



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et informatiques

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Etude analytique de l'application de l'équation de la chaleur au modèle de Black-Sholes

Présenté par:

Taallah Chaima

Devant le Jury :

Dr. Grine Razika	MCB	Université Chadli Bendjedid El Tarf	Président
Dr. Zehani Nadjla	MCB	Université Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Zidani Nesrine	MCB	Université Chadli Bendjedid El Tarf	Examinateur

Année Universitaire 2020-2021

Table des matières

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Résumé	iii
Liste des figures	vi
1 Rappels et Notions élémentaires	3
1.1 Outils de calcul stochastique	3
1.1.1 Processus stochastique	3
1.1.2 Filtration	3
1.1.3 Mouvement Brownien	3
1.1.4 Mouvement Brownien géométrique	3
1.1.5 Martingale	4
1.1.6 Intégrale stochastique	4
1.1.7 Équation différentielle stochastique	5
1.1.8 Equations différentielles stochastiques géométrique	6
1.1.9 Formule d'Itô	7
1.2 Notions élémentaires en finance	7
1.2.1 Marché financier	7
1.2.2 Equilibre d'un marché financier	8
1.2.3 Produit dérivé	8
1.2.4 Options	8
1.2.5 Actif sous-jacent	8
1.2.6 Le prix d'exercice ou strike(K)	9
1.2.7 La date d'exercice (T)	9
1.2.8 La prime de l'option (ou premium)	9
1.2.9 Pay-off d'une option	10
1.2.10 Les stratégies optionnelles de base	10
1.2.11 Évaluation	15
1.2.12 Absence d'Opportunité d'Arbitrage	15
1.2.13 Autofinancement	15
1.2.14 Produit répliquable	15
1.2.15 Marché complet et viable	15
1.2.16 Partie Put et Call	16
1.2.17 Volatilité	16

2	L'équation aux dérivées partielles de Black-Sholes	17
2.1	Introduction	17
2.2	Description du modèle	17
2.2.1	L'évolution des cours	17
2.3	Hypothèses du modèle	18
2.4	Équation aux dérivées partielles d'évaluation de Black- Scholes . . .	19
3	Résolution analytique de l'équation de Blach-Scholes	21
3.1	Résolution de l'équation de la Chaleur	21
3.2	Transformation de l'EDP de Black-Scholes à l'équation de la chaleur	25
3.3	Évaluation du prix de l'option	28
3.3.1	Cas d'une option Call européenne	28
3.3.2	Cas d'une option Put européenne	31
4	Application Numérique	33
4.1	Fonction BSCall	33
4.2	Tracer de la solution en 2D	34
4.3	Tracer de la solution en 3D	35
	Conclusion	36

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier chaleureusement Madame Zehani Nadjla, Maître de Conférence classe B à l'Université Chadli Bendjedid El Tarf, pour sa disponibilité, son encadrement assidu, ses orientations pertinentes et ses nombreux conseils précieux qui m'ont permis d'avancer dans ma recherche.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude et mes plus sincères remerciements à Madame Grine Razika, Maître de Conférence classe B à l'Université Chadli Bendjedid El Tarf, qui m'a fait l'honneur d'être la présidente du jury de mémoire. Qu'elle trouve ici ma gratitude et ma reconnaissance pour l'intérêt qu'elle a manifesté pour ce travail.

Je remercie sincèrement et vivement Madame Zidani Nesrine, Maître de Conférence classe B à l'Université Chadli Bendjedid El Tarf, pour avoir accepté d'examiner mon travail. Je suis profondément reconnaissante de sa participation à ce jury.

Et bien sûr, un grand remerciement pour tous ceux qui ont contribué à l'accomplissement de ce travail.

Dédicaces

C'est avec honneur et gratitude que je dédie cet humble travail, fruit de longues années d'étude universitaire, aux personnes les plus chères au monde.

A mes parents, qui ont toujours été pour moi un soutien constant tout au long de ma vie.

En effet ils n'ont ménagé aucun effort pour mes besoins divers et ma réussite, m'ont entouré d'affection, ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

A mon mari "Aimen" et ma petite fille : "Farah Belkacemi".

A mes frères et ma sœur : "Rihen, Badreddine et Faycel".

A mes meilleures amies.

A tous ceux ou celles qui m'ont encouragé, soutenu et aidé directement ou indirectement, de près ou de loin et ce tout au long de mon parcours.

Résumé

Dans ce travail, nous allons étudier un modèle d'équation aux dérivées partielles (EDP) très connu en physique sous le nom "l'équation de la chaleur".

Cette dernière joue un rôle crucial au niveau du marché financier notamment dans la formulation du modèle de Black-Scholes.

Le qui a été étudié par Black-Scholes (1973) était l'évaluation et d'une option de type Européen (Call ou Put) : le prix de l'option est intégré dans une équation différentielle stochastique (EDS), cette équation est utilisée pour l'extraction de l'EDP de Black-Scholes et le transformé en forme de l'équation de la chaleur pour facile à résoudre.

En somme, nous obtenons une équation mathématique pour évaluer l'option d'achat (Call Européenne), en utilisant la relation entre le prix d'un Call et celui d'un Put .Nous pouvons aussi évaluer l'option de vente (Put Européenne).

Mots clés :

EDS, EDP, Black-Scholes, Équation de la chaleur, Transformée de Fourier, Options.

Abstract

In this work, we have studied a well known partial differential equation model in physics, the heat equation. It plays an important role in the financial market, especially in the formulation of the Black-Scholes model.

The problem addressed by Black and Scholes in 1973 was evaluating the pricing of the European option : The option price is modelled by a differential equation, which is used to extract the Black-Scholes partial differential equation and then convert it into a heat equation to be easily solved.

Finally, we obtain a mathematical equation to value the European Call option, and using the relationship between the Call option and the Put option, in which the latter can be valued

Keywords :

SDE, PDE, Black-Scholes, Heat equation, Fourier transformation, Options.

ملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة نموذج من المعادلات التفاضلية الجزئية المعروفة جدا في الفيزياء ألا وهي معادلة الحرارة. هذه الأخيرة تلعب أيضاً دوراً مهماً في السوق المالية ، ولا سيما في صياغة نموذج بلاك-تشولز. المشكلة التي عالجها بلاك و تشولز سنة ١٩٧٣ هي تقييم سعر الخيار الأوروبي: سعر الخيار منمذج في معادلة تفاضلية عشوائية، تستخدم هذه المعادلة لاستخراج المعادلة التفاضلية الجزئية لبلاك تشولز ثم تحويلها على شكل معادلة حرارة كي يسهل حلها. أخيراً نتحصل على معادلة رياضية لتقييم خيار الشراء الأوروبي، وباستخدام العلاقة التي تربط خيار الشراء وخيار البيع يمكن أيضاً تقييم خيار البيع.

الكلمات المفتاحية:

معادلة تفاضلية جزئية، معادلة تفاضلية عشوائية، بلاك-تشولز، معادلة الحرارة، خيار.

Table des figures

1.1	Flux de trésorerie selon le cours sous-jacent.	10
1.2	Le pay-off pour l'acheteur d'une option d'achat (Call).	11
1.3	Le pay-off pour le vendeur d'une option d'achat (Call).	12
1.4	Le pay-off pour l'acheteur d'une option de vente (Put).	13
1.5	Le pay-off pour le vendeur d'une option de vente (Put).	14
4.1	Tracer la solution analytique de Black-Scholes pour un Call Européen(2D)	34
4.2	Tracer de la solution analytique de Black-Scholes pour un Call Européen(3D)	35

Introduction générale

L'être humain a connu, la notion des options, depuis qu'il a commencé à pratiquer des échanges commerciaux c'est à dire à tronquer sa marchandise, les gens s'échangeaient des contrats de produits dérivés, achat et vente d'un actif à un prix d'exercice donné et une date future, en payant au vendeur du contrat une somme qui n'est autre que la prime négociée par les deux parties.

En finance, une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur, l'évaluation des options est devenue un domaine d'une importance ce qui a ouvert la porte à la recherche pour beaucoup d'économistes et de mathématiciens.

Le modèle Black-Scholes est l'un des modèles d'évaluation des options, il fut publié en 1973 [4] , et constituait le prolongement de travaux réalisés par Paul Samuelson et Robert Merton [25] . Le mathématicien français Louis Bachelier avait inauguré l'étude du sujet en 1900 [1] . L'intuition fondamentale de Black-Scholes fut de mettre en rapport le prix implicite de l'option et les variations de prix de l'actif sous-jacent.

Sachant que l'option possède un coût lors de l'achat. Le modèle de Black-Scholes dispose d'une formule exacte permettant d'évaluation ces prix. Réussir à estimer ces prix est un domaine de recherche en mathématiques financières à part entière : c'est ce que l'on appelle couramment le pricing d'options.

La méthode d'évaluation qui sera présentée dans notre travail est la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) via l'étude de l'équation de Chaleur. En effet, cette dernière est une équation aux dérivées partielles linéaire homogène d'ordre 2 dont la solution explicite a été mise en évidence en mathématiques et en physique théorique, notamment suite aux travaux du mathématicien et physicien français Jean – Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) [9].

Notre intérêt cette étude se portera sur l'étude analytique de l'une des applications de l'équation de la chaleur sur un modèle mathématique d'évaluation des options appelé modèle de Black-Scholes, qui permet de prédire les changements qui se produiront dans les options financiers au fil du temps.

Ce mémoire est constitué principalement de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques définitions nécessaires en calcul stochastique, tels que le processus stochastique, le mouvement brownien, l'intégration stochastique...etc, ainsi que quelques définitions en finance, tels que le produit dérivé, les options, les actifs, les marchés financiers. ..etc.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons le modèle de Black-Sholes, en donnant ces hypothèses, ainsi qu'en extrayant son équation aux dérivées partielles qui permet l'évaluation des options.

Dans le troisième chapitre, nous résolvons d'abord l'équation de la chaleur, puis nous écrivons l'équation mathématique d'évaluation des options (cas de l'option d'achat Européenne et cas de l'option de vente Européenne) sous la forme d'une solution de l'équation de la chaleur.

Et le quatrième et dernier chapitre, s'agit d'une application numérique utilisant le programme Matlab pour la fonction qui permet de donner la solution analytique de l'équation de Black-Scholes et de la représenter en deux et trois dimensions.

Chapitre 1

Rappels et Notions élémentaires

1.1 Outils de calcul stochastique

1.1.1 Processus stochastique

Définition 1. On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace E muni d'une tribu ε , une famille $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans (E, ε) [17].

Un processus stochastique représente l'évolution aléatoire d'une quantité dans le temps : la valeur $X_t(\omega)$ représente la quantité au temps t pour la réalisation ω .

1.1.2 Filtration

Définition 2. Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité. Une filtration sur cet espace est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$, indexée par $[0, \infty]$, de sous-tribus de \mathcal{F} . On a alors, pour tous $0 \leq s \leq t$.

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}$$

On dira parfois que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ est un espace de probabilité filtré [7].

1.1.3 Mouvement Brownien

Définition 3. On appelle Mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles, $(X_t)_{t \geq 0}$ qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues [10]. Ce qui signifie que :

- Continuité : P p.s. la fonction $s \rightarrow X_s(\omega)$ est une fonction continue.
- Indépendance des accroissements : Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$.
- Stationnarité des accroissements : si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.

1.1.4 Mouvement Brownien géométrique

Définition 4. Un Mouvement Brownien géométrique, de valeur initiale $S_0 > 0$ déterministe, de coefficient de tendance (ou dérive) μ et de coefficient de diffusion

σ , est un processus $(S_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

où $W_t; t \geq 0$ est Mouvement Brownien standard réel [10].

1.1.5 Martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration de cet espace.

Définition 5. Une famille adaptée $(M_t)_{t \geq 0}$ de variables aléatoires intégrables [10] (c'est-à-dire vérifiant $\mathbb{E}(|M_t|) < +\infty$ pour tout t) est :

- Une martingale si, pour tous $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$.
- Une sur-martingale si, pour tous $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s$.
- une sous-martingale si, pour tous $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s$.

En finance, la notion de martingale est très importante dans l'évaluation des actifs dérivés, car elle occupe une très grande place dans la notion d'arbitrage. Les martingales sont des variables aléatoires dont les variations futures sont imprévisibles avec l'information disponible en date précédente.

L'intérêt d'utilisation des martingales en finance

1. Le lien entre martingale et absence d'opportunité d'arbitrage. En effet, lorsque le marché est parfaitement arbitré et qu'il est viable et complet alors le processus des prix actualisé des actifs risqués est une martingale
2. Le fait qu'une martingale possède un drift nul, est un élément clé du pricing en univers risqué neutre, nous permet de trouver les équations aux dérivées partielles d'évaluation.

1.1.6 Intégrale stochastique

Définition 6. Un processus $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ est appelé processus élémentaire s'il existe une subdivision $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ et un processus discret $(\theta_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ avec θ_i mesurable par rapport à \mathcal{F}_{t_i} et dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ tel que :

$$\theta_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega)_{]t_i, t_{i+1}[}(t)$$

On note ε l'ensemble des processus élémentaires qui est un sous espace de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$ [7].

Définition 7. Avec les mêmes notations, l'intégrale stochastique entre 0 et $t \leq T$ d'un processus élémentaire $\theta \in \varepsilon$ est la variable aléatoire définie par [7] :

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^k \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \theta_i (B_t - B_{t_k}) \text{ sur }]t_k, t_{k+1}[,$$

Soit $\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^n \theta_i (B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i})$.

On associe donc à $\theta \in \varepsilon$ le processus $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$.

Proposition 8. Propriétés de l'intégrale Stochastique sur ε

Sur l'ensemble des processus élémentaires ε , l'intégrale stochastique satisfait les propriétés [7] :

1. $\theta \longmapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire
2. $t \longmapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ est continue p.s.
3. $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus \mathcal{F} -adapté.
4. $\mathbb{E} \left[\int_0^t \theta_s dB_s \right] = 0$ et $\text{Var} \int_0^t \theta_s dB_s = \mathbb{E} \left[\int_0^t \theta_s^2 ds \right]$.
5. propriété d'Isométrie :

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \theta_s^2 ds \right]$$
6. De manière plus générale, on a :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \theta_u dB_u \setminus \mathcal{F}_s \right] = 0$$
 et $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \theta_u dB_u \right)^2 \setminus \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \theta_u^2 du \setminus \mathcal{F}_s \right]$
7. On a même le résultat plus général :

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_s^t \theta_u dB_u \right) \left(\int_s^u \phi_u dB_u \right) \setminus \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_s^{t \wedge u} \theta_v \phi_v dv \setminus \mathcal{F}_s \right]$$
8. $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ est une \mathcal{F} -martingale.
9. le processus $\left(\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\right)_{0 \leq t \leq T}$ est une \mathcal{F} -martingale.
10. la variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds$$
11. La covariation quadratique entre 2 intégrales stochastiques est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t \wedge u} \theta_s \phi_s ds$$

1.1.7 Équation différentielle stochastique

Définition 9. Une équation différentielle stochastique notée par EDS, est une généralisation de la notion d'équation différentielle prenant en compte un terme de bruit blanc. Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels des cours de bourse ou les Mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elle permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles. Les domaines d'application des EDS sont vastes : physique, biologie, dynamique des populations, écologie, mathématiques financières, traitement du signal, théorie du contrôle, ...

Une équation différentielle stochastique EDS est la donnée d'une équation du type [7] :

$$dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t$$

où X_t est un processus aléatoire inconnu, que l'on appelle communément équation de diffusion.

Intégrer L'EDS, c'est trouver l'ensemble des processus vérifiant la diffusion entière. De manière informelle, on appelle équation différentielle stochastique une

équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique. Plus précisément

Définition 10. Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme [7] :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + a(t, X_t) dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

où dB_t , est la différentielle d'un Mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ et a et b des applications boréliennes de $[0, T] \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} .

Définition 11. Un processus (X_t) est solution de cette EDS (appelé processus de diffusion), s'il est continu (\mathcal{F}_t) -adapté tel que [7] :

$$\int_0^t |b(s, X_s)| ds + \int_0^t a^2(s, X_s) ds < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad P - p.s$$

et qui vérifie :

$$X_t = x + \int_0^t |b(s, X_s)| ds + \int_0^t a(s, X_s) dB_s, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad P - p.s$$

Ces équations n'ont pas toujours de solution. Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution, nous avons besoin de deux types de conditions :

Condition 1. Assurer l'unicité de la solution grâce au caractère contractant (Lipshitz) des fonctions a et b . Il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq L |x - y|$$

pour tout $(t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$.

Condition 2. Assurer que le processus n'explose pas en temps fini afin qu'il soit bien défini sur tout \mathbb{R}^+ . Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|a(t, x)|^2 + b(t, x)^2 \leq C (1 + |x|^2)$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Si les fonctions a et b satisfont les conditions 1 et 2. Alors l'EDS admet une unique solution.

1.1.8 Equations différentielles stochastiques géométrique

Les équations différentielles stochastiques sont des équations différentielles perturbées par un bruit aléatoire (dans notre cas c'est le mouvement Brownien) [7]. Elles ont le même but que les équations ordinaires, c'est à dire modéliser le comportement d'un phénomène selon les hypothèses du modèle et la nature du sous-jacent. Il existe plusieurs types d'équations différentielles stochastiques selon le comportement du sous-jacent :

— EDS à coefficient linéaire constant.

- EDS géométrique, utilisée dans le modèle de Black-Scholes et qui a pour but de modéliser des actions.
- Processus racine carrée.
- Processus mean reverting (retour à la moyenne).
- Processus d'Ornstein-Uhlenbeck, qui a pour but de modéliser les taux d'intérêt.

1.1.9 Formule d'Itô

Définition 12. On appelle processus d'Itô à valeurs réelles tout processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans \mathbb{R} tel que [10] :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad \text{pour } t \in [0, T] \quad \text{P.p.s}$$

avec X_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable, $(\mu_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq T}$ deux processus adaptés à \mathcal{F}_t ; vérifiant les conditions d'intégrabilités :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\mu_s| ds \right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T |\sigma_s|^2 ds \right] < \infty$$

La notation infinitésimale de cette relation est :

$$\begin{cases} dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème 13. Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ processus d'Itô, et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continument dérivable en x et dérivable en t , alors pour $t \in [0, T]$, la formule d'Itô s'écrit [10] :

$$d(f(t, X_t)) = \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} d\langle X, X \rangle_t$$

1.2 Notions élémentaires en finance

Le monde de la finance fait appel à une terminologie spécifique et à de nombreux anglicismes, nous donnerons dans ce qui suit quelques définitions concernant les options financières.

1.2.1 Marché financier

Définition 14. Les marchés financiers (capital markets), sont les marchés où sont effectuées les transactions sur des actifs financiers et de plus en plus, leurs produits dérivés [21].

1.2.2 Equilibre d'un marché financier

Par définition, un marché est dit équilibré si l'offre est égale à la demande, cet équilibre est réalisé en ajustant les prix des actifs. Dès que le marché est en situation d'équilibre et suffisamment liquide, tout opérateur trouvera une contrepartie acceptant de traiter au prix du marché [21].

1.2.3 Produit dérivé

Un produit ou instrument dérivé est un instrument dont la valorisation dépend (dérive) de la valeur d'un autre instrument qu'on appelle le « sous-jacent » [16].

Les parties qui échangent un instrument dérivé négocient en fait les termes d'un contrat qui vont permettre de déterminer les flux financiers issus de la négociation en fonction, principalement, de l'évolution de la valeur du ou des sous-jacents. L'instrument sous-jacent n'est pas physiquement échangé au moment de la négociation. Cet échange peut être optionnel (cas des options), différé (futures ou contrats à terme) voire ne jamais avoir lieu (swap de taux).

1.2.4 Options

Une option est un titre financier conditionnel qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent, à un prix déterminé à l'avance appelé prix d'exercice (strike en anglais) et pendant une période donnée appelé échéance. Pour exercer ce droit, l'acheteur de l'option doit verser une prime au vendeur, cependant, Le vendeur de l'option est tenu de se soumettre à la décision du détenteur de l'option. Cette option peut être exercée soit à l'échéance (option européenne), soit pendant la durée d'exercice (option américaine)[12].

Les options peuvent être négociées sur un marché organisé (contrats standardisés, chambre de compensation, appels de marge) ou de gré à gré, c'est à dire directement entre l'émetteur et le souscripteur de l'option.

Selon la terminologie anglo-saxonne, un «Call» est une option d'achat et un «Put» est une option de vente, ces droits sont octroyés moyennant un prix appelé prime ou premium. À la différence des contrats à terme, une option ne constitue pas une obligation pour son détenteur. L'option peut être levée si le détenteur décide d'exercer son droit. Ce droit peut également être revendu à un tiers (option négociable). Un investisseur peut très bien acheter une option de vente ou vendre une option d'achat. Sa décision dépend de ses anticipations concernant l'évolution du cours de l'actif sous-jacent. Les options se distinguent, également, par l'actif sur lequel elles portent, autrement dit l'actif sous-jacent. Celui-ci peut être une action, un tracker, un indice...

1.2.5 Actif sous-jacent

Un actif sous-jacent est un actif sur lequel porte une option ou plus largement un produit dérivé. Il peut être financier (actions, obligations, bons du Trésor,

contrats à terme, devises, indices boursiers...) ou physique (matières premières agricoles ou minérales...)[16].

L'actif sous-jacent est l'actif réel sur le prix contractuel duquel porte le produit dérivé concerné. Il désigne en effet l'instrument support d'un contrat à terme dont la qualité est strictement définie. Le prix de l'actif sous-jacent, correspondant au cours, noté S_t et qui évolue en fonction des conditions de l'offre et de la demande sur le marché .

1.2.6 Le prix d'exercice ou strike(K)

Le prix d'exercice d'une option est le prix fixé au préalable avec lequel le détenteur peut exercer son droit d'acheter ou de vendre l'option [2]. Le vendeur est dans l'obligation d'honorer son contrat en se pliant à la décision du détenteur. Une option d'achat a plus de chance d'être exercée lorsque son prix d'exercice est faible, sa valeur est ainsi une fonction décroissante de son prix d'exercice. A l'inverse, une option de vente a plus de chance d'être exercée si son prix d'exercice est élevé par conséquent, sa valeur est ainsi une fonction croissante de son prix d'exercice .

1.2.7 La date d'exercice (T)

C'est la date à laquelle l'option perd toute valeur et disparaît ; elle correspond au dernier jour auquel l'option peut être exercée ; plus la date d'exercice de l'option est lointaine, plus le prix de l'option est élevé [2].

1.2.8 La prime de l'option (ou premium)

En contrepartie de l'engagement d'acheter ou de vendre des actions à un prix déterminé, le vendeur de l'option demande une rétribution : la prime [2]. La prime est versée par l'acheteur au vendeur lors de la conclusion de l'engagement et reste acquise au vendeur de l'option même si l'acheteur décide de ne pas exercer son droit. Contrairement au prix d'exercice, la prime de l'option n'est jamais fixe ; elle varie au gré des transactions selon l'offre et la demande.

Exemple

L'acheteur d'un Call sur l'indice CAC 40 a tout intérêt à exercer son option si la valeur finale de l'indice, qui constitue ici l'actif sous-jacent, est supérieure au prix d'exercice. Par exemple, si le prix d'exercice est de 5 050 points et que l'indice CAC 40 vaut 5 100 points, l'investisseur peut exercer son option en achetant la contrepartie au prix de 5 050 points (il prend livraison d'un tracker sur l'indice CAC 40) et revendre directement l'actif sur le marché au prix de 5 100 points. Il empochera la différence, c'est-à-dire 50 points. Il devra cependant retirer le montant de la prime payée pour déterminer la rentabilité de son investissement. Dans le cadre d'un Put, la logique est exactement opposée. L'acheteur du contrat a acquis un droit de vendre. Ainsi, il peut livrer le sous-jacent, ici le tracker sur

l'indice CAC 40, à la contrepartie vendeuse du contrat dès lors que le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice de l'option à l'échéance. Par exemple, si le prix d'exercice est de 5 000 points et que l'indice CAC 40 vaut 4 900 points, l'investisseur peut exercer son option. Pour cela, il achète la contrepartie au prix de 4 900 points (il en prend livraison) et revend directement l'actif au prix de 5 000 points. Il empoche ainsi la différence, c'est-à-dire 100 points. Il devra également retirer le montant de la prime du Put payée pour déterminer la rentabilité de son investissement [2].

1.2.9 Pay-off d'une option

Le résultat de l'option à l'échéance est appelé gain ou pay-off, il est équivalent à la valeur intrinsèque, ce qui signifie pour un Call que son pay-off est égal à la différence entre le prix du sous-jacent [2] et le prix d'exercice et pour un Put, au prix d'exercice diminué du prix du sous-jacent. Le pay-off d'une option implique aussi de déduire la prime payée pour acquérir l'option. Nous constatons quatre situations possibles, deux pour un Call et deux pour un Put.

1.2.10 Les stratégies optionnelles de base

Le détenteur peut décider d'exercer ou non l'option qu'il détient en fonction de l'évolution du prix de l'actif sous-jacent par rapport au prix d'exercice (K) de l'option [2].

Une option est dite dans la monnaie « in the money » lorsque son prix d'exercice est inférieur au prix de son actif sous-jacent pour un Call (ou supérieur au prix de son actif sous-jacent pour un Put), hors de la monnaie « out of the money » dans le cas contraire ; et à la monnaie « at the money » si le prix d'exercice est égal au cours actuel de l'actif sous-jacent de l'option.

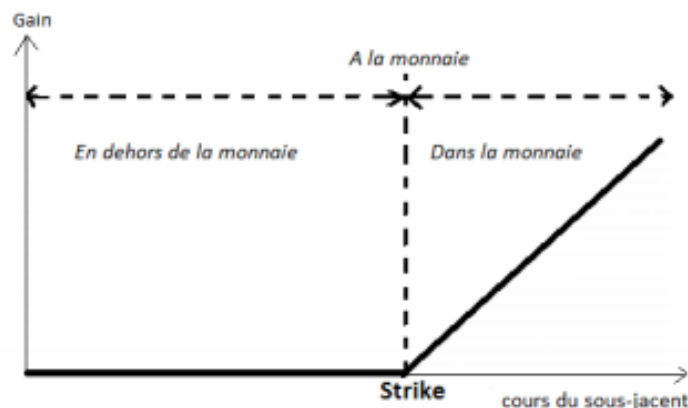


FIGURE 1.1 – Flux de trésorerie selon le cours sous-jacent.

Les schémas suivants mettent en évidence les stratégies de base d'une option dans différents cas :

A L'achat d'une option (Call)

A.1 L'achat d'une option d'achat : L'achat d'une option d'achat donne le droit d'acheter, à (ou jusqu'à) l'échéance, un actif à un prix déterminé, appelé prix d'exercice, en contrepartie du versement immédiat d'une prime au vendeur de l'option.

Soient :

- K le prix d'exercice de l'option.
- S le cours (prix) de l'actif sous-jacent sur le marché comptant à la date d'achat.
- P la prime versée lors de l'achat de l'option.
- R le résultat à l'échéance.

Le pay-off d'un Call européen écrit sur une action ne versant pas de dividende est égal à l'échéance au montant suivant :

$$\text{pay-off} = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$$

On en déduit que le résultat pour un acheteur d'un Call à l'échéance :

$$R_{\text{Call}}^{\text{acheteur}} = \max(S_T - K, 0) - p$$

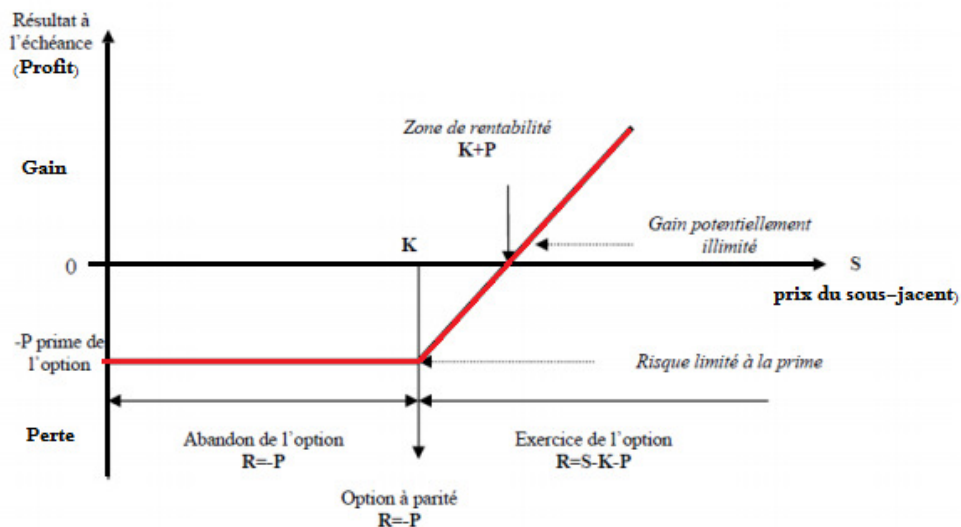


FIGURE 1.2 – Le pay-off pour l'acheteur d'une option d'achat (Call).

Un Call combine un risque de perte limité, égal au prix de l'option, et un fort potentiel de gains dans un marché haussier. Donc le profit maximum est potentiellement illimité, la perte est limitée au prix de l'option et le seuil de rentabilité (break-even ou BE) est atteint lorsque le prix du sous-jacent est égal au prix d'exercice plus la prime d'option.

Une option d'achat est dite en dehors de la monnaie si son prix d'exercice $K > S_T$, dans la monnaie si $S_T > K$, à la monnaie si $S_T = K$.

A.2 Vente d'une option d'achat : Le vendeur de l'option d'achat est dans la position symétrique de celle de l'acheteur. Il reçoit immédiatement la prime en contrepartie de laquelle il s'engage sur la durée du contrat à vendre l'actif sous-jacent à la demande de l'acheteur. Le pay-off du vendeur du Call est à l'inverse de celui de l'acheteur et s'avère négatif lorsque le prix de l'action dépasse le prix d'exercice plus la prime d'option. Le pay-off à son échéance est donné par :

$$pay - off = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$$

On en déduit que le résultat pour un vendeur d'un Call à l'échéance :

$$R_{Call}^{acheteur} = \max(0, S_T - K) + p = -\max(0, S_T - K) + P$$

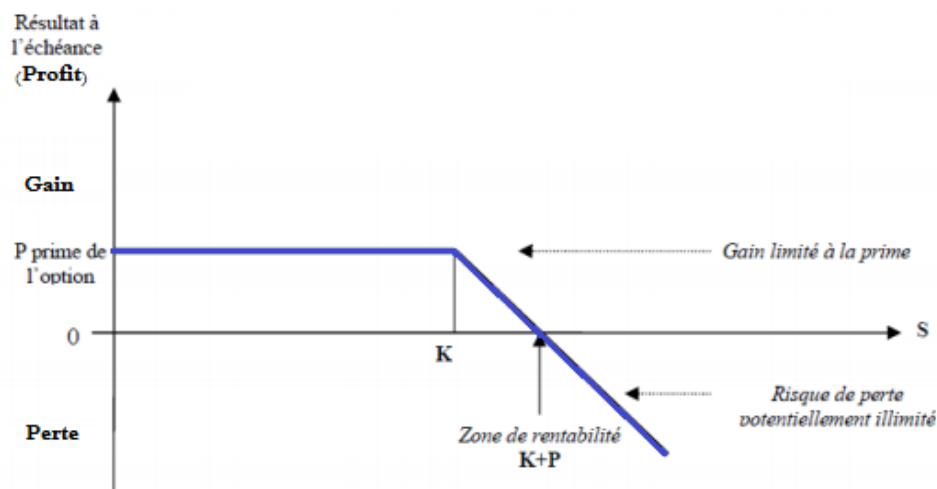


FIGURE 1.3 – Le pay-off pour le vendeur d'une option d'achat (Call).

Le vendeur est cependant compensé par l'acheteur qui lui verse une prime, soit le prix proprement dit de l'option. Dans ce cas les gains sont limités à la prime d'option, la vente d'un Call peut s'avérer plus intéressant lorsque les perspectives du marché sont plus que modérément baissières. Donc le profit maximum est limité au prix de l'option, la perte est potentiellement illimitée.

B Option de vente (Put)

B.1 L'achat d'une option de vente : L'achat d'une option de vente donne le droit à son détenteur de vendre, à (ou jusqu'à) l'échéance, un actif à un prix déterminé, appelé prix d'exercice, en contrepartie au versement immédiat d'une prime au vendeur de l'option. :

Le pay-off d'un Put à son échéance est le suivant :

$$pay - off = (K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0)$$

On en déduit que le résultat R pour un acheteur d'un Put à l'échéance :

$$R_{Put}^{acheteur} = \max(0, K - S_T) - p$$

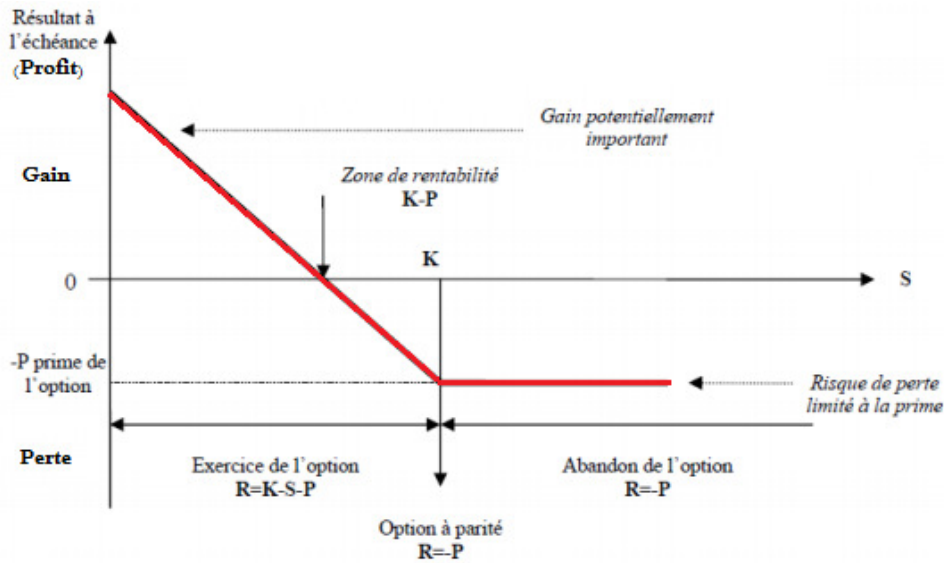


FIGURE 1.4 – Le pay-off pour l'acheteur d'une option de vente (Put)).

Un Put combine un risque de perte limité, égal au prix de l'option, et un fort potentiel de gains dans un marché baissier. Donc le profit maximum est potentiellement illimité, la perte est limitée au prix de l'option et le seuil de bénéfice (break-even ou BE) est atteint lorsque le prix du sous-jacent est atteint le prix d'exercice moins la prime d'option.

B.2 Vente d'une option de vente : Le vendeur de l'option de vente est dans la position symétrique de celle d'acheteur. Il reçoit immédiatement la prime en contrepartie de laquelle il s'engage sur la durée du contrat à vendre l'actif sous-jacent à la demande de l'acheteur.

Par ailleurs le vendeur d'un Put a un pay-off inverse de celui de l'acheteur, c'est-à-dire :

$$pay-off = (S_T - K)^+ = \max(0, S_T - K) = -\max(0, K - S)$$

On en déduit que le résultat R pour un vendeur d'un Put à l'échéance :

$$R_{Put}^{vendeur} = \max(0, S - K) + p = -\max(0, K - S) + P$$

Son résultat à l'échéance est l'opposé de celui de l'acheteur.

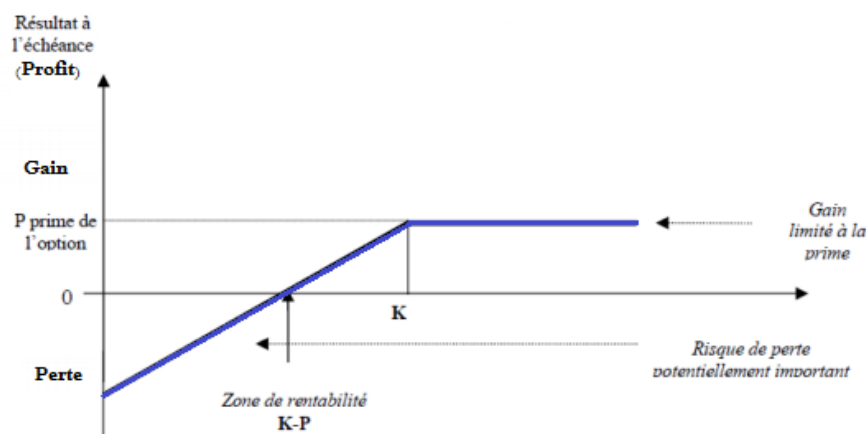


FIGURE 1.5 – Le pay-off pour le vendeur d'une option de vente (Put)).

Les gains sont limités à la prime d'option ainsi la vente d'un Put peut s'avérer plus intéressante lorsque les perspectives de marché sont plus que modérément baissières. Le pay-off du vendeur du Put est négatif dès que le prix de l'action, à l'échéance de l'option, se situe en delà du prix d'exercice. Donc le profit maximum est limité au prix de l'option, la perte est potentiellement illimitée.

Nous concluons que, le gain d'un détenteur de Call est d'autant plus important que le prix du sous-jacent (l'action). En fait, on dit qu'une option d'achat est à la monnaie si le prix de l'action est égal au prix d'exercice et dans la monnaie si le prix de l'action est supérieur au prix d'exercice. Par contre, si le prix de l'action est inférieur au prix d'exercice, le Call est en dehors de la monnaie. Par conséquent, le détenteur d'un Call est d'autant plus favorisé que son option est davantage dans la monnaie. Lorsqu'il anticipe une hausse du prix d'une action, l'investisseur aura donc tendance à acheter des Calls sur cette action de façon à engranger des profits. Cependant, si le prix de l'action demeure en delà du prix d'exercice, le détenteur du Call subit une perte égale à la prime qu'il a payée pour se porter acquéreur du Call. Pour sa part, le vendeur du Call fait face à un pay-off négatif quand le prix de l'action excède le prix d'exercice de l'option vendue. Certes, il encaisse une prime lorsqu'il vend un Call. Sa stratégie sera donc de vendre des Calls en dehors où très en dehors de la monnaie de manière à éviter que le prix de l'action ne vienne se situer au-dessus du prix d'exercice du Call à l'échéance.

En ce qui les Puts classiques. Un Put est à la monnaie si le prix de l'action sous-jacente est égal au prix d'exercice du Put. Il est dans la monnaie si le prix de l'action est inférieur au prix d'exercice et en dehors de la monnaie, si le prix de l'action est supérieur au prix d'exercice. Par conséquent, un investisseur détiendra un Put écrit sur une action lorsqu'il anticipera une baisse de prix de la date d'action.

1.2.11 Évaluation

L'évaluation financière est l'estimation de la valeur (c'est-à-dire du prix potentiel) des actifs et engagements financiers (actions, obligations, options, contrats d'épargne)[14]. Par exemple l'acheteur d'un Call est toujours protégé car il choisit l'exercice de l'option donc il ne craint rien. En revanche, pour le vendeur le risque est maximal car sa perte est possiblement infinie. Dans ce cas un problème apparaît, qui est interprété en mathématiques financières par le problème d'évaluation d'une option, c'est-à-dire de détermination de la valeur de l'option à toute date. Pour répondre à ces problèmes, on a besoin d'une hypothèse fondamentale appelée Absence d'Opportunité d'Arbitrage (A.O.A).

1.2.12 Absence d'Opportunité d'Arbitrage

Définition 15. *L'Absence d'Opportunité d'Arbitrage est un des axiomes de base de la finance des marchés [7]. Elle repose sur l'idée que dans un marché sans friction nous ne pouvons pas faire de profit sans prendre de risque à un instant donné i.e, il est impossible de gagner de l'argent de façon certaine à partir d'un investissement initial nul.*

1.2.13 Autofinancement

Définition 16. *Une stratégie auto-finançante est une stratégie dans laquelle il n'y a pas d'ajout ou de retrait d'argent dans le portefeuille entre le temps t et $t + 1$ [16].*

En effet, Si nous considérons un marché dans lequel l'hypothèse d'A.O.A est vérifiée. On peut en déduire deux résultats :

- 1)- Si deux actifs financiers X et Y ont le même flux terminal $X_T = Y_T$, alors $\forall t \leq T$ on a $X_t = Y_t$.
- 2)- Si $X_T \leq Y_T$, alors $\forall t \leq T$ on a $X_t \leq Y_t$.

1.2.14 Produit répliquable

Définition 17. *Un produit financier est dit répliquable, ou atteignable, s'il existe une stratégie auto-finançante de couverture de ce produit [16]. En d'autres termes, le produit financier S est dit répliquable si on peut construire un portefeuille qui dépend des autres produits du marché et qui à chaque instant t vaut S_t . Pour construire ce portefeuille on achète une certaine quantité de différents produits et on vend une certaine quantité d'autres produits dans le but d'avoir une valeur de portefeuille égale à S .*

1.2.15 Marché complet et viable

Il existe deux hypothèses portant sur le marché qui sont très utilisées dans les différents modèles d'évaluation de produits dérivés à savoir marché complet et marché viable.

Définition 18. On dit que le marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage [6].

Définition 19. Le marché est dit complet si tout produit dérivé est simulable c-à-d, s'il existe une stratégie autofinancée répliquant le pay-off en date d'échéance pour chacun des produits dérivés [6].

1.2.16 Partie Put et Call

Définition 20. La parité Put-Call (Put-Call Parity) définit une relation entre le prix d'un Call (option d'achat) et celui d'un Put (option de vente), qui ont tous deux le même prix d'exercice et la même échéance. La formule suppose que les options ne sont pas exercées avant échéance (dans le cas des options européennes, il ne peut en être autrement) [6].

Elle s'énonce de la manière suivante :

$$\forall t \in [0, T], \quad C_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + S_t$$

où,

K est le prix d'exercice,

S_t est la valeur à t d'un certain actif risqué ne versant pas de dividendes.

C_t est la valeur à t d'un Call européen sur l'actif risqué, de strike K et d'échéance T .

P_t est la valeur à t d'un Put européen sur l'actif risqué, de strike K et d'échéance T .

1.2.17 Volatilité

Définition 21. La volatilité (en finance) est l'ampleur des variations du cours d'un actif financier à la hausse comme à la baisse, qui traduisent notamment des changements d'anticipations [8]. Elle sert de paramètre de quantification du risque de rendement et de prix d'un actif financier. Lorsque la volatilité est élevée, la possibilité de gain est plus importante, mais le risque de perte l'est aussi.

La volatilité est un indicateur primordial pour la fluidité du marché. D'après la théorie financière, un investisseur n'admet d'acquérir un actif financier présentant une forte volatilité (donc un risque important) que si son rendement est élevé. C'est pourquoi les périodes de forte volatilité se traduisent souvent par des cours bas permettant à l'acheteur d'anticiper une rentabilité plus élevée. La réciproque est également vraie.

Chapitre 2

L'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes

2.1 Introduction

Le modèle Black-Scholes est un modèle d'évaluation d'option. Proposé en 1973 par Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes dans leur article "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" [14]. Leur idée fondamentale fut de mettre en rapport le prix implicite de l'option et les variations de prix de l'actif sous-jacent. En effet, le modèle conduit à une formule explicite pour le prix d'une option financière, du type option Européenne (Call ou Put) sur une action dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique et à une stratégie de gestion qui permet au vendeur de l'option d'éliminer totalement le risque (c'est à dire se couvrir).

2.2 Description du modèle

2.2.1 L'évolution des cours

Le modèle proposé par Black-Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action) de prix S_t à l'instant t et un actif sans risque de prix S_t^0 à l'instant t . On suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire)[14].

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad (2.1)$$

où r est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r (noter que r est ici un taux d'intérêt instantané).

On pose $S_0^0 = 1$, de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$ pour $t \geq 0$.

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t), \quad (2.2)$$

où

μ est la dérive (tendance ou drift) supposée constante.

σ est la volatilité de l'action supposée constante.

B_t est un mouvement Brownien standard.

T est la date d'échéance de l'option que l'on se propose de traiter.

L'équation (2.2) a pour solution explicite

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right), \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.3)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0. Il en résulte en particulier que, dans ce modèle, la loi de S_t est une loi log-normale (c'est-à-dire que son logarithme suit une loi normale).

Plus précisément, on voit que le processus S_t vérifie une équation du type (2.2) si et seulement si le processus $(\log(S_t))$ est un mouvement Brownien (pas nécessairement standard). Cela signifie que le processus (S_t) vérifie les propriétés suivantes :

- Continuité des trajectoires.
- Indépendance des accroissements relatifs : si $u \leq t$, (S_t/S_u) ou (ce qui revient au même) l'accroissement relatif $(S_t - S_u)/S_u$. est indépendant de la tribu $\sigma(S_v, v \leq u)$
- Stationnarité des accroissements relatifs : si $u \leq t$, la loi de $(S_t - S_u)/S_u$. est identique à celle de $(S_{t-u} - S_0)/S_0$.

Ces trois propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black-Scholes sur l'évolution du cours de l'action.

2.3 Hypothèses du modèle

Le modèle Black-Scholes repose sur un certain nombre de conditions [18] :

- Le prix de l'actif sous-jacent S_t suit un mouvement Brownien géométrique avec une volatilité σ constante et une dérive μ constante .
- Il n'y a pas d'occasions d'arbitrage ;
- Le temps est une fonction continue ;
- Il est possible d'effectuer des ventes à découvert ;
- Il n'y a pas de coûts de transactions ;
- Il existe un taux d'intérêt sans risque, connu à l'avance et constant ;
- Tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles (on peut par exemple acheter 1/100e d'action) ;
- Dans le cas d'une action, celle-ci ne paie pas de dividendes entre le moment de l'évaluation de l'option et l'échéance de celle-ci.

Lorsque toutes ces hypothèses sont remplies, on parle alors de modèle de Black-Scholes, ou on dit qu'on est dans le cas Black-Scholes.

2.4 Équation aux dérivées partielles d'évaluation de Black- Scholes

Soient l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, du Mouvement Brownien standard $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ et le taux d'interet ($r \neq cte$) n'est pas supposé fixe.

Soit C_t la valeur d'une option sur action ne versant pas de dividendes, qui est modelisée comme une fonction dépendant du temps t et du prix de l'action sous-jacente S_t . Le prix de l'action est modelisé par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (2.4)$$

Utilisant la formule d'Itô pour calculer la variation de la valeur de l'option dC suite a une variation du temps de longueur dt et d'une variation du prix de l'action S sur cet intervalle de temps dt [13, 26] :

$$\begin{aligned} dC &= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\ &= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} dB_t \end{aligned} \quad (2.5)$$

D'une part, si nous constituons un portefeuille P dans lequel nous avons une quantité λ d'actions et d'un Call de maturite T , sa valeur sera :

$$P_t = \lambda S_t - C_t, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.6)$$

Sa variation s'exprime donc :

$$\begin{aligned} dP_t &= \lambda dS_t - dC_t \\ &= \lambda (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) - \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right) dt - \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} dB_t \\ &= \left(\lambda \mu S_t - \frac{\partial C}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right) dt + \left(\sigma \lambda S_t - \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} \right) dB_t \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pour que ce portefeuille soit sans risque, il faut que son terme aléatoire soit nul i.e ($[.] dB = 0$) :

$$\left(\sigma \lambda S_t - \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} \right) = 0$$

donc,

$$\lambda = \frac{\partial C}{\partial S_t} \quad (2.8)$$

D'autre part, un portefeuille sans risque, sur un marche parfaitement arbitré procure un rendement égal au taux sans risque r . Sur une période de dt , la valeur de ce portefeuille est donnée par :

$$dP_t = P.rdt \quad (2.9)$$

En utilisant l'équation (2.7), nous trouvons :

$$dP_t = \left(\lambda\mu S_t - \frac{\partial C}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt \quad (2.10)$$

Par identification (équation(2.9))et équation(2.10), nous obtenons :

$$\left(\lambda\mu S_t - \frac{\partial C}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) = P.r \quad (2.11)$$

Or, $\lambda = \frac{\partial C}{\partial S}$ et $P_t = \lambda S_t - C_t$, alors l'équation (2.11) se réécrit comme suit :

$$\left(\lambda\mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) = \left(S_t \frac{\partial C}{\partial S} - C \right) r \quad (2.12)$$

Au final, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} - r S_t \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) = C.r \quad (2.13)$$

La résolution de cette équation nécessite une condition terminale. Cette condition est simplement le pay-off de l'option Call :

$$V_T = (S_T - K)^+$$

Remarque

Les EDP peuvent être résolues de facons différences :

- Dans le cas de l'EDP de Black-Scholes, it est possible de la transformer en une EDP dont nous connaissons la résolution, dans ce l'équation de la Chaleur.
- Une résolution a l'aide de méthodes numeriques, par exemlpe a l'aide de la méthode des différences finies ou la méthode de Monté Carlo.

Chapitre 3

Résolution analytique de l'équation de Black-Scholes

Dans cette section, notre but est de présenter l'équation aux dérivées partielles ainsi que la résolution analytique de l'équation de Black-Scholes, en se servant des principaux résultats établis en physique théorique en particulier l'équation de la chaleur.

En effet, en mathématiques et en physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite initialement en 1807 par Joseph Fourier [9].

3.1 Résolution de l'équation de la Chaleur

Dans ce qui suit, nous allons présenter la résolution de l'équation de la chaleur en se basant sur les résultats de la transformation de Fourier. Pour ce faire, considérons l'expression [5] :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) \quad (3.1)$$

où $u(x, t)$ désigne la température de la barre au point x et au temps t ($t > 0$), et x solution de l'équation. Celle - ci est bornée : $-\infty < x < \infty$. On suppose également que la fonction $u(x, t)$ est de classe C^2 par rapport à x et de classe C^1 par rapport à t .

La condition initiale définit, la température initiale, une fonction $u_0(x)$ telle que :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (3.2)$$

la température de la barre au point x et à l'instant $t = 0$.

Pour trouver la forme intégrale de la solution de l'équation de diffusion, nous rappelons la transformation de Fourier [24, 15].

Définition 22. La transformation de Fourier $\mathcal{F}[f(x)]$ à une dimension, de la fonction telle que :

$$\int_{\mathcal{R}} |f(x)|^2 < \infty$$

où l'on pose que $f(x)$ est de carré sommable (intégrable), $f(x) \in L^2(\mathcal{R})$ est définie par :

$$\mathcal{F}[f(x)] = \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi\omega x\} dx. \quad (3.3)$$

où $i = \sqrt{-1}$ et ω un paramètre.

De ce fait, écrivons le problème comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{cases} \quad (3.4)$$

En appliquant la transformée partielle de Fourier à la fonction $u(x, t)$, par rapport à x , on obtient ainsi :

$$\mathcal{F}[u(x, t)] = \hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \exp\{-i2\pi\omega x\} dx. \quad (3.5)$$

En dérivant partiellement l'expression obtenue en (3.5) par rapport au temps, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}[u(x, t)] &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \exp\{-i2\pi\omega x\} dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Puisque :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

Il s'en suit que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}[u(x, t)] = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \exp\{-i2\pi\omega x\} dx \quad (3.7)$$

En utilisant l'intégrale par partie (avec : $m = \exp(-2i\pi\omega x)$ et $dv = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$).

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} [u(x, t)] &= \underbrace{\left[a^2 \exp(-2i\pi\omega x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_0 - a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi\omega) \exp(-2i\pi\omega x) \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ &= a^2 (2i\pi\omega)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) \exp(-2i\pi\omega x) dx \end{aligned}$$

D'après l'équation (3.5), on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) \exp(-2i\pi\omega x) dx = \hat{u}(\omega, t) \quad (3.8)$$

Et comme $i = \sqrt{-1}$, donc :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} [u(x, t)] = -a^2 (2\pi\omega)^2 \hat{u}(\omega, t) \quad (3.9)$$

ainsi on en déduit une équation différentielle vérifiée par $\hat{u}(\omega, t)$.

En réaménageant les équations (3.6) et (3.9), on extrait :

$$\frac{\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t)}{\hat{u}(\omega, t)} = -(2a\pi\omega)^2 \quad (3.10)$$

Cette dernière est de la forme $\frac{f'}{f} = - (2a\pi\omega)^2$, son intégrale est donnée par $\int \frac{f'}{f} = \ln |f| + c$.

Donc, l'équation (3.10) devient :

$$\ln \hat{u}(\omega, t) = -(2a\pi\omega)^2 t + k$$

En exposant

$$\hat{u}(\omega, t) = K \exp\left\{- (2a\pi\omega)^2 t\right\}$$

tel que pour $t = 0$,

$$\hat{u}(\omega, 0) = K \times 1$$

Notant maintenant :

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{\varphi}(\omega) \quad (3.11)$$

La solution de l'équation (3.9) s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega, t) &= \hat{\varphi}(\omega) \exp\left\{- (2a\pi\omega)^2 t\right\} \\ &= \hat{\varphi}(\omega) \exp\left\{-2\pi^2 (2a^2 t) \omega^2\right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Posant $\sigma = a\sqrt{2t}$ la solution devient :

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{\varphi}(\omega) \exp\left[-2(\pi\sigma\omega)^2\right] \quad (3.13)$$

Nous savons que la transformée de Fourier de l'équation $\exp\left\{-2(\pi\sigma\omega)^2\right\}$ est :

$$\exp\left\{-2(\pi\sigma\omega)^2\right\} = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2 t}\right\}\right)(\omega). \quad (3.14)$$

A présent, nous avons besoin des définitions et théorème suivants :

Définition 23. La transformée de Fourier $\mathcal{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(\omega)$ et la transformée inverse de Fourier $\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\} = f(x)$ où :

$$\mathcal{F} : \begin{cases} f \rightarrow \widehat{f} \\ x \mapsto \omega \end{cases}$$

est appelée transformation de Fourier.

Définition 24. La convolution de deux fonctions f et g s'écrit :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z) dz$$

telle que le terme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

converge.

Théorème 25. Soit $f(x)$ et $g(x)$ des fonctions de carré sommable. La convolution de Fourier de et est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{(f * g)(x)\} &= \widehat{f * g}(\omega) \\ &= \mathcal{F}[f(\omega)] \mathcal{F}[g(\omega)] \\ &= \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega) \end{aligned}$$

Autrement, la transformée de Fourier de la convolution de Fourier de f et g est le produit de la transformée de Fourier de f et g .

De la même façon, on peut montrer que :

$$\mathcal{F}^{-1}\{(\widehat{f} * \widehat{g})(\omega)\} = f(x)g(x)$$

En utilisant les résultats de la convolution, puis l'inverse de la transformation de Fourier sur l'équation (3.13) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}(\omega, t)] &= u(x, t) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{\varphi}(x, 0) \cdot \exp\left[-2(\pi\sigma\omega)^2\right]\right] \\ &= \varphi(x, 0) \mathcal{F}^{-1}\left[\exp\left[-2(\pi\sigma\omega)^2\right]\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega, 0) \left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{\frac{-(x-\omega)^2}{4a^2 t}\right\}\right] d\omega \end{aligned}$$

Il s'en suit :

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\omega)^2}{4a^2t}\right\} \varphi(\omega, 0) d\omega. \quad (3.15)$$

Posant $\tau = a^2t$:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\omega)^2}{4\tau}\right\} u(\omega, 0) d\omega. \quad (3.16)$$

Ce résultat servira pour le développement de la section suivante consacrée au traitement de l'équation de Black-Scholes [20].

3.2 Transformation de l'EDP de Black-Scholes à l'équation de la chaleur

Considérons le cas de l'option Call européenne. Notons sa valeur $C(S, t)$, ce qui correspond au u précédemment, où S représente le prix du sous-jacent, et $t \in [0, T]$, T étant la maturité [3]. On a l'équation de Black-Scholes suivante : $\forall t \in [0, T], S \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S, t) + rS \frac{\partial C}{\partial S}(S, t) + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, t) - rC(S, t) = 0 \quad (3.17)$$

Au regard de l'application considérée (option Européenne), et considérant l'EDS précédente, il ressort que la condition de paiement est initiale à $\tau = 0$ correspond exactement au paiement à la date d'échéance $t = T$. Ainsi, il vient que le paiement à l'échéance est donné par :

$$C(S, T) = (S - k)^+ = \max(S - k, 0) \quad (3.18)$$

Pour résoudre l'équation (3.17), nous allons procéder à divers changements de variable pour nous ramener à une équation de la Chaleur du type :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{cases} \quad (3.19)$$

Pour pouvoir se ramener à ce type d'équation, commençons tout d'abord par supprimer les coefficients S et S^2 de l'équation de Black-Scholes.

Pour ce faire, on pose :

$$S = ke^x \quad (3.20)$$

$$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad (3.21)$$

$$C(S, t) = kv(x, \tau) \quad (3.22)$$

Un changement de temps de ce type paraît naturel pour se ramener a une condition en $t = 0$ et non plus en $t = T$.

On a donc :

$$v(x, \tau) = \frac{1}{k} C \left(ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \right) = \frac{1}{k} C(S, t) \quad (3.23)$$

On dérive (3.23) par rapport à x :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{k} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}}_{=0}$$

d'où,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{S}{k} \frac{\partial C}{\partial S} \quad (3.24)$$

On dérive une nouvelle fois par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k} S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{k} S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \frac{\partial S}{\partial x} \\ &= \frac{1}{k} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial S} \right) \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{S}{k} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) S \\ &= \frac{S}{k} \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{S^2}{k} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dérivons maintenant (3.23) par rapport à τ

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{k} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{1}{k} \underbrace{\frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \tau}}_{=0} = \frac{1}{k} \frac{\partial C}{\partial t} \left(\frac{-2}{\sigma^2} \right) = \left(\frac{-2}{k\sigma^2} \right) \frac{\partial C}{\partial t} \left(\frac{-1}{\frac{\sigma^2}{2}} \right) \quad (3.26)$$

Pour plus de clarté, on introduit les valeurs suivantes :

$$C_t = -\frac{k\sigma^2}{2} v_\tau \quad (3.27)$$

$$SC_S = kv_x \quad (3.28)$$

$$S^2 C_{ss} = kv_{xx} - SC_s = kv_{xx} - kv_x \quad (3.29)$$

Rappelons l'équation de Black-Scholes (l'équation(3.17) :

$$C_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{ss} + rSC_s - rC = 0 \quad (3.30)$$

En injectant les équations(3.27) , (3.28) et (3.29) dans l'équation (3.30) , nous obtenons :

$$\left(-\frac{k}{2}\sigma^2\right)v_\tau + rS\left(\frac{k}{S}v_x\right) + \frac{\sigma^2}{2}s^2\left(\frac{k}{S^2}v_x\right) - r(k)v = 0$$

\Leftrightarrow

$$-\frac{k}{2}\sigma^2v_\tau + \frac{k}{2}\sigma^2(v_{xx} - v_x) + rk v_x - rk v = 0$$

Soit, en divisant par le coefficient $\frac{k}{2}\sigma^2$:

$$-v_\tau + v_{xx} - v_x + k v_x - k v = 0 \quad (3.31)$$

avec $k = \frac{2r}{\sigma^2}$

Ou encore avec les notations du départ :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - k v \quad (3.32)$$

D'après l'équation (3.23) si $\tau = 0$ (puisque la condition est en $t = T$), la condition initiale est :

$$v(x, 0) = \frac{1}{k}C(ke^x, T) = \frac{1}{k}\max(ke^x - k, 0) = \max(e^x - 1, 0) \quad (3.33)$$

Pour arriver à une équation comme celle de l'équation de la Chaleur, on procède alors à un second changement de variables. On pose :

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (3.34)$$

On réinjecte alors cela dans l'équation (3.32) :

$$e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - k u \right)$$

Soit encore :

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - k u$$

En regroupant les termes de mêmes dérivées :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\alpha^2 + (k-1)\alpha - k - \beta \right) u + (2\alpha + k - 1) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Pour se ramener au cas de l'équation de la Chaleur, il nous faut éliminer les termes en u et $\frac{\partial u}{\partial x}$, on doit donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \beta & = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \\ 2\alpha + k - 1 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = & -\frac{1}{2}(k-1) \\ \beta = & -\frac{1}{4}(k+1)^2 \end{cases} \quad (3.35)$$

Et l'équation (3.34) devient :

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau) \quad (3.36)$$

et u vérifie alors,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) & = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau), \quad \forall \tau > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \max(e^x - 1, 0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) \end{cases} \quad (3.37)$$

La solution est donc :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds$$

3.3 Évaluation du prix de l'option

3.3.1 Cas d'une option Call européenne

Dans cette section, nous nous intéressons à l'évaluation de l'intégrale de l'équation (3.37) [3, 14]. D'après la section précédente, nous avons :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \quad (3.38)$$

Commençant par poser :

$$x' = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}} \quad (3.39)$$

il s'en suit que $S = \sqrt{2\tau} x' + x$ et $dS = \sqrt{2\tau} dx'$,
encore, lorsque $S \rightarrow 0$ alors $x' = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$

Alors l'équation (3.38) devient :

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x' \sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' \\ &= \frac{\sqrt{2\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} u_0(x' \sqrt{2\tau} + x) e^{\left(\frac{-x'^2}{2}\right)} dx' \\ &= \frac{(\sqrt{2\tau}) \sqrt{2\tau}}{(\sqrt{2\tau}) 2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} u_0(x' \sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' \end{aligned} \quad (3.40)$$

Sachant que l'expression de la condition initiale est :

$$u_0(x) = \max\left(e^{\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right)} - e^{\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right)}, 0\right) \quad (3.41)$$

Par (3.39), cette dernière peut s'écrire :

$$\begin{aligned} u_0(s) &= \max\left(e^{\left(\frac{1}{2}(k+1)s\right)} - e^{\left(\frac{1}{2}(k-1)s\right)}, 0\right) \\ &= \max\left(e^{\left(\frac{1}{2}(k+1)(\sqrt{2\tau}x' + x)\right)} - e^{\left(\frac{1}{2}(k-1)(\sqrt{2\tau}x' + x)\right)}, 0\right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Donc :

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left[e^{\left(\frac{1}{2}(k+1)(\sqrt{2\tau}x' + x)\right)} - e^{\left(\frac{1}{2}(k-1)(\sqrt{2\tau}x' + x)\right)} \right] e^{\left(-\frac{x'^2}{2}\right)} dx' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left[e^{\left(\frac{1}{2}(k+1)(x + \sqrt{2\tau}x') - \frac{x'^2}{2}\right)} - e^{\left(\frac{1}{2}(k-1)(x + \sqrt{2\tau}x')\right)} \right] dx' \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x + x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x + x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'}_{I_2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Pour calculer l'expression I_1 , on va essayer de se ramener à la loi de répartition normale centrée réduite :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\left[\frac{1}{2}(k+1)(x + \sqrt{2\tau}x') - \frac{x'^2}{2}\right]} dx' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\left(\frac{1}{2}(k+1)x + \left(\frac{k+1}{2}\right)\sqrt{2\tau}x' - \frac{x'^2}{2}\right)} dx' \\ &= \frac{e^{\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)x\right)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)(\sqrt{2\tau}x' - \frac{x'}{2})\right)} dx' \\ &= \frac{e^{\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)x\right)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)^2\tau - \left(\frac{k+1}{2}\right)^2\tau - \frac{x'^2}{2} + x'\left(\frac{k+1}{2}\right)\sqrt{2\tau}\right)} dx' \\ &= \frac{e^{\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)x\right)} e^{\left(\tau\left(\frac{k+1}{2}\right)^2\right)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(x' - \left(\frac{k+1}{2}\right)\sqrt{2\tau}\right)^2\right)} dx' \end{aligned} \quad (3.44)$$

Faisant un autre changement de variable :

$$\rho = x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

Comme $x' = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$, alors la relation précédente s'écrit :

$$\rho = -\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \left(\frac{k+1}{2}\right) \sqrt{2\tau} \quad (3.45)$$

avec $d\rho = dx'$

On établit que :

$$I_1 = \frac{e^{\left[\left(\frac{k+1}{2}\right)x + \left(\frac{(k+1)^2}{4}\right)\tau\right]}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \left(\frac{k+1}{2}\right)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{(-\frac{1}{2}\rho^2)} d\rho \quad (3.46)$$

On note :

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On pose également :

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

L'équation (3.46) devient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau \int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{(-\frac{1}{2}\rho^2)} \right) d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Or,

$$\forall d \in \mathbb{R}, \quad N(d) + N(-d) = 1$$

Ainsi,

$$\begin{cases} I_1 &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) \\ d_1 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \end{cases} \quad (3.48)$$

Pour le calcul de I_2 , on fera un calcul similaire (c-à-d on ajoute et on soustrait le terme : $\exp\left(\tau\left(\frac{k-1}{x}\right)^2\right)$).

$$\begin{cases} I_2 &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \\ d_2 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau} \end{cases} \quad (3.49)$$

Maintenant que l'on a l'expression de u remontons à l'expression de C , valeur du Call Européen. Son expression est :

$$C(S, t) = kv(x, \tau)$$

D'après les résultats précédents , rappelons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x, \tau) = e^{(\alpha x + \beta \tau)} u(x, \tau) \\ \alpha = -\frac{(k-1)}{2} \\ \beta = -\frac{(k+1)^2}{4} \\ S = ke^x \left(\Rightarrow x = \ln \frac{S}{k} \right) \\ k = \frac{r}{\sigma^2} \\ \tau = \frac{\sigma^2}{2} (\tau - t) \end{array} \right.$$

D'où, la valeur du Call Européen devient :

$$\begin{aligned} C(S, t) &= ke^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2 \tau} \chi \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2 \tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2 \tau} N(d_2) \right) \\ &= ke^{-\frac{1}{2}(k-1)\ln \frac{S}{k} - \frac{1}{4}(k+1)^2 \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \chi \\ &\quad \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)\ln \frac{S}{k} + \frac{1}{4}(k+1)^2 \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)\ln \frac{S}{k} + \frac{1}{4}(k-1)^2 \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_2) \right) \end{aligned}$$

Ce qui se simplifie en :

$$\left\{ \begin{array}{l} C(S, t) = SN(d_1) - ke^{-r(T-t)} N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln \frac{S}{k} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 = \frac{\ln \frac{S}{k} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{array} \right. \quad x < x \quad (3.50)$$

3.3.2 Cas d'une option Put européenne

Pour établir l'expression du prix d'une option Put Européenne, on va utiliser la relation de la parité Put-Call (fc dans le premier chapitre) . Notant P le prix du Put européen.

D'après la relation (c.f la définition 1.2.16), si un Put et un Call européen, de même maturité T et de même strike K , il existe une relation entre leur prix :

$$C(S, t) - P(S, t) = S - ke^{-r(T-t)} \quad (3.51)$$

Donc,

$$P(S, t) = S(N(d_1) - 1) - ke^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) \quad (3.52)$$

On peut simplifier cette équation en utilisant le fait que : $N(d) + N(-d) = 1$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} P(S, t) &= ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \\ d_1 &= \frac{\ln\frac{S}{k} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 &= \frac{\ln\frac{S}{k} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases} \quad (3.53)$$

Chapitre 4

Application Numérique

Cet exemple montre comment calculer le prix de l'option d'achat à l'aide de la formule Black-Scholes. Pour résoudre numériquement les problèmes de recherche du prix à partir de la formule Black-Scholes.

4.1 Fonction BSCall

Cette fonction calcule la solution analytique de l'équation de Black-Scholes pour un Call Européen.

Les commandes :

```
function c= BSCall(S,E,r,T,sigma) syms t d
S = sym(95); % Cours d'actif sous-jacent
K = sym(100); % Prix d'exercice (strike)
sigma = sym(0.3); % volatilité de l'actif
T = sym(1); % Date d'échéance en an
r = sym(0.1); % Taux d'intérêt sans risque
Ke = K*exp(-r*T);
d1 = (log(S/K) + (r + sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2 = d1 - sigma*sqrt(T);
N(d) = int(exp(-((t)^2)/2),t,-Inf,d)*1/sqrt(2*sym(pi))
```

Le Résultat :

```
N(d) = erf((2^(1/2)*d)/2)/2 + 1/2
Csym = N(d1)*S - N(d2)*Ke
```

Le Résultat :

```
Csym = (95*erf((2^(1/2)*((10*log(19/20))/3 + 11/60))/2))/2 - 100*exp(-
1/100)*(erf((2^(1/2)*((10*log(19/20))/3 - 7/60))/2)/2 + 1/2) + 95/2
Cvpa = vpa(Csym)
```

Le Résultat :

```
Cvpa = 13.460541837253928533223227500638
```

```
digits(6)
Cvpa = vpa(Csym)
```

Le Résultat :

Cvpa = 13.4605

4.2 Tracer de la solution en 2D

Cette fonction permet de tracer la solution analytique de Black-Scholes pour un Call Européen, grâce a la fonction BSCall, en deux dimensions : le prix en fonction de la valeur finale du sous- jacent, le temps étant fixe et étant l'instant initial.

```
sigma = 0.3; %volatilité
N=200; %nombre de point
E=100; %valeur du strike
r=0.1; %taux sans risque
T=1; %maturité
L=log(3);
h=2/(N-1); %pas d'espace
x=(-1 :h :1);
S=E*exp(L*x); %valeur finale du sous-jacent
Call = BSCall(S,E,r,T,sigma);
plot(S,Call)
xlabel('S'), ylabel('valeur du Call','rot',0)
```

Le Résultat :

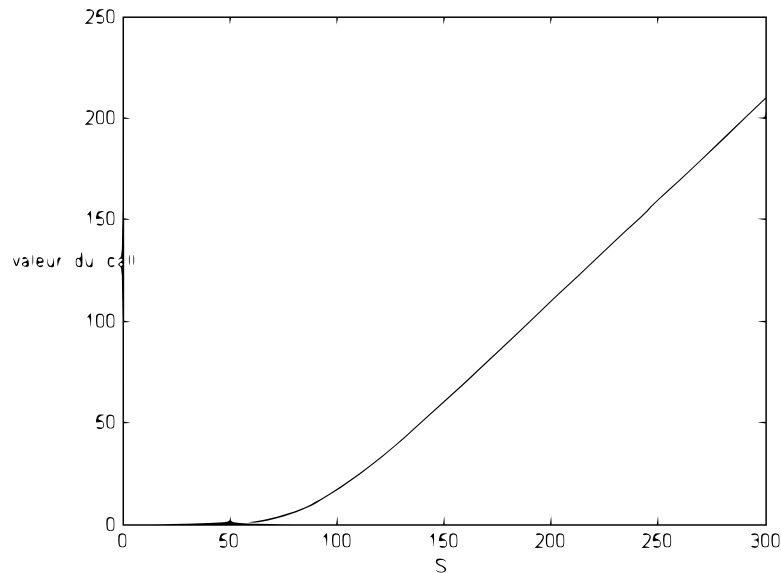


FIGURE 4.1 – Tracer la solution analytique de Black-Scholes pour un Call Européen(2D)

4.3 Tracer de la solution en 3D

Même chose que précédent sauf qu'ici le temps n'est pas fixe. On obtient donc un tracer en trois dimensions.

```
sigma = 0.3; %volatilité
N=50; %nombre de points
E=100; %strike
r=0.1; %taux sans risque
T=1; %maturité
e=1e-4;
Svals = linspace(e,3,N); %crée N points régulièrement espaces entre e et 3
tvals = linspace(e,T-e,N);
[Smat,tmat]=meshgrid(Svals,tvals); %cr.& un tableau de valeur pour le tracer
C=BSCall(E*Smat,E,r,T-tmat,sigma); %calcul du Call dans tout les états
mesh(Smat,tmat,C) %tracer en 3D
xlabel('S'), ylabel('t'), zlabel('C(S,t)', 'rot', 0)
```

Le Résultat :

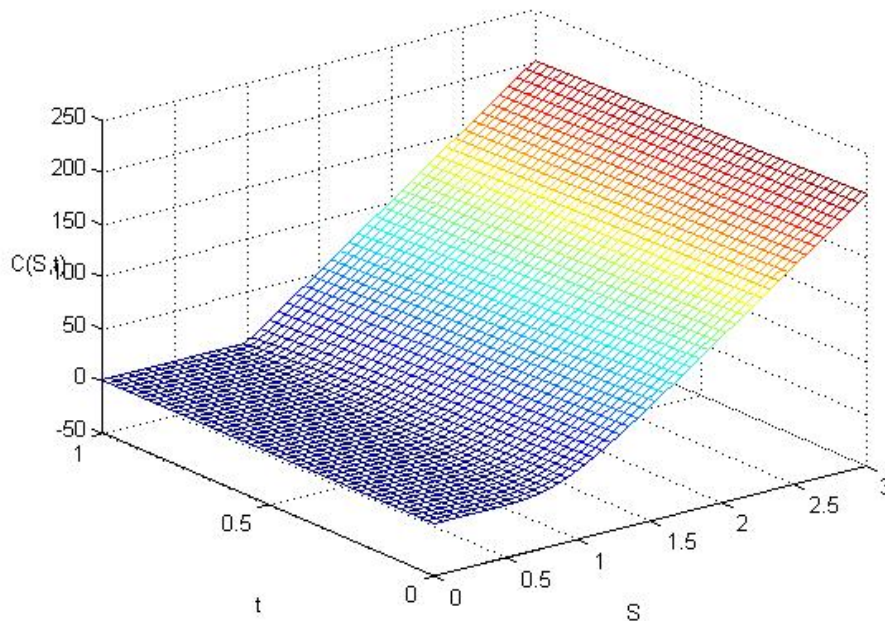


FIGURE 4.2 – Tracer de la solution analytique de Black-Scholes pour un Call Européen(3D)

Conclusion

Ce travail nous a permis de donner une vision sur l'application du calcul stochastique dans le domaine des mathématiques financières particulièrement un des modèles les plus populaires dans ce domaine est celui des célèbres Fischer Black et Myron Scholes qui porte leurs noms. L'étude du modèle de Black-Scholes est au cœur de ce mémoire où nous avons présenté une solution analytique explicite grâce aux résultats d'un type spécifique d'équations aux dérivées partielles connu en physique sous le nom de l'équation de la chaleur. Par la suite, nous avons fourni la formule de Black-Scholes qui a permis de répondre à la question de l'évolution du prix d'une option Européenne.

Malgré que, le modèle de Black-Scholes a été une référence depuis son apparition dans le monde de la finance, ces hypothèses ne sont pas toujours réalistes. Ce modèle suppose que le prix d'une option Européenne obtenue dépend de la volatilité du sous-jacent, supposée constante, or dans la pratique, à chaque prix d'exercice correspond une valeur de la volatilité, et l'observation des prix sur les marchés financiers montre que la volatilité dépend de la maturité considérée et du strike. La courbe représentant la volatilité implicite en fonction de la volatilité et prix d'exercice a une allure de smile. Ne pouvant pas expliquer ce phénomène de smile, les limites de la théorie d'évaluation dans le cadre du modèle de Black-Scholes apparaissent très vite.

Nous souhaitons enfin que ce modeste travail puisse susciter et donner lieu à d'autres études dans ce domaine.

Bibliographie

- [1] Bachelier.L, "Théorie de la spéculation", Gauthier-Villars. 1900.
- [2] Barrédy.C, Jean Étienne Palard, "Gestion Financier". Vuibert. Aout 2017.
- [3] Black.F, Scholes.M, "The Valuation of Option Contrats and a Test of Market Efficiency" , Journal of Finance, 27, pp 399ñ417. 1972.
- [4] Black.F, Scholes.M, "The pricing of Options and Liabilities" , Journal of Political Economy, 81 pp 635-654. 1973.
- [5] Mabele.D,Jean -Pul,K.Tsasa Vangu, Yves Togba Boby,"Laboratoire d'analyse Recherche en Economie quantritative", Laréq. 2013.
- [6] Bonnean.P, "Mathématique financières", Bunod.1980.
- [7] Chesney.M, Monique Jeanblack, Marc Yor, "Mathématique Méthodes for Financial Markets", Springer. 2009.
- [8] Dalbarade.J, "Mathématiques des marchés financières", Eska. 2005.
- [9] Fourier.J, "The Analytical Theory of Heat". Cambridge University Press (reissued by Cambridge University Press, 2009; ISBN 978-1-108-00178-6).1878.
- [10] Garnier.J, Perrier.v,"Mathématique et Application", Springer. 2013.
- [11] Heston.A., Steven.L, "Solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options", The réview of financial studies, vol,n°2,p,327-343,été. 1993.
- [12] Hull.J, "options futures, and other derivative securities", Prentice hull. 2006.
- [13] P.Jacquino, N.Sukhomlin, "Solution exact du problème inverse de la valorisation des options dans le cadre du modèle de Black et Sholes", Tampere University of technology. 2010.
- [14] Lamberton.D, Bernard Lapeyre, "Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance", Ellipses. 2012.
- [15] Lawrence Eveans.C, "Partial differential equation", American Mathematical Society, 749p. 2010.
- [16] Lemettre.J,'es bourses aux entreprises de marché" , L'Harmattan.2011.
- [17] Lessard.C, "Processus stochastique cours et exercice corrigés", Ellipses. 2014.
- [18] Mandelbort.B, "Une approche fractale des marchés", Odile Jacob. 2005.
- [19] Merton.C, "Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science, 4(1) : 141-183.

- [20] Polyanin andrei.D, "Handbook of Linear partial Differential Equations for Engineers and Scientists", Chapman and Hall/CRC, 800p.2001.
- [21] Quillat.B, Bruno Solinik, "Marché financier : Gestion de portefeuille et des risques", Dunod.2014.
- [22] Quiry.P, Yann le Fur, Vernimmen, "Finance d'entreprise", Dalloz. 28 aout 2019.
- [23] Samuelson pu.Al, "Mathematics of Speculative Price" in R.H.Day and S.M.Robinson, eds, Mathematical Topics in Economic Theory and Computation, Philadelphia, PA :Society for Industrial and Applied Mathematics, Reprinted in SIAM review, january 1973, 15(1) : 1-42.
- [24] Aleksandr.A, N.TIKHONOV Andri, SAMARSKI, "Equation of Mathematical Physics", Dover Publication,765p.1990.
- [25] Vasicek.O, "Option Values under Stochastic Volatilitis", Journal of Financial Economics, 19, pp 351-372. 1987.
- [26] Verraux.A, "Résolution de l'équation de l'équation de Black-Scholes", Tampere University of Technology.2008.