappes, Journal of Data Science, 2 (2014), 17-32.
- [34] W. Wongrin et W. Bodhisuwan, Modèle linéaire généralisé de Poisson-Lindley pour les données de dénombrement, J. Appl.Stat., 44 (2017), 2659 à 2671.
- [35] H. Zeghdoudi et S. Nedjar, Sur la distribution de Poisson pseudo Lindley : propriétés et applications, Journal des probabilités et des sciences statistiques, 15 (2017), 19-28.
- [36] H. Zamani, N. Ismail et P. Faroughi, Version univariée exponentielle pondérée de Poisson et régression modèle avec applications, J. Appl. Math. Stat., 10 (2014), 148-154.
- [37] H. Zakerzadeh et A. Dolati, Distribution de Lindley généralisée, J. Math. Ext., 3 (2009), 13-25.
- [38] H. Zeghdoudi et S. Nedjar, Une pseudo distribution de Lindley et son application, Afr. Stat., 11 (2016), 923-932.
- [39] H. Zeghdoudi et S. Nedjar, Sur la distribution gamma de Lindley : propriétés et simulations, J. Comput. Appl. Math., 298 (2016), 167 à 174.
- [40] S. Nedjar et H. Zeghdoudi, Nouvelle distribution composée : propriétés, distribution gonflée et application cations, J. Agric. Stat. Sci., 16(2020), 519-526.