



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشاذلي بن جديد – الطارف

Université Chadli Bendjedid – El Tarf

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

**Étude qualitative des solutions pour certaines
équations différentielles fractionnaires**

Présentée par :

Kerboua Naouel

Devant le Jury :

Dr. Bouhadjera Hakima	Prof	Univ Badji Mokhtar Annaba	Présidente
Dr. Lachouri Adel	MCB	Univ ST Houari Boumediene Alger	Rapporteur
Dr. Youbi Zahra	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2023-2024

Dédicace

À ma très chère mère *Benzitouni.K* et mon très cher père *Moussa*,

Je vous dédie ce travail avec un profond sentiment de gratitude et de respect.

Grâce à votre amour inconditionnel, votre soutien constant et les nombreux sacrifices que vous avez faits, vous avez fait de moi la personne que je suis aujourd'hui. Vos enseignements, votre sagesse et votre exemple ont guidé mon chemin et façonné mon caractère.

Je vous exprime mon profond amour et ma reconnaissance éternelle pour l'éducation que vous m'avez donnée depuis mon plus jeune âge, en m'apprenant les valeurs essentielles qui me guident aujourd'hui.

Puisse Dieu vous accueillir dans Son Paradis béni.

*Je remercie également mon cher frère *Messaoud*, qui a toujours été à mes côtés, m'apportant son soutien constant.*

Pour vous deux, qui n'avez pas pu voir mon travail, je m'engage à continuer à l'honorer de tout mon amour.

Kerboua Naouel

Remerciements

J'exprime tout d'abord ma gratitude et mes remerciements les plus sincères et les plus profonds à Allah le tout-puissant, qui m'a donné la force et la patience pour mener à bien ce travail.

Mes sincères remerciements s'adressent ensuite à mon encadrant, le Dr. Lachouri Adel. Je tiens à le remercier chaleureusement d'avoir accepté la responsabilité de diriger mon mémoire, de m'avoir guidé et de m'avoir conseillé tout au long de mes recherches. Ses conseils judicieux, ses discussions enrichissantes et son suivi attentif m'ont été d'une aide précieuse. Je suis reconnaissant pour sa patience, sa confiance et ses orientations sages et rationnelles. Sa disponibilité, sa bienveillance et le temps qu'il a consacré à la réalisation et à la finalisation de mon travail ont été des éléments clés de la réussite de ce travail. Ce mémoire ne serait rien sans son accompagnement, son soutien et ses précieux conseils.

Tous mes remerciements et ma gratitude aux membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail. La présidente Prof. Bouhadjera Hakima et Dr. Youbi Zahra en tant que examinatrice. Je suis très honorée d'être évaluée par eux.

Je désire aussi remercier tous mes professeurs de mathématiques et tous ceux qui m'ont enseigné au long de ma vie scolaire.

Enfin, j'exprime également mes sincères remerciements à ma famille et à mes collègues, ainsi qu'aux personnes et aux amis qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de mon parcours.

Merci à tous.



ملخص

الهدف من هذه الرسالة هو دراسة بعض الخصائص النوعية لحلول بعض الفئات من المعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية. لهذا الغرض، نقوم بتحويل المشكل المعطى إلى معادلة تكاملية مكافئة ثم نستخدم نظريات النقطة الثابتة المناسبة بحيث تكون النقاط الثابتة المتحصل عليها هي حلول للمشكل المعطى. نقدم أيضا أمثلة توضيحية لكل مشكل مدروس لإظهار فعالية النتائج النظرية.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية الكسرية، المعادلات التكاملية التفاضلية الكسرية، المشتقات الكسرية، المشاكل الحدية، فضاء بناخ، النقطة الثابتة، الوجود، الوحدانية.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier certaines propriétés qualitatives des solutions pour certaines classes d'équations différentielles fractionnaires non linéaires. Pour ce but, nous convertissons le problème donné en une équation intégrale équivalente, puis utilisons les théorèmes de points fixes appropriés, tels que les points fixes obtenus sont les solutions du problème donné. Nous fournissons également des exemples illustratifs à chaque problème considéré pour montrer l'efficacité des résultats théoriques.

Mots-clés : Équations différentielles fractionnaires, équations intégro-différentielles fractionnaires, dérivées fractionnaires, problèmes aux limites, espace de Banach, point fixe, existence, unicité.

Abstract

The objective of this dissertation is to study some qualitative properties of solutions for certain classes of nonlinear fractional differential equations. For this aim, we convert the given problem into an equivalent integral equation and then use the appropriate fixed point theorems such that the fixed points obtained are the solutions of the given problem. We also provide illustrative examples for each considered problem to show the effectiveness of the theoretical results.

Keywords : Fractional differential equations, fractional integro-differential equations, fractional derivatives, boundary value problems, Banach space, fixed point, existence, uniqueness.

Table des matières

Dédicace

Remerciements

Résumé

Abstract

Introduction	2
1 Notions préliminaires	4
1.1 Espaces fonctionnels	4
1.2 Fonctions spéciales	5
1.2.1 Fonction Gamma	5
1.3 Éléments de la théorie du calcul fractionnaire	6
1.3.1 Intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires	6
1.4 Théorèmes de Point Fixe	11
2 Solutions positives pour une classe d'équations intégrro-différentielles fractionnaires	13
2.1 Position du problème	13
2.2 Existence de solutions	13
2.3 Exemples	18
3 Résolution d'un problème différentiel d'ordre fractionnaire avec des conditions initiales non locales	20
3.1 Position du problème	20
3.2 Existence de solutions	20
3.3 Exemples	28
Conclusion	31
Bibliographie	32

Introduction

Le concept de calcul fractionnaire est une généralisation de la différenciation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire non entier. Le calcul fractionnaire est apparu en 1695 [17–19], dans un échange de correspondances entre L'Hôpital et Leibniz, même lors de la construction du calcul différentiel et intégral classique. Dans ces correspondances, Leibniz exhortait à la généralisation possible de la dérivée d'ordre entier à un ordre arbitraire, L'Hôpital l'interrogeait alors sur le cas particulier où l'ordre de la dérivée était $\frac{1}{2}$. Dans la lettre de réponse, datée du 30 septembre 1695, Leibniz a présenté une réflexion correcte, dans laquelle il a affirmé que des conséquences très importantes résulteraient de ces développements [17–19]. Cette date est considérée comme la date de début de la théorie de calcul fractionnaire. Encouragés par cette nouvelle perspective d'application du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs ont développé des définitions des dérivées fractionnaires et des intégrales au cours des décennies suivantes, mais certaines de ces définitions se sont contredites. L'une de ces définitions, apparue au XIXe siècle, est la proposition de Liouville, qui a ensuite été reformulée par Riemann, plus d'informations sur les définitions de la dérivée et de l'intégrale de Riemann-Liouville peuvent être trouvées dans [12, 21, 22]. En ce sens, Caputo a introduit ce qu'on appelle la dérivée fractionnaire de Caputo, fondamentale dans l'étude des effets de mémoire et également dans la modélisation de problèmes réels au moyen d'équations différentielles.

Entre autres applications qui, au fil du temps, ont justifié la pertinence de la dérivée fractionnaire, l'émergence de nombreuses définitions des dérivées fractionnaires, parmi lesquelles on cite : Hadamard, Weyl, Caputo-Hadamard, Katugampola, Caputo-Katugampola, Caputo-Fabrizio, Hilfer, Hilfer-Hadamard, Hilfer-Katugampola, Erdélyi-Kober, Riesz, Caputo-Riesz.

Les équations différentielles fractionnaires ont reçu une très large d'importance en raison de leur applicabilité dans de nombreuses disciplines scientifiques. De plus, c'est un excellent outil pour la description des propriétés de divers matériaux et processus tels que la chimie, la physique, la biologie, la dynamique fractionnaire, le traitement du signal et de l'image, l'économie et la théorie du contrôle. Voir par exemple [4, 7, 8, 11, 16, 20, 24]. Pour le développement récent du sujet, nous renvoyons le lecteur de voir [1–3, 6, 9, 12, 21].

La théorie du point fixe est essentielle à l'analyse non linéaire car elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence et d'unicité dans de nombreux problèmes non linéaires différents, parmi ces théorèmes qui nous intéressent : le théorème du point fixe de Banach, Schauder et le théorème de Krasnoselskii. Le but de cette recherche est de donner certains résultats concernant des études qualitatives de solutions de certaines équations différentielles

fractionnaires de Hadamard et Caputo-Hadamard, en utilisant des techniques de points fixes appropriées. Notre travail est organisé comme suit :

Dans le **premier chapitre**, nous présentons quelques notions fondamentales sur les espaces fonctionnels, le calcul fractionnaire, et nous rappelons quelques théorèmes de point fixe qui sont utilisés tout au long de ce travail.

Dans le **deuxième chapitre**, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions positives pour l'équation différentielle fractionnaire suivante avec une condition aux limites de type intégrale.

$$\begin{cases} {}^C_H\mathfrak{D}^\alpha u(t) = f(t, u(t)) + {}^H\mathfrak{J}^\beta g(t, u(t)), & t \in (1, T], \\ u(1) = \lambda \int_1^T k(s)u(s) ds + d, & \lambda \geq 0, d > 0, \end{cases} \quad (1)$$

Où ${}^C_H\mathfrak{D}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre $0 < \alpha < 1$, ${}^H\mathfrak{J}^\beta$ est l'intégrale fractionnaire d'Hadamard d'ordre $\beta \in (0, 1)$, $f : [1, T] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $g : [1, T] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ et $k : [1, T] \rightarrow [0, +\infty)$, sont des fonctions continues. g est croissante en u .

Le **troisième chapitre** est consacré à l'étude d'existence et l'unicité des solutions pour l'équation différentielle fractionnaire implicite de Hadamard suivante, sous une condition non locale dans un espace de Banach pondéré :

$$\begin{cases} {}^H D_{1+}^\alpha x(t) = f(t, x(t), {}^H D_{1+}^\alpha x(t)), & t \in (1, T], \\ (\log t)^{1-\alpha} x(t) |_{t=1} = x_0 - g(x), & x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2)$$

où ${}^H D_{1+}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $0 < \alpha < 1$, $f : (1, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : C((1, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions non linéaires continues.

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les concepts nécessaires à la bonne compréhension de ce mémoire. Nous présentons quelques notions fondamentales, définitions et lemmes liés au calcul fractionnaire et certains théorèmes du point fixe qui jouent un rôle important dans l'obtention des résultats souhaités.

1.1 Espaces fonctionnels

Soit $J = [a, b]$ l'intervalle compact de $\mathbb{R}$. Nous présentons les espaces fonctionnels suivants:

Définition 1.1.1. On note par $C(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec la norme:

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)| : t \in J\}.$$

Et $C^n(J, \mathbb{R})$ désigne la classe de toutes les fonctions à valeur réelle définies sur J qui ont une dérivée continue du nième ordre.

Définition 1.1.2. On note par $L^1(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont Lebesgue-intégrables. On définit :

$$\|f\|_{L^1} = \int_J |f(t)| dt.$$

Et par $L^P(J, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur J où $|f|^P$ appartient à $L^1(J, \mathbb{R})$ doté de la norme:

$$\|f\|_{L^P} = \left(\int_J |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.1.3. Une fonction $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ est dite absolument continue sur J si pour tous $\varepsilon > 0$ il existe un nombre δ_{ε} , tel que; pour toute partition finie $[a_i, b_i]$ en J , alors $\sum_{i=1}^p (b_i - a_i) < \delta_{\varepsilon}$ implique que $\sum_{i=1}^p |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Définition 1.1.4. Soit $AC(J, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions absolument continues sur J . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par $AC^n(J, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues et dérivables jusqu'à l'ordre $n - 1$ sur J tels que $f^{(n-1)}$ appartient à $AC(J, \mathbb{R})$ défini par:

$$AC^n(J, \mathbb{R}) = \left\{ f : J \rightarrow \mathbb{R} : f, f', f'', \dots, f^{(n-1)} \in C(J, \mathbb{R}) \text{ et } f^{(n-1)} \in AC(J, \mathbb{R}) \right\}.$$

Pour plus de détails sur $AC(J, \mathbb{R})$ et $AC^n(J, \mathbb{R})$ voir le livre de Kolmogorov et Fomin ([13], p. 388).

1.2 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous introduisons la fonction Gamma, qui sera utilisée ultérieurement. Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.2.1 Fonction Gamma [21]

Définition 1.2.1. La fonction Gamma, notée $\Gamma(z)$ est une généralisation de la fonction factorielle $n!$, c'est-à-dire, $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour les arguments complexes avec une partie réelle positive, il est définie comme:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt, \quad \Re(z) > 0,$$

Par continuation analytique, la fonction est étendue à l'ensemble du plan complexe à l'exception des points $0, -1, -2, -3, \dots$, où il a des poteaux simples. Ainsi, $\Gamma : \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$. Certains parmi la plupart des propriétés sont:

1. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.
2. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.
3. $\Gamma(n) = (n - 1)!, \quad n \in \mathbb{N}$.
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Démonstration. La deuxième propriété vient de l'intégration par partie de la fonction de Gamma.

En effet,

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \\ &\quad \vdots \\ &= \left[\frac{e^{-t} t^z}{z} \right]_0^\infty + \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t} t^z dt, \\ &= \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t} t^{(z-1)+1} dt, \\ &= \frac{1}{z} \Gamma(z + 1). \end{aligned}$$

D'ou

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (1.1)$$

En particulier, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1.$$

D'après (1.1) pour tous $n \in \mathbb{N}$ on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1\Gamma(1) = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2.1\Gamma(1) = 3! \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1) \cdots 2.1 = n! \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\Gamma(n+1) = n!$$

□

1.3 Éléments de la théorie du calcul fractionnaire

Maintenant, nous donnons quelques résultats et propriétés du calcul fractionnaire.

1.3.1 Intégrales fractionnaires et dérivées fractionnaires

Soit $J = [a, b]$, $(-\infty < a < b < \infty)$, un intervalle fini sur $\mathbb{R}$. Dans cette sous-section, nous présentons quelques définitions des intégrales fractionnaires classiques, des dérivées fractionnaires et de ses propriétés.

Définition 1.3.1 (Formule de Cauchy [12]). *La formule de Cauchy du n -ième intégrale d'une fonction localement intégrable f sur $\mathbb{R}^+$ est donnée par :*

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Définition 1.3.2 (Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville [12]). *Pour $\alpha > 0$. Le côté gauche (resp. droit) de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction $f \in L^1(J, \mathbb{R})$ de l'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_{a+}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, & t \in J. \\ {}^{RL}I_{b-}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, & t \in J. \end{aligned}$$

resp., où $t \in J$.

Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville sont définies en fonction de leur intégrale fractionnaire et dérivée d'ordre entier comme suit.

Définition 1.3.3 (Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville [12]). Pour $\alpha > 0$. Le côté gauche (resp. droit) de la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction $f \in L^1(J, \mathbb{R})$ est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left({}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \\ {}^{RL}D_{b-}^{\alpha} f(t) &= \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \left({}^{RL}I_{b-}^{n-\alpha} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \end{aligned}$$

resp, où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière du nombre réel α .

Définition 1.3.4 (Dérivée fractionnaire de Caputo [12]). Pour $\alpha > 0$. Le côté gauche (resp. droit) de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction $f \in AC^n(J, \mathbb{R})$ est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^cD_{a+}^{\alpha} f(t) &= {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} (f^{(n)}(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad t \in J, \\ {}^cD_{b-}^{\alpha} f(t) &= {}^{RL}I_{b-}^{n-\alpha} (f^{(n)}(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad t \in J, \end{aligned}$$

resp, où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière du nombre réel α .

Dans ce qui suit, nous considérons quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire et des dérivées de Riemann Liouville et Caputo. En particulier, nous nous intéressons aux dérivées fractionnaires et aux intégrales du côté gauche.

Lemme 1.3.1 (Relation entre les dérivés de Riemann-Liouville et Caputo [12]). Soit $\alpha \in (n-1, n]$. Si la fonction $f \in C^n(J)$, alors :

$${}^cD_{a+}^{\alpha} f(t) = {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}.$$

Lemme 1.3.2 ([12]). Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ et $f \in L^1(J)$. On a :

1. L'opérateur intégral ${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}$ est linéaire,
2. ${}^{RL}I_{a+}^{\alpha} {}^{RL}I_{a+}^{\beta} f(t) = {}^{RL}I_{a+}^{\beta} {}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f(t) = {}^{RL}I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t)$,
3. ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} {}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t)$,
4. ${}^{RL}D_{a+}^{\beta} {}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f(t) = {}^{RL}I_{a+}^{\alpha-\beta} f(t)$.

Lemme 1.3.3 ([12]). Pour $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left({}^{RL}I_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1} \right) (x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad \alpha > 0, \\ \left({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1} \right) (x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

Démonstration. On va montrer la proposition (2). Soit $f \in L^1[a, b]$, la preuve découle directement de la définition

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha} {}^{RL}I_{a+}^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \int_u^x (t-u)^{\beta-1} f(u) du dt.$$

D'après le théorème de Fubini on a

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha} {}^{RL}I_{a+}^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} dt du.$$

En utilisant le changement de variable $t = u + s(x-u)$, on trouve :

$$\begin{aligned} & {}^{RL}I_{a+}^{\alpha} {}^{RL}I_{a+}^{\beta} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x (x-u-s(x-u))^{\alpha-1} (u+s(x-u)-u)^{\beta-1} dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x [(x-u)-s(x-u)]^{\alpha-1} [s(x-u)]^{\beta-1} dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_s^x [(x-u)(1-s)]^{\alpha-1} s^{\beta-1} (x-u)^{\beta-1} dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} \int_s^x (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} dt du. \end{aligned}$$

Donc, on a

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha} {}^{RL}I_{a+}^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} \int_s^x (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} dt du, \quad (1.2)$$

Ensuite, En utilisant la définition de la fonction Béta qui donnée par :

$$\beta(\beta, \alpha) = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

dans (1.2), on obtient

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_{a+}^{\alpha} {}^{RL}I_{a+}^{\beta} f(x) &= \frac{\beta(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= {}^{RL}I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Lemme 1.3.4 ([12]). Soit $n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$. et $f \in C(J)$, alors, l'équation différentielle fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(t) = 0,$$

a une solution générale :

$$f(t) = c_1(t-a)^{\alpha-1} + c_2(t-a)^{\alpha-2} + c_3(t-a)^{\alpha-3} + \dots + c_n(t-a)^{\alpha-n}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Du lemme ci-dessus, il résulte que :

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha} {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t) - c_1(t-a)^{\alpha-1} - c_2(t-a)^{\alpha-2} - c_3(t-a)^{\alpha-3} - \dots - c_n(t-a)^{\alpha-n}.$$

Pour certains $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Lemme 1.3.5 ([12]). Soit $n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$. Si $f \in AC^n(J)$, , alors, l'équation différentielle fractionnaire au sens de Caputo.

$${}^CD_{a+}^{\alpha} f(t) = 0,$$

a une solution générale :

$$f(t) = c_0 + c_1(t-a) + c_2(t-a)^2 + \dots + c_{n-1}(t-a)^{n-1}.$$

Du lemme ci-dessus, il résulte que :

$${}^{RL}I_{0+}^{\alpha} {}^CD_{0+}^{\alpha} f(t) = f(t) - c_0 - c_1(t-a) - c_2(t-a)^2 - \dots - c_{n-1}(t-a)^{n-1}.$$

Pour certains $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Définition 1.3.5 (Intégrale fractionnaire de Hadamard [12]). Soit $a > 0$. L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$ pour une fonction $f \in L^1(J, \mathbb{R})$ est définie par :

$${}^H\mathfrak{J}_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s}, \quad t \in J.$$

Fixer $\delta = \left(t \frac{d}{dt}\right)$, $a, \alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$, où α désigne la partie entière de α . Définir l'espace :

$$AC_{\delta}^n(J, \mathbb{R}) = \left\{ f : J \rightarrow \mathbb{R} : \delta^{n-1} f(t) \in AC(J, \mathbb{R}) \right\}.$$

Définition 1.3.6 (Dérivée fractionnaire de Hadamard [12]). Soit $a > 0$. La dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$ pour une fonction $f \in AC_{\delta}^n(J, \mathbb{R})$ est définie par :

$${}^H\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f(t) = \delta^n \left({}^H\mathfrak{J}_{a+}^{n-\alpha} f \right) (t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{n-\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s}.$$

Définition 1.3.7 (Dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard [12]). Soit $a > 0$. La dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre $\alpha > 0$ pour une fonction $f \in AC_{\delta}^n(J, \mathbb{R})$ est définie par :

$${}^C_H\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f(t) = \left({}^H\mathfrak{J}_{a+}^{n-\alpha} \delta^n f \right) (t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{n-\alpha-1} \delta^n f(s) \frac{ds}{s}.$$

1.3. Éléments de la théorie du calcul fractionnaire

Lemme 1.3.6. [[10, 12]] Soit $\alpha, \beta > 0$ and $n = [\alpha] + 1$. Alors, on a :

1. L'opérateur intégral ${}^H\mathfrak{J}_{a+}^\alpha$ est linéaire.
2. ${}^H\mathfrak{J}_{a+}^\alpha (\log t)^{\beta-1} (x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\beta+\alpha-1},$
3. ${}^C_H\mathfrak{D}_{a+}^\alpha (\log t)^{\beta-1} (x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\beta-\alpha-1}, \beta > n,$
4. ${}^C_H\mathfrak{D}_{a+}^\alpha (\log t)^k = 0, k = 0, 1, \dots, n-1.$

Démonstration. On va montrer la proposition (2). Pour cela, on utilisera la définition de l'intégrale de Hadamard (1.3.5) pour la fonction $f(t) = (\log(\frac{t}{a}))^{\beta-1}$, on obtient

$${}^H\mathfrak{J}_{a+}^\alpha f(t) = {}^H\mathfrak{J}_{a+}^\alpha (\log(\frac{t}{a}))^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\log(\frac{t}{s}))^{\alpha-1} (\log(\frac{s}{a}))^{\beta-1} \frac{ds}{s}, \quad (1.3)$$

et avec un changement de variable convenable donné par

$$u = \frac{\log(\frac{s}{a})}{\log(\frac{t}{a})} \Rightarrow ds = a \cdot \log(\frac{t}{a}) e^{u \log(\frac{t}{a})} du,$$

l'intégrale (1.3) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\log(\frac{t}{s}))^{\alpha-1} (\log(\frac{s}{a}))^{\beta-1} \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\log\left(\frac{t}{a \cdot e^{u \cdot \log(\frac{t}{a})}}\right) \right)^{\alpha-1} \left(\log\left(\frac{a \cdot e^{u \cdot \log(\frac{t}{a})}}{a}\right) \right)^{\beta-1} \frac{a \cdot \log(\frac{t}{a}) e^{u \log(\frac{t}{a})} du}{a \cdot e^{u \log(\frac{t}{a})}}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\log(t) - \left(\log(a) + u \cdot \log\left(\frac{t}{a}\right) \right) \right)^{\alpha-1} \left(u \cdot \log\left(\frac{t}{a}\right) \right)^{\beta-1} \log\left(\frac{t}{a}\right) du, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\log(t) - \log(a) - u \cdot \log\left(\frac{t}{a}\right) \right)^{\alpha-1} \left(u \cdot \log\left(\frac{t}{a}\right) \right)^{\beta-1} \log\left(\frac{t}{a}\right) du, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\log\left(\frac{t}{a}\right) \right)^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} (\log(\frac{t}{a}))^{\beta-1} \log\left(\frac{t}{a}\right) du, \\ &= \frac{\left(\log\left(\frac{t}{a}\right) \right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Donc, on a

$${}^H\mathfrak{J}_{a+}^\alpha (\log(\frac{t}{a}))^{\beta-1} = \frac{(\log(\frac{t}{a}))^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du.$$

Ensuite, En utilisant la définition de la fonction Beta qui donnée par

$$B(\beta, \alpha) = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}, \quad (1.5)$$

dans (1.3.1), on obtient

$$\begin{aligned} {}^H\mathfrak{J}_{a+}^\alpha f(t) &= \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} (\log(\frac{t}{a}))^{\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\log(\frac{t}{a}))^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

□

Lemme 1.3.7 ([12]). $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire :

$${}^H D_{a+}^{\alpha} f(t) = 0,$$

, est donnée par :

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-k},$$

où $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ sont des constantes arbitraires.

Du lemme ci-dessus, il résulte que :

$${}^H \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} {}^H D_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n c_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-k},$$

Pour certains $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ sont des constantes arbitraires.

Lemme 1.3.8 ([10, 12]). Soit $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in AC_{\delta}^n(J, \mathbb{R})$, alors l'équation différentielle fractionnaire de Caputo-Hadamard :

$${}^C_H \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f(t) = 0,$$

a une solution :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^k,$$

Du lemme ci-dessus, il résulte que :

$${}^H \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} ({}^C_H \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^k,$$

où $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

1.4 Théorèmes de Point Fixe

La théorie des points fixes est l'un des outils les plus puissants des mathématiques modernes, permettant de montrer l'existence et l'unicité des points fixes de divers types d'équations. Tout au long de cette étude, nous convertissons le problème donné en une équation intégrale équivalente puis utilisons le théorème du point fixe approprié tel que les points fixes obtenus soient donc les solutions du problème donné. Dans cette section, nous présentons les théorèmes du point fixe qui sont utilisés dans les preuves de nos principaux résultats. Nous commençons par la définition d'un point fixe.

Définition 1.4.1. Soit $\Phi : E \rightarrow E$ une application, un élément x de E est un point fixe de Φ , s'il vérifiait la condition $\Phi(x) = x$.

Théorème 1.4.1 (Ascoli-Arzelà Theorem [5]). Soit $A \subset C([0, T], \mathbb{R})$. A est relativement compact (i.e $\overline{A}$ est compact) si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. A est uniformément borné i.e il existe $M > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq M, \forall f \in A \text{ et } t \in [0, T].$$

2. A est équicontinu i.e , pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall f \in A, \forall t_1, t_2 \in [0, T], |t_1 - t_2| \leq \delta \implies |f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.4.2. [*Théorème du point fixe de Banach* [23]] Soit Ω un sous-ensemble non vide fermé d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$, alors toute application contractante $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$ admet un point fixe unique.

Théorème 1.4.3 (Théorème du point fixe de Schauder [23]). Soit Ω un sous-ensemble non vide, fermé et borné convexe de l'espace de Banach X et $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$ être un opérateur compact continu. Alors, Φ admet un point fixe en Ω .

Théorème 1.4.4 (Théorème du point fixe de Krasnoselskii [23]). Soit Ω un sous-ensemble non vide, fermé et borné convexe d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Supposons que F_1 et F_2 sont deux applications de Ω à X telles que :

1. $F_1x + F_2y \in \Omega$ pour tout $x, y \in \Omega$,
2. F_1 est continue et compacte,
3. F_2 est une contraction.

Alors, il existe $x \in \Omega$ avec $F_1x + F_2x = x$.

Solutions positives pour une classe d'équations intégrro-différentielles fractionnaires

La technique utilisée pour prouver nos résultats dépend de la solution supérieure et inférieure, du théorème du point fixe de Schauder et du principe de contraction de Banach. À la fin, deux exemples sont donnés qui illustrent l'efficacité des résultats théoriques.

2.1 Position du problème

Dans ce qui suit, nous étudierons l'existence et l'unicité de solutions positives pour l'équation différentielle fractionnaire suivante avec condition aux limites intégrale

$$\begin{cases} {}^C_H\mathfrak{D}^\alpha u(t) = f(t, u(t)) + {}^H\mathfrak{J}^\beta g(t, u(t)), & t \in (1, T], \\ u(1) = \lambda \int_1^T k(s)u(s)ds + d, & \lambda \geq 0, \quad d > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où ${}^C_H\mathfrak{D}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre $0 < \alpha < 1$, ${}^H\mathfrak{J}^\beta$ est l'intégrale fractionnaire d'Hadamard d'ordre $\beta \in (0, 1)$, $f : [1, T] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $g : [1, T] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ et $k : [1, T] \rightarrow [0, +\infty)$, sont des fonctions continues. g est croissante en u .

2.2 Existence de solutions

Tout d'abord, nous commençons par définir ce que nous signifions par une solution du problème des valeurs limites (2.1).

Définition 2.2.1. Une fonction $u \in C^1(J)$ est dite solution du problème (2.1) si u satisfait l'équation :

$${}^c_H\mathfrak{D}^\alpha u(t) = f(t, u(t)) + {}^H\mathfrak{J}^\beta g(t, u(t)), \quad t \in (1, T],$$

avec la condition aux limites intégrale :

$$u(1) = \lambda \int_1^T k(s)u(s)ds + d, \quad \lambda \geq 0, \quad d > 0.$$

Définition 2.2.2. Une fonction $u \in C^1(J)$ est appelée solution positive du problème (2.1) si $u(t) \geq 0$ pour tout $t \in J$ et u satisfait le problème (2.1).

Définition 2.2.3. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, et $b > a$. Pour tout $u \in [a, b]$, nous définissons la fonction de contrôle supérieur:

$$U(t, u) = \sup_{a \leq \rho \leq u} f(t, \rho), \text{ et la fonction de contrôle inférieur } L(t, u) = \inf_{u \leq \rho \leq b} f(t, \rho).$$

Évidemment, $U(t, u)$ et $L(t, u)$ sont monotones non décroissants sur $[a, b]$ et

$$L(t, u) \leq f(t, u) \leq U(t, u).$$

Pour l'existence de solutions pour (2.1), nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

Lemme 2.2.1. Soit $u \in C(J)$, u' existe, alors u est une solution du problème (2.1) si et seulement si u est un solution de l'équation intégrale:

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} f(s, u(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} g(s, u(s)) \frac{ds}{s} \\ & + \lambda \int_1^T k(s)u(s)ds + d, t \in J. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Démonstration. Supposons que $u(t)$ satisfasse le problème (2.1), puis en appliquant l'intégrale fractionnaire d'Hadamard ${}^H\mathfrak{J}^\alpha$ des deux côtés de (2.1), on a:

$${}^H\mathfrak{J}_H^\alpha {}^C\mathfrak{D}^\alpha u(t) = {}^H\mathfrak{J}^\alpha \left(f(t, u(t)) + {}^H\mathfrak{J}^\beta g(t, u(t)) \right).$$

D'après le lemme 1.3.8, on obtient:

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} f(s, u(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} g(s, u(s)) \frac{ds}{s} + c_0. \quad (2.3)$$

En utilisant la condition intégrale, nous trouvons:

$$c_0 = \lambda \int_1^T k(s)u(s)ds + d.$$

En substituant la valeur de c_0 dans (2.3), nous obtenons l'équation intégrale (2.2). L'inverse est suivi d'un calcul direct qui termine la preuve. $\square$

Pour transformer (2.2) pour être applicable au point fixe de Schauder, nous définissons l'opérateur $\phi : A \rightarrow A$ par:

$$\begin{aligned} (\Phi u)(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} f(s, u(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} g(s, u(s)) \frac{ds}{s} \\ & + \lambda \int_1^T k(s)u(s)ds + d, \quad t \in J. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Où le point fixe figuré doit satisfaire l'équation de l'opérateur d'identité $\Phi u = u$.

Nous introduisons les hypothèses suivantes:

(H1) soit $u^*, u_* \in A$ tel que $a \leq u_*(t) \leq u^*(t) \leq b$ et:

$$\begin{cases} {}^C\mathfrak{D}_H^\alpha u^*(t) - {}^H\mathfrak{J}^\beta g(t, u^*(t)) \geq U(t, u^*(t)), \\ {}^C\mathfrak{D}_H^\alpha u_*(t) - {}^H\mathfrak{J}^\beta g(t, u_*(t)) \leq L(t, u_*(t)). \end{cases}$$

pour tout $t \in J$.

(H2) Pour $t \in J$, et $u, v \in [0, +\infty)$, il existe deux nombres positifs l_f et l_g , telles que:

$$\begin{aligned} |f(t, u) - f(t, v)| &\leq l_f |u - v|, \\ |g(s, u) - g(s, v)| &\leq l_g |u - v|. \end{aligned}$$

Les fonctions u^* et u_* , sont respectivement appelées la paire de solutions supérieure et inférieure du problème (2.1).

Maintenant. On va donner un premier résultat concernant l'existence de la solution du problème (2.1), en utilisant le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 2.2.1. *Supposons que (H1) soit satisfait, alors le problème (2.1) a au moins une solution positive.*

Démonstration. Soit : $\Omega = \{u \in A : u_*(t) \leq u(t) \leq u^*(t), \quad t \in J\}$ doté de la norme $\|u\| = \max_{t \in J} |u(t)|$, ensuite on a $\|u\| \leq b$. Par conséquent, Ω est un sous-ensemble borné convexe et fermé de l'espace de Banach $C(J)$. Remarquez que la continuité de l'opérateur Φ découle de celle des fonctions f et g . Maintenant, si $u \in \Omega$, il existe deux constantes positives c_f, c_g telles que :

$$\begin{aligned} \max\{f(t, u(t)) : t \in J, u(t) \leq b\} &< c_f, \\ \max\{g(t, u(t)) : t \in J, u(t) \leq b\} &< c_g. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} |(\Phi u)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s, u(s))| \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |g(s, u(s))| \frac{ds}{s} \\ &\quad + \lambda \int_1^T k(s) |u(s)| ds + d \\ &\leq \frac{c_f (\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{c_g (\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \lambda b k^* (T - 1) + d, \end{aligned}$$

où $k^* = \sup_{t \in J} k(t)$, donc :

$$\|\Phi u\| \leq \frac{c_f (\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{c_g (\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \lambda b k^* (T - 1) + d.$$

Par conséquent, $\Phi(u)$ est uniformément borné. Ensuite, on va prouver l'équicontinuité de $\Phi(u)$. Pour chaque $u \in \Omega$. Alors pour $t_1, t_2 \in [1, T]$ avec $t_1 < t_2$ on a :

$$\begin{aligned}
 |\Phi u(t_2) - \Phi u(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log \frac{t_1}{s} \right)^{\alpha-1} - \left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{\alpha-1} \right] |f(s, u(s))| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{\alpha-1} |f(s, u(s))| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} - \left(\log \frac{t_1}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} \right] |g(s, u(s))| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} |g(s, u(s))| \frac{ds}{s} \\
 &\leq \frac{c_f}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[2 \left(\log \frac{t_2}{t_1} \right)^\alpha + (\log t_1)^\alpha - (\log t_2)^\alpha \right] \\
 &\quad + \frac{c_g}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \left[(\log t_2)^{\alpha+\beta} - (\log t_1)^{\alpha+\beta} \right] \\
 &\leq \frac{2c_f}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\log \frac{t_2}{t_1} \right)^\alpha + \frac{c_g}{\Gamma(\alpha + 2)} \left((\log t_2)^{\alpha+\beta} - (\log t_1)^{\alpha+\beta} \right).
 \end{aligned}$$

Comme $t_1 \rightarrow t_2$. Nous voyons que le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro et que la convergence est indépendante de u dans Ω , ce qui signifie que $\Phi(\Omega)$ est équicontinu. Le théorème d'Arzèle-Ascoli implique que $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$ est compact. La condition restante pour appliquer le point fixe de Schauder est de prouver que $\Phi(\Omega) \subset \Omega$. Pour tout $u \in \Omega$, on a $u_*(t) \leq u(t) \leq u^*(t)$ et par (H1), on obtient :

$$\begin{aligned}
 (\Phi u)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} |f(s, u(s))| \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} |g(s, u(s))| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \lambda \int_1^T k(s) u(s) ds + d \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} U(s, u(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} |g(s, u(s))| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \lambda \int_1^T k(s) u(s) ds + d \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} U(s, u^*(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} |g(s, u^*(s))| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \lambda \int_1^T k(s) u^*(s) ds + d \\
 &\leq u^*(t),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & (\Phi u)(t) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} |f(s, u(s))| \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} |g(s, u(s))| \frac{ds}{s} \\
 &+ \lambda \int_1^T k(s) u(s) ds + d \\
 &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} L(s, u(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} |g(s, u(s))| \frac{ds}{s} \\
 &+ \lambda \int_1^T k(s) u(s) ds + d \\
 &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} L(s, u_*(s)) \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} |g(s, u_*(s))| \frac{ds}{s} \\
 &+ \lambda \int_1^T k(s) u_*(s) ds + d \\
 &\geq u_*(t).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $u_*(t) \leq (\Phi u)(t) \leq u^*(t)$, $t \in J$, et on conclut $\Phi(\Omega) \subset \Omega$. Selon le théorème du point fixe de Schauder, l'opérateur Φ a au moins un point fixe $u \in \Omega$. Donc, le problème (2.1) a au moins une solution positive. $\square$

Le deuxième résultat est basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 2.2.2. *Supposons que (H2) est satisfait et*

$$\left(\frac{l_f(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{l_g(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \lambda k^*(T - 1) \right) < 1. \quad (2.5)$$

Alors, le problème (2.1) a une solution positive unique.

Démonstration. Du théorème 2.2.1, il s'ensuit que le problème (2.1) a au moins une solution positive. Par conséquent, il suffit de prouver que l'opérateur défini en (2.4) est une contraction dans Ω . En effet, pour chaque $u, v \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}
 |(\Phi u)(t) - (\Phi v)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \frac{ds}{s} \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} |g(s, u(s)) - g(s, v(s))| \frac{ds}{s} \\
 &+ \lambda k^* \int_1^T |u(s) - v(s)| ds \\
 &\leq \left(\frac{l_f(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{l_g(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \lambda k^*(T - 1) \right) \|u - v\|.
 \end{aligned}$$

À partir de (2.5), l'opérateur Φ est une contraction. Donc, il résulte du théorème 1.4.2 que Φ a un point fixe unique qui est la solution positive unique correspondante au problème (2.1). Ceci termine la preuve. $\square$

2.3 Exemples

Dans cette partie, nous présentons deux exemples pour démontrer l'efficacité des résultats théoriques.

Exemple 2.3.1. Nous considérons l'équation intégr-différentielle fractionnaire suivante avec une condition aux limites intégrale :

$$\begin{cases} {}^C_H\mathfrak{D}^{\frac{1}{4}}u(t) = \frac{2\sin(t)}{\exp(t^2-2)+13} \left(\frac{2|u|}{|u|+3} \right) + \frac{1}{6}\mathfrak{J}^{\frac{1}{5}} \frac{u(t)}{\exp(t-1)}, t \in (1, \pi], \\ u(1) = \frac{1}{9} \int_1^\pi \frac{1}{t} u(s) ds + \frac{1}{13}. \end{cases}$$

Où $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\lambda = \frac{1}{9}$, $d = \frac{1}{13}$, $T = \pi$, $f(t, u) = \frac{2\sin(t)}{\exp(t^2-2)+13} \left(\frac{2|u|}{|u|+3} \right)$, $g(t, u) = \frac{u}{6\exp(t-1)}$ et $k(t) = \frac{1}{t}$. Les fonctions f , g , k sont positives continues et g est croissante par rapport à u . Pour $u, v \in [0, +\infty)$, on a

$$\begin{aligned} |f(t, u) - f(t, v)| &\leq \frac{6}{\exp(t^2-2)+13} \frac{|u-v|}{(3+|u|)(3+|v|)} \\ &\leq \frac{6}{\exp(t^2-2)+13} |u-v|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |g(t, u) - g(t, v)| &= \frac{1}{6\exp(t-1)} |u-v| \\ &\leq \frac{1}{6} |u-v|. \end{aligned}$$

Ainsi, l'hypothèse (H2) est satisfaite pour $l_f = \frac{6}{\exp(-1)+13}$ et $l_g = \frac{1}{6}$. On va vérifier que la condition (2.5) est satisfaite. En effet

$$\begin{aligned} &\frac{l_f(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{l_g(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \lambda k^*(T-1) \\ &= \frac{\frac{6}{\exp(-1)+13} (\log \pi)^{0.25}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)} + \frac{\frac{1}{6} (\log \pi)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+1\right)} + \frac{1}{9} (\pi-1) \simeq 0.95 < 1. \end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème 2.2.2, le problème (2.1) admet une solution positive unique.

Exemple 2.3.2. Nous considérons l'équation intégr-différentielle fractionnaire suivante avec une condition aux limites intégrale

$$\begin{cases} {}^C_H\mathfrak{D}^{\frac{1}{3}}u(t) = \frac{\cos(t)}{\exp(t^2-3)+9} \left(\frac{|u|}{|u|+2} \right) + \frac{1}{5}I^{\frac{1}{5}} \frac{u(t)}{\exp(t-2)}, t \in (2, 3], \\ u(2) = \frac{1}{7} \int_2^e \frac{1}{t} u(s) ds + \frac{1}{11}. \end{cases}$$

Où $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{5}$, $\lambda = \frac{1}{7}$, $d = \frac{1}{11}$, $T = 3$, $f(t, u) = \frac{\cos(t)}{\exp(t^2-3)+9} \left(\frac{|u|}{|u|+2} \right)$, $g(t, u) = \frac{u}{5\exp(t-2)}$ et $k(t) = \frac{1}{t}$. Les fonctions f , g , k sont positives continues et g est croissante par rapport à u . Pour $u, v \in [0, +\infty)$, on a

$$\begin{aligned} |f(t, u) - f(t, v)| &\leq \frac{2}{\exp(t^2 - 3) + 9} \frac{|u - v|}{(2 + |u|)(2 + |v|)} \\ &\leq \frac{2}{\exp(t^2 - 3) + 9} |u - v|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |g(t, u) - g(t, v)| &= \frac{1}{5 \exp(t - 2)} |u - v| \\ &\leq \frac{1}{5} |u - v|. \end{aligned}$$

Ainsi, l'hypothèse (H2) est satisfaite avec $l_f = \frac{2}{\exp(-1)+9}$ et $l_g = \frac{1}{5}$. Nous vérifions que la condition (2.5) est satisfaite. En effet

$$\begin{aligned} &\frac{l_f(\log T)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{l_g(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \lambda k^*(T - 1) \\ &= \frac{\frac{2}{\exp(-1)+9} (\log 3)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3} + 1\right)} + \frac{\frac{1}{5} (\log 3)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + 1\right)} + \frac{1}{7} (3 - 1) \simeq 0.72 < 1. \end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème 2.2.2, le problème (2.1) admet une solution positive unique.

Résolution d'un problème différentiel d'ordre fractionnaire avec des conditions initiales non locales

Dans ce chapitre, nous établissons des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles fractionnaires implicites de Riemann-Liouville non linéaires avec des conditions non locales. Nos résultats sont basés sur le principe de contraction de Banach et le théorème du point fixe de Krasnoselskii. À la fin, deux exemples démontrant l'efficacité des résultats théoriques sont présentés.

3.1 Position du problème

Dans ce qui suit, nous étudierons l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle fractionnaire implicite d'Hadamard sous une condition non locale de la forme

$$\begin{cases} {}^c D_{1+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), D_{1+}^{\alpha} x(t)), t \in (1, T], \\ (\log t)^{1-\alpha} x(t)|_{t=1} = x_0 - g(x), x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.1)$$

où ${}^H D_{1+}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $0 < \alpha < 1$, $f : (1, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : C((1, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions non linéaires continues.

3.2 Existence de solutions

Pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions pour le problème (3.1), nous transformons (3.1) en une équation intégrale équivalente, puis nous appliquons les théorèmes du point fixe de Banach et de Krasnoselskii.

Tout d'abord, nous présentons les lemmes et la définition suivants qui seront utiles pour établir les résultats d'existence et d'unicité pour le problème (3.1).

Définition 3.2.1. Une fonction $x \in C^1((1, T], \mathbb{R})$ est dite être une solution de (3.1) si x satisfait

$${}^H D_{1+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), {}^H D_{1+}^{\alpha} x(t)), \quad \forall t \in (1, T],$$

et

$$(\log t)^{1-\alpha} x(t) \big|_{t=1} = x_0 - g(x),$$

Pour montrer l'existence de solutions au problème (3.1), nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant.

Lemme 3.2.1. *La fonction x résout (3.1) si et seulement si elle est une solution de l'équation intégrale*

$$x(t) = (\log t)^{\alpha-1} (x_0 - g(x)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} f\left(s, x(s), {}^H D_{1+}^\alpha x(s)\right) \frac{ds}{s}, t \in (1, T]. \quad (3.2)$$

Démonstration. Supposons que la fonction x satisfait (3.1), puis en appliquant ${}^H \mathfrak{J}_{1+}^\alpha$ aux deux côtés de (3.1), nous obtenons

$${}^H \mathfrak{J}_{1+}^\alpha {}^H D_{1+}^\alpha x(t) = {}^H \mathfrak{J}_{1+}^\alpha f\left(t, x(t), {}^H D_{1+}^\alpha x(t)\right).$$

En utilisant le Lemme 1.3.7, nous obtenons

$$x(t) = c_1 (\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} f\left(s, x(s), {}^H D_{1+}^\alpha x(s)\right) \frac{ds}{s}. \quad (3.3)$$

La condition

$$(\log t)^{1-\alpha} x(t) \big|_{t=1} = x_0 - g(x),$$

implique que

$$c_1 = x_0 - g(x). \quad (3.4)$$

En substituant (3.4) dans (3.3), nous obtenons l'équation intégrale (3.2). La réciproque peut être prouvée par des calculs directs. La preuve est terminée. $\square$

Dans ce qui suit, nous prouvons l'existence et l'unicité, ainsi que l'existence des résultats, pour le problème (3.1) en utilisant une variété de théorèmes de point fixe. Les hypothèses suivantes seront utilisées dans nos principaux résultats :

(H3) Il existe des constantes $k_1 > 0$ et $k_2 \in (0, 1)$ telles que

$$|f(t, u, v) - f(t, u^*, v^*)| \leq k_1 |u - u^*| + k_2 |v - v^*|,$$

pour $t \in (1, T]$, $u, v, u^*, v^* \in \mathbb{R}$ et $f(\cdot, 0, 0) \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$, où $C_{1-\alpha}$ est l'espace pondéré des fonctions continues qui définit par :

$$C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R}) = \left\{ x : (1, T] \rightarrow \mathbb{R} : (\log t)^{1-\alpha} x \in C(J, \mathbb{R}) \right\},$$

et muni de la norme

$$\|x\|_{C_{1-\alpha}} = \sup_{t \in J} \left| (\log t)^{1-\alpha} x(t) \right|.$$

(H4) Il existe une constante $b \in (0, 1)$ telle que

$$|g(u) - g(u^*)| \leq b \|u - u^*\|_{C_{1-\alpha}},$$

pour $u, u^* \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$.

Maintenant. On va donner un premier résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1), en utilisant le théorème du point fixe de Banach.

3.2. Existence de solutions

Théorème 3.2.1. *Supposons que les hypothèses (H3) et (H4) sont vérifiées. Si*

$$b + \frac{\Gamma(\alpha) k_1 (\log T)^\alpha}{\Gamma(2\alpha) (1 - k_2)} < 1, \quad (3.5)$$

alors il existe une solution unique pour (3.1) dans l'espace $C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$.

Démonstration. On définit l'opérateur :

$$\Phi : C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R}) \rightarrow C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R}),$$

par :

$$(\Phi x)(t) = (\log t)^{\alpha-1} (x_0 - g(x)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s}, t \in (1, T],$$

où $h \in (1, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$h(t) = f(t, x(t), h(t)).$$

Selon le Lemme 3.2.1, les points fixes de l'opérateur Φ sont des solutions de (3.1). L'opérateur Φ est bien défini, c'est-à-dire que pour tout $x \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$ et $t > 1$ l'intégrale

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s}, \quad (3.6)$$

appartient à $C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$. Sous la condition (H3), nous obtenons

$$\begin{aligned} |h(t)| &= |f(t, x(t), h(t))| \\ &\leq \frac{k_1}{1 - k_2} |x(t)| + c (\log t)^{\alpha-1}, \text{ pour tout } t \in (1, T], \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $c = \frac{\sup_{t \in J} |(\log t)^{1-\alpha} f(t, 0, 0)|}{1 - k_2}$. Pour tout $x \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left| \frac{(\log t)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s} \right| \\ &\leq \frac{(\log t)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} |h(s)| \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{(\log t)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{k_1}{1 - k_2} |x(s)| + c (\log s)^{\alpha-1} \right) \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{(\log t)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} \left(\frac{k_1}{1 - k_2} |(\log s)^{1-\alpha} x(s)| + c \right) \frac{ds}{s} \\ &\leq \left(\frac{k_1}{1 - k_2} \|x\|_{C_{1-\alpha}} + c \right) (\log t)^{1-\alpha} I_{1+}^\alpha ((\log t)^{\alpha-1}) \end{aligned}$$

Par le Lemme 1.3.6, on a

$$\left| \frac{(\log t)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\frac{k_1}{1-k_2} \|x\|_{C_{1-\alpha}} + c \right) \frac{\Gamma(\alpha) (\log t)^\alpha}{\Gamma(2\alpha)} \\ &\leq \left(\frac{k_1}{1-k_2} \|x\|_{C_{1-\alpha}} + c \right) \frac{\Gamma(\alpha) (\log T)^\alpha}{\Gamma(2\alpha)} \end{aligned}$$

Cela signifie que l'intégrale existe et appartient à $C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$.

Soient $x, y \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$. Alors, pour $t \in (1, T]$, on obtient

$$\begin{aligned} &|(\Phi x)(t) - (\Phi y)(t)| \\ &\leq (\log t)^{\alpha-1} |g(x) - g(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log s)^{\alpha-1} |h_x(s) - h_y(s)| \frac{ds}{s}, \end{aligned}$$

où $h_x, h_y \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$ sont tels que

$$h_x(t) = f(t, x(t), h_x(t)),$$

et

$$h_y(t) = f(t, x(t), h_y(t)).$$

Par (H3), on a

$$\begin{aligned} |h_x(t) - h_y(t)| &= |f(t, x(t), h_x(t)) - f(t, y(t), h_y(t))| \\ &\leq k_1 |x(t) - y(t)| + k_2 |h_x(t) - h_y(t)|. \end{aligned}$$

Alors,

$$|h_x(t) - h_y(t)| \leq \frac{k_1}{1-k_2} |x(t) - y(t)|.$$

Donc, pour chaque $t \in (1, T]$, on a

$$\begin{aligned} &|(\Phi x)(t) - (\Phi y)(t)| \\ &\leq b (\log t)^{\alpha-1} \|x - y\|_{C_{1-\alpha}} + \frac{k_1}{\Gamma(\alpha)(1-k_2)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} |x(s) - y(s)| \frac{ds}{s} \\ &= (\log t)^{\alpha-1} b \|x - y\|_{C_{1-\alpha}} + \frac{k_1}{\Gamma(\alpha)(1-k_2)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} |(\log s)^{1-\alpha} (x(s) - y(s))| \frac{ds}{s} \\ &\leq (\log t)^{\alpha-1} b \|x - y\|_{C_{1-\alpha}} + \frac{k_1}{1-k_2} I_{1+}^\alpha \left((\log t)^{\alpha-1} \right) \|x - y\|_{C_{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Par le Lemme 1.3.6, on obtient

$$|(\Phi x)(t) - (\Phi y)(t)| \leq (\log t)^{\alpha-1} b \|x - y\|_{C_{1-\alpha}} + \frac{\Gamma(\alpha) k_1 (\log t)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)(1-k_2)} \|x - y\|_{C_{1-\alpha}},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} &\left| (\log t)^{1-\alpha} ((\Phi x)(t) - (\Phi y)(t)) \right| \\ &\leq b \|x - y\|_{C_{1-\alpha}} + \frac{\Gamma(\alpha) k_1 (\log t)^\alpha}{\Gamma(2\alpha)(1-k_2)} \|x - y\|_{C_{1-\alpha}} \\ &\leq b \|x - y\|_{C_{1-\alpha}} + \frac{\Gamma(\alpha) k_1 (\log T)^\alpha}{\Gamma(2\alpha)(1-k_2)} \|x - y\|_{C_{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|\Phi x - \Phi y\|_{C_{1-\alpha}} \leq \left(b + \frac{\Gamma(\alpha) k_1 (\log T)^\alpha}{\Gamma(2\alpha) (1 - k_2)} \right) \|x - y\|_{C_{1-\alpha}}.$$

Selon (3.5), Φ est une contraction. En conséquence du théorème du point fixe de Banach, nous obtenons que Φ possède un point fixe unique qui est une solution unique du problème (3.1). $\square$

Le deuxième résultat est basé sur le théorème du point fixes de Krasnoselskii.

Théorème 3.2.2. *Supposons que les hypothèses (H3), (H4) sont satisfaites et l'hypothèse suivante :*

(H5) *Il existe $p_1 \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R}^+)$, $p_2, p_3 \in C(J, \mathbb{R}^+)$ avec $p_3^* = \sup_{t \in J} p_3(t) < 1$ tels que*

$$|f(t, u, v)| \leq p_1(t) + p_2(t)|u| + p_3(t)|v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R},$$

pour $t \in (1, T]$

Si

$$\lambda = b + \frac{p_2^* \Gamma(\alpha) (\log T)^\alpha}{(1 - p_3^*) \Gamma(2\alpha)} < 1,$$

où $p_2^* = \sup_{t \in J} p_2(t)$. Alors (3.1) admet au moins une solution dans Ω .

Démonstration. On définit :

$$R = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \Lambda = |x_0| + Q + \frac{(\log T)^\alpha p_1^* \Gamma(\alpha)}{(1 - p_3^*) \Gamma(2\alpha)},$$

où $p_1^* = \sup_{t \in J} \{(\log t)^{1-\alpha} p_1(t)\}$ et $Q = |g(0)|$. Fixons

$$M \geq R\Lambda.$$

Considérons le sous-ensemble non vide, fermé, convexe et borné

$$\Omega = \{x \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R}) : \|x\|_{C_{1-\alpha}} \leq M\}$$

et définissons deux opérateurs F_1 et F_2 sur Ω comme suit :

$$(F_1 x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s},$$

et

$$(F_2 x)(t) = (\log t)^{\alpha-1} (x_0 - g(0)),$$

où $h : (1, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$h(t) = f(t, x(t), h(t)).$$

Nous utiliserons le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour montrer qu'il existe au moins un point fixe de l'opérateur $F_1 + F_2$ dans Ω . La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Étape 1 : On va montrer que $(F_1 x + F_2 x) \in \Omega \quad \forall x, y \in \Omega$.

Pour tout $x, y \in \Omega$ et $t \in (1, T]$, on a

$$\begin{aligned}
& |(F_1x)(t) + (F_2y)(t)| \\
& \leq \left| (\log t)^{\alpha-1} (x_0 - g(x)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s} \right| \\
& \leq (\log t)^{\alpha-1} |x_0| + (\log t)^{\alpha-1} |g(x) - g(0)| + (\log t)^{\alpha-1} |g(0)| \\
& \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} |(\log s)^{1-\alpha} h(s)| \frac{ds}{s} \\
& \leq (\log t)^{\alpha-1} |x_0| + (\log t)^{\alpha-1} b \|x\|_{C_{1-\alpha}} + (\log t)^{\alpha-1} Q \\
& \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} |(\log s)^{1-\alpha} h(s)| \frac{ds}{s} \\
& \leq (\log t)^{\alpha-1} |x_0| + (\log t)^{\alpha-1} bM + (\log t)^{\alpha-1} Q \\
& \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} |(\log s)^{1-\alpha} h(s)| \frac{ds}{s}, \tag{3.8}
\end{aligned}$$

utilisant (H5) et $\forall t \in (1, T]$, on a

$$\begin{aligned}
|h(t)| &= |f(t, x(t), h(t))| \\
&\leq p_1(t) + p_2(t) |x(t)| + p_3(t) |h(t)|.
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
|(\log t)^{1-\alpha} h(t)| &\leq (\log s)^{1-\alpha} p_1(t) + p_2(t) |(\log t)^{1-\alpha} x(t)| + p_3(t) |(\log t)^{1-\alpha} h(t)| \\
&\leq p_1^* + p_2^* M + p_3^* |(\log t)^{1-\alpha} h(t)|.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$|(\log t)^{1-\alpha} h(t)| \leq \frac{p_1^* + p_2^* M}{1 - p_3^*}. \tag{3.9}$$

En remplaçant (3.9) dans l'inégalité (3.8) et avec le Lemme 1.3.6, on obtient

$$\begin{aligned}
|((F_1x)(t) + (F_2y)(t))| &\leq (\log t)^{\alpha-1} |x_0| + (\log t)^{\alpha-1} bM + (\log t)^{\alpha-1} Q \\
&\quad + \left(\frac{p_1^* + p_2^* M}{1 - p_3^*} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \\
&\leq (\log t)^{\alpha-1} |x_0| + (\log t)^{\alpha-1} bM + (\log t)^{\alpha-1} Q \\
&\quad + \left(\frac{p_1^* + p_2^* M}{1 - p_3^*} \right) \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} (\log s)^{2\alpha-1},
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
& |(\log t)^{1-\alpha} ((F_1x)(t) + (F_2x)(t))| \\
& \leq |x_0| + Q + \frac{(\log T)^\alpha p_1^* \Gamma(\alpha)}{(1 - p_3^*) \Gamma(2\alpha)} + \left(b + \frac{p_2^* \Gamma(\alpha) (\log T)^\alpha}{(1 - p_3^*) \Gamma(2\alpha)} \right) M.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|F_1x + F_2x\|_{C_{1-\alpha}}$$

$$\leq \Lambda + \lambda M \leq \frac{M}{R} + \left(1 - \frac{1}{R}\right) M = M.$$

Par conséquent $F_1 x + F_2 x \in \Omega$ pour tout $x, y \in \Omega$.

Étape 2 : On va montrer que F_1 est continue.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n \rightarrow x$ dans $C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$. Alors, pour chaque $t \in (1, T]$, on a

$$|((F_1 x_n)(t) - (F_1 x)(t))| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |h_n(s) - h(s)| \frac{ds}{s}, \quad (3.10)$$

où $h_n, h \in C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$ sont tels que

$$h_n(t) = f(t, x_n(t), h_n(t)),$$

et

$$h(t) = f(t, x(t), h(t)).$$

Par (H3), on a

$$\begin{aligned} |h_n(t) - h(t)| &= |f(t, x_n(t), h_n(t)) - f(t, x(t), h(t))| \\ &\leq k_1 |x_n(t) - x(t)| + k_2 |h_n(t) - h(t)|. \end{aligned}$$

Alors,

$$|h_n(t) - h(t)| \leq \frac{k_1}{1 - k_2} |x_n(t) - x(t)|. \quad (3.11)$$

En remplaçant (3.11) dans l'inégalité (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} |((F_1 x_n)(t) - (F_1 x)(t))| &\leq \frac{k_1}{(1 - k_2) \Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |x_n(t) - x(t)| \frac{ds}{s} \\ &= \frac{k_1}{(1 - k_2) \Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} |(\log s)^{1-\alpha} (x_n(t) - x(t))| \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{k_1}{1 - k_2} I_{1+}^\alpha \left((\log t)^{\alpha-1} \|x_n - x\|_{C_{1-\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Par le Lemme 1.3.6, on obtient

$$|(F_1 x_n)(t) - (F_1 x)(t)| \leq \frac{\Gamma(\alpha) k_1 (\log t)^{2\alpha-1}}{(1 - k_2) \Gamma(2\alpha)} \|x_n - x\|_{C_{1-\alpha}},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} |(\log t)^{1-\alpha} ((F_1 x_n)(t) - (F_1 x)(t))| &\leq \frac{\Gamma(\alpha) k_1 (\log t)^\alpha}{(1 - k_2) \Gamma(2\alpha)} \|x_n - x\|_{C_{1-\alpha}} \\ &\leq \frac{\Gamma(\alpha) k_1 (\log T)^\alpha}{(1 - k_2) \Gamma(2\alpha)} \|x_n - x\|_{C_{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|F_1 x_n - F_1 x\|_{C_{1-\alpha}} \leq \frac{\Gamma(\alpha) k_1 (\log T)^\alpha}{(1 - k_2) \Gamma(2\alpha)} \|x_n - x\|_{C_{1-\alpha}},$$

Par conséquent, F_1 est continue.

Étape 3 : on va prouver que F_1 est compacte.

3.2. Existence de solutions

Pour tout $x \in \Omega$ et $t \in (1, T]$, on a

$$|(F_1 x)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} |(\log s)^{1-\alpha} h(s)| \frac{ds}{s}. \quad (3.12)$$

En remplaçant (3.9) dans l'inégalité (3.12) et avec le lemme 1.3.6, on obtient

$$|(F_1 x)(t)| \leq \left(\frac{p_1^* + p_2^* M}{1 - p_3^*} \right) \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} (\log t)^{2\alpha-1}.$$

Par conséquent,

$$|(\log t)^{1-\alpha} (F_1 x)(t)| \leq \left(\frac{p_1^* + p_2^* M}{1 - p_3^*} \right) \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} (\log T)^\alpha.$$

Ainsi,

$$\|F_1 x\|_{C_{1-\alpha}} \leq \left(\frac{p_1^* + p_2^* M}{1 - p_3^*} \right) \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} (\log T)^\alpha.$$

Par conséquent, $F_1(\Omega)$ est uniformément borné.

Il reste à montrer que $F_1(\Omega)$ est équicontinue. Soit $1 \leq t_1 < t_2 \leq T$ et $x \in \Omega$. Alors

$$\begin{aligned} & \left| (\log t_2)^{1-\alpha} (F_1 x)(t_2) - (\log t_1)^{1-\alpha} (F_1 x)(t_1) \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_1^{t_1} (\log t_2)^{1-\alpha} \left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s} + \int_{t_1}^{t_2} (\log t_2)^{1-\alpha} \left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s} \right. \\ & \quad \left. - \int_1^{t_1} (\log t_1)^{1-\alpha} \left(\log \frac{t_1}{s} \right)^{\alpha-1} h(s) \frac{ds}{s} \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_1} \left| (\log t_2)^{1-\alpha} \left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} \right. \\ & \quad \left. - (\log t_1)^{1-\alpha} \left(\log \frac{t_1}{s} \right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} \right| |(\log s)^{1-\alpha} h(s)| \frac{ds}{s} \\ & \quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (\log t_2)^{1-\alpha} \left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} |(\log s)^{1-\alpha} h(s)| \frac{ds}{s} \\ &\leq \left(\frac{p_1^* + p_2^* M}{1 - p_3^*} \right) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_1} \left| (\log t_2)^{1-\alpha} \left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{\alpha-1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (\log t_1)^{1-\alpha} \left(\log \frac{t_1}{s} \right)^{\alpha-1} \right| (\log s)^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \right) \\ & \quad + \left(\frac{p_1^* + p_2^* M}{1 - p_3^*} \right) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (\log t_2)^{1-\alpha} \left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \right). \end{aligned}$$

Comme $t_1 \rightarrow t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Cela signifie que $F_1(\Omega)$ est équicontinue. Alors, d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, nous pouvons conclure que l'opérateur F_1 est compact.

Étape 4 : On va prouver que $F_2 : \Omega \rightarrow C_{1-\alpha}(J, \mathbb{R})$ est une contraction.

Pour tout $x \in \Omega$ et par (H4), on obtient

$$\begin{aligned} |(F_2 x)(t) - (F_2 y)(t)| &= |(\log t)^{\alpha-1} (g(x) - g(y))| \\ &\leq (\log t)^{\alpha-1} b \|x - y\|_{C_{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left| (\log t)^{1-\alpha} ((F_2 x)(t) - (F_2 y)(t)) \right| \leq b \|x - y\|_{C_{1-\alpha}}.$$

Ainsi,

$$\|F_2 x - F_2 y\|_{C_{1-\alpha}} \leq b \|x - y\|_{C_{1-\alpha}}.$$

Par conséquent, l'opérateur F_2 est une contraction. $\square$

En effet, toutes les conditions du théorème du point fixe de Krasnoselskii sont satisfaites. Donc, il existe un point fixe $x \in \Omega$ tel que $x = F_1 x + F_2 x$, qui est une solution au problème (3.1).

3.3 Exemples

Dans cette partie, nous présentons deux exemples pour démontrer l'efficacité des résultats théoriques.

Exemple 3.3.1. On considère le problème fractionnaire qui suit :

$$\begin{cases} c^H D_{1+}^{\frac{2}{3}} y(t) = \frac{1}{9 \exp(-t+2) (1 + |y(t)| + |^H D_{1+}^{\frac{2}{3}} y(t)|)} + \frac{1}{(\log t)^{\frac{1}{3}}}, t \in (1, e], \\ (\log t)^{\frac{1}{3}} y(t) \Big|_{t=1} = \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^n c_i (\log t_i)^{\frac{1}{3}} y(t_i), \end{cases}$$

où $1 < t_1 < \dots < t_n < e$ et $c_i, i = 1, \dots, n$ sont des constantes positives telles que

$$\sum_{i=1}^n c_i \leq \frac{1}{2}.$$

On définit

$$f(t, u, v) = \frac{1}{9 \exp(-t+2) (1 + |u| + |v|)} + \frac{1}{(\log t)^{\frac{1}{3}}}, t \in (1, e], u, v \in \mathbb{R}.$$

on a

$$C_{1-\alpha}([1, e], \mathbb{R}) = C_{\frac{1}{3}}([1, e], \mathbb{R}) = \left\{ h : (1, e] \rightarrow \mathbb{R} : (\log t)^{\frac{1}{3}} h \in C([1, e], \mathbb{R}) \right\},$$

avec $\alpha = \frac{2}{3}$, Il est clair que les fonctions f et g sont continues et

$$f(., 0, 0) \in C_{\frac{1}{3}}([1, e], \mathbb{R}),$$

Pour tout $u, u^*, v, v^* \in \mathbb{R}$ et $t \in (1, e]$, on a

$$\begin{aligned} & |f(t, u, v) - f(t, u^*, v^*)| \\ &= \left| \frac{1}{9 \exp(-t+2)} \left(\frac{1}{1 + |u| + |v|} - \frac{1}{1 + |u^*| + |v^*|} \right) \right| \\ &\leq \frac{|u - u^*| + |v - v^*|}{9 \exp(-t+2) (1 + |u| + |v|) (1 + |u^*| + |v^*|)} \\ &\leq \frac{1}{9e^{-e+2}} (|u - u^*| + |v - v^*|), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |g(u) - g(u^*)| &\leq \sum_{i=1}^n c_i (\log t_i)^{\frac{1}{3}} |u(t_i) - u(t_i^*)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n c_i \|u - u^*\|_{C_{\frac{1}{3}}} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - u^*\|_{C_{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

Ainsi, les conditions (H3) et (H4) sont satisfaites pour $k_1 = k_2 = \frac{1}{9e^{-e+2}}$ et $b = \frac{1}{2}$. La condition

$$b + \frac{\Gamma(\alpha) k_1 (\log T)^\alpha}{\Gamma(2\alpha) (1 - k_2)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{9e^{-e+2}}}{\Gamma(\frac{4}{3}) (1 - \frac{1}{9e^{-e+2}})} \simeq 0.95 < 1,$$

est satisfaite avec $T = e$. Il découle du théorème 3.2.1 que le problème (3.3.1) a une solution unique dans l'espace $C_{\frac{1}{3}}([1, e], \mathbb{R})$.

Exemple 3.3.2. On considère le problème fractionnaire qui suit :

$$\begin{cases} c^H D_{1+}^{\frac{7}{8}} x(t) = \frac{1}{5 \sin(t) (1 + |x(t)| + |^H D_{1+}^{\frac{7}{8}} x(t)|)} + \frac{1}{(\log t)^{\frac{1}{2}}}, t \in (1, e], \\ (\log t)^{\frac{1}{8}} x(t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^n c_i (\log t_i)^{\frac{1}{8}} x(t_i), \end{cases}$$

où $1 < t_1 < \dots < t_n < e$ et $c_i, i = 1, \dots, n$ sont des constantes positives telles que

$$\sum_{i=1}^n c_i \leq \frac{1}{5}.$$

On définit

$$f(t, u, v) = \frac{1}{5 \sin(t) (1 + |u| + |v|)} + \frac{1}{(\log t)^{\frac{1}{2}}}, t \in (1, e], u, v \in \mathbb{R}.$$

On a

$$C_{1-\alpha}([1, e], \mathbb{R}) = C_{\frac{1}{8}}([1, e], \mathbb{R}) = \left\{ h : (1, e] \rightarrow \mathbb{R} : (\log t)^{\frac{1}{8}} h \in C([1, e], \mathbb{R}) \right\},$$

avec $\alpha = \frac{7}{8}$, Il est clair que les fonctions f et g sont continues et

$$f(., 0, 0) \in C_{\frac{1}{8}}([1, e], \mathbb{R}).$$

Pour tout $u, u^*, v, v^* \in \mathbb{R}$ et $t \in (1, e]$, on a

$$\begin{aligned} &|f(t, u, v) - f(t, u^*, v^*)| \\ &= \left| \frac{1}{5 \sin(t) \left(\frac{1}{1 + |u| + |v|} - \frac{1}{1 + |u^*| + |v^*|} \right)} \right| \\ &\leq \frac{|u - u^*| + |v - v^*|}{5 (1 + |u| + |v|) (1 + |u^*| + |v^*|)} \\ &\leq \frac{1}{5} (|u - u^*| + |v - v^*|), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |g(u) - g(u^*)| &\leq \sum_{i=1}^n c_i (\log t_i)^{\frac{1}{8}} |u(t_i) - u(t_i^*)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n c_i \|u - u^*\|_{C_{\frac{1}{8}}} \\ &\leq \frac{1}{5} \|u - u^*\|_{C_{\frac{1}{8}}}. \end{aligned}$$

Ainsi, les conditions (H3) et (H4) sont satisfaites pour $k_1 = k_2 = \frac{1}{5}$ et $b = \frac{1}{5}$. La condition

$$b + \frac{\Gamma(\alpha) k_1 (\log T)^\alpha}{\Gamma(2\alpha) (1 - k_2)} = \frac{1}{5} + \frac{\frac{\Gamma(\frac{7}{8})}{5}}{\Gamma(\frac{14}{8}) (1 - \frac{1}{5})} \simeq 0.5 < 1,$$

est satisfaite avec $T = e$. Il découle théorème 3.2.1 que le problème (3.3.2) a une solution unique dans l'espace $C_{\frac{1}{8}}([1, e], \mathbb{R})$.

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié certaines propriétés qualitatives telles que l'existence, l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles fractionnaires non linéaires impliquant quelques types de dérivées fractionnaires comme Hadamard et Caputo-Hadamard. Les résultats sont basés sur la théorie du point fixe. Certains théorèmes de point fixe appropriés ont été utilisés, en particulier, le théorème de contraction de Banach, le théorème de point fixe de Schauder et le théorème de point fixe de Krasnoselskii dans les espaces de Banach. Ces résultats théoriques ouvrent des perspectives pour de nombreuses applications pratiques, constituant un domaine de recherche très actif. Il serait intéressant d'étendre les résultats du mémoire actuel en considérant d'avantage le côté appliqué des équations différentielles fractionnaires, en raison de leur importance dans l'étude de la plupart des phénomènes naturels.

Pour ces perspectives, nous espérons poursuivre nos travaux en explorant d'autres classes d'équations différentielles fractionnaires qui ont été jusqu'ici peu étudiées.

Bibliographie

- [1] M. S. Abdo, S. T. M. Thabet, B. Ahmad, The existence and Ulam-Hyers stability results for ψ -Hilfer fractional integro-differential equations, *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.*, 11(4) (2020), 1–24.
- [2] A. Atangana, Fractal-fractional differentiation and integration : connecting fractal calculus and fractional calculus to predict complex system, *Chaos, Solitons & Fractals*, 102 (2017), 396–406.
- [3] A. Atangana, D. Baleanu, New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel : theory and application to heat transfer model, *Therm. Sci.*, 20(2) (2016), 763–769.
- [4] D. Baleanu, J. A. T. Machado, A. C. J. Luo, *Fractional Dynamics and Control*. Springer, New York, 2002.
- [5] R. F. Brown. *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*, Third Edition, Springer International Publishing Birkhäuser, 2014.
- [6] M. Caputo, M. Fabrizio, A new Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 1(2) (2015), 1–13.
- [7] L. Debnath, Recent applications of fractional calculus to science and engineering, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 54 (2003), 3413–3442.
- [8] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [9] F. Jarad, T. Abdeljawad. Generalized fractional derivatives and Laplace transform, *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. S*, 13(3) (2019), 709–722.
- [10] F. Jarad, T. Abdeljawad, D. Baleanu, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, *Adv. Differ. Equ.*, 2012(1) (2012), 1–8.
- [11] N. A. Khan, A. Ara, A. Mahmood, Approximate solution of time-fractional chemical engineering equations : a comparative study, *Int. J. Chem. Reactor Eng.*, 8(1) (2010), Article A19.
- [12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006.
- [13] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Fundamentals of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka, Moscow, 1968.

- [14] A. Lachouri, A. Ardjouni, A. Djoudi, The existence and Ulam-Hyers stability results for generalized Hilfer fractional integro-differential equations with nonlocal integral boundary conditions, *Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl.*, 6(1) (2022), 101–117.
- [15] A. Lachouri, A. Ardjouni, A. Djoudi, Existence and uniqueness results for higher order fractional differential equations and inclusions with integral boundary conditions, *J. Interdiscip. Math.*, (2021), 1–19.
- [16] V. Lakshmikantham, S. Leela, J. V. Devi, *Theory of Fractional Dynamic Systems*, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, UK, 2009.
- [17] G. W. Leibniz, Letter from Hanover, Germany to G. F. A. L'Hospital, September 30, 1695, *Leibniz Mathematische Schriften*, Olms-Verlag, Hildesheim, Germany, 1962, (First published in 1849), 301–302.
- [18] G. W. Leibniz, Letter from Hanover, Germany to Johann Bernoulli, December 28, 1695, *Leibniz Mathematische Schriften*, Olms-Verlag, Hildesheim, Germany, 1962, (First published in 1849), 226.
- [19] G. W. Leibniz, Letter from Hanover, Germany to John Wallis, May 30, 1697, *Leibniz Mathematische Schriften*, Olms-Verlag, Hildesheim, Germany, 1962, (First published in 1849), 25.
- [20] R. Magin, Fractional calculus in bioengineering, *Critical Rev. Biomed. Eng.*, 32 (2004), 1–104.
- [21] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [22] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and derivatives : Theory and Appl*, Gordon and Breach Science Publisher, Amsterdam, Netherlands, 1993.
- [23] D. R. Smart, *Fixed point theorems*, Cambridge Tracts in Mathematics, no. 66, Cambridge University Press, London-New York, 1974.
- [24] V. E. Tarasov, *Fractional Dynamics : Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. Springer, New York, 2011.