الـجمهـورية الـجزائريــة الديمـقراطـية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة الـتعـلـيم العالي والــبـحث الـعـلـمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامـعـة الـشادلي بن جديد- الطارف
Université Chadli Bendjedid – El Tarf
كلية العلوم و التكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse fonctionnelle et calcul stochastique

Thème

Analyse qualitative et numérique de l'équation de la chaleur

Présenté par:

Labidi Khalida

Devant le Jury :

Dr. Mecheri Halima	**MCB**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Présidente
Dr. Mehri Allaoua	**MCA**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Rapporteur
Dr. Boussaha Hanene	**MCB**	Univ Chadli Bendjedid El Tarf	Examinatrice

Année Universitaire 2021-2022

Table des matières

Remerciments

Au terme de ce travail, je tiens à rendre grâce à Dieu tout puiddant qui m'a donné la force , la santé, le courage et la patience pour terminer ce mémoire.

Mes remerciments à **Monsieur Mehri Allaoua** qui m'a fait l'honneur d'accepter l'encadrement de ce travail dont il a guidé la réalisation. IL m'a accueilli et conseillé avec une grande amabilité. Qu'il me soit permis de lui manifester toute ma considération.

Je remercie également **Dr.Mechri Halima** et **Dr.Boussaha** d'avoir accepté d'être membre du jury.

Sous l'oeil vallant des enseignants de département de mathématique que je remercie infiniment pour leur effort.

Je dédie ce trvail à mes parents, mes frères, mes soeurs, mes amies et tous ceus qui ont contribué à ce travail de près ou de loin.

Résumé

Ce mémoire est une analyse qualitative et numérique de l'équation de la chaleur qui décrit l'évolution au cours du temps la température d'un milieu continu homogène soumis à une source de chaleur. Une formulation variationnelle, l'existence et l'unicité de la solution, et les propriétés qualitatives comme, le comportement asymptotique, le principe du maximum, et la régularité de la solution ont été étudiées. Ensuite nous avons adapté une méthode de discrétisation par différences finies explicites, dont la stabilité et la convergence de la solution approchée ont été démontrées.

Mots clés : Equation de chaleur, Comportement asymptotique, Schéma explicite, Stabilité, Convergence.

Mathematical sciences classification 2020 : 35K05 - 35K15 - 35K57 - 35K08.

.

Abstract

This thesis is a qualitative and numerical analysis of the heat equation which describes the evolution over time of the temperature of a homogeneous continuous medium subjected to a heat source. A variational formulation, the existence and uniqueness of the solution, and qualitative properties such as, asymptotic behavior, the principle of the maximum principle, and the regularity of the solution have been studied. Then we adapted a method of discretization by explicit finite differences, whose stability and convergence of the approximate solution have been demonstrated.

Keys words : Heat equation, Asymptotic behavior, Explicit schema, Stability, Convergence.

Mathematical sciences classification 2020 : 35K05 - 35K15 - 35K57 - 35K08.

ملخص

هذه الأطروحة عبارة عن تحليل نوعي و عددي لمعادلة الحرارة التي تصف التطور بمرور الوقت لدرجة حرارة وسط مستمر متجانس يتعرض لمصدر حرارة. تمت دراسة الصيغة المتغيرة, ووجود الحل وتفرده, الخصائص النوعية مثل السلوك المقارب, ومبدأ المبدأ الأقصى, وانتظام الحل. ثم قمنا بتكييف طريقة تقديرية بالاختلافات المحدودة الصريحة, والتي تم اثبات استقرارها وتقاربها في الحل التقريبي.

الكلمات المفتاحية : معادلة الحرارة, سلوك مقارب, مخطط صريح, الاستقرار, التقارب.

تصنيف العلوم الرياضية 2020: 35K05 - 35K15 - 35K57 - 35K08

Introduction

Les problèmes d'évolution apparaissent dans de très nombreuses applications : finance (équation de Black-Scholes), analyse d'images (méthode des Level-set), mécanique quantique (équation de Schrödinger), méquanique des fluides (équation de Navier-Stockes,...), etc.

Nous nous intéressons à un exemple typique d'équation aux dérivées partielles : l'équation de la chaleur, ou équation de diffusion, introduite initialement en 1807 par Joseph Fourier, après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelées ensuite séries de Fourier et transformées de Fourier, qui ont permis une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes, en particulier pour les fondements de la thermodynamique, et qui ont entrainé aussi des travaux mathématiques très importants pour les rendre rigoureuses, véritable révolution à la fois physique et mathématique, sur plus d'un siècle voir [1, 2, 3].

En tant qu'EDP typique, l'équation de la chaleur est l'un des sujets les plus étudiés en mathématiques pures, et appliquées et son analyse est fondamentale pour le domaine plus large des EDP voir [1, 5, 7].

Une variante de cette équation est très présente en physique sous le nom générique d'équation de diffusion. On la retrouve dans la diffusion de masse dans un milieu binaire ou de charge électrique dans un conducteur, le transfert radiatif, etc. Elle est également liée à l'équation de Burgers et à l'équation de Schrödinger pour plus de détails on renvoie aux ouvrages [1, 3, 7]

L'équation de la chaleur, ainsi que ses variables, est également importante dans de nombreux domaines des sciences et des mathématiques appliquées. En théorie des probabilités, l'équation de la chaleur est associée à l'étude de la progression aléatoire et du mouvement brownien via l'équation de Fokker Planck.

La résolution numérique de l'équation de la chaleur reste un problème très important intervenant dans de nombreux calculs de physique. Cette équation trouve plusieurs méthodes de résolution, comme la méthode des différences finies, méthode des éléments finis [4, 6], méthode des volumes finis, ...etc.

Ce mémoire est principalement divisé en trois chapitres : le premier chapitre est didiée à l'étude analytique de l'équation de la chaleur, nous avons présenté la formulation variationnelle du problème, un théorème d'existence et d'unicité a été démontré. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des propriétés qualitatives de la solution comme par exemple le comportement asymptotique, le principe du maximun et la régularité de la solution. Le troixième chapitre s'étend à l'application de la méthode des différences finies. Une analyse de stabilité conditionnelle et la convergence de l'erreur ont été démontrés.

Notations

$W^{1,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev, espace des fonctions et ses dérivée premières p intégrable,

$L^q(\Omega)$: Espace de Lebesgue, espace des fonctions q intégrable,

$C(\Omega)$: Espace des fonctions continues,

$H^1(\Omega)$: Espace de Sobolev pour $p = 2$,

Chapitre 1

Etude Analytique de l'Equation de la Chaleur

1.1 Rappel et Généralités

Dans cette partie nous rappelons quelques définitions et théorèmes que nous aurons besoin dans les parties suivantes, pour plus de détails consulter les ouvrages de [2].

Définition 1.1. *(injection compacte) Soit V et W deux espaces de Hilbert et A une application linéaire continue de V dans W. On dit que A est compacte si l'image par A de la boule unité (ou d'un ensemble borné) de V est relativement compact dans W.*

Théorème 1.1. *(de Rellich) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe C^1, on a les injections compactes suivantes,*
1) Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.
2) Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, \infty[$.
3) Si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\Omega)$.
En particulier l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. L'injection de $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ n'est jamais compacte même si Ω est borné et régulier.

Théorème 1.2. *(de valeurs propres) Soient V et H deux espaces de Hilbert réels de dimensions infinies. On suppose,*

$$\begin{array}{rl} V \subset H & \textit{avec injection compacte} \\ \textit{et } V & \textit{est dense dans } H. \end{array}$$

Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur V. Alors il existe une suite croissante de valeurs propres $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ réelles strictement positives qui tend vers l'infini, et il existe une base hilbertienne de H, notée $(u_k)_{k\geq 0}$ de vecteurs propres associés qui forment une solution du problème suivant,

$$a(u_k, v) = \lambda_k \langle u_k, v\rangle_H, \quad \forall v \in V, \quad u_k \in V$$

de plus $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} u_k\right)_{k\geq 0}$ est une base hilbertienne de V pour le produit scalaire $a(.,.)$.

Théorème 1.3. *(de trace) Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. On définit l'application trace γ_0,*

$$\begin{array}{rcl} H^1(\Omega) \cap C(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\partial\Omega) \cap C(\partial\Omega) \\ v & \longrightarrow & \gamma_0(v) = v_{|\partial\Omega} \end{array}$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0. En particulier, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

1.2 Modélisation et exemples d'équations paraboliques

L'archétype de ces modèles est l'équation de la chaleur. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$de frontière $\partial\Omega$. Pour des conditions aux limites de Dirichlet ce modèle s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Le problème aux limites (1.1) modélise l'évolution de la température $u(x,t)$ dans un corps thermiquement conducteur qui occupe le domaine Ω. La distribution de température initiale, à $t = 0$, est donnée par la fonction u_0. Sur le bord $\partial\Omega$ du corps considéré, la température est maintenue à une valeur constante, utilisé comme valeur de référence (c'est la condition de Dirichlet homogène $u(x,t) = 0$ sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$). Les sources de Chaleur sont modélisées par la fonction donnée $f = f(x,t)$. Notons que les variables $x \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}^+$ jouent des rôles très différents dans (1.1) puisqu'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre en t et du deuxième ordre en x.

1.3 Existence et unicité de la solution

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution d'un problème parabolique, nous allons suivre les trois étapes :
Premièrement, établir une formulation variationnelle, deuxièment, démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette formulation variationnelle en utilisant une base hilbertienne de fonctions propres, troixièment, montrer que cette solution vérifie bien le problème aux limites étudié voir [1, 7]..

1.3.1 Formulation variationnelle

L'idée est d'écrire une formulation variationnelle qui ressemble à une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Pour cela nous multiplions l'équation de la chaleur (1.1) par une fonction test $v(x)$ qui ne dépend pas du temps t. A cause de la condition aux limites, nous allons demander à ce que v s'annule sur le bord de l'ouvert Ω, ce qui va nous permettre d'effectuer une intégration par parties simple. Nous obtenons donc,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x,t).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx. \tag{1.2}$$

Comme ni Ω ni $v(x)$ ne varient avec le temps t , on peut réécrire cette équation sous la forme,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(x,t)v(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x,t).\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x,t)v(x)dx.$$

Exploitant le fait que les variables x et t jouent des rôles trés différents, nous séparons ces variables en considérant désormais la solution $u(x,t)$ comme une fonction du temps t à valeurs dans un espace de fonctions définies sur Ω (même chose pour $f(x,t)$). Plus précisément, si l'on se donne un temps final $T > 0$, on considère que u est définie par,

$$u :]0,T[\longrightarrow H_0^1(\Omega),\ t \ \longrightarrow u(t)$$

et nous continuerons à noter $u(x,t)$ la valeur $u(t)(x)$. Le terme source f est désormais considéré comme une fonction de t à valeurs dans $L^2(\Omega)$. On introduit alors le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et la forme bilinéaire $a(w,v)$ définie par,

$$\begin{aligned} \langle w, v\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} w(x)v(x)dx \\ a(w,v) &= \int_{\Omega} \nabla w(x).\nabla v(x)dx. \end{aligned}$$

En choisissant la fonction test dans l'espace $H_0^1(\Omega)$, on peut alors mettre (1.2) sous la forme d'une sorte d'équation differetielle ordinaire en t. On obtient ainsi la formulation variationnelle suivante : trouver $u(t)$ fonction de $]0,T[$ à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$ telle que,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_{L^2(\Omega)} + a(u(t),v) = \langle f(t), v\rangle_{L^2(\Omega)},\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ 0 < t < T, \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Définition 1.2. *Soit X un espace de Hilbert, ou plus généralement, un espace de Banach défini sur Ω (typiquement, $X = L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)$, ou $C(\Omega)$). Soit un temps final $0 < T < \infty$. Pour un entier $k \geq 0$, on note $C^k([0;T];X)$ l'espace des fonctions k fois continûment dérivables de $[0;T]$ dans X. Si on note $\|v\|_X$ la norme dans X, il est classique que $C^k([0;T];X)$ est un espace de banach pour la norme,*

$$\|v\|_{C^k([0;T];X)} = \sum_{m=0}^{k} \left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\| \frac{d^m v}{dt^m}(t) \right\|_X \right).$$

On note $L^2\left(]0,T[\,;X\right)$ l'espace des fonctions de $]0,T[$ dans X telles que la fonction $t \longrightarrow \|v(t)\|_X$ soit mesurable et de carré intégrable, c'est à dire que,

$$\|v\|_{L^2(]0,T[;X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Muni de cette norme $L^2\left(]0,T[\,;X\right)$ est aussi un espace de Banach. De plus, si X est un espace de Hilbert, alors $L^2\left(]0,T[\,;X\right)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u,v\rangle_{L^2(]0,T[;X)} = \int_0^T \langle u(t),v(t)\rangle_X dt.$$

Remarque 1.1. *Si X est l'espace $L^2(\Omega)$, alors $L^2\left(]0,T[\,;L^2(\Omega)\right)$ s'identifie à l'espace $L^2\left(]0,T[\times\Omega\right)$ puisque, par le théorème de Fubini on a*

$$\|v\|^2_{L^2(]0,T[;L^2(\Omega))} = \int_0^T \left(\int_\Omega |v(t)|^2(x)dx\right)dt = \int_0^T\int_\Omega |v(x,t)|^2\, dxdt = \|v\|^2_{L^2(]0,T[\times\Omega)}$$

Dans la suite on prendra le terme source f dans l'espace $L^2\left(]0,T[\,;L^2(\Omega)\right)$, et on cherchera la solution u dans l'espace d'énergie $L^2\left(]0,T[\,;H_0^1(\Omega)\right)\cap C\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right)$ nous pouvons formuler la formulation variationnelle suivante :
Pour $f\in L^2\left(]0,T[\,;H\right), u_0\in H$, trouver $u\in L^2\left(]0,T[\,;V\right)\cap C\left([0,T]\,;H\right)$ telle que,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle u(t),v\rangle_H + a(u(t),v) = \langle f(t),v\rangle_H,\ \forall v\in V \\ u(t=0)=u_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

1.3.2 Un résultat général

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (1.4), nous allons pouvoir ainsi "diagonaliser" l'opérateur Laplacien et nous ramener à la résolution d'une famille de simples équations différentielles ordinaires du premier ordre. On introduit donc deux espaces de Hilbert V et H tels que $V\subset H$ avec injection dense et compacte. Typiquement on aura $V=H_0^1(\Omega)$ et $H=L^2(\Omega)$.

Théorème 1.4. *Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection compacte, et V est dense dans H. Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans V. Soit un temps final $T > 0$, une donné initiale $u_0 \in H$, et un terme source $f \in L^2(]0,T[;H)$. Alors le problème,*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_H + a(u(t), v) = \langle f(t), v\rangle_H, \ \forall v \in V, \ 0 < t < T \\ \qquad\qquad u(t=0) = u_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

(où l'équation de (1.5) a lieu au sense faible dans $]0,T[$) a une unique solution $u \in L^2(]0,T[;V) \cap C([0,T];H)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de Ω) telle que on a l'estimation d'énergie suivante,

$$\|u\|_{L^2(]0,T[;V)} + \|u\|_{C([0,T];H)} \leq C\left(\|u_0\|_H + \|f\|_{\ L^2(]0,T[;H)}\right). \tag{1.6}$$

Démonstration. La démonstration est divisée en deux étapes. Dans une premiére étape, en supposant l'existence d'une solution u, nous obtenons une formule explicite pour u sous la forme d'une série obtenue par décompostion spectrale des espace H et V. En particulier, cette formule prouve l'unicité de la solution. Dans une deuxiéme étape, nous démontrons que cette série converge dans les espaces $L^2(]0,T[;V)$ et $C([0,T];H)$, et que la somme est bien une solution de (1.5).

Etape 1 . Supposons que $u \in L^2(]0,T[;V) \cap C([0,T];H)$ est solution de (1.5). Les hypothèses permettent d'appliquer le Théoréme 1.2 sur la résolution du problème aux valeurs propres associé à la forme bilinéaire symétrique $a(u,v)$. Par conséquent, il existe une base hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$ de H composée de vecteurs propres telles que,

$$a(u_k, v) = \lambda_k \langle u_k, v\rangle_H, \quad \forall v \in V, \ \ u_k \in V.$$

On définit,

$$\alpha_k(t) = \langle u(t), u_k\rangle_H, \quad \alpha_k^0 = \langle u_0, u_k\rangle_H, \quad \beta_k(t) = \langle f(t), u_k\rangle_H.$$

Puisque $u \in L^2(]0,T[;V) \cap C([0,T];H)$ et $f \in L^2(]0,T[;H)$, on en déduit que $\alpha_k(t) \in$

$C([0,T])$ et $\beta_k(t) \in L^2(]0,T[)$. Comme $(u_k)_{k\geq 1}$ est une base hilbertienne de H, on a,

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t) u_k,$$

et en choisissant $v = u_k$ dans (1.5) on obtient,

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_k}{dt} + \lambda_k \alpha_k = \beta_k, \text{ dans }]0,T[\\ \alpha_k(t=0) = \alpha_k^0 \end{cases} \tag{1.7}$$

On vérifie immédiatement que l'unique solution de (1.7) est,

$$\alpha_k(t) = \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} + \int_0^t \beta_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)} ds \text{ pour } t > 0,$$

ce qui donne une formule explicite pour la solution u (qui est donc unique).

Etape 2. Nous allons démontrer que la série,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\alpha_j^0 e^{-\lambda_j t} + \int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j(t-s)} ds \right) u_j \tag{1.8}$$

converge dans $L^2(]0,T[;V) \cap C([0,T];H)$ et que sa somme, notée $u(t)$ est solution de (1.5). Considérons la somme partielle à l'ordre k de cette série,

$$w^k(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(\alpha_j^0 e^{-\lambda_j t} + \int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j(t-s)} ds \right) u_j. \tag{1.9}$$

Clairement w^k appartient à $C([0,T];H)$ puisque chaque $\alpha_j(t)$ est continu. Montrons que la suite w^k est de Cauchy dans $C([0,T];H)$. Pour $l > k$, en utilisant le caractère orthonormé des fonctions propres u_j on obtient,

$$\begin{aligned}
\left\| w^l(t) - w^k(t) \right\|_H &\leq \left\| \sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j^0 e^{-\lambda_j t} u_j \right\|_H + \left\| \sum_{j=k+1}^{l} \int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j(t-s)} ds \; u_j \right\|_H \\
&\leq \left(\sum_{j=k+1}^{l} \left|\alpha_j^0\right|^2 e^{-2\lambda_j t} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=k+1}^{l} \left(\int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j(t-s)} ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{j=k+1}^{l} \left|\alpha_j^0\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=k+1}^{l} \frac{1}{2\lambda_j} \int_0^T \left|\beta_j(s)\right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{j=k+1}^{l} \left|\alpha_j^0\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1}} \left(\sum_{j=k+1}^{l} \int_0^T \left|\beta_j(s)\right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

puisque la suite des valeurs propres $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ est croissante et strictement positive. Comme $u_0 \in H$ et $f \in L^2\left(]0,T[;H\right)$ il vient,

$$\begin{aligned}
\|u_0\|_H^2 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left|\alpha_j^0\right|^2 < +\infty, \\
\|f\|_{L^2(]0,T[;H)}^2 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^T \left|\beta_j(s)\right|^2 ds < +\infty.
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que la suite $w^k(t)$ est de Cauchy dans H. Plus précisément, on en déduit que la suite w^k vérifie,

$$\lim_{k,l\longrightarrow+\infty} \left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\|w^l - w^k\right\|_H \right) = 0,$$

c'est à dire qu'elle est de Cauchy dans $C\left([0,T]\,;H\right)$.

Montrons que la suite w^k est aussi de Cauchy dans $L^2\left(]0,T[;V\right)$. On munit V du produit scalaire $a\left(u,v\right)$ (équivalent au produit scalaire usuel à cause de la coercivité de a). Pour $l > k$ on a,

$$\begin{aligned}
\left\|w^l\left(t\right) - w^k\left(t\right)\right\|_V^2 &= a\left(w^l\left(t\right) - w^k\left(t\right), w^l\left(t\right) - w^k\left(t\right)\right) \\
&= \sum_{j=k+1}^{l} \lambda_j \left|\alpha_j\left(t\right)\right|^2 \\
&\leq 2\sum_{j=k+1}^{l} \lambda_j \left|\alpha_j^0\right|^2 e^{-2\lambda_j t} + \sum_{j=k+1}^{l} \lambda_j \left(\int_0^t \beta_j(s)e^{-\lambda_j(t-s)}ds\right)^2.
\end{aligned}$$

Or, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^t \beta_j(s)e^{-\lambda_j(t-s)}ds\right)^2 &\leq \left(\int_0^t \left|\beta_j(s)\right|^2 e^{-\lambda_j(t-s)}ds\right)\left(\int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)}ds\right) \\
&\leq \frac{1}{\lambda_j}\left(\int_0^t \left|\beta_j(s)\right|^2 e^{-\lambda_j(t-s)}ds\right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en vertu du théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_0^t \left|\beta_j(s)\right|^2 e^{-\lambda_j(t-s)}ds\right)dt &= \int_0^T \left|\beta_j(s)\right|^2 \left(\int_0^T e^{-\lambda_j(t-s)}dt\right)ds \\
&\leq \frac{1}{\lambda_j}\int_0^T \left|\beta_j(s)\right|^2 ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que,

$$\int_O^T \left\| w^l(t) - w^k(t) \right\|_V^2 dt \leq \sum_{j=k+1}^{l} \left| \alpha_j^0 \right|^2 + \sum_{j=k+1}^{l} \frac{2}{\lambda_j} \int_0^T \left| \beta_j(s) \right|^2 ds,$$

ce qui implique que la suite w^k vérifie,

$$\lim_{k,l \longrightarrow +\infty} \int_O^T \left\| w^l(t) - w^k(t) \right\|_V^2 dt = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle de Cauchy dans $L^2(]0,T[;V)$. Comme les deux espaces $C([0,T];H)$ et $L^2(]0,T[;V)$ sont complets, la suite de Cauchy w^k converge et on peut définir sa limite u

$$\lim_{k \longrightarrow +} w^k = u \text{ dans } C([0,T];H) \cap L^2(]0,T[;V).$$

En particulier, comme $w^k(0)$ converge vers u_0 dans H, on en déduit la condition initiale voulue, $u(0) = u_0$ (qui est une égalité entre fonctions de H). D'autre part, il est clair que $u(t)$, en tant que somme de la série (1.8) vérifie la formulation variationnelle (1.5) pour chaque fonction test $v = u_k$. Comme $\left(\dfrac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right)$ est une base hilbertienne de V, $u(t)$ vérifie donc la formulation variationnelle (1.5) pour tout $v \in V$, c'est-à-dire que $u(t)$ est bien la solution recherchée de (1.5). Pour obtenir l'estimation d'énergie (1.6), il suffit de remarquer que l'on a prouvé les majorations,

$$\left\| w^l(t) - w^k(t) \right\|_H \leq \|u_0\|_H + \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1}} \|f\|_{L^2(]0,T[;H)}$$

et

$$\int_O^T \left\| w^l(t) - w^k(t) \right\|_V^2 dt \leq \|u_0\|_H^2 + \frac{2}{\lambda_1} \|f\|_{L^2(]0,T[;H)}^2.$$

En prenant $k = 0$ et en faisant tendre l vers l'infini, on obtient immédiatement l'estimation désirée. $\square$

1.3.3 Applications

Nous appliquons maintenant le résultat abstrait du Théorème 1.4 à l'équation de la chaleur, et nous prouvons que cette approche variationnelle a bien permis de résoudre l'équation aux dérivées partielles d'origine, voir [1, 2, 7].

Théorème 1.5. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, et un terme source $f \in L^2(]0,T[; L^2(\Omega))$. Alors l'équation de la chaleur,*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

admet une unique solution $u \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$. De plus, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de Ω) telle que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dxds \leq C \left(\int_\Omega |u_0(x)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |f(x,s)|^2 dxds \right). \tag{1.11}$$

Démonstration. Nous appliquons le Théoréme 1.4 à la formulation variationnelle (1.4) de l'équation de la chaleur (1.10) : ses hypothèses sont facilement vérifiées avec $H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$ en particulier, comme Ω est borné le Théoréme 1.1 de Rellich affirme que l'injection de H dans V est compacte. Il reste à montrer que l'unique solution $u \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ de cette formulation variationnelle est bien une solution de (1.10). Tous d'abord, la condition aux limites de Dirichlet se retrouve par application du Théoréme 1.2 de trace à $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ pour presque tout $t \in]0,T[$, et la condition initiale est justifiée par la continuité de $u(t)$ en $t = 0$ (comme fonction à valeurs dans $L^2(\Omega)$). Si la solution u est suffisamment régulière, par intégration par partie, la formulation variationnelle (1.4) est équivalente à,

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f \right) v dx = 0, \tag{1.12}$$

pour toute fonction $v(x) \in H_0^1(\Omega)$ et presque tout temps $t \in]0,T[$. Par conséquent, on déduit de (1.12) que,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f = 0 \quad \text{p.p. dans }]0,T[\times \Omega.$$

$\square$

Remarque 1.2. *L'estimation d'énergie (1.11) indique que la norme de la solution dans l'espace d'énergie est contrôlée par la norme des données* u_0 *et* f_0.

Chapitre 2

Etude Qualitative de l'Equation de la Chaleur

Nous examinons maintenant les principales propriétés qualitatives de la solution de l'équation de la chaleur, notamment les propriétés de régularité, comportement asymptotique pour les grandes valeur de t et principe du maximum, voir [1, 2, 3].

2.1 Comportement asymptotique

Nous étudions le comportement de la solution de l'équation de la chaleur en temps long, c'est -à-dire lorsque t tend vers $+\infty$. Nous allons vérifier que, conformément à l'intuition physique, si le second membre $f(x)$ est indépendant du temps t, alors la solution de l'équation de la chaleur tend asymptotiquement vers la solution (stationnaire) du Laplacien. Nous commençons par examiner le cas l'équation de la chaleur homogène.

Proposition 2.1. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et u la solution* *du problème,*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \textit{dans } \Omega \times]0, +\infty[\\ u(x,t) = 0 \qquad \textit{sur } \ \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) \qquad\qquad \textit{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Alors, $u(t)$ converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$ lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{2.2}$$

Démonstration. On reprend la démonstration du Théorème 1.4 dans le cas $f = 0$, c'est-à-dire $\beta_k = 0$. On obtient facilement que la somme partielle vérifie,

$$\left\| w^l(t) - w^k(t) \right\|_H^2 = \sum_{j=k+1}^{l} \left| \alpha_j^0 \right|^2 e^{-2\lambda_j t},$$

avec $H = L^2(\Omega)$, ce qui conduit, en prenant $k = 0$ et $l = +\infty$ et en majorant, à

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \|u_0\|_H^2 \, e^{-2\lambda_1 t}$$

qui tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini puisque $\lambda_1 > 0$. □

Le cas d'un second membre non nul, indépendant du temps, est donné par la proposition suivante.

Proposition 2.2. *On reprend les hypothèses de la Proposition 2.1. Soit $f(x) \in L^2(\Omega)$ et $u(x,t)$ la solution de,*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \textit{dans } \Omega \times]0, +\infty[\\ u(x,t) = 0 \qquad \textit{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) \qquad\qquad \textit{dans} \ \ \Omega. \end{cases}$$

Soit $v(x) \in H_0^1(\Omega)$ la solution de,

$$\begin{cases} -\Delta v = f \quad \textit{dans } \Omega \\ v = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors,

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|u(x,t) - v(x)\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Démonstration. On pose $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ où $w(x,t)$ est la solution de,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega \times]0,+\infty[\\ w(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,+\infty[\\ w(x,0) = u_0(x) - v(x) = w_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

et v solution de

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

D'aprés la proposition 2.1 on a,

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Donc,

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \|u(x,t) - v(x)\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{t\longrightarrow\infty} \|w(x,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

□

2.2 Principe de maximum

Pour l'équation de la chaleur, le principe du maximum prend une forme voisine de celle des équations elliptiques.

Proposition 2.3. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, et un temps final $T > 0$. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(]0,T[; L^2(\Omega))$, et $u \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ l'unique solution de (1.10). Si $f \geq 0$ presque partout dans $\Omega \times]0,T[$ et $u_0 \geq 0$ presque partout dans Ω, alors $u \geq 0$ presque partout dans $\Omega \times]0,T[$.*

Démonstration. Soit $u^- = \min(u,0)$ qui appartient à $L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega))$ on a, pour $0 < t < T$,

$$\int_\Omega \nabla u(t).\nabla u^-(t)dx = \int_\Omega \left|\nabla u^-(t)\right|^2 dx. \tag{2.3}$$

Un raisonnement similaire à celui qui a permis de démontrer (2.3) montrer qu, si $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2\left(]0,T[;L^2(\Omega)\right)$, alors,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t)u^-(t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \left|u^-(t)\right|^2 dx\right). \tag{2.4}$$

Par conséquent, en prenant $v = u^-$ dans la formulation variationnelle (1.3) de l'équation de la chaleur on obtient,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \left|u^-\right|^2 dx\right) + \int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx = \int_\Omega f u^- dx,$$

ce qui donne par intégration en temps,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^-(t)\right|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dxds = \int_0^t \int_\Omega f u^- dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^-(0)\right|^2 dx.$$

Comme $u^-(0) = (u_0)^- = 0$ on en déduit que,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^-(t)\right|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dxds \leq 0,$$

c'est-à-dire $u^- = 0$ presque partout dans $\Omega \times]0,T[$. □

2.3 Propagation à vitesse infinie

Une propriété surprenante de l'équation de la chaleur : la chaleur se propage à une vitesse infinie ! ce résultat découle d'un principe du maximum fort que nous énonçons maintenant sans démonstration. Nous le vérifierons plus facilement lorsque le domaine Ω est l'espace $\mathbb{R}^N$ tout entier.

Proposition 2.4. *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^2 de $\mathbb{R}^N$. Soit un temps final $T > 0$. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et u la solution unique dans $L^2(]0,T[;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ du problème,*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \textit{dans } \Omega \times]0,T[\\ u(x,t) = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \textit{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

On suppose de plus que $u_0(x) \geq 0$ presque partout dans Ω et que u_0 n'est pas identiquement nulle. Alors, pour tout temps $\varepsilon > 0$, on a

$$u(x, \varepsilon) > 0 \ \forall x \in \Omega. \tag{2.5}$$

C'est l'inégalité stricte de (2.5) qui est remarquable (on avait déjà une inégalité large par le principe du maximum de la proposition (2.3). En effet, si u_0 a un support compact dans Ω et si on se place en un point $x_1 \in \Omega$ en dehors du support de u_0, on trouve que $u(x_1, \varepsilon) > 0$ bien qu'initialement $u_0(x_1) = 0$. Autrement dit, dans le cadre de la modélisation de l'évolution de la température, même si le point x_1 est initialement froid $(u_0(x_1) = 0)$ et très loin de partie chaude initiale (le support de u_0), il devient instantanément chaud puisque pour tout temps $t = \varepsilon$ (même très petit), on a $u(x_1, \varepsilon) > 0$. Ainsi la chaleur se propage à vitesse infinie puisque son effet est immédiat même à grande distance.

2.4 Régularité et effet régularisant

Dans le cas elliptique la régularité de la solution est directement liée à celle des données. Dans le cas parabolique, la situation est différente car, si le terme source est nul ($f = 0$), il existe un effet régularisant de la condition initiale : de manière surprenante, même si la donnée initiale u_0 est trés peu régulière, la solution devient instantanément très régulière.

Proposition 2.5. *Soit Ω un ouvert borné régulier de class C^∞ de $\mathbb{R}^N$, et soit un temps final $T > 0$. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$, et u l'unique solution dans $L^2(]0, T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ de,*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \textit{dans } \Omega \times]0, T[\\ u(x, t) = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \textit{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, u est de classe C^∞ en x et t dans $\overline{\Omega} \times [\varepsilon, T]$.

Démonstration. Nous donnons une idée formelle de la démonstration. Pour $k \geq 1$ on note $v = \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}$, et on dérive (formellement) k fois l'équation de la chaleur (2.6) par rapport au temps pour obtenir,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ v(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ v(x,0) = \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

qui est encore une équation de la chaleur. Si $\dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0) \in L^2(\Omega)$, on applique le Théorème 1.5 d'existence et d'unicité à (2.7) qui nous dit que $v \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$. En particulier, u est régulière en temps. D'autre part, par égalité, $v = (\Delta)^{k-1} u$ appartient au même espace. Par régularité elliptique on en déduit que u est régulière en espace. Le point le plus délicat pour donner un sens à ce raisonnement formel est que la donnée initiale dans (2.7) n'est pas assez régulière. C'est pour cette raison que la régularité de u n'est valable que pour les temps $t > \varepsilon > 0$. $\square$

Proposition 2.6. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, et un temps final $T > 0$. Pour un terme source $f \in L^2(]0,T[; L^2(\Omega))$ et une donnée initiale régulière $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, on considère la solution unique $u \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ de l'équation de la chaleur (1.10). Alors, cette solution est plus régulière est satisfait $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2\left(]0,T[; L^2(\Omega)\right)$, et $u \in L^2(]0,T[; H^2(\Omega)) \cap C([0,T]; H_0^1(\Omega))$.*

2.5 Equation de la chaleur dans tout l'espace

Pour terminer ce chapitre, nous indiquons brièvement comment résoudre l'équation de la chaleur posée dans tout l'espace $\mathbb{R}^N$. Considérons l'équation de la chaleur homogène dans tout l'espace $\mathbb{R}^N$, munie d'une donnée initiale,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.8}$$

Le résultat classique suivant montre que la solution du problème (2.8) est donnée explicitement comme le produit de convolution de la donnée initiale u_0 avec une Gaussienne dont l'écart-type croît comme $\sqrt{t}$.

Théorème 2.1. *On suppose que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors le problème (2.8) a une solution unique $u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}^+_*, L^2(\mathbb{R}^N))$, donnée par,*

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} dy. \tag{2.9}$$

Démonstration. Pour $t \geq 0$ nous introduisons la transformée de Fourier de $u(t)$, c'est-à-dire de la fonction $x \longrightarrow u(x,t)$, définie par,

$$\hat{u}(k,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t) e^{ik\cdot x} dx,$$

pour $k \in \mathbb{R}^N$. Si $u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}^+_*, L^2(\mathbb{R}^N))$ vérifiant (2.8), on peut appliquer la tranformation de Fourier aux deux équations (2.8) pour obtenir,

$$\begin{cases} \hat{u} \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}^+_*, L^2(\mathbb{R}^N)), \\ \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} + |k|^2 \hat{u} = 0 \qquad \text{pour } k \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ \quad \hat{u}(k,0) = \hat{u}_0(k) \qquad \text{pour } k \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.10}$$

où $\hat{u}_0(k) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) e^{ik\cdot x} dx$ est la transformée de Fourier de u_0. Le système (2.10) se résout de façon élémentaire puisqu'on a une équation différentielle pour chaque valeur de k. On obtient alors,

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}_0(k)\, e^{-|k|^2 t} \quad \text{pour } (k,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+,$$

et il est facile d'en déduire (2.9) par transformation de Fourier inverse (puisque cette transformation convertit un produit de convolution en produit simple). □

Chapitre 3

Etude Numérique de l'Equation de la Chaleur

Dans ce chapitre on se propose d'étudier la discrétisation de l'équation de la chaleur, à l'aide d'un schéma aux différences finies, consulter [4, 5, 6].

3.1 Méthode des différences finies pour l'équation de la chaleur

La méthode des différences finies s'étend sans difficulté aux problèmes en plusieurs dimensions d'espace. Considérons par exemple l'équation de la chaleur en deux dimensions d'espace dans le domaine rectangulaire $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ avec des conditions aux limites de Dirichlet,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f & \forall (x,y) \in \Omega,\ \forall t \in]0,T[\\ u(x,y,0) = u_0(x,y) & \forall (x,y) \in \Omega \\ u(x,y,t) = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0,T[\end{cases} \tag{3.1}$$

Pour discrétiser le domaine Ω, on introduit un pas d'espace $h = \Delta x = \Delta y = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$. Avec le pas de temps $\Delta t = \frac{T}{M}$, $M \in \mathbb{N}^*$, on définit ainsi les noeuds d'un maillage régulier,

$$\begin{aligned} q_{i,j} &= (x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y) \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq N \\ t_n &= n\Delta t,\, 0 \leq n \leq M. \end{aligned}$$

On note $u^n_{i,j}$ à l'instant t_n la valeur d'une solution discrète approchée au point (x_i, y_j), et $u(x_i, y_j, t_n)$ la solution exacte de (3.1). Les conditions aux limites de Dirichlet se traduisent, pour $n > 0$; en,

$$\begin{aligned} u^n_{0,j} &= u^n_{N,j} = 0,\ \forall j \\ u^n_{i,0} &= u^n_{i,N} = 0,\ \forall i \end{aligned}$$

La donnée initiale est discrétisée par,

$$u^0_{i,j} = u_0\left(x_i, y_j\right),\ \forall i, j$$

3.1.1 Un schéma explicite

Nous utilisons un schéma progressif d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}\left(x_i, y_j, t_n\right) &\simeq \frac{u^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,j}}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_i, y_j, t_n\right) &\simeq \frac{u^n_{i+1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i-1,j}}{h^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x_i, y_j, t_n\right) &\simeq \frac{u^n_{i,j+1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j-1}}{h^2} \end{aligned}$$

alors on obtient un schéma à cinq points suivant,

$$\frac{u^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,j}}{\Delta t} - \frac{1}{h^2}\left[u^n_{i+1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i-1,j} + u^n_{i,j+1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j-1}\right] = f\left(x_i, y_j, t_n\right)$$

La température à l'itération $n+1$ est donnée par,

$$u^{n+1}_{i,j} = u^n_{i,j} + \frac{\Delta t}{h^2}\left[u^n_{i+1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i-1,j} + u^n_{i,j+1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j-1}\right] + \Delta t f\left(x_i, y_j, t_n\right)$$

on pose $\lambda = \dfrac{\Delta t}{h^2}$, on obtient alors,

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \lambda \left[u_{i+1,j}^{n} - 4u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n} + u_{i,j-1}^{n}\right] + \Delta t f_{i,j}^{n},\ \forall i,j = 1, ..., N-1,\ \forall n = 0, ..., M-1 \tag{3.2}$$

Soit sous forme vectorielle,

$$U^{n+1} = U^n + \lambda C_h U^n + \Delta t F^n \quad , \forall n = 0, ..., M-1 \tag{3.3}$$

avec,

$$U^n = \left(u_{1,1}^n, u_{1,2}^n, ..., u_{N,N}^n\right)^T$$

$$C_h = \begin{pmatrix} A & D & 0 & . & . & 0 \\ D & A & D & 0 & . & 0 \\ 0 & D & A & D & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & D & A & D \\ 0 & . & . & . & D & A \end{pmatrix}$$

où A et D sont des matrices de taille $N \times N$ définies par,

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 & -4 & 1 \\ . & . & . & . & 1 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Consistance

Proposition 3.1. *Supposons que la solution u du problème (3.1) est C^2 par rapport à la variable t et C^4 par rapport aux variables x et y. Alors le schéma explicite (3.2) est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace.*

Démonstration. Soit l'erreur de consistance,

$$\varepsilon_h\,(u)_{i,j}^n = \frac{\overline{u}_{i,j}^{n+1} - \overline{u}_{i,j}^n}{\Delta t} - \frac{1}{h^2}\left[\overline{u}_{i+1,j}^n - 4\overline{u}_{i,j}^n + \overline{u}_{i-1,j}^n + \overline{u}_{i,j+1}^n + \overline{u}_{i,j-1}^n\right] - f_{i,j}^n \tag{3.4}$$

où $\overline{u}_{i,j}^n$ est la valeur exacte de la solution u au point (x_i, y_j) a l'instant t_n.

Par Taylor on obtient,

$$\frac{\overline{u}_{i,j}^{n+1} - \overline{u}_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\partial \overline{u}_{i,j}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2!}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2}(x_i, y_j, \xi_1) \quad , \xi_1 \in \left]t_n, t_{n+1}\right[$$

$$\frac{\overline{u}_{i+1,j}^n - 2\overline{u}_{i,j}^n + \overline{u}_{i-1,j}^n}{h^2} = \frac{\partial^2 \overline{u}_{i,j}^n}{\partial x^2} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial x^4}(\xi_2, y_j, t_n) \quad , \xi_2 \in \left]x_i, x_{i+1}\right[$$

$$\frac{\overline{u}_{i,j+1}^n - 2\overline{u}_{i,j}^n + \overline{u}_{i,j-1}^n}{h^2} = \frac{\partial^2 \overline{u}_{i,j}^n}{\partial y^2} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial y^4}(x_i, \xi_3, t_n) \quad , \xi_3 \in \left]y_j, y_{j+1}\right[$$

En substituant les trois formules de Taylor dans l'expression (3.4), il vient,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_h\,(u)_{i,j}^n &= \left[\frac{\partial \overline{u}_{i,j}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2}(x_i, y_j, \xi_1)\right] - \\
&\quad \left[\frac{\partial^2 \overline{u}_{i,j}^n}{\partial x^2} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial x^4}(\xi_2, y_j, t_n) + \frac{\partial^2 \overline{u}_{i,j}^n}{\partial y^2} + \frac{h^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial y^4}(x_i, \xi_3, t_n)\right] - f_{i,j}^n \\
&= \left[\frac{\partial \overline{u}_{i,j}^n}{\partial t} - \frac{\partial^2 \overline{u}_{i,j}^n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \overline{u}_{i,j}^n}{\partial y^2} - f_{i,j}^n\right] + \\
&\quad \left[\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2}(x_i, y_j, \xi_1) - \frac{h^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial x^4}(\xi_2, y_j, t_n) - \frac{h^2}{24}\frac{\partial^4 \overline{u}}{\partial y^4}(x_i, \xi_3, t_n)\right]
\end{aligned}$$

Puisque l'expression de chaleur est nulle, c.à.d.

$$\left[\frac{\partial \overline{u}_{i,j}^n}{\partial t} - \frac{\partial^2 \overline{u}_{i,j}^n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \overline{u}_{i,j}^n}{\partial y^2} - f_{i,j}^n\right] = 0.$$

On en déduit que,

$$\left|\varepsilon_h\,(u)_{i,j}^n\right| \leq c_1\Delta t + c_2.h^2 + c_3.h^2 \leq c\left(\Delta t + h^2\right)$$

donc,

$$\max_{1 \leq i,j \leq N}\left|\varepsilon_h\,(u)_{i,j}^n\right| \leq O\left(\Delta t + h^2\right)$$

Finalement on a,

$$\left\|\varepsilon_h(u)_{i,j}^n\right\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq N}\left|\varepsilon_h(u)_{i,j}^n\right| \longrightarrow 0 \text{ quand } \Delta t \longrightarrow 0 \text{ et } h \longrightarrow 0.$$

□

3.1.3 Analyse de la stabilité

Nous montrons dans cette partie que le schéma (3.2) est conditionnellement stable.

Proposition 3.2. *Si $\lambda \leq \frac{1}{4}$, le schéma explicite (3.2) est stable pour la norme $\|.\|_\infty$.*

Démonstration. Soit $i_0, j_0 \in \mathbb{N}^*$ telle que,

$$\|U^n\|_\infty = \left|u_{i_0,j_0}^n\right| = \max_{1\leq i,j\leq N}\left|u_{i,j}^n\right|.$$

Alors on a,

$$\begin{aligned}
\left|u_{i,j}^{n+1}\right| &= \left|(1-4\lambda)\,u_{i,j}^n + \lambda u_{i+1,j}^n + \lambda u_{i-1,j}^n + \lambda u_{i,j+1}^n + \lambda u_{i,j-1}^n + \Delta t f_{i,j}^n\right| \\
&\leq (1-4\lambda)\left|u_{i,j}^n\right| + \lambda\left|u_{i+1,j}^n\right| + \lambda\left|u_{i-1,j}^n\right| + \lambda\left|u_{i,j+1}^n\right| + \lambda\left|u_{i,j-1}^n\right| + \Delta t\left|f_{i,j}^n\right| \\
&\leq (1-4\lambda)\left|u_{i_0,j_0}^n\right| + \lambda\left|u_{i_0,j_0}^n\right| + \lambda\left|u_{i_0,j_0}^n\right| + \lambda\left|u_{i_0,j_0}^n\right| + \lambda\left|u_{i_0,j_0}^n\right| + \Delta t\left|f_{i,j}^n\right| \\
&\leq \left|u_{i_0,j_0}^n\right| + \Delta t\left|f_{i,j}^n\right| = \|U^n\|_\infty + \Delta t\left|f_{i,j}^n\right|
\end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$\left\|U^{n+1}\right\|_\infty \leq \|U^n\|_\infty + \Delta t\,\|F^n\|_\infty,$$

où,

$$\|F^n\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq N}\left|f_{i,j}^n\right|$$

Par induction sur n il vient,

$$\left\|U^{n+1}\right\|_\infty \leq \left\|U^0\right\|_\infty + \sum_{k=0}^{n}\Delta t\left\|F^k\right\|_\infty,\ n = 0, 1, ..., M-1$$

Soit,

$$\left\|F^{k_0}\right\|_\infty = \max_{0\leq k\leq M+1}\left\|F^k\right\|_\infty$$

Alors

$$\begin{aligned}\left\|U^{n+1}\right\|_{\infty} &\leq \left\|U^{0}\right\|_{\infty}+\left\|F^{k_0}\right\|_{\infty}\sum_{k=0}^{n}\Delta t\\ &= \left\|U^{0}\right\|_{\infty}+(n+1)\,\Delta t\left\|F^{k_0}\right\|_{\infty},\; 0\leq k_0\leq n\\ &\leq \left\|U^{0}\right\|_{\infty}+T\left\|F^{k_0}\right\|_{\infty}\end{aligned}$$

D'où la stabilité du schéma. □

3.1.4 Analyse de la convergence

Théorème 3.1. *Sous la condition $\lambda \leq \frac{1}{4}$, le schéma (3.2) est convergent en norme $\|.\|_{\infty}$ d'ordre de convergence $O\left(\Delta t+h^{2}\right)$.*

Démonstration. Soit l'erreur de convergence,

$$e_{i,j}^{n+1}=\overline{u}_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1},\;\; 0\leq n\leq M-1,\, 1\leq i,j\leq N$$

avec la condition initiale,

$$e_{i,j}^{0}=\overline{u}_{i,j}^{0}-u_{i,j}^{0}$$

Portant $u_{i,j}^{n+1}=\overline{u}_{i,j}^{n+1}-e_{i,j}^{n+1}$ dans le schéma (3.2), il vient,

$$\begin{aligned}\overline{u}_{i,j}^{n+1}-e_{i,j}^{n+1} &= \overline{u}_{i,j}^{n}-e_{i,j}^{n}+\lambda\left[\overline{u}_{i+1,j}^{n}-e_{i+1,j}^{n}-4\overline{u}_{i,j}^{n}+4e_{i,j}^{n}+\overline{u}_{i-1,j}^{n}-e_{i-1,j}^{n}\right.\\ &\quad \left.+\,\overline{u}_{i,j+1}^{n}-e_{i,j+1}^{n}+\overline{u}_{i,j-1}^{n}-e_{i,j-1}^{n}\right]+\Delta t f_{i,j}^{n}.\end{aligned}$$

Ce qui implique,

$$\begin{aligned}e_{i,j}^{n+1} &= e_{i,j}^{n}+\lambda\left[e_{i+1,j}^{n}-4e_{i,j}^{n}+e_{i-1,j}^{n}+e_{i,j+1}^{n}+e_{i,j-1}^{n}\right]+\\ &\quad \left[\overline{u}_{i,j}^{n+1}-\overline{u}_{i,j}^{n}-\lambda\left(\overline{u}_{i+1,j}^{n}-4\overline{u}_{i,j}^{n}+\overline{u}_{i-1,j}^{n}+\overline{u}_{i,j+1}^{n}+\overline{u}_{i,j-1}^{n}\right)-\Delta t f_{i,j}^{n}\right].\end{aligned}$$

En introduisant l'expression (3.4), il vient,

$$\begin{aligned}e_{i,j}^{n+1} &= e_{i,j}^{n}+\lambda\left[e_{i+1,j}^{n}-4e_{i,j}^{n}+e_{i-1,j}^{n}+e_{i,j+1}^{n}+e_{i,j-1}^{n}\right]+\Delta t\varepsilon_{h}\left(u\right)_{i,j}^{n}\\ &= (1-4\lambda)e_{i,j}^{n}+\lambda e_{i+1,j}^{n}+\lambda e_{i-1,j}^{n}+\lambda e_{i,j+1}^{n}+\lambda e_{i,j-1}^{n}+\Delta t\varepsilon_{h}\left(u\right)_{i,j}^{n}\end{aligned}$$

Par induction sur n et sous l'hypothèse $\lambda \leq \frac{1}{4}$ on obtient l'estimation suivante,

$$\begin{aligned} \left|e_{i,j}^{n+1}\right| &\leq \left|e_{i_0,j_0}^{n}\right| + \Delta t \left|\varepsilon_h(u)_{i,j}^{n}\right|, n = 0, ..., M-1 \\ &\leq \left|e_{i_0,j_0}^{n}\right| + \Delta t \left\|\varepsilon_h(u)^{n}\right\|_\infty, n = 0, ..., M-1 \\ &\leq \left|e_{i_0,j_0}^{n}\right| + \Delta t \left\|\varepsilon_h(u)^{k_0}\right\|_\infty, n = 0, ..., M-1 \\ &\leq \left|e_{i_0,j_0}^{0}\right| + (n+1)\Delta t \left\|\varepsilon_h(u)^{k_0}\right\|_\infty, n = 0, ..., M-1 \end{aligned}$$

avec,

$$\left\|\varepsilon_h(u)^{k_0}\right\|_\infty = \max_{0\leq n\leq M} \left\|\varepsilon_h(u)^{n}\right\|_\infty = \max_{0\leq n\leq M}\left(\max_{1\leq i,j\leq N}\left|\varepsilon_h(u)_{i,j}^{n}\right|\right)$$

Posons,

$$\begin{aligned} E^n &= \left(e_{1,1}^n, ..., e_{N,N}^n\right)^T \\ \text{et } \left|e_{i_0,j_0}^{n}\right| &= \left\|E^n\right\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq N}\left|e_{i,j}^n\right| \end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\begin{aligned} \left\|E^{n+1}\right\|_\infty &\leq \left\|E^0\right\|_\infty + T\left\|\varepsilon_h(u)^{k_0}\right\|_\infty, \; 0 \leq k_0 \leq M \\ &\leq \left\|E^0\right\|_\infty + T\ .O\left(\Delta t + h^2\right) \end{aligned}$$

en tenant compte de la condition initiale $e_{i,j}^0 = 0$, $\forall i, j$, il vient alors

$$\left\|E^{n+1}\right\|_\infty \leq O\left(\Delta t + h^2\right).$$

□

Conclusion

Dans ce mémoire, on a établit l'équation de la chaleur. En premier lieu, on a présenté une formulation variationnelle, et on a prouvé quelques propriétés quantitatives et qualitatives de la solution. En second lieu, on a discrétisé le problème par la méthode des différences finies explicites. Une extension éventuelle est la discrétisation du problème par la méthode des éléments finies, avec une simulation numérique bien adaptée.

Bibliographie

[1] G. Allaire, Analyse Numérique et Optimisation, Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, Ed. de l'Ecole Polytechnique de Paris, 2005.

[2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Ed. Masson, Paris, 1987.

[3] B. LUCQUIN, Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ed. Ellipses, Paris, 2004.

[4] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri, Numerical Mathematics, Ed. Springer-Verlag, 2000.

[5] A. Quarteroni, R. Sacco et F. Saleri, Méthodes Numériques, Algorithmes, analyse et applications, Ed. Springer-Verlag Italia, Milano 2004.

[6] A. Quarteroni, A. Valli, Numerical Approximation of Partial Differential, Ed. Springer, 2008.

[7] P.A.Raviart, J.M.Thomas, Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles, Ed. Masson, Paris, 1988.