



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

**Analyse numérique de la méthode de décomposition
en deux sous domaines pour un problème d'inéquation
variationnelle lié à contrôle ergodique**

Présenté par :

Djouadi Ibtissem

Devant le Jury :

Dr. Bouaziz Asma	MCA	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. Mécheri Halima	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Boussaha Hanene	MCB	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2022-2023

Remerciements

Avant tout, je remercie **Dieu** qui a illuminé mon chemin et qui j'ai armés le courage et de bonne volonté pour réaliser ce travail.

Je tenu à remercier vivement Mme **Mécheri Halima**, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire, ses conseils, ses encouragement et son expérience, je la remercie pour son soutien, sa disponibilité, sa gentillesse.

Je lui suis également reconnaissant
pour la confiance qu'il ma accordée

Je tenu également à exprimer notre gratitude au présidente du jury Mme **Bouaziz Asma** pour m'avoir consacré de sa temps il m'a fais l'honneur d'accepter de présider le jury.

Je remercie très chaleureusement Mme **Boussaha Hanene** d'avoir accepté d'examiner mon travail.

J'adresse également des remerciements à tous les enseignants de la faculté de l'université de Chadli Benjdid. Ainsi que tous les membres du département de Mathématique, pour toute l'aide qui m'été accordée.

Dédicace

Avec ma gratitude et tout mon amour je dédie ce modeste travail :

A l'être la plus chère de ma vie ma mère **Zahiya**, tu trouves toujours les mots qui m'encourageaient et qui me poussaient à aller de l'avant, quoi que je fasse ou je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

A mon très cher père **Ali**, pour son soutien, son affection et la confiance qu'il m'a accordé. J'espère que par ce modeste travail, je vous rends un peu de ce sentiment de fierté que j'éprouve d'être votre fille. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A mes chères soeurs et mes chers frères qui m'avez toujours soutenu et encouragé durant ces années d'études.

A mes chères amis qui me sont chers, je leur dédie ce mémoire pour tous les moments de joie qu'on a passé ensemble.

Résumé

Ce travail est consacré à l'analyse numérique d'inéquation variationnelle. Plus précisément un problème de contrôle ergodique ainsi que sa discrétisation par la méthode des éléments finis de type linéaire combinée à des algorithmes de Schwarz.

Le principe de la méthode de décomposition de domaine consiste à découpler le problème initial posé dans un domaine (généralement de forme complexe et de grande taille) en plusieurs sous problèmes. En effet ces bords étant des frontières fictives, la physique du problème ne permet pas d'y fixer des conditions.

Deux stratégies, toutes les deux itératives, sont possibles : la première consiste à découpler le domaine global en sous domaines qui se couvrent partiellement.

La deuxième consiste à découpler le domaine sur partition et imposer des conditions de continuité aux interfaces.

Mots clés : Inéquations variationnelles, contrôle ergodique, méthode de Schwarz, méthode des éléments finis.

Abstract

This work is considered to study the numerical analysis of variational inequalities. Precisely the ergodic control problem and this discretization by finite element method of linear type combined the Schwarz alternating algorithm.

The principal of the decomposition method is to decoupled the initial problem composed in the domain (generally of complex shape and large sized) in several sub problems. Indeed the edges being of border, the physics of problem does not allow to fix it conditions.

Two strategies, both iterative are possible, the first one consists in decoupling the global domain in sub domains which cover themselves partially.

The second consists in decoupling the domain on a partition and in imposing conditions on the interfaces.

Keywords : Variational inequalities, ergodic control, Schwarz method, finite elements method.

ملخص

في هذا العمل قنا بدراسة التحليل العددي لتراجحة متغيرة، بالضبط مسألة التحكم الأمثل وكذلك تقسيمه باستعمال طريقة العناصر المحدودة الخطية منسقة بخوارزميات من نوع شوارتز. إن مبدأ تحليل المجال يتمثل في تحليل المشكل الأصلي المطروح في مجال (عموما ذو شكل معقد و حجم كبير) إلى العديد من المشاكل الفرعية، في الواقع هذه الحدود وهمية الحواف لذلك فزياء هذا المشكل لا تسمح لنا بتثبيت شروط.

لدينا إستراتيجيتين تكراريتين ممكنتين، الأولى تعمل على تقسيم المجال الإجمالي إلى عدة مجالات فرعية تغطي جزئيا والثانية تعمل على فصل المجال إلى مجموعة أجزاء و فرض شروط الاستمرارية على الواجهات. في هذا السياق نركز اهتمامنا على طريقة تحليل المجال الى مجالين اثنين، مع الحصول على تقريبات و تقديرات الخطأ.

الكلمات الرئيسية: متراجحة متغيرة، التحكم الأمثل ،طريقة شوارتز، طريقة العناصر المحدودة، التقريبات .

Table des matières

Notation	10
Introduction	13
1 Généralités sur les inéquations variationnelles elliptiques	14
1.1 Notations et hypothèses	14
1.2 Inéquation variationnelle continue	16
1.2.1 Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-	
solutions continues	17
1.2.2 Propriété de monotonie de la solution continue	17
1.3 Problème discret	18
1.3.1 Position du problème	19
1.3.2 Caractérisation de la solution discrète comme enveloppe des sous-	
solutions discrètes	19
1.3.3 Propriété de monotonie de la solution discrète	20
1.4 Approximation en norme $L^\infty(\Omega)$	20
2 Approximation par élément finis d'une classe d'inéquation variationnelle	
liée à un problème de contrôle ergodique	23
2.1 Introduction	23
2.1.1 Notations et Hypothèses	24
2.2 Problème continu	24
2.2.1 Position du problème	25
2.2.2 Régularité de la solution	26
2.2.3 Propriété de lipschitzianité continue	27
2.2.4 Notion des sous solutions	28

2.3	Problème discret	28
2.4	Estimation d'erreur en norme L^∞	31
3	Méthode de décomposition en deux sous domaines pour le problème de	
	contrôle ergodique	35
3.1	Historique de la méthode de Schwarz	35
3.2	Méthodes de Schwarz avec recouvrement et sans recouvrement	37
3.3	Méthode de Schwarz sans recouvrement	37
3.4	Méthode de Schwarz avec recouvrement	39
3.5	Application de la méthode de décomposition pour les inéquation variation-	
	nelle liée à un problème de contrôle ergodique	41
3.5.1	Introduction :	41
3.6	Méthode alternée de Schwarz pour le problème de l'obstacle :	44
3.6.1	Algorithme de Schwarz	45
3.6.2	Convergence géométrique	45
3.6.3	Discrétisation de l'algorithme de Schwarz	46
3.6.4	Analyse de l'erreur en norme L^∞	47
3.7	Estimation d'erreur en norme $L^\infty(\Omega)$	48
3.8	Application	49
3.8.1	Suites de Schwarz continues	49
3.8.2	Algorithme de Schwarz	49
3.8.3	Convergence géométrique	50
3.8.4	Suites de Schwarz discrètes	50
3.8.5	Estimation d'erreur :	51
	Conclusion et Perspectives	59
	Bibliographie	64

Notations

Cette partie est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales d'analyse et certaines définitions des espaces de sobolev qui seront très utiles pour le développement ulterieur de notre travail. Nous faisons également un rappel de certains théorèmes et des résultats importants que nous utiliserons dans les chapitre 1, 2 et 3.

1. Soit p un réel, avec $1 \leq p < \infty$.

$\mathbb{L}^p(\Omega)$ est l'espace de Banach des fonctions mesurables définies presque partout de Ω dans \mathbb{R} , tel que $\|u\|_p$ soit intégrable, muni de la norme

$$\|u\|_p = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Si $p = \infty$,

$\mathbb{L}^{\infty}(\Omega)$ est l'espace de Banach, des fonctions mesurables et bornées définies presque partout de Ω dans \mathbb{R} , muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{L}^{\infty}(\Omega)} = \sup_{ess\,x \in \Omega} |u| = \inf \{M / |u(x)| < M\},$$

2. Soient $m \geq 1$ un entier, et p un réel avec, $1 \leq p < \infty$.

$W^{m,p}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m sont dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$, muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Où

$$D^{\alpha}u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial^{\alpha_1}x_1 \dots \partial^{\alpha_n}x_n}$$

et

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

est un espace de Banach,

3. $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

Où, γ est l'application de trace sur la frontière de Ω .

4. V désigne un espace de Hilbert $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$,

5. Soit P_1 l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égale à 1 telle que :

$$P_1 = \{p : p(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\},$$

6. On note par :

Ω : un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière lipschitzienne,

ψ : l'obstacle,

\mathbb{K} : est un ensemble convexe, fermé et non vide,

V_h : l'espace d'approximation interne,

φ : est une fonction de base,

r_h : opérateur de restriction,

π_h : opérateur d'interpolation,

τ^h : triangulation de domaine,

$\bar{B}(0, R)$: la boule fermée de centre 0 et de rayon R .

Introduction

Le principe de résolution par décomposition de domaine d'un problème donné, dit méthode de Schwarz, est assez ancien. En 1869 [39], l'auteur a utilisé une décomposition recouvrante pour la résolution d'un problème aux dérivées partielles sur une géométrie complexe.

Le développement des moyens de calcul numérique et notamment l'avènement des architectures parallèles a ravivé, depuis trois décennies, l'intérêt porté à ces méthodes.

En 1988, Lions a donné une interprétation de cette méthode à l'aide d'une formulation variationnelle [28, 29, 31]. Il a précisé que la convergence de cette méthode dépend de la taille du recouvrement et du pas de discrétisation.

Les méthodes de décomposition de type Schwarz consiste à remplacer la résolution d'un problème posé sur un domaine global potentiellement gros et compliqué par une succession de résolutions du même problème sur des sous-domaines du domaine global, supposés plus simples, plus petits et réguliers.

On distingue deux types de partitionnement :

1. Méthode de Schwarz sans recouvrement : l'intersection entre les sous- domaines se limite aux interfaces.
2. Méthode de Schwarz avec recouvrement : Chaque sous domaine recouvre une partie de ses sous-domaines voisins, et qui comporte deux versions, à savoir celle de Schwarz additif (Calcul parallèle) et de Schwarz multiplicatif (Calcul séquentiel).

La méthode de Schwarz a été largement étudiée pour les problèmes elliptiques linéaires dans [10, 11, 2, 5].

P. L. Lions était le premier a avoir travaillé sur les inéquations variationnelles [28]. Les deux méthodes de Schwarz multiplicative et additive ont été respectivement données dans [43, 44, 45], pour le problème d'obstacle avec un ou deux obstacles, quand à Meyer

dans [33], il a étudié leurs solutions numériques.

Les inéquations variationnelles sont des équations qui expriment une inégalité entre deux fonctionnelles. Elles sont utilisées en mathématiques pour modéliser des problèmes où l'on cherche une fonction qui minimise ou maximise une certaine quantité, mais où cette fonction doit satisfaire certaines contraintes. Elles ont des applications dans de nombreux domaines de la physique et de l'ingénierie, tels que la mécanique des fluides, l'élasticité, l'optique, l'électromagnétisme et la théorie du contrôle. Elles sont également utilisées dans l'analyse numérique pour résoudre des problèmes d'optimisation et de contrôle optimal.

Pour notre part, on s'intéresse à l'approximation par éléments finis, en introduisant l'algorithme de Schwarz pour des inéquations variationnelles lié à contrôle ergodique.

Le travail présent se décompose en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques résultats généraux sur les inéquations variationnelles, telles l'existence et l'unicité de la solution, leurs propriétés de régularité, de sous solutions et de monotonie, nous introduisons également quelques notions supplémentaires sur l'approximations qui nous seront utiles dans les chapitres à suivre, telle que l'approximation en norme uniforme donnée par Cortey-Dumont [19].

Le deuxième chapitre est consacré à l'approximation numérique d'inéquation variationnelle où le terme d'ordre zéro tend vers zéro. Des estimations d'erreurs ont été obtenues en norme L^∞ en utilisant la méthode de sous solution, et un exemple numériques ont été donné dans ce sens.

Le troisième chapitre concerne la méthode de décomposition de domaine, nous introduisant ici des généralités sur cette méthode à savoir la méthode de schwarz classique pour un problème d'inéquations variationnelles. Par suite, on passe à l'analyse de convergence de la méthode alternée de schwarz pour deux sous domaines avec recouvrement, appliqué à une classe d'inéquation variationnelle lié à contrôle ergodique, dans ses deux versions continue et discrète.

Dans le cas discret, on considère que chaque sous domaine possède sa propre discrétisation par une méthode des éléments finis uniforme «nonmatching grids» dans le sens qu'un noeud ou un triangle appartenant à un sous domaine n'appartient pas à l'autre.

A la fin, nous donnons quelques sources que nous avons utilisées pour rédiger ce travail.

Généralités sur les inéquations variationnelles elliptiques

Cette partie rappelle les résultats importants d'approximations de l'inéquation variationnelle et en utilisant la notion de sous-solution. Pour des raisons de complétude, l'étude du cas discret s'effectuera par symétrie au problème continu.

1.1 Notations et hypothèses

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N à frontière régulière Γ . L'opérateur elliptique considéré dans notre travail étant de la forme :

$$\mathbb{A}v = - \sum_{1 \leq j, k \leq N} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{jk}(x) \frac{\partial v}{\partial x_k}) + \sum_j a_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0(x)v \quad (1.1)$$

La forme bilinéaire $a(., .)$ associée est définie par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{1 \leq j, k \leq N} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_j a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} v + a_0(x)uv \right) dx, \quad (1.2)$$

Où les coefficients $a_{jk}(x), a_j(x), a_0(x)$, sont supposés être suffisamment réguliers, et $a_0(x)$ satisfait :

$$\forall x \in \Omega \quad a_0(x) \geq \beta > 0; \quad (1.3)$$

$$\sum_{j, k} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq \gamma |\xi|^2, \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega) \quad (1.4)$$

Où : β et γ sont des constantes positives.

Nous supposons aussi que la forme bilinéaire est continue et fortement coercive :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1}^2, \quad \alpha \geq 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Soit enfin un second membre $f \in L^\infty$, et un obstacle

$$\psi \in W^{2,\infty}(\Omega) \text{ tel que : } \psi > 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (1.5)$$

On prend une fonction $\rho = \psi \setminus_{B(x_0, Ch)}$, alors

$$\forall x \in B(x_0, Ch) \text{ telle que } u(x) = \psi(x).$$

Nous obtenons

$$|u(x) - \rho(x)| \leq Ch^2 |\log h|^2. \quad (1.6)$$

Ce genre d'inéquation s'appelle aussi problème de l'obstacle où problème à frontière libre. En effet la fonction u coïncide avec l'obstacle ψ sur une partie de Ω , et dans l'autre partie l'obstacle $\psi > u$. Cela nous conduit à définir une frontière libre entre les deux parties de Ω . En pratique les inéquations variationnelles sont souvent appliquées dans le domaine des problèmes de contrôle stochastique et les problèmes de l'énergie.

Remarque 1.1.1 *Dans la suite on prend les hypothèses (1.1) à (1.5).*

1.2 Inéquation variationnelle continue

Définition 1.2.1 *Le problème suivant est appelé inéquation variationnelle elliptique (I.V) :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{V} \text{ tel que :} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in \mathbb{V} \\ u \leq \psi, \quad v \leq \psi \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Où \mathbb{V} est l'espace $H_0^1(\Omega)$ ou $H^1(\Omega)$.

Inégalité de Lévy-Stampacchia

Lemme 1.2.1 [41] *Soit $\psi \in H^1(\Omega)$ tel que $\psi \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Soit aussi \mathbb{A} un opérateur différentiel associé à la forme bilinéaire $a(.,.)$ et u la solution du problème (1.7) tel que $\mathbb{A}u \geq g$ (au sens de $H^{-1}(\Omega)$), où $g \in L^2(\Omega)$. Alors*

$$f \geq \mathbb{A}\psi \geq f \wedge g = \min \{f, g\} \quad (1.8)$$

Théorème 1.2.2 [41] *Sous la condition (1.8), la solution u de (1.7) appartient à $W^{2,p}(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$ et $\mathbb{A}u \in L^\infty(\Omega)$.*

Existence et unicité de la solution

Théorème 1.2.3 [19] *Sous les hypothèses et les notations précédentes, le problème (1.7) admet une solution unique.*

Lemme 1.2.2 *Si la forme bilinéaire $a(.,.)$ n'est pas coercive, l'adjonction d'un λ assez grand nous permet de considérer la forme bilinéaire fortement coercive :*

$$b(.,.) = a(.,.) + \lambda(.,.) \quad (1.9)$$

1.2.1 Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues

Définition 1.2.4 Soit X l'ensemble des sous-solutions pour l'I.V (1.7), c'est à dire l'ensemble des $z \in \mathbb{V}$ tel que

$$\begin{aligned} a(z, v) &\leq (f, v), \quad \forall v \in \mathbb{V} \\ z &\leq \psi, \quad v \geq 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Théorème 1.2.5 [19] Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution u de l'I.V (1.7) est le plus grand élément de X .

1.2.2 Propriété de monotonie de la solution continue

On notera la solution de l'I.V (1.7) par $\sigma(f, \psi)$, où f est le second membre et ψ est l'obstacle.

Proposition 1.2.6 [36] Soient f et g deux seconds membres et $\psi, \tilde{\psi}$ deux obstacles. Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution de l'I.V (1.7) est croissante par rapport à l'obstacle ψ et au second membre f , i.e :

$$\text{si } f \leq g \text{ et } \psi \leq \tilde{\psi} \text{ alors } \sigma(f, \psi) \leq \sigma(g, \tilde{\psi}). \tag{1.11}$$

Considérons maintenant l'application δ définie comme suit

$$\begin{aligned} \delta : L^\infty(\Omega) &\longrightarrow L^\infty(\Omega) \\ (f, \psi) &\longrightarrow \delta(f, \psi) = u. \end{aligned}$$

Où u est la solution de l'I.V (1.7).

Proposition 1.2.7 [36] Soit c une constante positive alors

$$\delta(f + a_0 c, \psi + c) = \delta(f, \psi) + c$$

1.3 Problème discret

Considérons un espace d'éléments finis conforme construit à partir d'un polynôme de degré 1. On établit sur Ω une triangulation régulière τ^h composée d'un nombre fini des triangles non dégénérés tels que

$$\Omega = \cup_{T_h \in \tau^h} T_h$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} T_h \cap T_h = \emptyset \\ T_h \cap T_h = \text{un sommet commun} \\ T_h \cap T_h = \text{un coté commun} \end{array} \right. \quad (1.12)$$

On note par $h(T)$ le diamètre de chaque triangle T et $\rho(T)$ le sup des sphères inscrites dans T , on suppose que :

$$T \in \tau^h, \quad 0 \leq v \leq \frac{h(T)}{\rho(T)} \leq v' \quad (1.13)$$

On introduit maintenant V_h , l'espace discret suivant

$$V_h = \{V \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) \text{ tel que } v/T \in P_1, \forall T \in \tau^h\}. \quad (1.14)$$

On notera par $\{\varphi_m\}_{m=1}^{M(h)}$ les fonctions de base usuelles définies par

$$\varphi_m(M_j) = \delta_{mj} \text{ telles que : } \delta_{mj} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = j \\ 0 & \text{si } m \neq j \end{cases}$$

où M_j sont les sommets de la triangulation qui n'appartiennent pas à Γ , et $M(h)$ étant le nombre de noeuds de triangulation.

L'opérateur de restriction naturel sera pour

$$v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega), \quad r_h v(x) = \sum_{m=1}^{M(h)} v(M_h) \varphi_m(x)$$

Rappelons maintenant la propriété :

$$\varphi_m \geq 0 \quad \forall m = 1, \dots, M(h), \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{M(h)} v(M_h) \varphi_m = 1$$

1.3.1 Position du problème

Considérons maintenant le problème discret associé au problème continu (1.7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h \in \mathbb{V}_h \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \\ u_h \leq r_h \psi, \quad v_h \leq r_h \psi \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Existence et unicité de la solution

Théorème 1.3.1 [19] *Sous les hypothèses et notations précédentes le problème (1.15), admet une solution unique.*

1.3.2 Caractérisation de la solution discrète comme enveloppe des sous-solutions discrètes

Définition 1.3.2 *Soit X_h l'ensemble des sous-solutions pour l'I.V (1.15), c'est à dire l'ensemble des $z_h \in V_h$ tel que*

$$\left\{ \begin{array}{l} a(z_h, \varphi_m) \leq (f, \varphi_m) \quad \forall m = 1, \dots, M(h) \\ z_h \leq r_h \psi \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Théorème 1.3.3 [19] *Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution u_h de l'I.V (1.15) est le plus grand élément de X_h .*

1.3.3 Propriété de monotonie de la solution discrète

On notera la solution u_h de l'I.V (1.15) par $\sigma_h(f, r_h\psi)$.

Proposition 1.3.4 [36] *Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution de l'I.V (1.15) est croissante par rapport à l'obstacle ψ et au second membre f .*

$$\text{Si } f \leq g \text{ et } \psi \leq \tilde{\psi} \text{ alors } \sigma_h(f, r_h\psi) \leq \sigma_h(g, r_h\tilde{\psi}) \quad (1.17)$$

Par analogie au cas continu, considérons l'application δ_h

$$\delta_h : L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega) \quad (1.18)$$

$$(f, \psi) = \delta_h(f, r_h\psi) = u_h.$$

Où u_h est la solution discrète de l'I.V (1.15).

Proposition 1.3.5 [36] *Soit c une constante positive, alors*

$$\delta_h(f + a_0c, r_h(\psi + c)) = \delta_h(f, r_h\psi) + c \quad (1.19)$$

1.4 Approximation en norme $L^\infty(\Omega)$

Remarque 1.4.1 *La nature du problème d'inéquation variationnelle est l'existence de deux sous-ensembles de Ω notés Ω_0 et $C\Omega_0$ tels que :*

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega / u(x) = \psi(x)\}$$

$C\Omega_0$ est le complémentaire de Ω_0 dans Ω .

Soit maintenant l'approximation discrète de l'ensemble :

$$\Omega_h = \{x \in \cup T_h / T_h \cap \Omega_0 \neq \emptyset\}$$

D'après [19], on a le lemme suivant :

Lemme 1.4.1 *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous avons*

$$\begin{aligned} \|u - \psi\|_\infty &\leq Ch^2 |\log h|^2 \\ \|\psi - r_h \psi\|_\infty &\leq Ch^2 |\log h|^2 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Preuve Soit T_h dans Ω_h , il existe x_0 appartient à T_h tel que :

$$u(x_0) = \psi(x_0)$$

De plus

$$T_h \subset B(x_0, Ch)$$

Alors, pour tout x dans T_h

$$u(x) \leq \psi(x)$$

Comme u est la solution de (1.7) et d'après l'hypothèse (1.5) et (1.6), on sait que

$$u(x) = \rho(x)$$

C'est à dire

$$u(x) \leq \psi(x) \leq u(x) + Ch^2 |\log h|^2$$

Donc

$$\|u - \psi\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Pour la deuxième estimation ; d'après l'hypothèse (1.20) on a

$$\|u - r_h u\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Et

$$r_h u \leq r_h \psi \leq r_h u + Ch^2 |\log h|^2$$

D'où

$$\|\psi - r_h \psi\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2.$$

■

Théorème 1.4.1 *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2 \tag{1.21}$$

Preuve

Partie 1 :

Construction d'une fonction discrète α_h proche de u qui vérifie

$$\alpha_h \leq u_h \text{ et } \|\alpha_h - u_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Partie 2 :

Construction d'une fonction discrète β_h proche de u_h qui vérifie

$$u_h \leq \beta_h \text{ et } \|\beta_h - u_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

La démonstration du théorème se poursuit alors comme suit

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_\infty &\leq \|u - \alpha_h\|_\infty + 2\|\beta_h - u_h\|_\infty \\ &\leq Ch^2 |\log h|^2. \end{aligned}$$

■

2

Approximation par élément finis d'une classe d'inéquation variationnelle liée à un problème de contrôle ergodique

2.1 Introduction

Il est bien connu que les problèmes de contrôle impulsionnel pour refléter un processus de diffusion peuvent être résolus en considérant une solution d'une inéquation variationnelle.

Le but d'utilisation d'un problème de contrôle ergodique est la minimisation de la fonction coût à long terme par unité de temps.

De tels problèmes sont naturels lorsque l'on veut éviter l'introduction d'un taux d'actualisation dont la valeur est souvent arbitraire.

2.1.1 Notations et Hypothèses

Soit Ω un polygone convexe de \mathbb{R}^N de frontière Γ régulière.

Les coefficients a_{ij} et a_i sont suffisamment réguliers. On suppose que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, on a

$$a_{ij}(x), a_i(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

$$(p-1) \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j + \sum_{i=1}^N a_i(x) \xi_i \xi_0 + \xi_0^2 \geq 0, \quad p \geq 2. \quad (2.2)$$

Pour $u, v \in H^1(\Omega)$, on pose

$$a_\alpha(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \alpha uv \right) dx \quad (2.3)$$

et

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + uv \right) dx; \quad (2.4)$$

Où $b(u, v)$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur elliptique suivant :

$$Bu = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u. \quad (2.5)$$

2.2 Problème continu

On s'intéresse ici à l'étude mathématique du problème de contrôle ergodique modélisé par une inéquation variationnelle. Plus précisément nous considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_\alpha + \alpha u_\alpha \leq f \\ u_\alpha \leq \psi \\ (u_\alpha - \psi)(Au_\alpha + \alpha u_\alpha - \psi) = 0 \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0; \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Avec

$$A = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N à frontière régulière, ψ est l'obstacle dans $W^{2,\infty}(\Omega)$.

La formulation variationnelle du problème (2.6) est définie comme suit :

Trouver u_α solution d'inéquation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} a(u_\alpha, v - u_\alpha) + \alpha(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f, v - u_\alpha). \\ u_\alpha \in H^1(\Omega), u_\alpha \leq \psi; v \in H^1(\Omega), v \leq \psi, \end{cases} \quad (2.7)$$

tel que α tend vers 0; $\alpha > 0$.

Où f est une fonction positive dans $L^\infty(\Omega)$; et

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad}(u) \cdot \text{grad}(v) \, dx; \quad (2.8)$$

$(.,.)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$; et $\|.\|$ la norme L^∞ .

Sous les hypothèses précédentes, on montre que u_α converge vers u_0 la solution unique de :

$$\begin{cases} a(u_0, v - u_0) \geq (f, v - u_0), \\ u_0 \in H^1(\Omega), u_0 \leq \psi; v \in H^1(\Omega), v \leq \psi, \end{cases} \quad (2.9)$$

2.2.1 Position du problème

Soit $\alpha \in]0, 1[$, par une transformation facile, u_α est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} b(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f + \gamma u_\alpha, v - u_\alpha), \\ u_\alpha \in H^1(\Omega), u_\alpha \leq \psi; v \in H^1(\Omega), v \leq \psi, \end{cases} \quad (2.10)$$

Où

$$\gamma = 1 - \alpha$$

$$b(u, v) = a(u, v) + (u, v) \quad (2.11)$$

Preuve

$$\begin{aligned} b(u_\alpha, v - u_\alpha) &= a(u_\alpha, v - u_\alpha) + (u_\alpha, v - u_\alpha) \\ &\geq (f, v - u_\alpha) - \alpha(u_\alpha, v - u_\alpha) + (u_\alpha, v - u_\alpha) \\ &= (f - \alpha u_\alpha + u_\alpha, v - u_\alpha) \\ &= (f + (1 - \alpha)u_\alpha, v - u_\alpha) \\ &= (f + \gamma u_\alpha, v - u_\alpha), \quad \gamma = 1 - \alpha \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.1 [4, 6] *Sous les hypothèses (2.8) et (2.10), u_α est uniformément bornée dans $W^{p,\infty}(\Omega)$, $p \leq +\infty$. De plus u_α converge uniformément sur Ω et fortement dans $H^1(\Omega)$ vers u_0 la solution unique de (2.9).*

Remarque 2.2.1 *Dans tout ce qui suit, C désignera une constante positive indépendante de α .*

2.2.2 Régularité de la solution

Lemme 2.2.1 [6] *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous avons*

$$\|u_\alpha\|_{H^1(\Omega)} \leq C;$$

Où u_α est la solution du problème (2.10).

Lemme 2.2.2 *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous avons*

$$\|u_\alpha\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C;$$

2.2.3 Propriété de lipschitzianité continue

Notation 2.2.2 On note par $w = \sigma(g; \psi)$ la solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} b(w, v - w) \geq (g, v - w) \\ w \leq \psi, v \leq \psi; \end{cases} \quad (2.12)$$

Alors

$$u_\alpha = \sigma(f + \gamma u_\alpha; \psi). \quad (2.13)$$

Soient $g, \tilde{g} \in L^\infty(\Omega)$ et $u = \sigma(g; \psi)$; $\tilde{u} = \sigma(\tilde{g}, \psi)$ les solutions associées à (2.13).

Proposition 2.2.3 Sous les notations au dessus, on a :

$$\|\sigma(g, \psi) - \sigma(\tilde{g}, \psi)\|_\infty \leq \|g - \tilde{g}\|_\infty.$$

Preuve On pose $\varphi = \|g - \tilde{g}\|_\infty$. Alors

$$u + \varphi = \sigma(g + \varphi, \psi + \varphi).$$

Où

$$\tilde{g} \leq g + \|g - \tilde{g}\|_\infty = g + \varphi$$

et

$$\psi \leq \psi + \varphi.$$

■

Grace à la propriété de monotonie pour la solution de l'inéquation variationnelle elliptique, on obtient :

$$\sigma(\tilde{g}, \psi) \leq \sigma(g + \varphi, \psi + \varphi) = \sigma(g, \psi) + \varphi.$$

Donc

$$\sigma(\tilde{g}, \psi) - \sigma(g, \psi) \leq \varphi.$$

Finalement, comme g et \tilde{g} sont symétriques ; on a le résultat désiré.

La propriété suivante est crucial dans ce travail :

2.2.4 Notion des sous solutions

Définition 2.2.4 Soit X l'ensemble des sous solutions de problème (2.10), tel que $w \in X$ si :

$$\begin{cases} b(w, v) \leq (f + \gamma w, v), \\ \forall v \in H^1(\Omega), v \geq 0, w \leq \psi. \end{cases}$$

Lemme 2.2.3 La solution u_α de (2.10) est le plus grand élément de X .

La preuve est standard ; on adaptant [18].

2.3 Problème discret

On établit sur Ω une triangulation régulière quasi-uniforme et on introduit V_h l'espace d'élément finis conforme suivant :

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega) \text{ tel que } v_h|_T \in P_1\}. \quad (2.14)$$

On considère l'inéquation variationnelle discrète suivante :

$$\begin{cases} a(u_{\alpha h}, v_h - u_{\alpha h}) + \alpha(u_{\alpha h}, v_h - u_{\alpha h}) \geq (f, v_h - u_{\alpha h}), \\ u_{\alpha h} \in V_h, u_{\alpha h} \leq r_h \psi; v_h \in V_h, v_h \leq r_h \psi \end{cases} \quad (2.15)$$

Comme dans le cas continu, ce problème sera :

$$\begin{cases} b(u_{\alpha h}, v_h - u_{\alpha h}) \geq (f + \gamma u_{\alpha h}, v_h - u_{\alpha h}), \\ u_{\alpha h} \in V_h, u_{\alpha h} \leq r_h \psi; v_h \in V_h, v_h \leq r_h \psi \end{cases} \quad (2.16)$$

Principe de maximum discret [14]

On suppose que la matrice B_α de coefficient générique

$$b(\varphi_i, \varphi_j) \text{ est une } M\text{-matrice.} \quad (2.17)$$

Comme dans le cas continu, il est facile de montrer que $u_{\alpha h}$ converge vers u_{0h} ; la solution de l'I.V discrète suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} b(u_{0h}, v_h - u_{0h}) \geq (f, v_h - u_{0h}), \\ u_{0h} \in V_h, u_{0h} \leq r_h \psi; v_h \in V_h, v_h \leq r_h \psi \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Proposition 2.3.1 [6] *Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution $u_{\alpha h}$ de (2.17) converge uniformément sur Ω et fortement dans $H^1(\Omega)$ vers u_{0h} l'unique solution de (2.19).*

Notation 2.3.2 *On note $w_h = \sigma_h(g, \psi)$ la solution de l'I.V discrète suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} b(w_h, v_h - w_h) \geq (g, v_h - w_h) \\ v_h \leq r_h \psi, w_h \leq r_h \psi \end{array} \right.$$

Alors

$$u_{\alpha h} = \sigma_h(f + \gamma u_{\alpha h}; \psi).$$

Comme dans le cas continu, on établit la propriété de lipschitzianité discrète suivante :

Proposition 2.3.3 *Si l'hypothèse (2.18) est vérifiée, alors on a :*

$$\|\sigma_h(g, \psi) - \sigma_h(\tilde{g}, \psi)\|_\infty \leq \|g - \tilde{g}\|_\infty. \quad (2.19)$$

La preuve est similaire à celle de la proposition 2.2.3

On définit X_h l'ensemble des sous solution discrète du problème (2.17); tel que : $w_h \in X_h$ si

$$\begin{cases} b(w_h, \varphi_i) \leq (f + \gamma w_h, \varphi_i) \\ w_h \leq r_h \psi, \forall i \in \{1, \dots, m(h)\} \end{cases}$$

Lemme 2.3.1 *Si l'hypothèse (2.18) est vérifiée, la solution $u_{\alpha h}$ de (2.17) est le plus grand élément de X_h .*

La preuve est similaire à celle du lemme 2.2.3

Soit \bar{u}_h la solution de l'I.V discrète :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_h, v_h - \bar{u}_h) \geq (f + \gamma u_\alpha, v_h - \bar{u}_h), \\ v_h \leq r_h \psi, \bar{u}_h \leq r_h \psi; \end{cases} \quad (2.20)$$

u_α est solution de (2.10)

Soit $u^{(h)}$ la solution de l'I.V continue :

$$\begin{cases} b(u^{(h)}, v - u^{(h)}) \geq (f + \gamma u_{\alpha h}, v - u^{(h)}), \\ v \leq \psi, u^{(h)} \leq \psi; \end{cases} \quad (2.21)$$

telle que $u_{\alpha h}$ la solution de (2.17).

Lemme 2.3.2

$$\begin{aligned} & \bullet \|u_\alpha - \bar{u}_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2, \\ & \bullet \|u^{(h)} - u_{\alpha h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Preuve C'est une adaptation de [18]. ■

2.4 Estimation d'erreur en norme L^∞

Théorème 2.4.1

- $\|u_\alpha - u_{\alpha h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2,$
- $\|u_0 - u_{0h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2.$ (2.23)

Preuve

Etape 1 :

On définit w_h une approximation de u_α en norme L^∞ qui satisfait $w_h \leq u_{\alpha h}$. D'après le lemme 2.3.1, il est clair que :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_h, \varphi_i) \leq (f + \gamma u_\alpha, \varphi_i) \\ \bar{u}_h \leq r_h \psi, \forall i \in \{1, \dots, m(h)\} \end{cases}$$

Où

$$u_\alpha \leq \bar{u}_h + \|u_\alpha - \bar{u}_h\|_\infty$$

et

$$u_{\alpha h} \geq 0.$$

$$b(\bar{u}_h, \varphi_i) \leq (f + \gamma \|u_\alpha - \bar{u}_h\|_\infty + \gamma \bar{u}_h + \gamma u_{\alpha h}, \varphi_i).$$

Appliquant une autre fois le lemme 2.3.1, il suit que $\bar{u}_h \in X_h$ où $f + \lambda u_\alpha$ est remplacé par :

$$g = f + \gamma \|u_\alpha - \bar{u}_h\|_\infty + \gamma \bar{u}_h + \gamma u_{\alpha h}$$

Soit

$$U_h = \sigma_h(g, \psi).$$

D'après la proposition 2.3.3, on obtient :

$$\|U_h - u_{\alpha h}\|_\infty \leq \gamma \|u_\alpha - \bar{u}_h\|_\infty,$$

et d'après le lemme 2.3.2 :

$$\bar{u}_h \leq u_{\alpha h} + Ch^2 |\log h|^2.$$

Soit,

$$w_h = \bar{u}_h - Ch^2 |\log h|^2$$

Il est clair que :

$$\|w_h - u_\alpha\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

et

$$w_h \leq u_{\alpha h}.$$

Etape 2 :

Similairement, on définit $\beta^{(h)}$ une approximation de $u_{\alpha h}$ qui satisfait

$$\beta^{(h)} \leq u_\alpha.$$

Où $u^{(h)}$ est la solution de (2.21),

$$u_{\alpha h} \leq u^{(h)} + \|u_{\alpha h} - u^{(h)}\|_\infty.$$

$u^{(h)} \in X$, alors

$$\begin{cases} b(u^{(h)}, v) \leq (f + \gamma \|u_{\alpha h} - u^{(h)}\|_\infty + \gamma u^{(h)}, v) \\ u^{(h)} \leq \psi, v \geq 0, \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Où $u_\alpha \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} b(u^{(h)}, v) \leq (f + \gamma \|u_{\alpha h} - u^{(h)}\|_\infty + \gamma u^{(h)} + \gamma u_\alpha, v) \\ u^{(h)} \leq \psi, v \geq 0, \forall v \in H^1(\Omega) \end{array} \right.$$

De plus, d'après le lemme 2.2.3, $u^{(h)} \in X$ avec le second membre :

$$g = f + \gamma \|u_{\alpha h} - u^{(h)}\|_\infty + \gamma u^{(h)} + \gamma u_\alpha$$

Soit $U = \sigma(g, \psi)$. Alors appliquant la proposition 2.2.3, on obtient :

$$\|U - u_\alpha\|_\infty \leq \gamma \|u_{\alpha h} - u^{(h)}\|_\infty$$

Alors

$$u^{(h)} \leq u_\alpha + Ch^2 |\log h|^2.$$

Accordant au lemme 2.3.2 :

$$\beta^{(h)} = u^{(h)} - Ch^2 |\log h|^2.$$

Avec

$$\|\beta^{(h)} - u_{\alpha h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2.$$

Etape 3 :

On conclut que

$$\begin{aligned} u_{\alpha h} &\leq \beta^{(h)} + Ch^2 |\log h|^2 \\ &\leq u^{(h)} \\ &\leq u_\alpha + Ch^2 |\log h|^2 \\ &\leq u_{\alpha h} + Ch^2 |\log h|^2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\|u_\alpha - u_{\alpha h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2.$$

Et

$$\|u_0 - u_{0h}\|_\infty \leq \|u_0 - u_\alpha\|_\infty + \|u_\alpha - u_{\alpha h}\|_\infty + \|u_{\alpha h} - u_{0h}\|_\infty$$

$$\lim_\alpha \|u_0 - u_{0h}\|_\infty \leq \|u_0 - u_\alpha\|_\infty + \|u_\alpha - u_{\alpha h}\|_\infty + \lim_\alpha \|u_{\alpha h} - u_{0h}\|_\infty.$$

Donc, appliquant la proposition 2.2.1 et 2.3.1 ; on obtient :

$$\|u_0 - u_{0h}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2.$$

■

Méthode de décomposition en deux sous domaines pour le problème de contrôle ergodique

Avant d'entamer le travail de cette thèse, nous exposons ici les généralités relatives à la méthode de décomposition de domaine de type Schwarz avec recouvrement (et ses variantes alternée et parallèle) et sans recouvrement d'une manière générale. Nous effectuons également une comparaison des deux méthodes en terme de convergence.

3.1 Historique de la méthode de Schwarz

La première méthode de Schwarz a été développée à la fin du 19^{eme} siècle par le mathématicien H.A.Schwarz 1843–1921 (voir la Figure 3.1). dans le but d'étudier l'opérateur de Laplace. Son idée est de traiter le problème dans le cas où Ω est la réunion avec recouvrement de deux domaines simples.

par exemple : l'union d'une plaque rectangulaire et un disque.



Figure 3.1

ALGORITHME 1 (Schwarz 1870)Sur Ω_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = u_0 \text{ sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Sur Ω_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu_2^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = u_0 \text{ sur } \partial\Omega_2/\Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Convergence originale de Schwarz

La convergence vers la solution globale de cet algorithme a été établie par Schwarz en utilisant le principe du maximum.

Ensuite, vers les années 30, Sobolev a découvert la formulation variationnelle pour des problèmes en élasticité linéaire . Le résultat de Sobolev offre un point de départ pour utiliser l'algorithme pour des problèmes ne vérifiant pas le principe du maximum. Puis en 1988, P. L. Lions donne une interprétation de cet algorithme à l'aide d'une formulation variationnelle. Il précise que la convergence de cette méthode dépend de la taille du recouvrement "d" et du pas de discrétisation "h". On note que la convergence est meilleure si le recouvrement est important.

Synthétiquement, les méthodes de décomposition de domaine peuvent se scinder en deux grandes familles :

- avec recouvrement
- sans recouvrement

3.2 Méthodes de Schwarz avec recouvrement et sans recouvrement

Pour simplifier, nous allons nous limiter au cas d'un problème elliptique avec conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

Les méthodes de Schwarz sont basées sur un partitionnement du domaine Ω en m ($m \geq 2$) sous domaines Ω_i tel que :

$$\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \Omega_i \quad (3.4)$$

Ces méthodes visent à résoudre le problème global sur Ω en résolvant des problèmes plus petits sur les sous-domaines Ω_i . On distingue deux types de partitionnement :

3.3 Méthode de Schwarz sans recouvrement

L'intersection entre les sous domaines se limite aux interfaces :

$$\forall 1 \leq i < j \leq m, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \Gamma_{ij}.$$

Où Γ_{ij} est la frontière entre les sous domaines Ω_i et Ω_j .

ALGORITHME 2 : Schwarz sans recouvrement

Soit $(u_i^0)_{i=1,2}$ une approximation initiale de la solution u dans chaque sous domaine dans le cas d'un découpage en deux sous domaines, et $(u_i^n)_{i=1,2}$ est la valeur de l'approximation de u à l'itération n .

L'algorithme de Schwarz s'écrit :

$$\begin{cases} Lu_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ B_1 u_1^{n+1} = B_1 u_2^n \text{ sur } \Gamma_{1,2} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} Lu_2^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_2 \\ B_2 u_2^{n+1} = B_2 u_1^n \text{ sur } \Gamma_{1,2} \end{cases} \quad (3.6)$$

Où B_1 et B_2 sont des opérateurs d'interfaces. (Voir la figure 3.2).

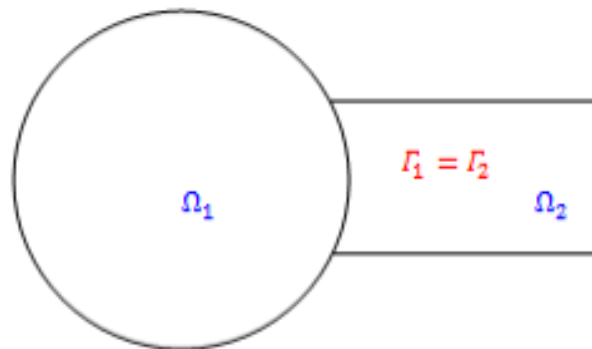


Figure 3.2

Dans cet algorithme, la résolution des deux sous problèmes se déroule en parallèle : à l'itération courante, chaque sous domaine a besoin d'information à l'itération précédente de son voisin, avec lequel il a des frontières non vides. P.L. Lions a montré que ces opérateurs d'interfaces peuvent être remplacés par des conditions aux limites mixtes de type Dirichlet et Neumann, qui sont appelées "conditions de transmissions de type Robin ou mixtes".

3.4 Méthode de Schwarz avec recouvrement

Chaque sous domaine recouvre une partie de ses sous domaines voisins. On distingue deux versions :

ALGORITHME 3 : Schwarz additif - Calcul parallèle

On prend comme conditions de Dirichlet pour un sous domaine Ω_i , les valeurs calculées par le sous domaine voisin à l'itération précédente.

Soit à résoudre ces deux sous problèmes en parallèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu_2^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^n \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2/\Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

ALGORITHME 4 : Schwarz multiplicatif - Calcul séquentiel

On prend comme conditions de Dirichlet les dernières valeurs d'interfaces calculées par le sous domaine voisin. (voir la Figure 3.3).

Soit à résoudre ces deux sous problèmes séquentiellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu_1^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1/\Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} Lu_2^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} & \text{sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2/\Gamma_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

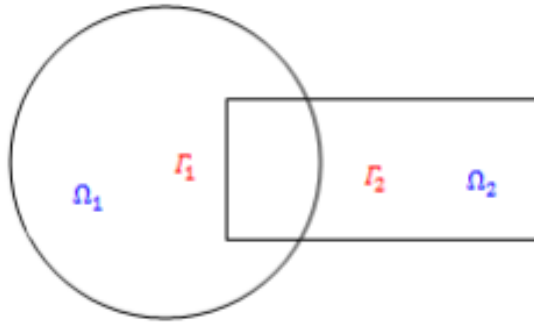


Figure 3.3

Remarque 3.4.1 *L'algorithme de Schwarz multiplicatif s'interprète algébriquement comme une méthode de Gauss Seidel par blocs où chaque bloc est relatif à l'opérateur restreint sur un sous domaine. Le degré de parallélisme dans ce cas est moins important puisque le sous domaine Ω_2 doit attendre que le calcul soit fait sur le sous domaine voisin Ω_1 avant d'entamer son propre calcul.*

Remarque 3.4.2 *Il faut souligner que la convergence de la méthode de Schwarz additive est moins bonne que sa version multiplicative. En termes algébriques, elle correspond à une méthode de Jacobi par blocs où chaque bloc est relatif à l'opérateur restreint sur un sous domaine.*

L'avantage de ces algorithmes est l'économie en place mémoire, en effet si le problème global est résolu par des méthodes directes le coût de stockage est très grand, mais en divisant ce problème en plus petits morceaux la quantité de stockage peut être réduite.

3.5 Application de la méthode de décomposition pour les inéquation variationnelle liée à un problème de contrôle ergodique

3.5.1 Introduction :

Les problèmes à frontière libre possèdent plusieurs importants phénomènes en physique, qui sont bien connu comme problèmes d'obstacles, et sont modélisés par des inéquations variationnelles. Pendant les deux dernières décennies, une attention particulière a été accordée et un nombre important de travaux réalisés sur la méthode alternée de Schwarz en particulier et les méthode de décomposition en sous domaines pour les équations aux dérivées partielles.

Cependant, quelques travaux seulement sont connus sur le sujet, pour les inéquations variationnelles qui résultent de beaucoup d'applications physiques, comme le flux de fluide dans des milieux poreux, le comportement des matières d'elasto-plastique. Ces problèmes sont en général à frontière libre comme bien connu le problème d'obstacle. La première idée de cette partie concerne la méthode de décomposition en sous domaines pour le problème d'obstacle :

Trouver u solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Au \leq f & \text{Dans } \Omega \\ u \leq \psi & \text{Dans } \Omega \\ (Au - f)(u - \psi) = 0 \\ \psi \text{ conditions aux limites.} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Où Ω un ouvert polygonal de \mathbb{R}^2 à frontière régulière $\partial\Omega$, f est une fonction régulière et ψ est un obstacle dans $W^{2,\infty}$ tel que $\psi \geq 0$ sur $\partial\Omega$.

Ce problème se caractérise par une zone où l'équation $Au = f$ est satisfaite et une zone où u touche l'obstacle, la courbe de séparation appelée frontière libre étant une inconnue.

De très nombreux phénomènes physiques, mécaniques, économiques,...sont modélisables par des inéquations variationnelles de type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in \mathbb{K} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Où \mathbb{K} est un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert V présenté sous la forme :

$$\mathbb{K} = \{u \in V \text{ tel que } u \leq \psi \text{ p.p sur } \partial\Omega\}. \quad (3.13)$$

Où $a(., .)$ est une forme bilinéaire continue, coercive sur $V \times V$ et $f \in V$.

L'existence et l'unicité de la solution, pour ce type d'inéquation variationnelle simple ont été démontrées par J-L. Lions et G-Stampacchia [26].

Nous étudions dans ce travail la convergence de l'approximation par élément finis de la méthode alternée de Schwarz pour le problème de l'obstacle (3.11). Où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

f un second membre régulier.

$\psi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ un obstacle tel que $\psi \geq 0$ sur $\partial\Omega$.

$$\mathbb{K} = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v \leq \psi \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On décompose Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 avec recouvrement, tel que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

On note par $\partial\Omega_i$ $i = 1, 2$, la frontière de Ω_i , et $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$.

L'intersection de $\bar{\Gamma}_i$ et $\bar{\Gamma}_j$ ($i \neq j$) est supposé vide.

Partant de $u^0 = \psi$, la méthode alternée de Schwarz appliquée au problème (3.11) conduit à la résolution des sous problèmes suivants :

$$\begin{cases} a(u_1^{n+1}, v - u_1^{n+1}) \geq (f_1, v - u_1^{n+1}), \forall v \in \mathbb{K}, v = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1, u_1^{n+1} \in \mathbb{K}. \end{cases} \quad (3.14)$$

et

$$\begin{cases} a(u_2^{n+1}, v - u_2^{n+1}) \geq (f_2, v - u_2^{n+1}), \forall v \in \mathbb{K}, v = u_1^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2, u_2^{n+1} \in \mathbb{K}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v) dx$$

et

$$f_i = f \setminus_{\Omega_i}, \quad i = 1, 2.$$

L'étude de la convergence uniforme des suites de Schwarz (u_1^{n+1}) et (u_2^{n+1}) a été réalisée par P-L.Lions [30].

Nous établissons sur Ω_1 et Ω_2 des triangulations indépendantes au sens où sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$ un triangle appartenant à une triangulation n'appartient pas nécessairement à l'autre. Ce type de discrétisation offre divers avantages.

Plus précisément le choix de la triangulation sur un sous domaine peut se faire en fonction de la géométrie de celui-ci ainsi que du degré de régularité locale de la solution. Sur le plan purement calcul, le temps est économisé dans la triangulation automatique de problèmes avec géométrie complexe. Notre propos dans ce contexte est la contribution à l'étude de l'analyse de l'erreur en norme L^∞ de la méthode alternée de Schwarz.

La discrétisation par éléments finis P_1 des problèmes (3.14) et (3.15) est définie très classiquement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(u_{1h_1}^{n+1}, v - u_{1h_1}^{n+1}) \geq (f_1, v - u_{1h_1}^{n+1}), \forall v \in V_{h_1}(u_{2h_2}^{n+1}) \text{ sur } \Gamma_1; v_h \in \mathbb{K}_{h_1} \\ u_{1h_1}^{n+1} \in \mathbb{K}_{h_1}, \end{array} \right. \quad (3.16)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2(u_{2h_2}^{n+1}, v - u_{2h_2}^{n+1}) \geq (f_2, v - u_{2h_2}^{n+1}), \forall v \in V_{h_2}(u_{1h_1}^{n+1}) \text{ sur } \Gamma_2; v_h \in \mathbb{K}_{h_2} \\ u_{2h_2}^{n+1} \in \mathbb{K}_{h_2}, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

$$V_{h_i} = \{v \in H^1(\Omega_i), v|_k \in P_1, \forall k \in \tau^{h_i}\},$$

Et pour tout $w_i \in C(\bar{\Gamma}_i)$:

$$V_{h_i}^{(w_i)} = \{v \in V_{h_i}, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i, v = \pi_{h_i}(w_i) \text{ sur } \Gamma_i\},$$

$$\mathbb{K}_{h_i} = \{v \in V_{h_i} \text{ tel que } v \leq r_{h_i}\psi\},$$

$V_{h_i} = V_{h_i}(\Omega_i)$ étant l'espace d'éléments finis P_1 sur le sous domaine Ω_i et π_{h_i} est l'opérateur d'interpolation usuel.

3.6 Méthode alternée de Schwarz pour le problème de l'obstacle :

Considérons le problème de l'obstacle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in H_0^1(\Omega), v \leq \psi \\ u \leq \psi. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

On décompose Ω en deux domaines Ω_1 et Ω_2 , avec recouvrement, tels que

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

L'intersection de $\bar{\Gamma}_i$ et $\bar{\Gamma}_j (i \neq j)$ est supposée vide.

3.6.1 Algorithme de Schwarz

Pour $u^0 = \psi$, on définit respectivement les suites (u_1^{n+1}) sur Ω_1 et (u_2^{n+1}) sur Ω_2 générées par la méthode alternée de Schwarz :

$$\begin{cases} a(u_1^{n+1}, v - u_1^{n+1}) \geq (f_1, v - u_1^{n+1}), \forall v \leq \psi, v = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (3.19)$$

et

$$\begin{cases} a(u_2^{n+1}, v - u_2^{n+1}) \geq (f_2, v - u_2^{n+1}), \forall v \leq \psi, v = u_1^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (3.20)$$

Où

$$f_i = f \setminus \Omega_i,$$

et

$$a_i(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v) dx, \quad i = 1, 2.$$

Le théorème suivant, dû à P-L. Lions [30], établit la convergence géométrique des suites (u_1^{n+1}) et (u_2^{n+1}) vers la solution du problème de l'obstacle (3.18).

3.6.2 Convergence géométrique

Théorème 3.6.1 [30] *Les suites (u_1^{n+1}) ; (u_2^{n+1}) , $n \geq 0$, générées par l'algorithme de Schwarz convergent géométriquement vers la solution u du problème d'obstacle (3.18). Plus précisément il existe deux constantes $k_1, k_2 \in]0, 1[$ telle que pour tout $n \geq 0$,*

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} &\leq k_1^n k_2^n \|u^0 - u\|_{L^\infty(\Gamma_1)}, \\ \|u_2 - u_2^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_2)} &\leq k_1^{n+1} k_2^n \|u^0 - u\|_{L^\infty(\Gamma_2)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

Où $u_i = u \setminus \Omega_i$, $i = 1, 2$.

3.6.3 Discrétisation de l'algorithme de Schwarz

Pour $i = 1, 2$, on note par τ^{h_i} une famille de triangulations régulière quasi uniforme de Ω_i , h_i étant le pas de discrétisation sur Ω_i .

On suppose également que les deux triangulations sont mutuellement indépendantes sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$, au sens où un triangle appartenant à un domaine de triangulation n'appartient pas nécessairement à l'autre. (voir Figure 3.4, 3.5)

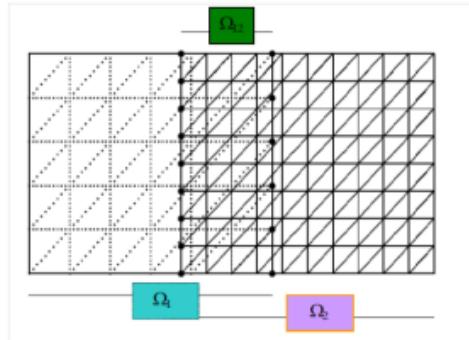


Figure 3.4

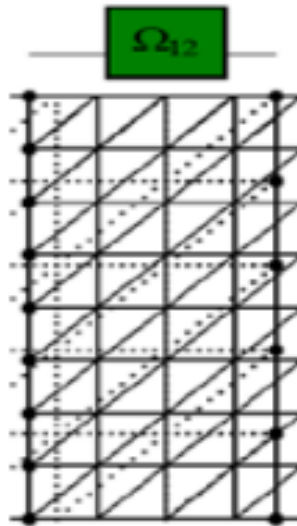


Figure 3.5- la partie nonmatching

Soit V_{h_i} l'espace des fonctions linéaires, continues par morceaux sur τ^{h_i} , qui s'annulent sur $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i$.

où π_{h_i} désigne un opérateur d'interpolation convenable sur Γ_i , qui préserve la précision.

Soit aussi

$$\mathbb{K}_{h_i}^{(w)} = \{v \in V_{h_i}^{(w)} : v \leq r_{h_i}\psi\}. \quad (3.22)$$

Hypothèse du principe de Maximum Discret (pmd) [14] :

Nous supposons que les matrices de rigidité A^i qui résultent de la discrétisation sur chaque sous-domaine, sont des M-matrices. $((A^i)^{-1})$ existe et est non négative, de plus $A_{ss}^i > 0$, $A_{ls}^i \leq 0$ pour $l \neq s$.

Nous définissons maintenant les analogues discrets des suites de Schwarz définies dans (3.19) et (3.20), respectivement par : $(u_{1h_1}^{n+1})$ et $(u_{2h_2}^{n+1})$, telles que $(u_{1h_1}^{n+1})$ est l'unique solution de l'I.V discrète :

$$a_1(u_{1h_1}^{n+1}, v - u_{1h_1}^{n+1}) \geq (f_1, v - u_{1h_1}^{n+1}), \quad \forall v \in \mathbb{K}_{h_1}^{(u_{2h_2}^n)}, \quad (3.23)$$

et $(u_{2h_2}^{n+1})$ est l'unique solution de l'I.V discrète :

$$a_2(u_{2h_2}^{n+1}, v - u_{2h_2}^{n+1}) \geq (f_2, v - u_{2h_2}^{n+1}), \quad \forall v \in \mathbb{K}_{h_2}^{(u_{1h_1}^{n+1})}, \quad (3.24)$$

3.6.4 Analyse de l'erreur en norme L^∞

Cette section est consacrée à la démonstration du résultat principal de ce travail . Pour cela, nous commençons par introduire deux suites intermédiaires discrètes et montrer un lemme fondamental.

Définition de deux suites auxiliaires

Pour $w_{ih}^0 = u_{ih}^0 = r_{h_i}\psi$; $i = 1, 2$, on définit les suites $(w_{1h_1}^{n+1})$ et $(w_{2h_2}^{n+1})$ telles que $w_{1h_1}^{n+1} \in \mathbb{K}_{h_1}^{(u_2^n)}$, satisfait :

$$a_1(w_{1h_1}^{n+1}, v - w_{1h_1}^{n+1}) \geq (f_1, v - w_{1h_1}^{n+1}), \quad \forall v \in \mathbb{K}_{h_1}^{(u_2^n)},$$

respectivement $w_{2h_2}^{n+1} \in \mathbb{K}_{h_2}^{(u_2^{n+1})}$ par :

$$a_2(w_{2h_2}^{n+1}, v - w_{2h_2}^{n+1}) \geq (f_2, v - w_{2h_2}^{n+1}), \quad \forall v \in \mathbb{K}_{h_2}^{(u_2^{n+1})}.$$

Dans la suite de ce travail, nous adapterons les notations suivantes :

$$|\cdot|_1 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \quad , \quad |\cdot|_2 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Gamma_2)},$$

$$\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega_1)} \quad , \quad \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega_2)},$$

$$h_1 = h_2 = h, r_{h_1} = r_{h_2} = r_h, \pi_{h_1} = \pi_{h_2} = \pi_h.$$

Le lemme suivant jouera un rôle crucial dans la démonstration du résultat principal.

Lemme 3.6.1 [11] *Soit (u_i^{n+1}) et (u_{ih}^{n+1}) , ($i = 1, 2$), les suites définies en (3.19), (3.20), (3.24), (3.25), respectivement. Alors, on a :*

$$\|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2, \quad (3.25)$$

et

$$\|u_2^{n+1} - u_{2h}^{n+1}\|_2 \leq \sum_{p=0}^{n+1} \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1. \quad (3.26)$$

3.7 Estimation d'erreur en norme $L^\infty(\Omega)$

Théorème 3.7.1 [11] *Il existe deux constantes k , $0 < k < 1$, et c indépendante de h et n telle que pour tout*

$$n \leq \frac{\log h}{\log k},$$

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 |\log h|^3, \quad i = 1, 2$$

3.8 Application

3.8.1 Suites de Schwarz continues

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\alpha \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ b(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f + \gamma u_\alpha, v - u_\alpha), \quad \forall v \leq \psi, \\ \forall u_\alpha \leq \psi \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Où α est la constante d'ergodicité, avec :

$$\gamma = 1 - \alpha$$

On décompose Ω en deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 , avec recouvrement, tel que

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

L'intersection de $\bar{\Gamma}_i$ et $\bar{\Gamma}_j (i \neq j)$ est toujours supposée vide.

3.8.2 Algorithme de Schwarz

Pour $u_\alpha^0 = u_0$, telle que u_0 est la solution unique de :

$$a(u_0, v - u_0) \geq (f, v - u_0) \quad (3.28)$$

On définit respectivement les suites $(u_{\alpha_1}^{n+1})$ sur Ω_1 et $(u_{\alpha_2}^{n+1})$ sur Ω_2 générées par la méthode alternée de Schwarz, telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1(u_{\alpha_1}^{n+1}, v - u_{\alpha_1}^{n+1}) \geq (f_1 + \gamma u_{\alpha_1}^n, v - u_{\alpha_1}^{n+1}), \quad \forall v \leq \psi, \quad v = u_{\alpha_2}^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_{\alpha_1}^{n+1} = u_{\alpha_2}^n \text{ sur } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.29)$$

et

$$\begin{cases} b_2(u_{\alpha_2}^{n+1}, v - u_{\alpha_2}^{n+1}) \geq (f_2 + \gamma u_{\alpha_2}^n, v - u_{\alpha_2}^{n+1}), \quad \forall v \leq \psi, \quad v = u_{\alpha_1}^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ u_{\alpha_2}^{n+1} = u_{\alpha_1}^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (3.30)$$

Où

$$f_i = f \setminus \Omega_i,$$

et,

$$b_i(u_\alpha, v) = a_i(u_\alpha, v) + \gamma \int_{\Omega_i} u_\alpha v dx, \quad i = 1, 2 \quad (3.31)$$

Le théorème suivant, dû à P-L.Lions, établit la convergence géométrique des suites $(u_{\alpha_1}^{n+1})$ et $(u_{\alpha_2}^{n+1})$ vers la solution du problème de l'obstacle (3.28).

3.8.3 Convergence géométrique

Théorème 3.8.1 [30] *Les suites $(u_{\alpha_1}^{n+1})$ et $(u_{\alpha_2}^{n+1})$, $n \geq 0$, générées par l'algorithme de Schwarz convergent géométriquement vers la solution u_α du problème d'obstacle (3.28). Plus précisément il existe deux constantes $\rho_1, \rho_2 \in]0, 1[$ telle que pour tout $n \geq 0$,*

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha_1} - u_{\alpha_1}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} &\leq (\rho_1^n \rho_2^n) \|u_\alpha - u_\alpha^0\|_{L^\infty(\Gamma_1)}, \\ \|u_{\alpha_2} - u_{\alpha_2}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_2)} &\leq (\rho_1^{n+1} \rho_2^n) \|u_\alpha - u_\alpha^0\|_{L^\infty(\Gamma_2)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Principe de maximum discret [14] :

On suppose que la matrice sur chaque sous domaine A_{α_i} , $i = 1, 2$ de coefficients génériques

$$b(\varphi_i, \varphi_j) \text{ est une } M\text{-matrice.} \quad (3.33)$$

3.8.4 Suites de Schwarz discrètes

Soit τ_i ($i = 1, 2$) une triangulation régulière quasi-uniforme par élément finis standard dans Ω_i .

On considère une méthode de décomposition en deux sous domaines avec recouvrement pour un problème de contrôle ergodique. On utilise sur chaque sous domaine la méthode de Schwarz «nonmatching grids».

Algorithme discret

On choisit $u_{\alpha h}^0 = u_{0h}$, telle que u_{0h} est la solution de l'inéquation suivante :

$$a(u_{0h}, v - u_{0h}) \geq (f, v - u_{0h}),$$

On définit la suite $(u_{\alpha 1h}^{n+1})$ sur Ω_1 générée par la méthode alternée de Schwarz ; telle que :

$$\begin{cases} b_1(u_{\alpha 1h}^{n+1}, v - u_{\alpha 1h}^{n+1}) \geq (f_1 + \gamma u_{\alpha 1h}^n, v - u_{\alpha 1h}^{n+1}), \forall v \leq r_{h_1} \psi, v = u_{\alpha 2h}^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_{\alpha 1h}^{n+1} = u_{\alpha 2h}^n \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (3.34)$$

et $(u_{\alpha 2h}^{n+1})$ sur Ω_2 telle que :

$$\begin{cases} b_2(u_{\alpha 2h}^{n+1}, v - u_{\alpha 2h}^{n+1}) \geq (f_2 + \gamma u_{\alpha 2h}^n, v - u_{\alpha 2h}^{n+1}), \forall v \leq r_{h_2} \psi, v = u_{\alpha 1h}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_{\alpha 2h}^{n+1} = u_{\alpha 1h}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (3.35)$$

Où r_{h_i} est un opérateur de restriction usuel dans Ω_i .

3.8.5 Estimation d'erreur :

Définition des suites auxilliaires :

Pour $z_{\alpha ih}^0 = u_{\alpha ih}^0 = u_{0h}$; $i = 1, 2$, on définit la suite $z_{\alpha 1h}^{n+1}$ sur Ω_1 :

$$\begin{cases} b_1(z_{\alpha 1h}^{n+1}, v - z_{\alpha 1h}^{n+1}) \geq (f_1 + \gamma z_{\alpha 1h}^n, v - z_{\alpha 1h}^{n+1}), \forall v \leq r_{h_1} \psi, v = z_{\alpha 2h}^n \text{ sur } \Gamma_1 \\ z_{\alpha 1h}^{n+1} = z_{\alpha 2h}^n \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (3.36)$$

et $z_{\alpha 2h}^{n+1}$ sur Ω_2 telle que :

$$\begin{cases} b_2(z_{\alpha 2h}^{n+1}, v - z_{\alpha 2h}^{n+1}) \geq (f_2 + \gamma z_{\alpha 2h}^n, v - z_{\alpha 2h}^{n+1}), \forall v \leq r_{h_2} \psi, v = z_{\alpha 1h}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \\ z_{\alpha 2h}^{n+1} = z_{\alpha 1h}^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (3.37)$$

Notons par $(z_{\alpha ih}^{n+1})$, $i = 1, 2$ est l'approximation par éléments finis de $(u_{\alpha i}^{n+1})$ définies dans (3.30) et (3.31).

Le lemme suivant jouera un rôle crucial dans la démonstration du résultat principal.

Lemme 3.8.1 [35] *On a :*

$$\|u_{\alpha_1}^{n+1} - u_{\alpha_1 h}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_{\alpha_1}^p - z_{\alpha_1 h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_{\alpha_2}^p - z_{\alpha_2 h}^p\|_2, \quad (3.38)$$

et

$$\|u_{\alpha_2}^{n+1} - u_{\alpha_2 h}^{n+1}\|_2 \leq \sum_{p=0}^{n+1} \|u_{\alpha_2}^p - z_{\alpha_2 h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_{\alpha_1}^p - z_{\alpha_1 h}^p\|_1. \quad (3.39)$$

Telle que :

$$\|u_{\alpha_2}^0 - z_{\alpha_2 h}^0\|_2 = \|u_0 - u_{0h}\|_{\infty} \leq Ch^2 |\log h|^2.$$

Preuve

Raisonnons par récurrence ;

Pour $n = 0$, en utilisant l'analogie discret de la proposition 2.3.1, on obtient :

$$\|u_{\alpha_1}^1 - u_{\alpha_1 h}^1\|_1 \leq \sum_{p=1}^1 \|u_{\alpha_1}^p - z_{\alpha_1 h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^0 \|u_{\alpha_2}^p - z_{\alpha_2 h}^p\|_2$$

$$\|u_{\alpha_2}^1 - u_{\alpha_2 h}^1\|_2 \leq \sum_{p=0}^1 \|u_{\alpha_2}^p - z_{\alpha_2 h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^1 \|u_{\alpha_1}^p - z_{\alpha_1 h}^p\|_1$$

Pour le sous domaine Ω_1 :

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha_1}^1 - u_{\alpha_1 h}^1\|_1 &\leq \|u_{\alpha_1}^1 - z_{\alpha_1 h}^1\|_1 + \|z_{\alpha_1 h}^1 - u_{\alpha_1 h}^1\|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha_1}^1 - z_{\alpha_1 h}^1\|_1 + |\pi_h u_{\alpha_2}^0 - \pi_h u_{\alpha_2 h}^0|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha_1}^1 - z_{\alpha_1 h}^1\|_1 + |u_{\alpha_2}^0 - u_{\alpha_2 h}^0|_1 \\ &\leq \|u_{\alpha_1}^1 - z_{\alpha_1 h}^1\|_1 + \|u_{\alpha_2}^0 - u_{\alpha_2 h}^0\|_2 \end{aligned}$$

Pour le sous domaine Ω_2 :

$$\begin{aligned}
\|u_{\alpha 2}^1 - u_{\alpha 2h}^1\|_2 &\leq \|u_{\alpha 2}^1 - z_{\alpha 2h}^1\|_2 + \|z_{\alpha 2h}^1 - u_{\alpha 2h}^1\|_2 \\
&\leq \|u_{\alpha 2}^1 - z_{\alpha 2h}^1\|_2 + |\pi_h u_{\alpha 1}^1 - \pi_h u_{\alpha 1h}^1|_2 \\
&\leq \|u_{\alpha 2}^1 - z_{\alpha 2h}^1\|_2 + |u_{\alpha 1}^1 - u_{\alpha 1h}^1|_2 \\
&\leq \|u_{\alpha 2}^1 - z_{\alpha 2h}^1\|_2 + \|u_{\alpha 1}^1 - u_{\alpha 1h}^1\|_1 \\
&\leq \|u_{\alpha 2}^1 - z_{\alpha 2h}^1\|_2 + \|u_{\alpha 1}^1 - z_{\alpha 1h}^1\|_1 + \|u_{\alpha 2}^0 - u_{\alpha 2h}^0\|_2
\end{aligned}$$

Maintenant, supposons que :

$$\|u_{\alpha 2}^n - u_{\alpha 2h}^n\|_2 \leq \sum_{p=0}^n \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^n \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|u_{\alpha 1}^{n+1} - u_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 &\leq \|u_{\alpha 1}^{n+1} - z_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 + \|z_{\alpha 1h}^{n+1} - u_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 \\
&\leq \|u_{\alpha 1}^{n+1} - z_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 + |\pi_h u_{\alpha 2}^n - \pi_h u_{\alpha 2h}^n|_1 \\
&\leq \|u_{\alpha 1}^{n+1} - z_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 + |u_{\alpha 2}^n - u_{\alpha 2h}^n|_1 \\
&\leq \|u_{\alpha 1}^{n+1} - z_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 + \|u_{\alpha 2}^n - u_{\alpha 2h}^n\|_2 \\
&\leq \|u_{\alpha 1}^{n+1} - z_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^n \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1
\end{aligned}$$

Par conséquent ;

$$\|u_{\alpha 1}^{n+1} - u_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^n \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2$$

De même, en utilisant l'estimation précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|u_{\alpha 2}^{n+1} - u_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 &\leq \|u_{\alpha 2}^{n+1} - z_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 + \|z_{\alpha 2h}^{n+1} - u_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 \\
\|u_{\alpha 2}^{n+1} - u_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 &\leq \|u_{\alpha 2}^{n+1} - z_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 + |\pi_h u_{\alpha 1}^{n+1} - \pi_h u_{\alpha 1h}^{n+1}|_2 \\
&\leq \|u_{\alpha 2}^{n+1} - z_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 + \|u_{\alpha 1}^{n+1} - u_{\alpha 1h}^{n+1}\|_2 \\
&\leq \|u_{\alpha 2}^{n+1} - z_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 + \|u_{\alpha 1}^{n+1} - u_{\alpha 1h}^{n+1}\|_1 \\
&\leq \|u_{\alpha 2}^{n+1} - z_{\alpha 2h}^{n+1}\|_2 + \sum_{p=0}^n \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1 \\
&\leq \sum_{p=0}^{n+1} \|u_{\alpha 2}^p - z_{\alpha 2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_{\alpha 1}^p - z_{\alpha 1h}^p\|_1.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.8.2 [35] *Il existe deux constantes ρ , $0 < \rho < 1$ et C indépendantes de h et n telle que pour tout*

$$n + 1 \leq \frac{\log h}{\log \rho}. \quad (3.40)$$

On a :

$$\|u_{\alpha i} - u_{\alpha ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 |\log h|^3, \quad i = 1, 2 \quad (3.41)$$

et

$$\|u_{0i} - u_{0ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 |\log h|^3, \quad i = 1, 2 \quad (3.42)$$

Preuve

Prouvons l'estimation pour $i = 1$, le cas $i = 2$ étant similaire.

En effet, soit $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$.

Donc

$$\begin{aligned}
\|u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1 h}^{n+1}\|_1 &\leq \|u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1}^{n+1}\|_1 + \|u_{\alpha 1}^{n+1} - u_{\alpha 1 h}^{n+1}\|_1 \\
&\leq (\rho)^{n+1} \|u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1}^0\|_1 + (n+1)C_1 h^2 |\log h|^2 + nC_2 h^2 |\log h|^2 \\
&\leq (\rho)^{n+1} \|u_{\alpha 1} - u_{01}\|_1 + (n+1)C_1 h^2 |\log h|^2 + nC_2 h^2 |\log h|^2 \\
&\leq (\rho)^{n+1} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u_{\alpha 1} - u_{01}\|_1 + (n+1)C_1 h^2 |\log h|^2 + nC_2 h^2 |\log h|^2.
\end{aligned}$$

Où nous avons employé le théorème 3.9.2, le lemme 3.7.1, nous obtenons :

$$\|u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1 h}^{n+1}\|_1 \leq Ch^2 |\log h|^3.$$

D'où l'estimation d'erreur désirée.

Pour le cas $\alpha = 0$, nous adaptions [11]. ■

Exemple numérique [35] On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_\alpha \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ b(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f + \gamma u_\alpha, v - u_\alpha), \quad \forall v \leq \psi, \\ u_\alpha \leq \psi \end{array} \right. \quad (3.43)$$

avec

$$\gamma = 1 - \alpha \text{ avec } \alpha \in]0, 1[$$

on a :

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1], \quad V = H_0^1(\Omega)$$

Le second membre

$$f(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

L'obstacle

$$\psi = 0, \forall x \in \Omega$$

L'opérateur

$$Au = -\Delta u + 0.5x \frac{\partial u}{\partial x} + 0.5y \frac{\partial u}{\partial y} + 0.45u$$

Processus d'arrêt :

$$\|u_{1h1}^n - u_{1h1}^{n-1}\|_1 < \epsilon_1, \|u_{2h2}^n - u_{2h2}^{n-1}\|_2 < \epsilon_2$$

Avec

$$\epsilon_1, \epsilon_2 \text{ fixés; } \epsilon_1 = 10^{-6}, \epsilon_2 = 10^{-6}, u_{ih}^0 = 0, \forall i = 1, 2$$

Où, à chaque macro-iteration (itération de Schwarz), il a envoyé employé sur chaque sous domaine, la méthode de sur relaxation avec projection ; avec le paramètre $w = 1.5$

$$\Omega_1 = [0, x_1] \times [0, 1], \Omega_2 = [0, x_2] \times [0, 1],$$

$$d = x_1 - x_2, 0 < x_2 < x_1 < 1.$$

On prend ici :

$$x_1 = 0.75, x_2 = 0.25$$

$h_i, i = 1, 2$ est le pas de discrétisation sur chaque sous domaine
 it_d : indique le macro itération de Schwarz (itération extérieure)
 p_i : est l'ordre de convergence sur chaque sous domaine
 Temps : est le temps sur chaque macro-itération.

Où :

$erreur_i$ est l'erreur sur Ω_i pour les pas h_i , $i = 1, 2$

$\left\{ \begin{array}{l} erreur_{1j} \text{ est l'erreur sur } \Omega_1, j = 1, 2 \text{ pour les pas } h_i, i = 3, 4, \\ erreur_{2j} \text{ est l'erreur sur } \Omega_2, j = 1, 2 \text{ pour les pas } h_i, i = 3, 4. \end{array} \right.$

Tableau 1 : pour $it_d = 5$

<i>Sous domaine</i>	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
α	0.20	0.20
$h_i = 1, 2$	1/4	1/8
$h_i = 2, 3$	1/8	1/16
$h_i = 3, 4$	1/16	1/32
$it\acute{e}r_i$	29	109
$erreur_i$	2.6328e-003	1.0874e-003
$erreur_{i,j}, i = 1, j = 1, 2$	6.1958e-004	2.79844e-004
<i>Ordre</i> P_i	2.0872e+000	1.8653e+000
<i>temps</i>	1.6287e+001	1.6287e+001

Tableau 2 :

<i>Sous domaine</i>	$[0, 0.75] \times [0, 1]$	$[0.25, 1] \times [0, 1]$
α	0.20	0.20
$h_i = 1, 2$	1/8	1/16
$h_i = 2, 3$	1/16	1/32
$h_i = 3, 4$	1/32	1/64
$it\acute{e}r_i$	109	346
$erreur_i$	6.1958e-004	2.9844e-004
$erreur_{i,j}, i = 2, j = 1, 2$	1.6300e-004	7.7811e-005
<i>Ordre</i> P_i	1.9264e+000	1.9394e+000
<i>temps</i>	8.0422e+002	8.0422e+002

Discussion :

Pour la valeur $\alpha = 0,2$ (valeur optimale) et les pas : $h_1 = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$, nous remarquons que la constante d'ergodicité α , ainsi que le raffinement du pas de discretisation dans chaque sous domaine jouent un rôle crucial, ça nous permet d'obtenir une bonne estimation d'erreur, ainsi qu'un ordre de convergence quasi optimal. On conclut alors que ces résultats numériques obtenus sont en adéquation avec le résultat d'approximation théorique.

Conclusion et Perspectives

Au cours de notre travail, on a concentré notre étude à l'analyse numérique et mathématique de la méthode de décomposition en deux sous domaines avec recouvrement d'un problème d'obstacle.

Cette étude a été faite en deux parties essentielles ;

La première partie est consacré à l'approximation par élément finis d'une classe d'inéquation variationnelle liée à un problème de contrôle ergodique.

Dans la deuxième partie, en appliquant la méthode pour le cas d'inéquation variationnelle lié à contrôle ergodique, nous nous intéressons à l'analyse d'erreur en norme infini dans le contexte de «nonmatching grids» , nous considérons un domaine qui est l'union de deux sous-domaines avec recouvrement, où chaque sous-domaine a son triangulation. Ce type de discrétisation est très intéressant car ils peuvent être appliqués pour résoudre de nombreux problèmes pratiques qui ne peuvent être traités par discrétisations globales. Ils gagnent une attention particulière des experts et des ingénieurs informatiques, car ils permettent le choix de différents maillages et les différents ordres de polynômes approximatifs dans différents sous-domaines selon les différentes propriétés de la solution et des exigences différentes des problèmes pratiques.

Nous présentons une approche qui combine un résultat de convergence géométrique due aux Lions [30] et un lemme qui consiste à estimer l'erreur en norme L^∞ entre le nième itéré de Schwarz et son analogue discret. Un résultats théorique et un exemple numérique montrent que le pas de discrétisation et la constante d'ergodicité α a une influence pour obtenir un meilleur ordre de convergence.

Nous suggérons, cependant, quelques problèmes ouverts :

- Expérimentations numériques d'approximation par élément finis des inéquations variationnelles liée à un problème de contrôle ergodique.
- Méthode de décomposition en m sous domaines pour le problème de contrôle ergodique.
- Méthode de décomposition en deux sous domaines pour un système des inéquations variationnelles liée à un problème de contrôle ergodique.

Bibliographie

- [1] C. Baiocchi, Estimations d'erreur dans L^∞ pour les inéquations à obstacle, Lecture Notes Math. Gem., no 606, (1977), p. 27 – 34.
- [2] C. Baiocchi, Note au C.R.A.S t. 278(1978), pp. 1201 – 1204
- [3] A. Bensoussan, M. Goursat et J.-Lions, C.R. Acad. Sc., Paris, t. 276, série A, (1973), p. 1279.
- [4] A. Bensoussan and J. L. Lions, On the asymptotic behaviour of the solution of variational inequalities, In Theory of Linear Operators, Akademic Verlag, Berlin, (1978).
- [5] A. Bensoussan, Stochastic control by functional analysis Methods, NorthHolland, Amsterdam, (1982).
- [6] M. Boulbrachène, Sur quelques questions d'approximations de problèmes à frontières libre, de sous-domaines et d'erreurs d'arrondi, Thèse de Doctorat de l'université de Franche, Comté Besancon, France, (1987).
- [7] M. Boulbrachène, Ph. Cortey-Dumont, and J. C. Miellou, Approximation convergence for a subdomain decomposition method. 1er symposium international sur les méthode de sous-domaine, Paris, (1987).

-
- [8] M. Boulbrachène M. Cortey-Dumont PH. Miellou J. C Mixing Finite Element and Finite Differences in a Subdomain Method. In Domain Decomposition methods SIAM, Philadelphia, (1988).
- [9] M. Boulbrachène And H. Sissaoui, The Finite Element Approximation of variational Inequalities Related to Ergodic Control Problems, Computers Math. Applic., (1996), Vol. 31, No. 4/5, 137 – 141.
- [10] L. Badea, On the Schwarz alternating method with more than two sub-domains for non linear monotone problems, SIAM Journal on Numerical Analysis 28 (2001), 993 – 1007.
- [11] M. Boulbrachène And S. Saadi, Maximum Norm Analysis on overlapping nonmatching Grids method for the obstacle Problem, Advances in Difference Equations, Volume 2006, Article ID 85807, Pages 1 – 10.
- [12] J. Bramble, J. Pascial, J. wang, and J. xu, Convergence estimates for product iterative methods with applications to domain decomposition, Math. Comp, (1991), 57, 1 – 21.
- [13] T. Chan, T. Hou, and P. Lions, Geometry related convergence results for domain decomposition algorithms, SIAM. J. Numer. Anal., (1991), 28, 378 – 391.
- [14] P. G. Ciarlet, P.–A Raviart, Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, Comput. Meth. in Appl. Mech. Eng. 2, (1973), pp. 17 – 31.
- [15] P. Cortey-Dumont, thèse de 3^{ème} cycle, Besançon, (1978).
- [16] P. Cortey-Dumont, C. R. Acad. Sc, Paris, t. 288, série A, (1979), p. 14.
- [17] P. Cortey-Dumont, C. R. Acad. Sc, Paris, t. 290, série A, (1980), p. 255.
- [18] Ph. Cortey-Dumont, Sur les inéquations variationnelles à opérateurs non coercifs, M2AN, (1985), 19, 195 – 212.

-
- [19] Ph. Cortey-Dumont, On finite element approximation in the L^∞ -norm of variational inequalities with non linear operators, Numer. Math. 47 (1), (1985), 45 – 47.
- [20] Ph. Cortey-Dumont, On finite element approximation in the L^∞ -norm of variational inequalities, Num. Math, (1985), 5.
- [21] M. Dryja, An additive Schwarz algorithm for two-and three-dimensional finite element elliptic problems, in T. Chan et al. eds, domain decomposition methods, philadelphia, SIAM, (1989), 168 – 172.
- [22] M. Dryja and O. Widlund, Some domain decomposition algorithms for elliptic problems, L. Hayes and D. Kincaid, eds, Iterative methods for large systems, Boston, (1990), Academic Press, 273 – 291.
- [23] R. Glowinski, Numerical methods for linear variational problems, SpringerVerlag, News york, (1984).
- [24] B. Hannouzet et J. L. Joly, méthode d'ordre dans l'interprétation de certaines inéquations variationnelles et applications, Université de Bordeaux-I J. Funct. Anal. 34, (1979), p. 217 – 249.
- [25] M. Haiour et E. Hadidi, Uniform convergence of Schwarz method for non coercive variational inequalities simple proof, Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 4 (2010), 1423 – 1434.
- [26] J. L. Lions & G Stampachia, Variational Inequalities, Comm On Pure and applied Mathematics, Vol. XX, (1967), pp. 39 – 519.
- [27] P-L. Lions : Interpretation stochastique de la méthode alternée de Schwarz, C.R.A-S. Paris, 268, (1978), pp. 325 – 328.

-
- [28] P. L. Lions, On the Schwarz alternating method I. First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, SLAM, Philadelphia 1988.
- [29] P. L. Lions, On the Schwarz alternating method II Stochastic interpretation and order properties, domain decomposition methods, (Los Angeles, Calif, 1988), SLAM, Philadelphia 1989.
- [30] P-L. Lions. On the Schwarz Alternating Method II, Proc. 2nd Int. Symp. On domain decomposition methods for Partial Differential Equations. S.I.A.M. Philadelphia, (1989), pp. 47 – 70.
- [31] P. L. Lions, On the Schwarz alternating method, III A Variant for Nonoverlapping Subdomains, Proc. 3rd Conference on Domain Decomposition Methods, SIAM, Philadelphia (1990), 202 – 223.
- [32] Yu. Luznetsov, P. Neittanmaki and P. Tarvainen, Overlapping Block relaxation and Schwarz methods for the obstacle problem with a convection diffusion operator, Laboratory of scientific computing, Report 4, (1993), university of Jyväskylä.
- [33] G. H. Meyer, Free boundary problems with nonlinear source terms, Numer. Math. 43 (1984), 463 – 482.
- [34] A. Mehri, "Approximation par la Méthode de Décomposition en sous Domaines d'une Classe d'Inéquation Quasi-Variationnelle Elliptique", thèse Mai 2015, pp. 13 – 18.
- [35] H. Mécheri, "Méthode de décomposition en deux sous domaines pour le problème de contrôle ergodique", thèse 2013, pp. 9 – 60.
- [36] Chaouch Mounira, Approximation par éléments finis d'une classe de système d'inéquations quasi-variationnelles avec un second membre non linéaire, Thèse de Magister. Université de Annaba, (2008).

-
- [37] B. Mouhamed, " La méthode de décomposition du domaine pour les inéquations Quasi-variationnelle Elliptiques ", thèse 2017.
- [38] J. Nitche, L^∞ Convergence of Finite Element Approximations, Lectures Notes Math. Gem., no 606, (1977), pp. 1 – 15.
- [39] A. H. Schwarz Gesamte Mathematische Abhandlungen, Volume 2. Springer, Berlin. First Published in Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zurich 15 (1870), 272 – 286.
- [40] S. Saadi, H. Mécheri, Schwarz Method For Variational Inequalities Related To Ergodic Control Problems, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 10, Issue 1, Article 10, (2013), pp. 1 – 9.
- [41] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, An introduction to variational inequalities and their Application. Academic Press, (1980).
- [42] C. Xiao-Chuan, T. P. Matew, and M. Vsakis, Maximum norm analysis of overlapping non-matching grid discretisations of elliptic equation, Siam J. Numer Anal, (2000) 5, 1709 – 1728.
- [43] J. P. Zeng and S. Z. Zhou, Schwarz Algorithm for the Solution of Variational Inequalities with Nonlinear Source Terms, Applied Mathematics and Computation, Vol. 97, No. 1, (1998), pp. 23 – 35.
- [44] G. Zeng and S. Zhou, Schwarz algorithm of the solution of variational inequalities with nonlinear source terms, Appl. Math. comput, 1988, 23 – 35. Hindawi pub. cop (2006), 1 – 10.
- [45] S. Z. Zhou, An additive Schwarz algorithm for variational inequality, Proc. Domain decomposition methods in science and engineering, New York, (1997), pp. 133 – 138.